

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Автор:

Глеб Уваркин
615 группа

Преподаватель:

Андрей Александрович
Заболотных



22 сентября 2017 г.

Цель работы:

Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов и амплитудно - модулированных гармонических колебаний.

В работе используются:

Анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов, генератор сигналов специальной формы, осциллограф.

1 Теоретические сведения.

1.1 Спектральный анализ.

Рассмотрим функцию вида:

$$f(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + \dots + A_n \cos(\omega_n t - \alpha_n)$$

или в более короткой записи:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(\omega_i t - \alpha_i)$$

где A_i, ω_i, α_i - постоянные величины. Множество пар (ω_i, A_i) , $i \in 1..N$ - называется спектром функции $f(t)$.

1.2 Периодические сигналы.

В физике широко используется разложение сложных сигналов на гармонические колебания различных частот ω . Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов в математике называется разложением в ряд Фурье

Пусть заданная функция $f(t)$ - периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения сигнала $f(t)$. Её разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n) \quad (2)$$

Здесь $\frac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$. Постоянные a_n и b_n определяются выражениями:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt \quad (4)$$

Точку начала интегрирования t_1 можно выбрать произвольно.

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (5)$$

$$\psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (6)$$

2 Ход работы.

2.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов.

V_0 - амплитуда, τ - длительность, $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ - частота повторения, где T -период повторения импульсов.

Согласно формуле (3) находим:

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}$$

Коэффициенты при косинусных составляющих равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n f_{\text{повт}} t) dt \sim \frac{\sin(x)}{x} \quad (7)$$

В силу чётности функции $\forall n \in N$ $b_n = 0$. Таким образом, спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов должен выглядеть как график $\frac{\sin(x)}{x}$.

Выполнение.

В работе используются: анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф

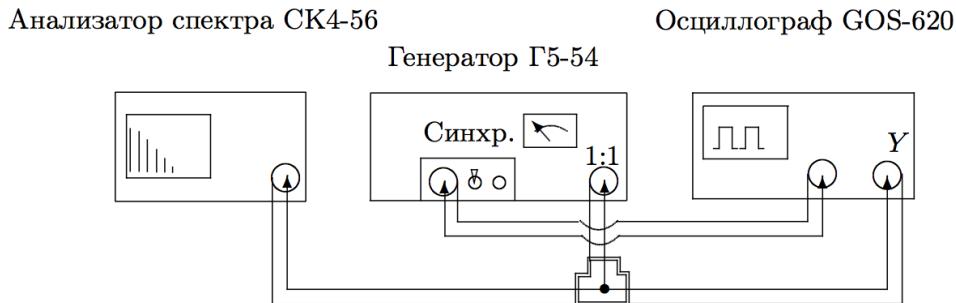


Рис. 1: Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Собираем схему согласно рис. 1. Получаем на экране осциллографа последовательность периодических прямоугольных импульсов. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала с параметрами:

$$f_{\text{повт}} = 10^3 \text{ Гц}, \tau = 25 \text{ мкс}, m_x = 5 \frac{\text{кГц}}{\text{дел}}$$

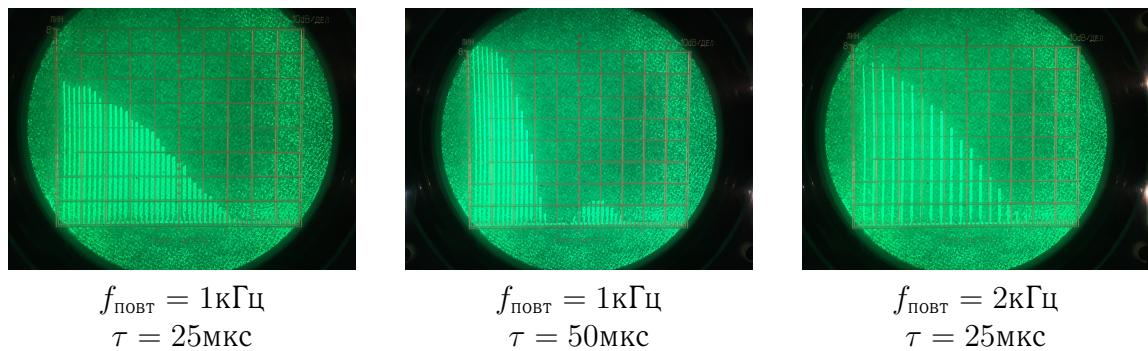


Рис. 2: Зависимость спектра от длительности τ и частоты $f_{\text{повт}}$.

