Д/з - 7

Чистяков Глеб, группа 167

1 июня 2017 г.

№1

Имеем симметрический многочлен
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$. Рассмотрим его старшие члены $L(f)$:

Зная, что элементарные симметрические многочлены –
$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$
$\sigma_4 = x_1x_2x_3x_4$

Тогда получаем:
- $x_1^3x_2^3 \to \sigma_2^3$
- $x_1^3x_2^2x_3 \to \sigma_1\sigma_2\sigma_3$
- $x_1^3x_2x_3x_4 \to \sigma_1^2\sigma_4$
- $x_1^2x_2^2x_3^2 \to \sigma_3^2$
- $x_1^2x_2^2x_3x_4 \to \sigma_2\sigma_4$

Следовательно $f = a\sigma_2^3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3 + b\sigma_1^2\sigma_4 + c\sigma_3^2 + d\sigma_2\sigma_4$
Осталось найти коэффициенты a,b и c:

x_1	x_2	x_3	x_4	f	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
1	1	1	1	64	4	6	4	1
1	1	1	0	8	3	3	1	0
1	1	0	0	0	2	1	0	0
1	1	-1	-1	0	0	-2	0	1

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 \cdot 4 + b \cdot 4^2 \cdot 1 + c \cdot 4^2 + d \cdot 6 \cdot 1 = 64 \\ a \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + b \cdot 3^2 \cdot 0 + c \cdot 1^2 + d \cdot 3 \cdot 0 = 8 \\ a \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + b \cdot 2^2 \cdot 0 + c \cdot 0^2 + d \cdot 1 \cdot 0 = 0 \\ a \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2) \cdot 0 + b \cdot 0^2 \cdot 1 + c \cdot 0^2 + d \cdot (-2) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow f = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_3^2$$

№2

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – комплексные корни многочлена $3x^3 + 2x^2 - 1$. Тогда найдем значение $\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3} + + \dfrac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2} + \dfrac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}$:
Рассмотрим приведенный многочлен $x^3 + \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{1}{3}$, тогда, воспользовавшись теоремой Виета, получим:

$$\begin{cases}\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\dfrac{2}{3} \\ \sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 0 \\ \sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Рассмотрим σ_2^2:

$$\sigma_2^2 = \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 =$$

$$= \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) =$$

$$\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\sigma_3\sigma_1 =$$

$$\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\frac{1}{3}(-\frac{2}{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 = \frac{4}{9}$$

Поделим на σ_3:

$$\frac{\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{4}{3}$$

№3

Пусть x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $x^3 + x - 1$. Тогда по теореме Виета:
$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$
$\sigma_3 = x_1x_2x_3 = 1$

Теперь рассмотрим многочлен$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, корни которого: $x_1^3, x_2^3, x_3^3, 1 \Rightarrow$
$\sigma_1' = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 1 = -a$
$\sigma_2' = x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3 + x_2^3x_3^3 + x_2^3 + x_3^3 = b$
$\sigma_3' = x_1^3x_2^3x_3^3 + x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3 == -c$
$\sigma_4' = x_1^3x_2^3x_3^3 = d$

Найдем a, b, c, d:
$d = x_1^3x_2^3x_3^3 = (\underbrace{x_1x_2x_3}_{1})^3 = 1$

$$\begin{cases} x_1^3 = -x_1 + 1 \\ x_2^3 = -x_2 + 1 \\ x_3^3 = -x_3 + 1 \end{cases} \Rightarrow \sigma_1' = -x_1 - x_2 - x_3 + 4 = -(\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{0}) + 4 = 4 \Rightarrow a = -4$$

$x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3 = x_1^3(x_2^3 + x_3^3) + x_2^3x_3^3 = (-x_1 + 1)(-x_2 + 1 - x_3 + 1) + (-x_2 + 1)(-x_3 + 1) =$

$$= \underbrace{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}_{1} - 2(\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{0}) + 3 = 4$$

$\Rightarrow \sigma_2' = \underbrace{x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3}_{4} + \underbrace{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}_{-a-1=3} = 7 \Rightarrow b = 7$

$\Rightarrow \sigma_3' = \underbrace{x_1^3x_2^3x_3^3}_{1} + \underbrace{x_1^3x_2^3 + x_1^3x_3^3 + x_2^3x_3^3}_{4} = 5 \Rightarrow c = -5$

Таким образом, искомый многочлен: $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x + 1$

№4

Не существует бесконечной последовательности одночленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в которой каждый последующий член строго меньше предыдущего в лексикографическом порядке. Докажем это индукцией по переменным:

Для $n = 1$ рассмотрим старший член x^k, и так как степень каждого последующего члена строго меньше, то, очевидно, их конечное множество, а следовательно утверждение верно.

Предположим, что для n – верно. Тогда докажем для $n+1$. Сначала рассмотрим старший одночлен $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_{n+1}^{k_{n+1}}$ в последовательности. Во всех последующих членах степень x_1 будет либо такой же, либо меньше. То есть у каждого слагаемого будет определенная степень k_1 при x_1, которая не возрастает относительно последующих слагаемых. Тогда по предположению индукции таких одночленов конечное множество, и степень начнет уменьшаться. Таким образом, последовательности одночленов от переменных $x_1, \ldots, x_{n+1}$, в которой каждый последующий член строго меньше предыдущего в лексикографическом порядке конечны.