

**ОЦЕНОЧНЫЙ ЛИСТ**  
лабораторной работы по курсу ЧММФ

Тема: Разностные схемы для ОДУ-2  
Учебный год: 2019/2020  
Преподаватель: Будник А.М.  
Студент: Казачинский Глеб Всеволодович  
Курс/подгруппа: 3/\_6б\_\_

№	Параметры оценивания	Оценка в баллах	Отметка студентом (знак «+»)
1	<b>Оформление отчета:</b>		
	• изменен готовый отчет с учетом данных своего варианта	1	необходимые формулы получены и набраны самостоятельно
	• изучена теория и понятны используемые формулы	2	
	• необходимые формулы получены и набраны самостоятельно	3	
2	<b>Программирование:</b>		
	• изменена готовая программа с учетом данных своего варианта	1	
	• изучен алгоритм расчетов и понятна его реализация в коде	2	алгоритм закодирован и отлажен самостоятельно
	• алгоритм закодирован и отлажен самостоятельно	3	
3	<b>Анализ результатов:</b>		
	• использован готовый отчет с учетом своего варианта	1	полученные результаты оценены самостоятельно
	• внесены изменения в готовый отчет по результатам расчетов	2	
	• полученные результаты оценены самостоятельно	3	
Баллы преподавателя (0, ±1,..., ± 10):		-1	

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Казачинский Глеб Всеволодович

**Лабораторная работа №2**  
**Уравнение переноса**  
Студента 3 курса 6б группы

Зачтено \_ марта 2020 г.

---

(подпись преподавателя)

Преподаватель  
Радкевич Елена Владимировна

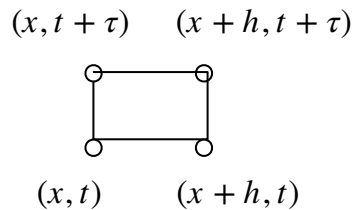
Минск 2020

**Вариант 4**  
**Постановка задачи**  
Задание № П-4

Для решения краевой задачи вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 10 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(0, t) = 100t^2, \quad u(x, 0) = x^2, \end{cases}$$

в области  $D = \{0 \leq x, t \leq 1\}$  на сетке  $\omega_{h\tau}$  построить разностную схему с весами, используя четырехточечный шаблон:



Необходимо:

1. Построение сетки  $\omega_{h\tau}$
2. Поставить разностную задачу(схему)
3. Определить порядок аппроксимации разностной схемы при  $\sigma = \frac{1}{2}$ .
4. Исследовать устойчивость разностной схемы, используя принцип максимума.
5. Реализовать данную разностную схему при  $h = 0.1$  и  $\tau$ , выбранным из условия устойчивости.
6. Оценить приближенное решение, анализируя погрешность аппроксимации, а также в сравнении с точным решением исходной задачи.

1. Построение сетки  $\omega_{h\tau}$

$$\omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, t_j = h\tau, i = \overline{0, N-1}, j = \overline{0, M-1}, h = \frac{1}{N}, \tau = \frac{1}{M}\}$$

2. Построим разностную задачу(схему)

$$\begin{cases} y_t - 10(\sigma \hat{y}_x + (1 - \sigma)y_x) = 0, \\ y(x, 0) = x^2, x \in \omega_h. \\ y(0, t) = 100t^2, t \in \omega_\tau. \end{cases}$$

3. Определить порядок аппроксимации разностной схемы при

$$\sigma = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \psi &= U_t - 10\left(\frac{1}{2}\hat{U}_x + \frac{1}{2}U_x\right) = \frac{U(x, t + \tau) - U(x, t)}{\tau} - \frac{5}{h}(U(x + h, t + \tau) - U(x, t + \tau) + \\ &+ U(x + h, t) - U(x, t)) = \left[\frac{\partial U}{\partial t} = \dot{U}, \frac{\partial U}{\partial x} = U'\right] = \dot{U} + \frac{\tau}{2}\ddot{U} + O(\tau^2) - \\ &- 10U' - 5hU'' - 5\tau\dot{U}' + O(\tau^2 + h^2) = \left[\dot{U} - 10U' = 0, \ddot{U} = 10\dot{U}', U'' = \frac{1}{10}\dot{U}'\right] = \\ &= -\frac{h}{2}\dot{U}' + O(\tau^2 + h^2) \Rightarrow \text{схема имеет первый порядок аппроксимации} \end{aligned}$$

4. Исследовать устойчивость разностной схемы, используя принцип максимума.

