Д/з - 3

Чистяков Глеб, группа 167

17 мая 2017 г.

№1

Рассмотрим группы $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$:
Элементы $\mathbb{Z}_3 - 0, 1, 2$
Элементы $\mathbb{Z}_4 - 0, 1, 2, 3$
Элементы $\mathbb{Z}_6 - 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Тогда составим следующую табличку элементов для 2, 3, 4 и 6 - го порядков:

Порядок:	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_6$
2	0	0, 2	0, 3
3	0, 1, 2	0	0, 2, 4
4	0	0, 1, 2, 3	0, 3
6	0, 1, 2	0, 2	0, 1, 2, 3, 4, 5

Тогда $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ порядка k - всевозможные тройки из элементов каждой ячейки в одной строчке нашей таблички, кроме тройки единичного порядка и троек из элементов кратных порядков, то есть $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$
для 2 порядка: $(0, 2, 0), (0, 0, 3), (0, 2, 3)$ - $1 \times 2 \times 2 - 1 = 3$ - тройки
для 3 порядка: $3 \times 1 \times 3 - 1 = 8$ - троек
для 4 порядка: $1 \times 4 \times 2 - 1 - 3 = 4$ - троек
для 6 порядка: $3 \times 2 \times 6 - 1 - 3 - 8 = 24$ - тройки

№2

Пусть G - это нециклическая абелева группа порядка 45. Из теоремы знаем, что любая конечная абелева группа, есть прямая сумма примарных циклических групп (p^{α}), p - простое, причем такое разложение единственно с точностью до перестановки. Тогда G представимо в виде $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$ - нециклическое, так как $(3, 15) = 3 \neq 1$. Разложение же $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$ - не подходит, так как $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{45}$, которая циклическая.

Рассмотрим группы $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$:
Элементы $\mathbb{Z}_3 - 0, 1, 2$
Элементы $\mathbb{Z}_5 - 0, 1, 2, 3, 4$

Тогда составим следующую табличку элементов для 3, 5 и 15 - го порядков:

Порядок:	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_5$
3	0, 1, 2	0, 1, 2	0
5	0	0	0, 1, 2, 3, 4
15	0, 1, 2	0, 1, 2	0, 1, 2, 3, 4

Тогда, аналогично №1, элементов в $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
для 3 порядка: $3 \times 3 \times 1 - 1 = 8$ - троек
для 5 порядка: $1 \times 1 \times 5 - 1 = 4$ - тройки
для 15 порядка: $3 \times 3 \times 5 - 1 - 8 - 4 = 32$ - тройки

Таким образом, в силу того, что подгруппы простого порядка не пересекаются, и известно, что в погрупре k-го порядка $\varphi(k)$ - образующих, то подгрупп порядка 6: $8/2 = 4$, и следовательно в подгруппе порядка 15 $\varphi(15)$ - образующих, то есть $\varphi(15) = 2 \cdot 4 = 8 \Rightarrow$ всего подгрупп порядка 15: $32/8 = 4$.

№3

Имеем $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Тогда найдем такую подгруппу H, что $G/H \simeq \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$. Мы знаем, что $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_k$, где $n = mk$ и $(m, k) = 1$. То есть $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$. Представим $H = H_1 \times H_2$, тогда по теореме о факторизации по сомножителям получаем $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{30})/(H_1 \times H_2) \simeq \mathbb{Z}/H_1 \times \mathbb{Z}/H_2 \simeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$. Рассмотрим некоторые порождающие элементы $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, что $< z_1 >\simeq \mathbb{Z}$ и $< z_2 >\simeq \mathbb{Z}$. Тогда возьмем $H_1 =< z_1^{30} >$ и $H_2 =< z_2^{60} >$. Таким образом, наша искомая подгруппа $H =< z_1^{30} > \times < z_2^{60} >$.