При увеличении τ вдвое при неизменной частоте повторений, уменьшается ширина спектра $\Delta\nu$. При увеличении частоты повторений $f_{\text{повт}}$ вдвое при неизменном τ , увеличивается расстояние $\delta\nu$.

Измерение зависимости ширины спектра от длительности импульса $\Delta\nu(\tau)$.

Таблица 1: Зависимость ширины $\Delta\nu$ спектра от длительности импульса τ

| $\tau, \text{мкс}$ | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 |
|-------------------------|----|----|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $\Delta\nu, \text{кГц}$ | 31 | 14 | 8 | 7 | 7 | 5 | 4 | 4 |
| $1/\tau, \text{кГц}$ | 40 | 20 | 13,3 | 10 | 8 | 6,7 | 5,7 | 5 |

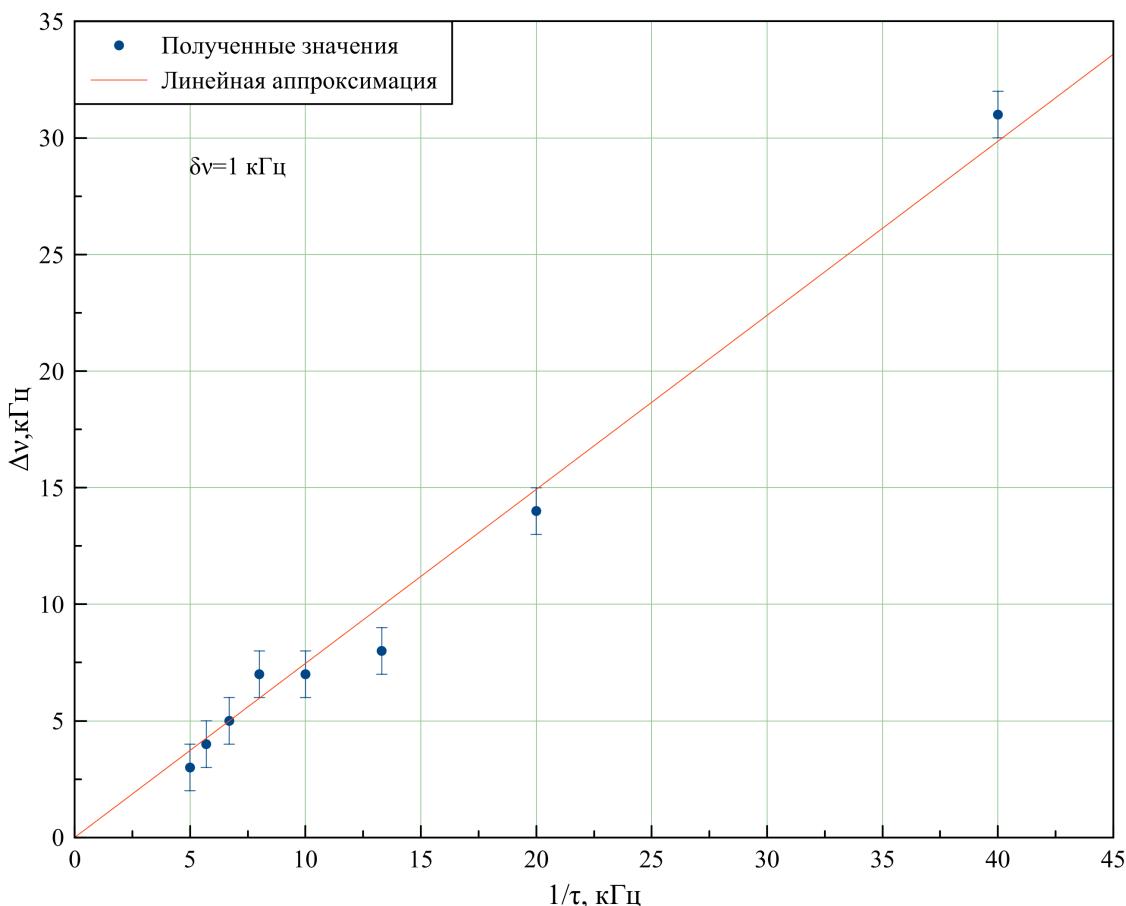


Рис. 3: График зависимости $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$

