Д/з - 4

Чистяков Глеб, группа 167

17 мая 2017 г.

№1

G - группа всех диагональных матриц в $GL_3(\mathbb{R})$ и $X - \mathbb{R}^3$.

1) $orb(x) = \{gx | \forall g \in G\} \subseteq X, x \in X$. Пусть $g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $x = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, d, e, f \in \mathbb{R} \Rightarrow gx = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad \\ be \\ cf \end{pmatrix} \Rightarrow$ орбиты будут иметь вид:

$$\begin{pmatrix} ad \\ be \\ cf \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ be \\ cf \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ad \\ 0 \\ cf \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ad \\ be \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cf \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ad \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ be \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $st(x) = \{g \in G | gx = x\}, x \in X \Rightarrow gx = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad \\ be \\ cf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ad = d \Rightarrow a = 1, \text{ при } d \neq 0 \text{ и } a \text{ - любое, иначе} \\ be = e \Rightarrow b = 1, \text{ при } e \neq 0 \text{ и } b \text{ - любое, иначе} \\ cf = f \Rightarrow c = 1, \text{ при } f \neq 0 \text{ и } c \text{ - любое, иначе} \end{cases}$

Таким образом $st(x) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a = 1, \text{ при } d \neq 0, \text{ иначе любое} \\ b = 1, \text{ при } e \neq 0, \text{ иначе любое} \\ c = 1, \text{ при } f \neq 0, \text{ иначе любое} \end{array} \right\}$

№2

G - группа всех верхнетреугольных матриц в $SL_2(\mathbb{R})$. Так как мы ищем классы сопряженности, рассмотрим действие сопряжения $(h, g) \to hgh^{-1}$. Пусть $h = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$, тогда

$$hgh^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} adc & -adb + a^2e + abf \\ 0 & acf \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} d & -adb + a^2e + abf \\ 0 & f \end{pmatrix}$$
Тогда 1) $d = f = \pm 1$, $hgh^{-1} = \begin{pmatrix} d & a^2e \\ 0 & f \end{pmatrix}$

2) $d \neq f$, $hgh^{-1} = \begin{pmatrix} d & -adb + a^2e + abf \\ 0 & f \end{pmatrix}$

№3

Имеется группа S_4. Пусть $\sigma = (1, 2, 3, 4) \in S_4$.
$st(\sigma) = \{\pi \in S_4 | \pi\sigma\pi^{-1} = \sigma\}$, тогда $\pi\sigma\pi^{-1} = \sigma \Leftrightarrow \pi\sigma = \sigma\pi \Rightarrow$ рассмотрим на этом элементы подстановки:
для 1: $\pi(\sigma(1)) = \pi(2)$, но также $\pi(\sigma(1)) = \sigma(\pi(1)) \Rightarrow \sigma(\pi(1)) = \pi(2)$, аналогично для 2: $\sigma(\pi(2)) = \pi(3)$
для 3: $\sigma(\pi(3)) = \pi(4)$
для 4: $\sigma(\pi(4)) = \pi(1)$

Таким образом, чтобы найти стабилизатор, осталось только перебрать все значения для подстановки π:
для $\pi(1) = 1, \pi(2) = \sigma(\pi(1)) = \sigma(1) = 2, \pi(3) = \sigma(\pi(2)) = \sigma(2) = 3, \pi(4) = \sigma(\pi(3)) = \sigma(3) = 4 \Rightarrow \pi = id$
Аналогично для $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 4, \pi(4) = 1$
$\pi(1) = 3, \pi(2) = 4, \pi(3) = 1, \pi(4) = 2$
$\pi(1) = 4, \pi(2) = 1, \pi(3) = 2, \pi(4) = 3 \Rightarrow$
$st(\sigma) = \{id, (1, 2, 3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4, 3, 2)\}$