Запишем схему в индексной форме:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} - 10\left(\sigma \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} + (1 - \sigma)\frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h}\right) = 0$$

Собирая коэффициенты и обозначая  $\gamma = \frac{10\tau}{h}$ , представим разностное уравнение в виде:

$$\sigma\gamma y_{i+1}^{j+1} = (1 + \sigma\gamma)y_i^{j+1} - (1 - (1 - \sigma)\gamma)y_i^j - (1 - \sigma)\gamma y_{i+1}^j$$

составляем систему:

$$\begin{cases} \sigma\gamma > 0, \\ (1 - \sigma)\gamma - 1 \geq 0, \\ 1 + \sigma\gamma \geq 0, \\ -(1 - \sigma)\gamma \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда выходит, что схема неустойчива для точки  $(x+h, t+\tau)$

5. Реализовать данную разностную схему при  $h = 0.1$  и  $\tau$ , выбранным из условия устойчивости.

возьмём  $\sigma = 0.45, \gamma = 10$ , тогда  $\tau = \frac{\gamma h}{10} = 0.1$  и:

точное решение:

$$U = (x + 10t)^2$$

график точного решения:

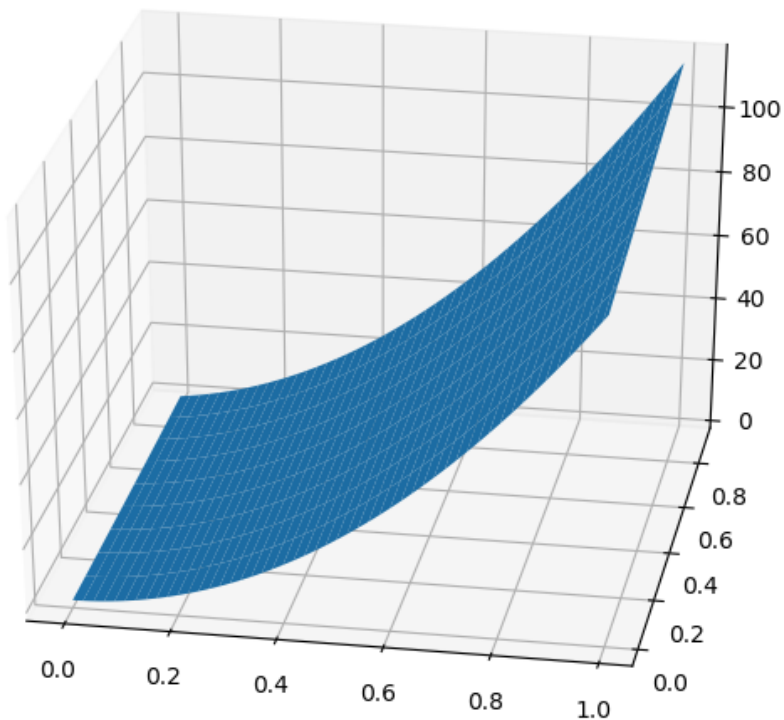
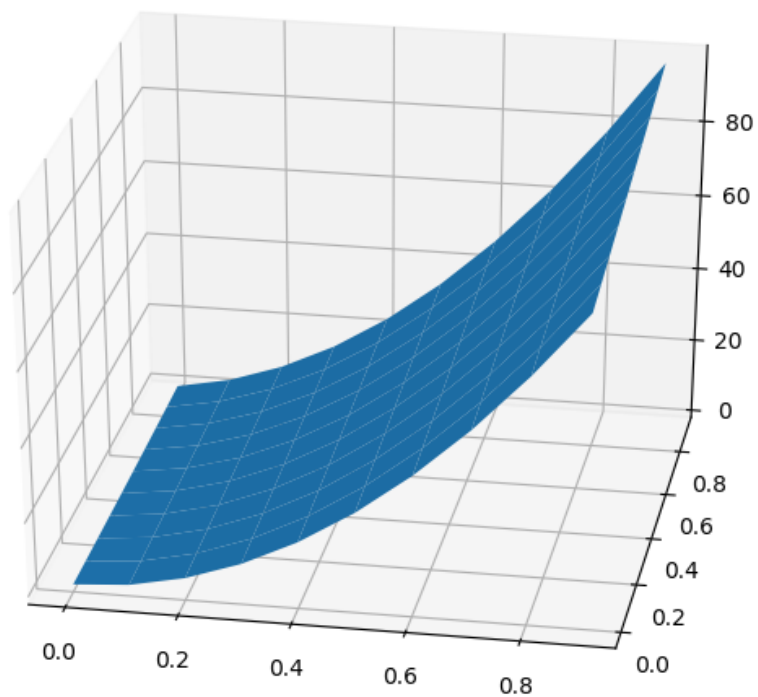