Коэффициент угла наклона прямой и его погрешность посчитаем методом наименьших квадратов(точку с координатами (13,3;8) учитывать не будем): $k = \langle \Delta\nu\tau \rangle \cdot \langle \tau^2 \rangle$, $\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\langle \Delta\nu^2 \rangle \cdot \langle \tau^2 \rangle - k^2}$, тогда

$$\boxed{\Delta\nu\tau = 0.76 \pm 0.02 (\varepsilon \simeq 3\%)} \quad (8)$$

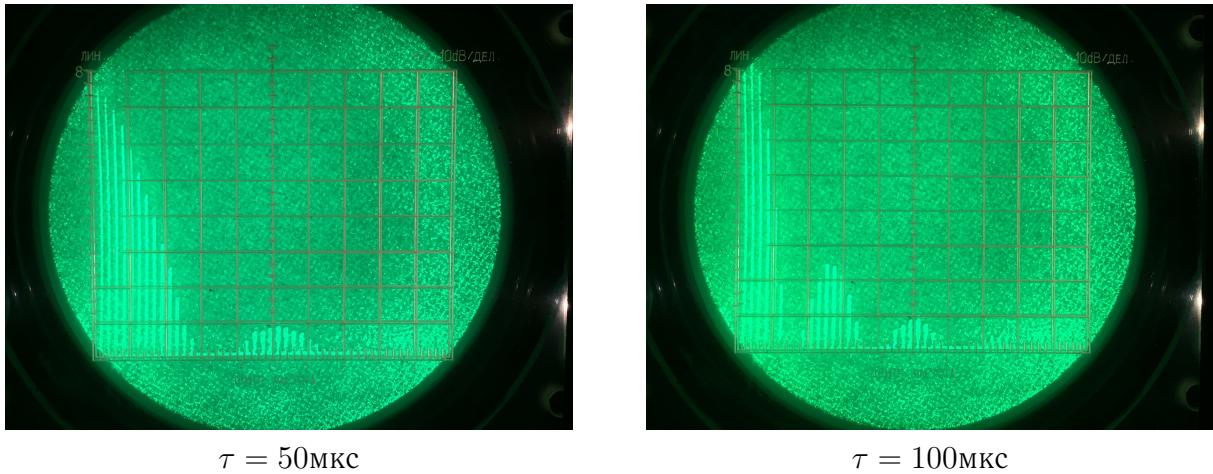


Рис. 4: Зависимость спектра от длительности τ при частоте $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$.

Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Рассмотрим периодическую последовательность цугов (отдельных кусков синусоиды) гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T . Тогда согласно 3:

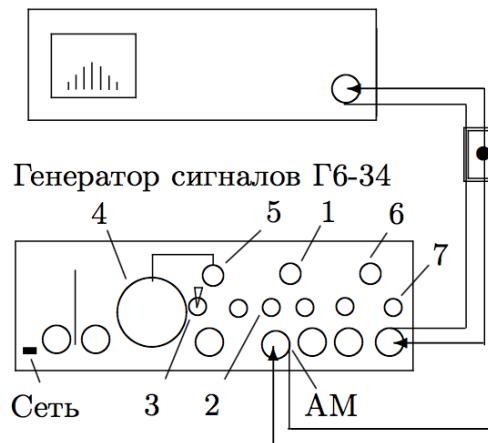
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1) dt \quad (9)$$

Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и спектр цугов, мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

Выполнение

В работе используются: анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф; генератор сигналов Г6-34

