Д/з - 8

Чистяков Глеб, группа 167

8 июня 2017 г.

№1

α – комплексный корень многочлена $x^3-3x+1 \Rightarrow \alpha^3-3\alpha+1=0$. Тогда представим элемент $\dfrac{\alpha^4-\alpha^3+4\alpha+3}{\alpha^4+\alpha^3-2\alpha^2+1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ в виде $f(\alpha)$, где $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ и $deg f(x) \leqslant 2$:

Пусть $h(\alpha) = \alpha^4-\alpha^3+4\alpha+3, g(\alpha) = \alpha^4+\alpha^3-2\alpha^2+1, \mu(\alpha) = \alpha^3-3\alpha+1$, тогда найдем НОД$(g(\alpha), \mu(\alpha))$:
- $\alpha^4+\alpha^3-2\alpha^2+1 = (\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha+1)+\alpha^2+2\alpha$
- $\alpha^3-3\alpha+1 = (\alpha^2+2\alpha)(\alpha-2)+\alpha+1$
- $\alpha^2+2\alpha = (\alpha+1)(\alpha+1)-1 \Rightarrow$

$$-1 = (\alpha^2+2\alpha)-(\alpha+1)(\alpha+1) =$$

$$= (\alpha^2+2\alpha)-(\mu(\alpha)-(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha))(\alpha+1) =$$
$$= (\alpha^2+2\alpha)-\mu(\alpha)(\alpha+1)+(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha^2+2\alpha) =$$
$$= g(\alpha)-2\mu(\alpha)(\alpha+1)+(\alpha-2)(\alpha+1)(g(\alpha)-\mu(\alpha)(\alpha+1)) =$$
$$= g(\alpha)-2\mu(\alpha)(\alpha+1)+g(\alpha)(\alpha-2)(\alpha+1)-\mu(\alpha)(\alpha+1)^2(\alpha-2) =$$
$$= g(\alpha)(\alpha^2-\alpha-1)-\mu(\alpha)(2\alpha+2+(\alpha+1)^2(\alpha-2) \Rightarrow$$
$$\frac{h(\alpha)}{g(\alpha)} \cdot (\underbrace{\mu(\alpha)}_{0}(2\alpha+2+(\alpha+1)^2(\alpha-2))-g(\alpha)(\alpha^2-\alpha-1) =$$

$$= -h(\alpha)(\alpha^2-\alpha-1) = (\alpha^4-\alpha^3+4\alpha+3)(\alpha^2-\alpha-1) = \alpha^6+2\alpha^4-5\alpha^3+\alpha^2+7\alpha+3 =$$
$$= (-\alpha^3+2\alpha^2-3\alpha+2)\underbrace{(\alpha^3-3\alpha+1)}_{0}-10\alpha^2+16\alpha+1 = -10\alpha^2+16\alpha+1 \Rightarrow$$

$f(x) = -10x^2+16x+1$

№2

Найдем минимальный многочлен числа $a = \sqrt{3}-\sqrt{5}$ над $\mathbb{Q}$:

$$a^2 = (\sqrt{3}-\sqrt{5})^2 = 8-2\sqrt{15}$$
$$a^2-8 = -2\sqrt{15}$$
$$(a^2-8)^2 = (-2\sqrt{15})^2$$
$$a^4-16a^2+64 = 60$$
$$a^4-16a^2+4 = 0$$

$f(x) = x^4 - 16x^2 + 4$ – с корнями: $\sqrt{3} - \sqrt{5}, \sqrt{3} + \sqrt{5}, -\sqrt{3} - \sqrt{5}, -\sqrt{3} + \sqrt{5}$. Можно заметить, что корни рациональные, а следовательно множители при разложении многочлена неприводимые $\Rightarrow$ многочлен 4-ой степени, который мы нашли – минимальный.

№4

$F = \mathbb{C}(x)$ – поле рациональных дробей и $K = \mathbb{C}(y)$, где $y = x + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - xy + 1 = 0$. Пусть x – некоторая рациональная дробь $x = \dfrac{Q_1}{Q_2}$, где Q_1 и Q_2 – многочлены от y. Можно заметить, что при стремлении x к $\pm i$, y будет стремиться к 0. Но тогда мы получим различные значения пределов относительно знака равенства, то есть в левой части мы имеем $\pm i$, а в правой только $0 \Rightarrow x \notin \mathbb{C}(y) \Rightarrow$ степень расширения $[F : K]$ равна 2.