график полученного решения:



модуль невязки точного и полученного решений:

$$(U_{\text{true}} - U) = 8.736925327799039\text{e-}13$$

## Код программы:

```
1. import numpy as np
2. from matplotlib import pylab
3. from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
4. from numpy import linalg as LA
5.
6.
7. def draw(X, Y, Z):
8.     fig = pylab.figure()
9.     cs = Axes3D(fig, azimuth=-80)
10.    cs.plot_surface(X, Y, Z)
11.    pylab.show()
12.
13.
14. def u_true(x, t):
15.     return (x + 10 * t) ** 2
16.
17.
18. def solve(N, M, x, t, sigma, gamma):
19.     y = np.zeros((N, M))
20.     for i in range(N):
21.         y[i][0] = x[i] ** 2
22.     for j in range(M):
23.         y[0][j] = 100 * (t[j] ** 2)
24.     for i in range(0, N - 1):
25.         for j in range(0, M - 1):
26.             y[i + 1][j + 1] = (1 / (sigma * gamma)) * (
27.                 y[i][j + 1] * (1 + sigma * gamma) - y[i][j] * (1 -
28.                     (1 - sigma) * gamma) - y[i + 1][j] * (
29.                         1 - sigma) * gamma)
30.     return y
31.
32. sigma = 0.45
33. gamma = 10
34.
35. h = 0.1
36. tau = h * gamma / 10
37.
38. N, M = int(1 / h), int(1 / tau)
39. x, t = np.zeros(N), np.zeros(M)
40.
41. for i in range(N):
42.     x[i] = i * h
43. for j in range(M):
44.     t[j] = j * tau
45.
46. U_true = np.zeros((N, M))
47. for i in range(N):
48.     for j in range(M):
49.         U_true[i][j] = u_true(x[i], t[j])
50.
51. U = solve(N, M, x, t, sigma, gamma)
52.
53. print(f'(U_true - U) = {LA.norm(U_true - U)}')
54.
```

## 6. Вывод

Получили, что схема неустойчива для точки  $(x + h, t + \tau)$ . По принципу максимума получили несовместную систему. Мне удалось получить удовлетворительную невязку лишь в двух приведенных на картинках случаях при изменении  $\sigma$  и  $\gamma$  ( $\sigma$  в области  $[0.4, 0.6]$  с шагом 0.01;  $\gamma$  в области  $[1, 10]$  с шагом 0.1), что также свидетельствует о неустойчивости схемы в данной точке. Норма разности полученного приближённого решения и точного получилась равной  $10^{-13}$ . По 3D-графикам поверхности полученные в численном и аналитическом решении так же совпадают. Исходя из этого можно считать, что метод реализован правильно. Программа реализована на Python.