Анализатор спектра СК4-56



Осциллограф GOS-620

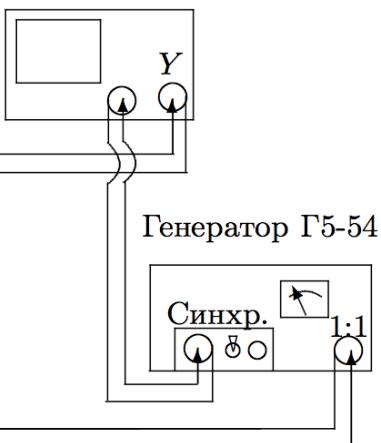
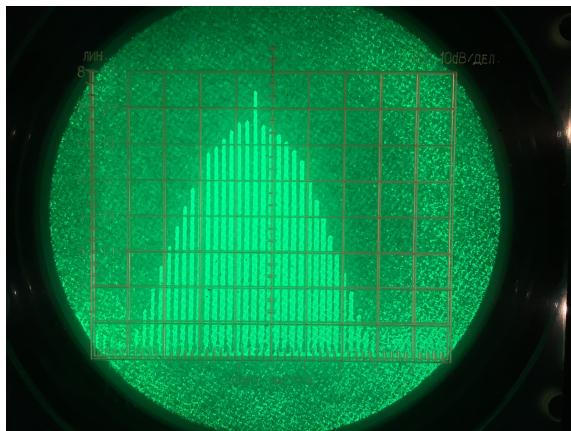
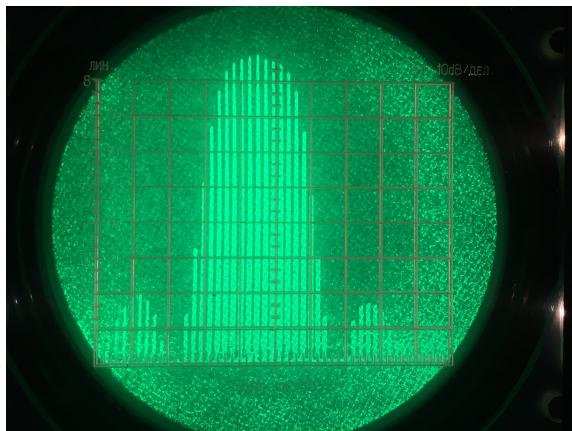


Рис. 5: Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

Собираем схему согласно 5. Получаем на экране осциллографа последовательность периодических цугов гармонических колебаний, получаемых модулированием синусоиды прямоугольными импульсами. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала с параметрами:

$$\nu_0 = 25\text{кГц}, \tau = 50\text{мкс}, f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}.$$

При увеличении τ вдвое при неизменной частоте повторений, вдвое уменьшается ширина спектра (рис. 6), в соответствии с соотношением неопределенности: $\Delta\nu\tau \simeq 1$.

а) $\tau = 50\text{мкс}$ б) $\tau = 100\text{мкс}$ Рис. 6: Зависимость спектра от длительности τ при частоте $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$ и $\nu_0 = 25\text{кГц}$.

При изменении несущей частоты $\nu_0 = 25, 10$ или 40 кГц при неизменных $f_{\text{повт}} = 10^3$ Гц, $\tau = 100$ мкс, $m_x = 5$ кГц, изменяется сдвиг спектра по оси частот(рис. 6(а) и рис. 9).

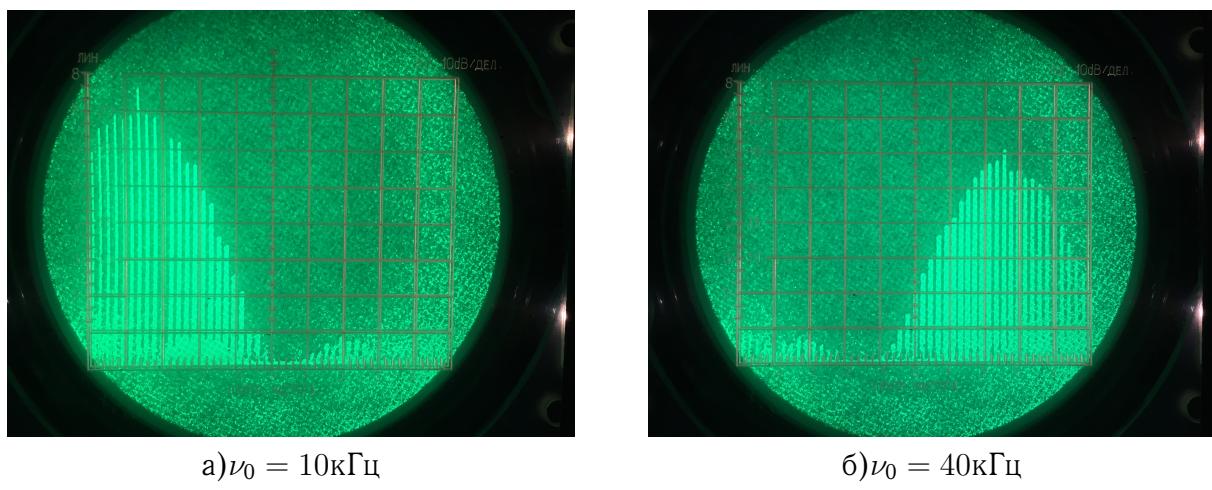


Рис. 7: Зависимость спектра от частоты несущей ν_0 при частоте $f_{\text{повт}} = 1\text{kHz}$ и длительности импульса $\tau = 50\mu\text{s}$.

