Д/з - 1

Чистяков Глеб, группа 167

17 мая 2017 г.

№1

Докажем, что формула $m \circ n = mn - m - n + 2$ задает бинарную операцию на множестве $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$:

В $m \circ n$ используются лишь операции $+, -, \times \Rightarrow m \circ n \in \mathbb{Q}$ Предположим, что $m \circ n = 1 \Rightarrow mn - m - n + 2 = 1 \Leftrightarrow m(n-1) = n - 1 \Rightarrow m = \frac{n-1}{n-1} \Rightarrow n \neq 1$, тогда $m = 1$, но $m, n \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, а следовательно, наше предположение неверно. Значит $m \circ n \neq 1$ и $m \circ n \in (\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$.

Таким образом, формула $m \circ n = mn - m - n + 2$ задает бинарную операцию на множестве $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$.

Докажем, что $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ является группой:
1) Проверим $(a \circ b) \circ \ = a \circ (b \circ c)$:

$$\begin{gathered}(a \circ b) \circ \ = (ab - a - b + 2) \circ c = \\ = (abc - ac - bc + 2c) - (ab - a - b + 2) - c + 2 = \\ = abc - ab - ac - bc + a + b + c = \\ = (abc - ab - ac + 2a) - a - (bc - b - c + 2) + 2 = \\ a \circ (bc - b - c + 2) = a \circ (b \circ c)\end{gathered}$$

2) Нейтральный элемент:
Пусть a - какой-то элемент, тогда рассмотрим такой элемент e, что $a \circ e = e \circ a = a$:

$$\begin{gathered}a \circ e = ae - a - e + 2 = a \Leftrightarrow e(a-1) = 2a - 2 \Rightarrow e = 2 \\ e \circ a = ea - e - a + 2 = a \Leftrightarrow e(a-1) = 2a - 2 \Rightarrow e = 2\end{gathered}$$

$\Longrightarrow e = 2$ - нейтральный элемент.

3) Обратный элемент:
Пусть a - какой-то элемент, тогда рассмотрим $a^{-1} : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 2$, то есть

$$a \circ a^{-1} = aa^{-1} - a - a^{-1} = 2 \Leftrightarrow a^{-1}(a-1) = a \Rightarrow a^{-1} = \frac{a}{a-1}$$
$$a^{-1} \circ a = a^{-1}a - a^{-1} - a = 2 \Leftrightarrow a^{-1}(a-1) = a \Rightarrow a^{-1} = \frac{a}{a-1}$$

$\Longrightarrow a^{-1} = \dfrac{a}{a-1}$ - обратный элемент.

Таким образом, $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ является группой.

№2

Запишем таблицу, где каждому $x \in (\mathbb{Z}_{12}, +)$ соответствует $ord(x)$:

$\mathbb{Z}_{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Порядок	1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

№3

Подгруппой группы $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$ назовем такое H, для которого:
1) $0 \in H$
2) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$
3) $a, b \in H \Rightarrow a + b \in H$

Несобственные подгруппы:
$\{0\}$
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

Собственные подгруппы:

Можно заметить, что наша группа G является циклической (так как имеет циклическую подгруппу $< 1 >= G$). Тогда докажем такое утверждение:
Каждая подгруппа циклической группы - циклическая.

Пусть $G =< g_0 >, g_0^n \in H, n \in \mathbb{N}$ - наименьшее. $\exists k : \forall a \in < g_0^n > a = (g_0^n)^k \in H \Rightarrow < g_0^n > \subseteq H$.

Все элементы группы G с образующей g_0 представимы в виде $g_0^n \in H$, где $n \in \mathbb{N}$ - наименьшее. Тогда любой элемент $g \in H$ можно выразить, как $g = g_0^m, m = qn + r, 0 \leq r < n \Rightarrow g = g_0^m = g_0^{qn+r} = (g_0^n)^q g_0^r \Rightarrow g_0^r = (g_0^n)^{-q} g \Rightarrow r = 0 \Rightarrow g = (g_0^n)^q \Rightarrow < g_0^n > \supseteq H$.

Таким образом, H - циклическая, с образующей $< g_0^n >$.

Тогда переберем все циклические подгруппы:
$< 2 >= \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
$< 3 >= \{0, 3, 6, 9\}$
$< 4 >= \{0, 4, 8\}$
$< 5 >= \{0, 5, 10\}$
$< 6 >= \{0, 6\}$
$< 7 >= \{0, 7\}$
$< 8 >= \{0, 8\}$
$< 9 >= \{0, 9\}$
$< 10 >= \{0, 10\}$
$< 11 >= \{0, 11\}$

Из них нам подходят только $< 2 >, < 3 >, < 4 >, < 6 >$

№4

Для начала рассмотрим группу, порядки элементов которых конечны. В этом случае количество конечных циклических подгрупп, очевидно, будет бесконечным. Если же существует элемент с бесконечным порядком, тогда будет существовать бесконечная циклическая подгруппа, порождаемоя этим элементом, включающая бесконечное множество циклических подгрупп. Таким образом, любая бесконечная группа сожержит бесконечное число подгрупп.