sigma	gamma	U_true - U
0.4	1.0	7.186091783238147e+31
0.4	1.1	2.512804199588536e+29
0.4	1.2000000000000002	3.854268739037014e+27
0.4	1.3000000000000003	5.932063799826697e+25
0.4	1.4000000000000004	2.528095498361094e+24
0.4	1.5000000000000004	1.0834576123455161e+23
0.4	1.6000000000000005	7.854402991102902e+21
0.4	1.7000000000000006	5.708593291734756e+20
0.4	1.8000000000000007	7.1204584281460425e+19
0.4	1.9000000000000008	8.924824762552497e+18
0.4	2.0000000000000001	1.1189171790658765e+18
0.4	2.1000000000000001	2.4587782938184874e+17
0.4	2.2000000000000001	5.438451662202768e+16
0.4	2.3000000000000001	1.207719443025364e+16
0.4	2.4000000000000012	2686158603448252.5
0.4	2.5000000000000013	596936182222074.4
0.4	2.6000000000000014	240117812930493.5
0.4	2.7000000000000015	97258394626067.4
0.4	2.8000000000000016	21645115839565.492
0.4	2.9000000000000017	8821435662945.088
0.4	3.0000000000000018	3607358132433.1895
0.4	3.1000000000000002	1478601440714.0537
0.4	3.2000000000000002	606831796113.5167
0.4	3.3000000000000002	249102892663.26248
0.4	3.4000000000000002	102165956790.00932
0.4	3.5000000000000002	41816753711.518036
0.4	3.6000000000000023	17059828744.608685
0.4	3.7000000000000024	13294405892.403526
0.4	3.8000000000000025	5402534782.410275
0.4	3.9000000000000026	2179185696.4864726
0.4	4.0000000000000003	870729908.8748478
0.4	4.1000000000000003	673509544.8454366
0.4	4.2000000000000003	264134446.8207282
0.4	4.3000000000000025	200594375.45321915
0.4	4.4000000000000003	76047252.29183254
0.4	4.5000000000000036	55501483.639637835
0.4	4.6000000000000003	19662525.26023913
0.4	4.7000000000000003	13023155.89637424
0.4	4.8000000000000003	3844814.0909224637
0.4	4.9000000000000004	1710848.1881649676
0.4	5.0000000000000036	4.454102093230724e-07
0.4	5.1000000000000003	678318.2717978476
0.4	5.2000000000000004	1219311.4320749517
0.4	5.3000000000000004	810318.1518377215

0.4500000000000007	6.900000000000006	3658.761183206904
0.4500000000000007	7.000000000000005	3320.9343635241767
0.4500000000000007	7.100000000000005	3014.668446494806
0.4500000000000007	7.200000000000055	1574.3048703044697
0.4500000000000007	7.300000000000006	1431.3174703532907
0.4500000000000007	7.400000000000006	1300.9629776761337
0.4500000000000007	7.500000000000005	1181.991544209246
0.4500000000000007	7.600000000000006	1073.2917517809178
0.4500000000000007	7.700000000000006	554.3565181576994
0.4500000000000007	7.800000000000006	503.3898319675518
0.4500000000000007	7.900000000000006	456.58669715364164
0.4500000000000007	8.000000000000007	413.56741498225796
0.4500000000000007	8.100000000000007	373.9911215394548
0.4500000000000007	8.200000000000006	337.55137813230255
0.4500000000000007	8.300000000000006	303.9723114197807
0.4500000000000007	8.400000000000006	154.00760398533234
0.4500000000000007	8.500000000000007	138.11494679666816
0.4500000000000007	8.600000000000007	123.40291651969906
0.4500000000000007	8.700000000000006	109.77433483641214
0.4500000000000007	8.800000000000008	97.1410042908994
0.4500000000000007	8.900000000000007	85.42278444158829
0.4500000000000007	9.000000000000007	74.54677264184079
0.4500000000000007	9.100000000000007	35.980694217096676
0.4500000000000007	9.200000000000006	30.792998000035254
0.4500000000000007	9.300000000000008	25.956930310409888
0.4500000000000007	9.400000000000007	21.446266251318363
0.4500000000000007	9.500000000000007	17.23697985435867
0.4500000000000007	9.600000000000009	13.307038274171584
0.4500000000000007	9.700000000000008	9.636217250334035
0.4500000000000007	9.800000000000008	6.205935434201717
0.4500000000000007	9.900000000000007	2.9991054732556655
0.4500000000000007	10.000000000000007	8.368328270954761e-13
0.4500000000000007	10.100000000000009	1.552483282158304
0.4500000000000007	10.200000000000008	3.0103170285775893
0.4500000000000007	10.300000000000008	4.379790666406217
0.4500000000000007	10.400000000000001	5.666723386297564
0.4500000000000007	10.500000000000009	6.8765035035190385
0.4500000000000007	10.600000000000009	8.014124169801777
0.4500000000000007	10.700000000000008	9.084215806938948
0.4500000000000007	10.800000000000008	10.091075591878617
0.4500000000000007	10.900000000000001	11.03869428712837
0.4600000000000001	1.0	2.2514550501801953e+21
0.4600000000000001	1.1	9.18897930567975e+19
0.4600000000000001	1.2000000000000002	7.909025407826912e+18
0.4600000000000001	1.3000000000000003	6.827671326069016e+17