Таблица 2: Зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от $f_{\text{повт}}$ при $\tau = 50\mu\text{s}$

| $f_{\text{повт}}, \text{кГц}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------------------------------|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta\nu, \text{кГц}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $\sigma\delta\nu, \text{кГц}$ | 0,5 | | | | | | | |

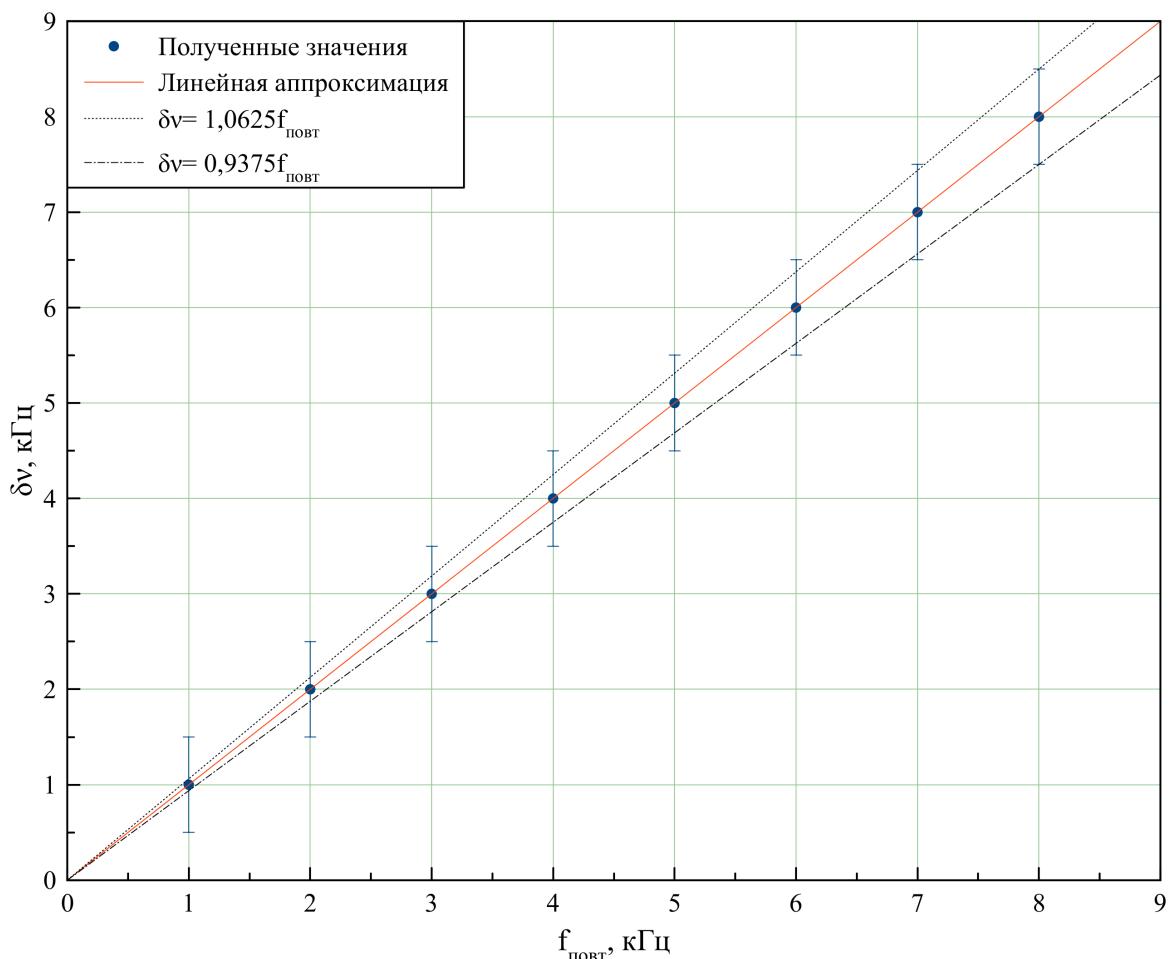
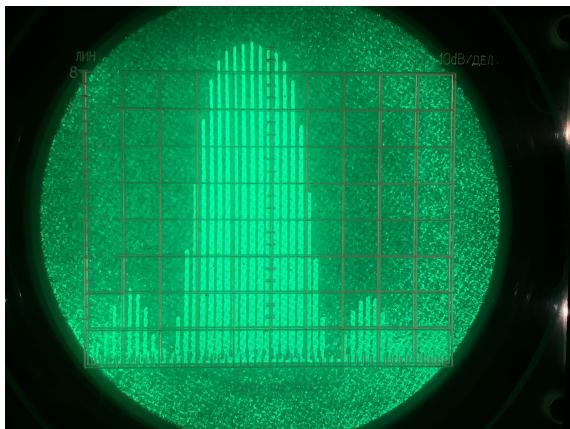


