Д/з - 2

Чистяков Глеб, группа 167

17 мая 2017 г.

№1

Известно, что $|A_4| = \frac{4!}{2}$ - так как A_4 - группа четных перестановок. $H = \{id, (12)(34)\}$ - подгруппа, $|H| = 2 \Rightarrow [A_4 : H] = 6$ по теореме Лагранжа, то есть имеется 6 левых и 6 правых смежных классов.

При умножении любой перестоновки на id получится та же перестановка, поэтому будем считать, что каждый левый и правый класс по перестановке g будет включать в себя g.

Рассмотрим левый смежный класс:
$g \circ (12)(34)$:
$id \circ (12)(34) = (12)(34)$
$(1)(234) \circ (12)(34) = (132)(4)$
$(1)(243) \circ (12)(34) = (142)(3)$
$(2)(134) \circ (12)(34) = (123)(4)$
$(2)(143) \circ (12)(34) = (124)(3)$
$(3)(124) \circ (12)(34) = (143)(2)$ - было
$(3)(142) \circ (12)(34) = (243)(1)$ - было
$(4)(123) \circ (12)(34) = (134)(2)$ - было
$(4)(132) \circ (12)(34) = (234)(1)$ - было
$(12)(34) \circ (12)(34) = id$ - было
$(13)(24) \circ (12)(34) = (14)(23)$
$(14)(23) \circ (12)(34) = (13)(24)$ - было

Рассмотрим правый смежный класс:
$(12)(34) \circ g$:
$(12)(34) \circ id = (12)(34)$
$(12)(34) \circ (1)(234) = (124)(3)$
$(12)(34) \circ (1)(243) = (123)(4)$
$(12)(34) \circ (2)(134) = (142)(3)$

$(12)(34) \circ (2)(143) = (132)(4)$
$(12)(34) \circ (3)(124) = (234)(1)$ - было
$(12)(34) \circ (3)(142) = (134)(2)$ - было
$(12)(34) \circ (4)(123) = (243)(1)$ - было
$(12)(34) \circ (4)(132) = (143)(2)$ - было
$(12)(34) \circ (12)(34) = id$ - было
$(12)(34) \circ (13)(24) = (14)(23)$
$(12)(34) \circ (14)(23) = (13)(24)$ - было

Из этого всего видно, H не является нормальной, так как не для каждой перестановки из группы A_4 левый и правый смежные классы совпадают.

№2

Известно, что $SL_2(\mathbb{Z})$ - группа всех целочисленных (2×2) - матриц с определителем 1. Теперь докажем, что множество $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})|$
$a \equiv d \equiv 1(mod3); c \equiv b \equiv 0(mod3)\}$ является подгруппой:

Возьмем матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ и рассмотрим $A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow a' = d, b' = -d, c' = -c, d' = a \Rightarrow$

$a' \equiv d' \equiv 1(mod3); c' \equiv b' \equiv 0(mod3) \Rightarrow \forall A \in H\ \exists A^{-1} \in H.$

Рассмотрим матрицы $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $A, B \in H$, тогда $AB = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$.
Здесь $a_1a_2 \equiv 1(mod3), b_1c_2 \equiv 0(mod3) \Rightarrow a_1a_2 + b_1c_2 \equiv 1(mod3)$.
Аналогично $a_1b_2 + b_1d_2 \equiv 0(mod3), c_1a_2 + d_1c_2 \equiv 0(mod3), c_1b_2 + d_1d_2 \equiv$
$\equiv 1(mod3) \Rightarrow \forall A, B \in H \Rightarrow AB \in H.$

Из вышеперечисленного видно существование нейтрального элемента. Таким образом множество H является подгруппой.

Теперь докажем $A \in SL_2(\mathbb{Z}), B \in H : ABA^{-1} \in H$
$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & -b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$ABA^{-1} = \begin{pmatrix} (a_1a_2 + b_1c_2)d_1 - (a_1b_2 + b_1d_2)c_1 & -(a_1a_2 + b_1c_2)b_1 + (a_1b_2 + b_1d_2)a_1 \\ (c_1a_2 + d_1c_2)d_1 - (c_1b_2 + d_1d_2)c_1 & -(c_1a_2 + d_1c_2)b_1 + (c_1b_2 + d_1d_2)a_1 \end{pmatrix}$

Здесь, для наглядности, распишим первый элемент получившейся матрицы, остальные же будут выводиться по аналогичной логике:

$(a_1a_2 + b_1c_2)d_1 - (a_1b_2 + b_1d_2)c_1 = a_1a_2d_1 + b_1c_2d_1 - a_1b_2c_1 - b_1d_2c_1$: $b_1c_2d_1 \equiv 0(mod3), a_1b_2c_1 \equiv 0(mod3)$ и так как $a_2 \equiv d_2(mod3)$ и $a_1d_1 - b_1c_1 = detA = 1 \Rightarrow (a_1a_2 + b_1c_2)d_1 - (a_1b_2 + b_1d_2)c_1 \equiv 1(mod3)$
а так же:
$-(a_1a_2 + b_1c_2)b_1 + (a_1b_2 + b_1d_2)a_1 \equiv 0(mod3)$
$(c_1a_2 + d_1c_2)d_1 - (c_1b_2 + d_1d_2)c_1 \equiv 0(mod3)$
$-(c_1a_2 + d_1c_2)b_1 + (c_1b_2 + d_1d_2)a_1 \equiv 1(mod3)$

Таким образом, $ABA^{-1} \in H$, а следовательно H является нормальной подгруппой в $SL_2(\mathbb{Z})$.

№3

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{16} \implies \varphi(e_{Z_{12}}) = e_{Z_{16}}$, то есть $\varphi(0) = 0$. Также можно заметить, что $\varphi(0) = \varphi(12)$. Из определения следует, что $\varphi(12) = 12\varphi(1)$, тогда нужно определть такие $\varphi(1)$, что $12\varphi(1) \equiv 0(mod16)$. Очевидно, чтобы это выполнялось, числа, по модулю 16, должны быть кратны четырем, то есть $\varphi(1) \in \{0, 4, 8, 12\}$. Рассмотрим отображения от $z, z' \in Z_{12}$, причем $z = z'$, тогда по определению $\varphi(z - z') = \varphi(z) - \varphi(z')$, так как $\varphi(z - z') = \varphi(0) = 0 \implies \varphi(z) - \varphi(z') = 0 \implies \varphi(z) = \varphi(z') \implies$ все определенно корректно.

№4

Рассмотрим группу G. Если G - бесконечная, то $\exists H \in G$ - бесконечная циклическая погруппа, то есть $H \simeq \mathbb{Z}$ (Пусть $H =< h >$, тогда изоморфизм устанавливает отбражение $< h >\longrightarrow \mathbb{Z}, h^k \longrightarrow k) \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}$. Если же G - конечная, то $G \simeq \mathbb{Z}_n$ (Пусть $G =< g >$, тогда изоморфизм устанавливает отбражение $< g >\longrightarrow \mathbb{Z}_n, g^k \longrightarrow k\ (mod\ n)$). Но в группе $\mathbb{Z}_n$ не будет нетривиальных подгрупп, когда n - простое, следовательно $n = p$. Таким образом, группы, изоморфные любой своей неединичной подгруппе: бесконечная циклическая, а также конечная циклическая простого порядка и непосредственно сама единичная группа.