Д/з - 6

Чистяков Глеб, группа 167

25 мая 2017 г.

№1

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2$
$g(x) = 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1$
НОД$(f(x), g(x))$ - ?

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 & 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1 \\ \cline{2-2}
- \quad 2x^3 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x - \frac{8}{9} \\ \cline{1-1}
-\frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{20}{3}x - 2 & \\
- \quad -\frac{16}{3}x^3 - \frac{32}{9}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{8}{9} & \\ \cline{1-1}
\frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3 + 4x^2 - 5x + 1 & \frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9} \\ \cline{2-2}
- \quad 6x^3 + 6x^2 - 3x & \frac{27}{10}x - \frac{9}{10} \\ \cline{1-1}
-2x^2 - 2x + 1 & \\
- \quad -2x^2 - 2x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(f(x), g(x)) = \frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9}$$

Выразим его через $f(x)$ и $g(x)$:

$$\frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9} = (2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2) - (6x^3 + 4x^2 - 5x + 1) \cdot (\frac{1}{3}x - \frac{8}{9})$$

№2

1) В кольце $\mathbb{C}$:
$x^6 + x^3 - 12 = (x^3 + 4)(x^3 - 3)$

• $x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-4}$
$-4 = |-4 + i \cdot 0| = \sqrt{(-4)^2} = 4 \Rightarrow$

$$-4 = 4(cos(\pi) + i \cdot sin(\pi))$$

$$\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{4}(cos(\frac{\pi + 2\pi k}{3}) + i \cdot sin(\frac{\pi + 2\pi k}{3})$$

где $k = 0, 1, 2$

$k = 0$: $x_1 = \sqrt[3]{4}(cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}$

$k = 1$: $x_2 = \sqrt[3]{4}(cos(\pi) + i \cdot sin(\pi) = -\sqrt[3]{4}$

$k = 2$: $x_3 = \sqrt[3]{4}(cos(\frac{5\pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} - \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}$

- $x^3 - 3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$
  $3 = |3 + i \cdot 0| = \sqrt{3^2} = 3 \Rightarrow$

$$3 = 3(cos(2\pi) + i \cdot sin(2\pi))$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{4}(cos(\frac{2\pi + 2\pi k}{3}) + i \cdot sin(\frac{2\pi + 2\pi k}{3})$$

где $k = 0, 1, 2$

$k = 0$: $x_4 = \sqrt[3]{3}(cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{2\pi}{3})) = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}$

$k = 1$: $x_5 = \sqrt[3]{3}(cos(\frac{4\pi}{3}) + i \cdot sin(\frac{4\pi}{3})) = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}$

$k = 2$: $x_6 = \sqrt[3]{3}(cos(2\pi) + i \cdot sin(2\pi)) = \sqrt[3]{3}$

$\Rightarrow x^6 + x^3 - 12 = (x - (\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}))(x + \sqrt[3]{4})(x - (\frac{\sqrt[3]{4}}{2} - \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}))(x + (\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}))(x + (\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}))(x - \sqrt[3]{3})$

2) В кольце $\mathbb{R}$:
$(x - (\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}))(x + \sqrt[3]{4})(x - (\frac{\sqrt[3]{4}}{2} - \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}))(x + (\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}))(x + (\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot i}{2}))(x - \sqrt[3]{3}) = (x + \sqrt[3]{4})(x^2 - \sqrt[3]{4}x + 2\sqrt[3]{2})(x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9}) \Rightarrow$

$$x^6 + x^3 - 12 = (x + \sqrt[3]{4})(x^2 - \sqrt[3]{4}x + 2\sqrt[3]{2})(x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$$

№3

$5 + \sqrt{-5}$ – простое, если оно необратимо и $\nexists$ таких необратимых x,$y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: $5 + \sqrt{-5} = xy$. Для начала проверим $5 + \sqrt{-5}$ на обратимость:
Знаем, что $5+\sqrt{-5}$ – обратима, если $\exists z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] : (5+\sqrt{-5}) \cdot z = z \cdot (5+\sqrt{-5}) = 1$. Пусть $z = a + i \cdot b\sqrt{5}$, тогда (т.к. $5 + \sqrt{-5} = 5 + i \cdot \sqrt{5}$):

$$(5 + i \cdot \sqrt{5})(a + i \cdot b\sqrt{5}) = 5a + i \cdot 5b\sqrt{5} + i \cdot a\sqrt{5} - 5b = 1$$

$\begin{cases} 5a - 5b = 1 \\ 5b\sqrt{5} + a\sqrt{5} = 0 \Rightarrow a = -5b \end{cases} \Rightarrow -25b - 5b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{30}, a = \frac{1}{6}$

Так как $a, b \notin \mathbb{Z}$, то $5 + \sqrt{-5}$ – необратимо.

Возьмем $x = a + i \cdot b\sqrt{5}, y = c + i \cdot d\sqrt{5}$ и проверим, существуют ли такие $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, что $5 + \sqrt{-5} = xy$:

$$5 + \sqrt{-5} = xy = (a + i \cdot b\sqrt{5})(c + i \cdot d\sqrt{5}) = ac + i \cdot ad\sqrt{5} + i \cdot bc\sqrt{5} - 5bd$$

$\begin{cases} ac - 5bd = 5 \\ ad\sqrt{5} + bc\sqrt{5} = \sqrt{5} \end{cases}$ Возьмем $a = 0, b = 1 \Rightarrow c = 1, d = -1$. Тогда наши x и y выглядят так: $x = i \cdot \sqrt{5}, y = 1 - i \cdot \sqrt{5}$. Проверим их на обратимость:

• $i \cdot \sqrt{5} \cdot (f + i \cdot g\sqrt{5}) = i \cdot f\sqrt{5} - 5g = 1 \Rightarrow \begin{cases} -5g = 1 \\ i \cdot f\sqrt{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow g \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x$ – необратим.

• $(1 - i \cdot \sqrt{5})(f + i \cdot g\sqrt{5}) = f + i \cdot g\sqrt{5} - i \cdot f\sqrt{5} + 5g = 1 \Rightarrow \begin{cases} f + 5g = 1 \Rightarrow f = 1 - 5dg \\ g\sqrt{5} - f\sqrt{5} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 6g - 1 = 0 \Rightarrow g \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y$ – необратим.
Таким образом $5+\sqrt{-5} = xy$, где x и y необратимые, а следовательно $5+\sqrt{-5}$ – не простое.

№4

Предположим, что N принимает конечное число значений. Тогда выберем такой элемент x, что $N(x)$ – максимально. И еще возьмем необратимый элемент y, тогда, по определению нормы, $N(xy) \geqslant N(x)$. Но равенства там не может быть, так как y – необратимый (по лемме: Пусть R – евклидово кольцо и $a, b \in R\setminus\{0\}$. Тогда $N(ab) = N(a) \Leftrightarrow b$ – обратим) $\Rightarrow N(xy) > N(x)$. Так как $xy \in R \Rightarrow$ что существует элемент кольца с большей нормой $\Rightarrow$ наше предположение неверно, а значит N принимает бесконечное число значений.