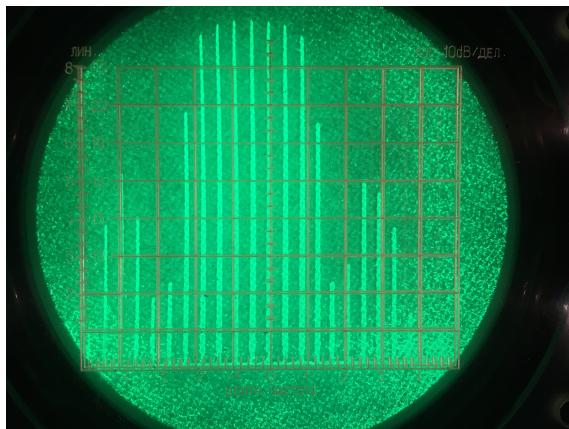
Рис. 8: График зависимости $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

Коэффициент угла наклона прямой и его погрешность найдём из графика(проведём прямые с максимальным отклонением, учитывая погрешность $\sigma_{\delta\nu}$):

$$\Delta\nu\tau = 1,0000 \pm 0,0625 (\varepsilon = 6\%)$$



a) $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$



b) $f_{\text{повт}} = 2\text{кГц}$

Рис. 9: Зависимость спектра от частоты повторения импульсов f при фиксированной длительности импульса $\tau = 100\text{мкс}$.

Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t) \quad (10)$$

Коэффициент m - глубина модуляции и по определению:

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} \quad (11)$$

Выполнение

В работе используются: анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф; генератор сигналов Г6-34

Анализатор спектра СК4-56

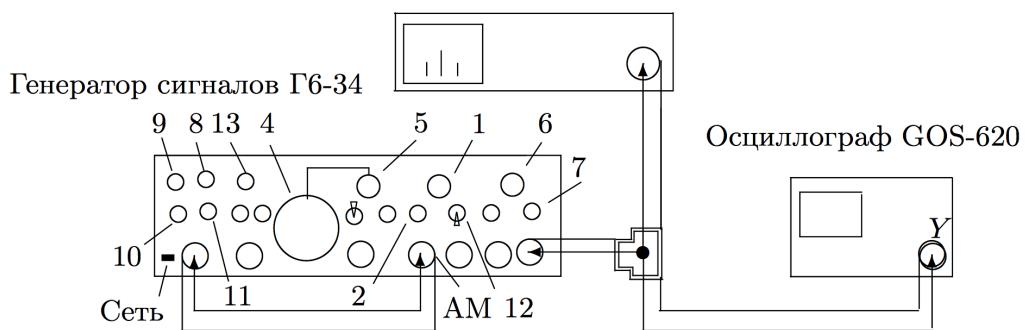


Рис. 10: Схема для исследования спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Собираем схему согласно рис.10. Получаем на экране осциллографа гармонический сигнал, модулированный по амплитуде. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала.

Чтобы измерить глубину модуляции, измерим A_{max} , A_{min} и подставим в формулу 11. Построим график отношения $a_{бок}/a_{осн}$ в зависимости от m .

Рассчитаем теоретический коэффициент наклона, воспользовавшись формулой:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega t). \quad (12)$$

$$a_{осн} = A_0, \quad a_{бок} = \frac{A_0 m}{2} \Rightarrow k_{теор} = 0.5$$

Таблица 3: Зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии $a_{бок}/a_{осн}$ от глубины модуляции m .

| $2A_{min}$, дел | $2A_{max}$, дел | m | $a_{бок}$, дел | $a_{осн}$, дел | $a_{бок}/a_{осн}$ | $\sigma_{a_{бок}/a_{осн}}$ | σ_m |
|------------------|------------------|-------|-----------------|-----------------|-------------------|----------------------------|------------|
| 7 | 9 | 0,125 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0,01 |
| 6 | 11 | 0,29 | 4 | 30 | 0,13 | 0,02 | 0,03 |
| 4 | 13 | 0,53 | 7 | 30 | 0,23 | 0,02 | 0,09 |
| 0 | 16 | 1 | 13 | 29 | 0,45 | 0,02 | 0,03 |

