Д/з - 5

Чистяков Глеб, группа 167

18 мая 2017 г.

№1

Имеется кольцо $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

1) Элемент $r \in R$ - обратимый, если r - невырожденный, то есть когда $a \neq 0$ и $c \neq 0$. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$. Таким образом, все обратные элементы: $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$.

2) Элемент $r \in R, r \neq 0$ (то есть $a \neq b \neq c \neq 0$) - левый (правый) делитель нуля, если найдется такой $r' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \in R, r' \neq 0$ (то есть $a' \neq b' \neq c' \neq 0$), что выполняется $rr' = 0$ ($r'r = 0$). Тогда:
$rr' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ a'b + b'c & cc' \end{pmatrix} = 0$, при

1) $a = 0, b = 0, c \neq 0 \Rightarrow a' \neq 0, b' = c' = 0$

2) $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c = 0$, где a и b не равны нулю одновременно $\Rightarrow a' = 0, b', c' \in \mathbb{R}$, где b' и c' не равны нулю одновременно

$r'r = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ab' + bc' & cc' \end{pmatrix} = 0$, при

1) $a \neq 0, b = 0, c = 0 \Rightarrow a' = b' = 0, c' \neq 0$

2) $a = 0, b, c \in \mathbb{R}$, где b и c не равны нулю одновременно $\Rightarrow a', b' \in \mathbb{R}, c' = 0$, где a' и b' не равны нулю одновременно

3) Элемент $r \in R, r \neq 0$ - нильпотентный, если найдется такое n, что $r^n = 0$.
Рассмотрим $n = 2$: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b(a+c) & c^2 \end{pmatrix}$

Для $n = 3$: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ b(a^2+ac+c^2) & c^3 \end{pmatrix}$

Тогда предположим для $n : r^n = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ bk & c^n \end{pmatrix}$, где k - некоторое число, зависящее от a и c.

Для $n+1$: $r^{n+1} \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ bk & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ bk' & c^{n+1} \end{pmatrix}$, где k опять же некоторое число, зависящее от a и c.
Следовательно наше предположение верно, тогда все нильпотентные элементы: $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a = c = 0, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$.

№2

Приведем пример идеал в кольце $\mathbb{Z}[x]$, не являющимся главным. Рассмотрим идеал, порождающийся двумя элементами $(x, 2)$. Пусть он представим в виде $(x, 2) = xf(x) + 2g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, где $f(x)$ и $g(x)$ какие-то многочлены из $\mathbb{Z}[x]$.
1. Покажем, что $(x, 2)$ - подгруппа по сложению:

1) Нейтральный элемент - многочлен с нулевыми коэффициентами. Он находится в $(x,2)$, так как $2|0$.

2) Для каждого многочлена существует обратный, с противоположными коэффициентами. Он находится в $(x,2)$, так как $2|(-a)$, где a - свободный член.

3) Замкнутость относительно сложения, так как сумма четных свободных членов будет четна.

2. Покажем, что $(x, 2)$ - идеал:
$\forall z \in \mathbb{Z}[x]$ и $\forall i \in (x, 2)$ (так как умножение в кольце коммутативно, то достаточно рассмотреть один из идеалов, б.о.о. рассмотрим левосторонний идеал), тогда очевидно, что $ir \in (x,2)$, так как свободный член будет четным (из-за четности свободного члена в i).
3. Предположим, что $(x,2)$ - главный идеал, то есть $(x,2) = (h(x))$, где $h(x)$ - некоторый порождающий многочлен $\Rightarrow (h(x)) = k(x)h(x) = xf(x) + 2g(x)$. Примем $f(x) = 0, g(x) = 1 \Rightarrow k(x)h(x) = 2 \Rightarrow h(x)|2 \Rightarrow$
$\left[\begin{array}{l} h(x) = \pm 1 \\ h(x) = \pm 2 \end{array} \right.$

1) Если $h(x) = \pm 1$, то $(h(x)) = (\pm 1) = \mathbb{Z}[x]$, но $(h(x)) = (x, 2) \Rightarrow h(x) = \pm 1$ - не подходит.

2) Если $h(x) = \pm 2$, то $(h(x)) = (\pm 2) \Rightarrow k(x)(\pm 2) = x + 2$, но такого $k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ не существует $\Rightarrow h(x) = \pm 2$ - не подходит.

Таким образом, наше предположение неверно, и $(x,2)$ - не является главным идеалом.

№3

Найдем размерность $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]/(x^3 - x^2 + 2)$. С помощью теоремы о гомоморфизме колец, рассмотрим элементы фактор кольца $\mathbb{R}[x]/(x^3 - x^2 + 2)$. Теперь рассмотрим $(x^3 - x^2 + 2)$ как ядро некоторого гомоморфизма по взятию остатка, то есть представим наши элементы как остатки от деления многочленов $\mathbb{R}[x]$ на $(x^3 - x^2 + 2)$. Тогда $\mathbb{R}[x]/(x^3 - x^2 + 2) \cong Q(x)$ (как образ гомоморфизма), где $Q(x) = ax^2 + bx + c$ - некоторый многочлен - остаток, полученный при делении на $(x^3 - x^2 + 2)$. Возьмем его стандартный базис, он будет выглядеть так: $(x^2, x, 1)$, отсюда следует, что размерность составляет 3. Таким образом, по изоморфности, размерность $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]/(x^3 - x^2 + 2)$ равна 3.

№4

По теореме о гомоморфизме колец $F/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$. Так как поле является простым кольцом, то $Ker(\varphi)$ - несобственный идеал. Так как в F нет собственных идеалов, то:

- либо $Ker(\varphi) = 0 \Rightarrow$ (по лемме с лекции) φ - инъективно $\Rightarrow Im(\varphi) \cong F$
- либо $Ker(\varphi) = F \Rightarrow Im(\varphi) \cong F/Ker(\varphi) \cong F/F \cong \{0\} \Rightarrow \varphi(x) = 0$ $\forall x \in F$