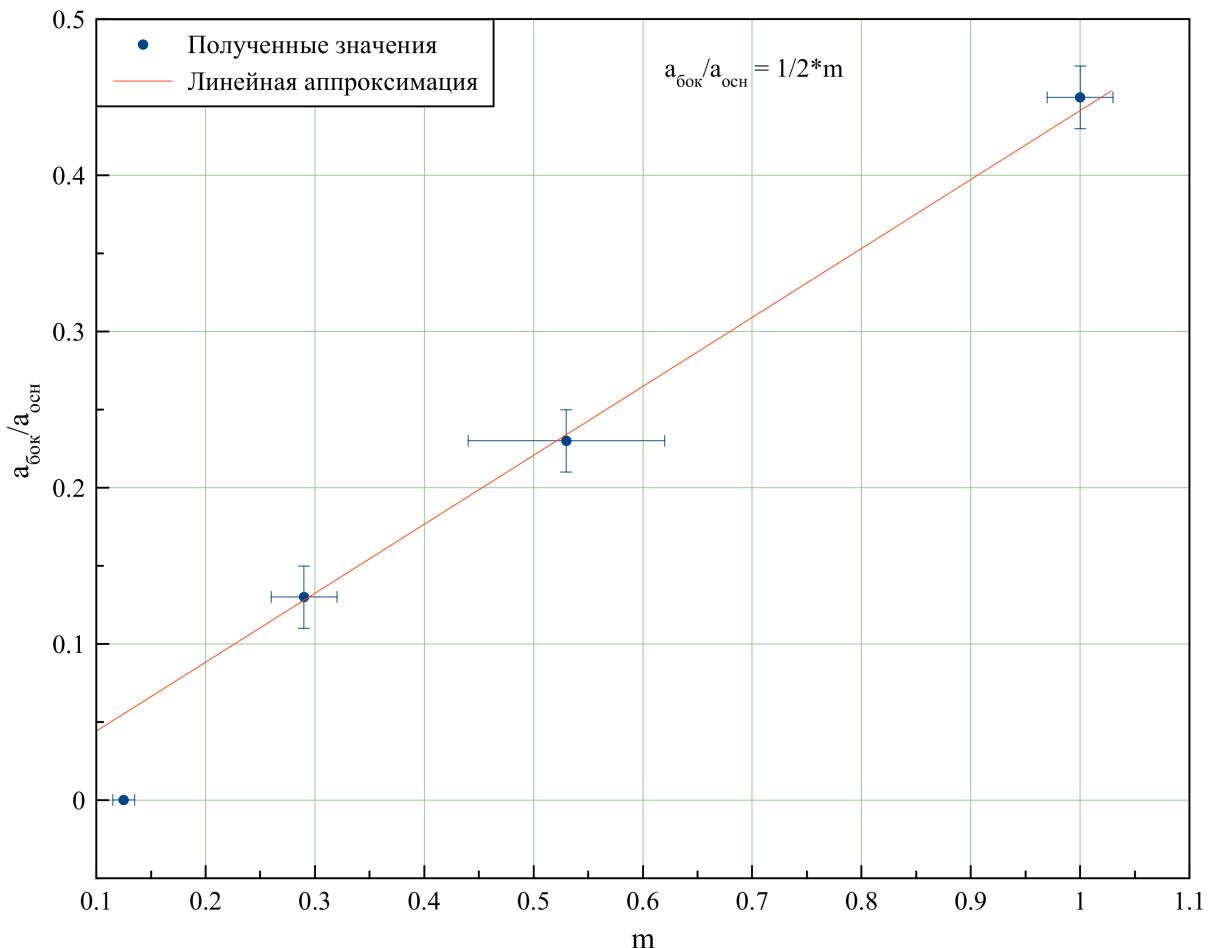


Рис. 11: График зависимости $\frac{a_{бок}}{a_{осн}}(m)$

Коэффициент угла наклона прямой и его погрешность посчитаем методом наименьших квадратов: $k = \frac{\langle \frac{a_{\text{бок}} m}{a_{\text{очн}}} \rangle}{\langle m^2 \rangle}$, $\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle \left(\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{очн}}} \right)^2 \rangle}{\langle m^2 \rangle} - k^2}$, тогда

$$\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{очн}} m} = 0.44 \pm 0.02 (\varepsilon \simeq 5\%) \quad (13)$$

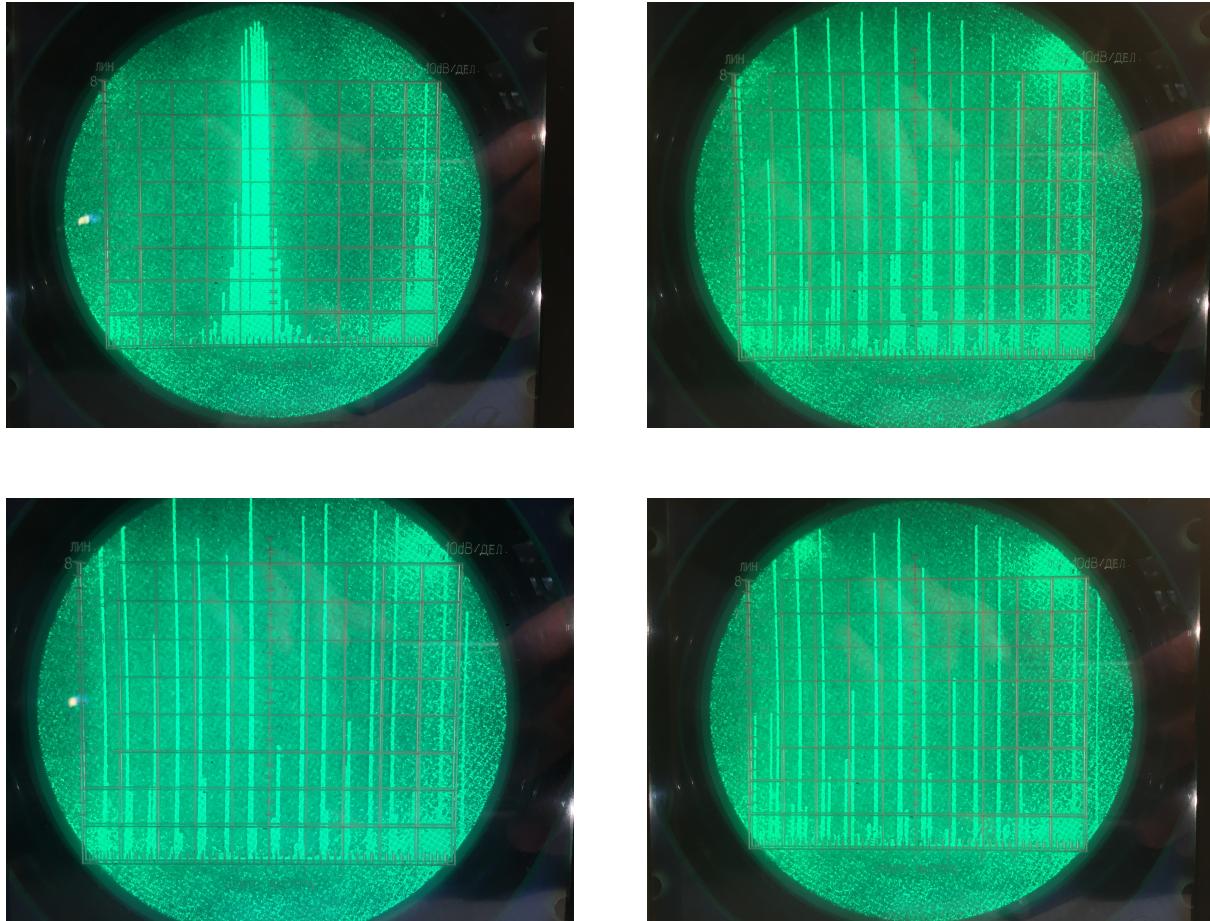


Рис. 12: Изменение спектра при увеличении частоты модулирующего сигнала (100% глубина модуляции).

3 Вывод

Экспериментально было проверено соотношение неопределенности в случае периодической последовательности прямоугольных импульсов и цугов гармонических колебаний. Точность достаточно высокая, полученные значения соответствуют ожиданиям. Основной вклад в погрешность вносит отсутствие мелких делений на анализаторе спектра.

В третьем эксперименте была проверена зависимость отношения амплитуд спектральных линий синусоидального сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции.