Курс спецматематики в листках для 7 класса

Автор: Иванова Елена Юрьевна
Редактор: Кузнецов Глеб Михайлович

12 августа 2023 г.

Оглавление

Предисловие

Эта книжка предназначена в первую очередь для учителей математики, работающих в профильных математических классах. Материалы книги могут быть также использованы в работе математических кружков, для дополнительных занятий и самостоятельной работы.

Мы будем ориентироваться на учителей математики, представляя удобный формат занятий в первую очередь для них.

Сама структура занятий основана на «листочковой системе», введенной в школьное образование Н.Н.Константиновым еще в 60е годы прошлого века. Начав заниматься спецматематикой с более младшими школьниками, нежели те, для которых изначально была разработана эта система, мы переработали и сам набор и порядок тем, и саму структуру.

Система была опробована автором в течение 15 лет на различных математических классах г.Москвы, выпускники которых завоевали четыре золотых и две серебряные медали на Международной математической олимпиаде школьников и получили множество наград на других всероссийских и международных соревнованиях. Часть из них уже закончила свое обучение в Вузе и плодотворно трудится на научном поприще.

В течение этих лет система модифицировалась, пока не пришла к нынешнему виду. Сейчас она достаточно гибка и, на наш взгляд, позволяет подстроиться к любому уровню школьников 7 класса, желающих изучать профильную математику.

По сути, система представляет собой «Уровневую систему листочков» [1], правила которой объявляются детям заранее. Лучше всего эти правила распечатать и выдать детям. Вот они:

Правила игры или как мы будем жить.

1. Задания по спецматематике сгруппированы по темам, а в каждой теме разнесены на два, три или более уровня.

2. Темы бывают обязательные и дополнительные.

3. Изначально при изучении новой темы все получают теоретический листок и листок уровня «один». Усвоение теоретического листка и решение (сдача) задач листка уровня «один» дает право на получение оценки «удовлетворительно», а также ведёт к получению заданий следующего уровня.

4. Чтобы перейти на следующий уровень после решения задач предлагается выполнить проверочное задание по соответствующей теме соответствующего уровня. Если задание выполнено успешно, то уровень зачтен. Если нет, то ученик возвращается к изучению плохо пройденной темы вновь и получает новые задания того же уровня.

5. Ученик может претендовать на получение следующего уровня без решения задач предыдущего. Для этого он может написать соответствующую проверочную работу, не решая задачи уровня. Если работа выполнена успешно (все верно), то ученик переводится на следующий уровень. В случае неудачи повторное выполнение проверочной работы без решения задач в этой теме для этого ученика не допускается.

6. Через некоторое оговорённое время (обычно, когда большинство освоило уровень 2-3), задачи разбираются и переходим к следующей теме. За выполнение второго уровня ставится «хорошо», за выполнение каждого следующего уровня – «отлично».

Комментарии для учителя.

[1] Напомним, что «система в листочках» предполагает, что в классе находится несколько принимающих, что дает возможность каждому индивидуально рассказывать решения задач принимающим. Кроме того на занятиях не предполагаются учебники. Все необходимые сведения выдаются в листках и дети могут решать эти задачи, как в классе, так и дома. Тем самым каждый имеет свой собственный ритм работы и движения. Одномоментно в классе дети могут иметь много разных листков и сдавать задачи в индивидуальном темпе.

Как только начинается новая тема, сначала она обсуждается в классе. Разбираются простые задачки, дается необходимый кусок теории и т.п. После этого детям выдается листок, условно называемый «Тема N. Теория. Уровень 1» В этом листке может быть приведен список задач, разобранных на занятии, короткий конспект рассказанной учителем теории, какие-то факты и задачи, которые учитель считает важным включить, но они не были рассказаны у доски.

Работа с теоретическим листком может идти по-разному. А) можно продолжить обсуждение коллективно, предлагая решить совместно какие-то задачи из выданного листка; Б) можно включить в листок набор простеньких задач по теме и предложить выполнить их письменно; В) можно выделить время для самостоятельного решения и потом разобрать индивидуально (если хватает принимающих) или у доски для всех; Г) а можно всем выдать сразу же и листок с задачами уровня 1 со словами «А теперь вы самостоятельно решаете задачи и нам рассказываете». Однако мы считаем, что вариантом Г) злоупотреблять не стоит. В течение года это возможно, но не более 1-2 раз и не на первых темах.

После того как с теоретическим листком так или иначе покончено, дети получают листок «Тема N. Задачи. Уровень 1». Обычно в таких листках от 8 до 12 задач. Предполагается, что средний ребенок должен их решить примерно за полторы недели. Приходя на каждое занятие, ученик рассказывает решенные дома задачи принимающему до тех пор, пока задачи не кончатся. Как только это произошло, ученик получает проверочную работу из 3-4 задач (но в простых уровнях может быть и больше) на основные идеи Уровня 1 и двадцать минут на письменное решение. Очевидно, что пользоваться своими записями задач листочка, теоретическим листком и т.п. не разрешается. Работа считается верно выполненной ТОЛЬКО в том случае, если ВСЕ задачи решены верно и написано полное решение. Если в какой-то задаче указан только ответ без пояснений или решение с недочетами, то работа считается невыполненной. Обычно в 1 уровне таких проблем не бывает – ребенок либо решил задачу и хорошо написал, либо нет. При переходе со 2 уровня на 3 нужно быть уже более внимательным, да и задачи там уже более содержательные.

Итак, если все задачи проверочной работы решены верно, то считается, что уровень 1 успешно пройден и ученик получает листок «Тема N. Задачи. Уровень 2» и листок «Тема N. Теория. Уровень 2», если таковой имеется.

В этом месте обращаем внимание, что в силу того, что дети получают такие листки в разное время, и новая теория не разбирается, теоретический листок должен быть составлен предельно аккуратно и давать всю необходимую информацию. В частности там могут быть включены примеры решения задач. Заметим, что если в какой-то момент уже все дети получили теоретический листок уровня 2, то имеет смысл потратить часть занятия на разбор задач 1 уровня, уделяя особое внимание тем задачам, которые являются ключевыми в этой теме, и тем задачам, классическое решение которых вы хотите донести до учеников.

Внимание! Мы считаем, что все задачи задачного листка должны быть разобраны преподавателем тем или иным способом. Либо у доски, либо индивидуально принимающим.

Еще несколько слов про пункт 5 «правил игры». Мы специально добавили в правила такую возможность. Бывает так, что ребенок уже много решал задач такого типа, и мы знаем, что он прекрасно с ними справится. В этом случае жалко времени и хочется идти дальше. Такой ребенок обычно сразу же легко пишет проверочную работу и получает следующий листок. Бывает также, что ребенок ложно считает, что он все хорошо знает и ему простые задачки решать незачем. Мы тоже в этом случае даем ему работу. Но если знания только кажущиеся, то чаще всего такой ребенок допускает при решении задач ошибки и работу не пишет. В этом случае он теряет право получить листок 2 уровня и должен вернуться к листку 1 уровня.

Что делать, если ученик сдал все задачи листка уровня 1, но не справился с проверочной работой? В этом случае ему предлагается листок «Тема N. Задачи. Уровень 1А». В этом листке содержатся задачи, аналогичные задачам предыдущего листка, только с измененными формулировками, числами и т.п. И ученик должен снова сдать все эти задачи. Как показывает практика, при переходе с уровня 1 на уровень 2 такое встречается крайне редко, а при переходе с уровня 2 на уровень 3 – часто. Поэтому всегда стоит иметь такой дубль.

В исключительных случаях (на нашей практике такое было только один раз), если вторая попытка написать проверочную работу (она уже, конечно, другая) снова неудачна, то ребенок получает листок «Тема N. Задачи. Уровень 1Б», но прежде с ним нужно индивидуально разобрать еще раз все задачи листка А.

В зависимости от сложности темы на нее отводится от 8 до 28 уроков (от 4 до 14 занятий, если они сгруппированы парами), то есть от 2 до 7 недель. Понятно, что это условно. При необходимости можно увеличивать время до двух месяцев. Больше изучать какую-то тему нежелательно, так как она уже затирается и детям становится скучно.

Примерно один раз в три месяца мы устраиваем контрольные работы по 2-3 темам. Примеры таких работ тоже есть в книжке.

Кроме того часть занятий отведено под игры и устные зачеты. Некоторые задачи в листочках отмечены буквой «n». Эти задачи предназначены для письменной сдачи учениками. То есть они не принимаются устно, а требуется принести решение, записанное аккуратно и подробно дома. Эти решения проверяются, отмечаются не только верный / неверный ход решения, но и оформление, не в смысле чистописания (хотя это тоже приветствуется в разумных пределах), а в смысле строгости и аккуратности изложения.

Расположение материала.

Материалы условно разделены на несколько частей.

1. Материалы, которые выдаются детям. Мы постарались сформировать их в виде уже готовом к раздаче.
2. Комментарии для учителя и тексты для разбора в классе.
3. Проверочные и самостоятельные работы.
4. Решения некоторых задач и комментарии.

Глава 1

Четность

Как проходит занятие

Поскольку это первое занятие такого типа, то сначала школьникам объясняются «правила игры», отвечая на все возникающие вопросы. Далее мы предлагаем не выдавать сразу задачи для решения, а сначала поговорить в целом, как школьники понимают четные и нечетные числа, их свойства.

На доске выписываем равенства :

$+ =$ $\qquad$ $+ =$ $\qquad$ $+ =$ $\qquad$ $+ =$

Первый факт можно предложить доказать, используя только определение чётного числа – «Число называется чётным, если его можно разделить на две равные части».[1]

Решение. Пусть число А четное и число В четное. Докажем, что число $+$ также четное. По определению это значит, что число А делится на 2 и число В делится на 2. То есть $= a + a$ и $= b + b$. Тогда $+ = (a + b) + (a + b)$

Тут можно проиллюстрировать свою речь картинками типа:

$= \blacktriangle + \blacktriangle \qquad = \blacktriangledown + \blacktriangledown \qquad + = \blacklozenge + \blacklozenge$

То есть сумму можно представить в виде суммы двух равных целых слагаемых. Что и требовалось доказать. □

Аналогично для разности четных чисел. Можно предложить доказать этот факт самостоятельно или вынести позже в проверочную работу.

Еще один факт, который стоит доказать. А именно то, что сумма четного и нечетного числа нечетна.

Решение. Пусть – четное, – нечетное. Докажем, что $+$ – четное. Будем доказывать «методом от противного». Предположим, что требуемое неверно и А+В – четное. Тогда $= (+) -$ – разность двух четных чисел и должно быть четным. Получили противоречие. То есть $+$ – нечетно. □

Далее можно всем вместе разобрать часть задач и упражнений из теоретического листка (он приведен ниже). Рекомендуется сначала обсудить задачи 1-3 этого листка и только после разбора выдать этот листок школьникам.

После выдачи листка можно предложить школьникам проверить себя – самостоятельно решить упражнения и поверить себя по ответам в конце листка. Мы обычно обсуждаем все вместе задачи на доказательство, так как в этом возрасте такие задания идут наиболее тяжело. После этого, если вопросов нет, выдать первый листок уже с заданиями.

Обращаем внимание, что первый листок включает в себя не только сами задачи, но и некоторые комментарии к ним и дополнительно «правила игры»

[1] Предварительно мы оговариваем, что пока имеем дело только с целыми числами и «делимость на две равные части» мы подразумеваем делимость целого числа на целочисленные части.

Теоретический Листок. Четность.

Прежде чем решать задачи вспомните, какие числа называются четными, а какие нечетными и их простейшие свойства.

Сумма или разность двух чисел одной четности четна.
Сумма или разность двух чисел разной четности нечетна.

Решите несколько приведенных ниже упражнений:

Упражнение 1. Сложили 3 нечетных числа. Могло ли получится 1024?

Упражнение 2. Не выполняя никаких арифметических действий, назовите чётность чисел:

1. $1000 - 947 \times 7567 \times 6 + 2009 + 2006$
2. $204 \times 121 + 5360 \times 7 + 3121 + 6731 \times 81 \times 11 - 154 - 77 + 87$
3. $(1246254651 - 45645645) \times (67876 - 59681) + (1163 - 712) \times (948 - 8569) + 886541 \times 735 + 1$
4. $1000 - 947 \times 7567 \times 76 + 2009 + 2006$
5. $204 \times 2121 + 5360 \times 7 + 3121 + 6731 \times 81 \times 11 - 154 - 77 + 87$
6. $(1246254651 - 45645645) \times (67876 - 59681) + (1163 - 712) \times (948 - 8569) + 886541 \times 735 + 1$

Упражнение 3. Имеется два числа одной четности. Какова может быть четность их разности?

Упражнение 4. Сумма двух чисел нечетна. Какой четности их разность?

Упражнение 5. Двое играют в следующую игру: первый игрок рисует на клетчатой бумаге квадрат. Затем второй игрок зачеркивает одну из клеток этого квадрата. Потом то же делает первый, и так далее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре и как ему надо играть?

Задача 1.1. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса[2], оппозиция закричала «Это обман!». Почему?

Решение. На первый взгляд, не обладая информацией о численности палат, вряд ли можно делать какие-либо выводы. Тем не менее, предположим, что описанная в задаче ситуация возможна. Если голосовавших «против» было х, то голосовавших «за» было $x+23$. Следовательно, всего проголосовало $2x + 23$ человек (нечетное число), а в двух палатах равной численности в сумме четное число членов. Противоречие. □

Решение. «без формул или на пальцах» Первоначальное утверждение: если какое-то количество можно разбить на две равные части, то это количество четно. В нашем случае из условия следует, что в парламенте четное число членов. Далее, заметим, что если к какому-либо числу прибавить нечетное число, то четность суммы поменяется (если число было четным – станет нечетным, если же было нечетным, то станет четным). Тогда количество проголосовавших «за» и «против» имеют разную четность. Но тогда их сумма нечетна, как сумма двух чисел разной четности. Противоречие. □

В приведенном примере мы использовали наблюдение, что сумма или разность четного и нечетного числа – нечетное число. Если рассматривать четность как частный случай делимости (а именно: четность – это делимость на натуральное число 2), то в данном наблюдении нет ничего необычного. Отличие четности от любой другой делимости заключается в наблюдении, что сумма двух нечетных чисел – четное число (например, сумма двух чисел, не делящихся на три, может как делиться, так и не делиться на 3). Продемонстрируем еще на одном примере, как можно это использовать.

[2] «большинством в 23 голоса» – значит голосующих «за» было на 23 больше, чем голосующих «против».

Задача 1.2. На 99 карточках пишут числа 1, 2, ..., 99, перемешивают их, раскладывают чистыми сторонами вверх и снова пишут числа 1, 2, ..., 99. Для каждой карточки складывают два её числа и 99 полученных сумм перемножают. Докажите, что результат чётен.

Решение. Так как на карточках написаны числа от 1 до 99, то среди них нечетных на одно больше чем четных. Поскольку нечетных больше половины, на какой-то карточке с обеих сторон будут нечетные числа. Их сумма будет четным числом. При умножении нескольких натуральных чисел, среди которых есть четное, получается четное число. □

В задаче 2 мы использовали также тот факт, что произведение нескольких натуральных чисел, среди которых есть четное, – четное число. Это же можно формулировать по-другому: если произведение некоторого набора натуральных чисел – число нечетное, то все эти числа нечетные.

Сумма нечетного количества нечетных чисел нечетна.

Этот факт является простым следствием того, что сумма двух нечетных чисел – четное число.

Упражнение 6. Сложили 5 целых чисел. Получили 2017. Сколько среди них может быть нечётных? А если чисел 2017?

Упражнение 7. Сколько нечетных среди первых 100 натуральных чисел? А среди 2019? А среди первых N натуральных чисел?

Задача 1.3. Филя перемножил 17 целых чисел и получил 1025, а Степашка сложил эти же числа и получил 100. Докажите, что кто-то из них ошибся.

Решение. Предположим, что Филя не ошибся. Тогда если Филя, перемножая натуральные числа, получил нечетный результат, то все множители были нечетными. Но в то же время сумма 17 нечетных чисел – нечетное число, и никак не может равняться 100. □

Чередование

Выполняя *упражнение 7*, вы, несомненно, воспользовались тем, что четные и нечетные числа в числовом ряду идут попеременно.

Упражнение 8. Укажите, в каких еще задачах, приведенных ранее, используется идея чередования.

Упражнение 9. Среди 10 целых чисел 7 четных и 3 нечетных. Какой максимальной длины цепочка последовательных чисел может быть выстроена из них в лучшем случае?

Упражнение 10. На шахматной доске на одной из клеток стоял конь. Он сделал несколько ходов и вернулся в ту же клетку. Четное или нечетное число ходов он сделал?

Упражнение 11. Дрессированный кузнечик прыгает по прямой – каждый раз на 1 метр вправо или влево. Через некоторое время он оказался в исходной точке. Докажите, что он сделал четное число прыжков.

Задача 1.4. За время летних каникул сторож посадил вдоль школьного забора 20 яблонь. 1 сентября оказалось, что число яблок на соседних деревьях отличается на 1. Может ли на всех этих яблонях быть ровно 2017 яблок?

Решение. Не может. Будем называть яблоню с четным количеством яблок четной, а с нечетным – нечетной. Предположим, что описываемое в условии возможно. Тогда четные и нечетные яблони чередуются. Следовательно, половина яблонь – четные, а половина – нечетные. Половина – это 10. Сосчитаем общее количество яблок. Нам нужно сложить 10 четных чисел и 10 нечетных. Очевидно, что эта сумма является четным числом, поэтому получить 2017 невозможно. □

Ответы к упражнениям: **1.** нет. **2.** 1) нечетно; 2) четно; 3) нечетно. **3.** любым четным числом. **4.** нечетна. **5.** Первый всегда может обеспечить себе выигрыш. Для этого он должен нарисовать квадрат, состоящий из четного числа клеток. **6.** 1) 1 или 3, или 5. 2) любое нечетное число от 1 до 2017. **7.** 1) 50; 2) 1009; 3) если N четно, то N/2, если же нечетно, то (N+1)/2. **8.** например, задача 2 и упр.5. **9.** цепочка из 7 чисел. **10.** четное.

Листок 1. Четность. Уровень 1.

Если написанная программа сработала правильно, то это значит, что во время ее работы выполнилось четное число ошибок или программист не понял задание.

Правило четности ошибок

Задачи вы можете решать как дома, так и в классе. Рекомендуется коротко записывать решение в тетрадь. Рассказывать решения задач вы будет одному из принимающих. Задачи, отмеченные значком п, приниматься в устном форме не будут. В данном случае это единственная задача 1.8. Решение таких задач надлежит выполнить в письменном виде дома и принести на занятие спецматематики. Через некоторое время часть задач будет разобрана, после чего решения этих задач приниматься не будет. Рекомендуем решать задачи по порядку, поскольку зачастую в решении следующей задачи можно использовать идею из предыдущей.

Желаем успеха!

Задача 1.5. Филя пишет на доску одно целое число, а Степашка – другое. Если произведение чётно, победителем объявляют Филю, если нечётно, то Степашку. Может ли один из игроков играть так, чтобы непременно выиграть?

Задача 1.6. Докажите, что произведение любых двух последовательных чисел четно.

Задача 1.7. Каким (четным или нечетным) может быть число $n^2 + n$, где n – целое?[3]

Задача 1.8. ^{n} Может ли для каких-нибудь целых чисел a и b быть верно:

$$ab(a - b) = 201720182019$$

В предыдущих задачах у нас обычно имелось фиксированное количество целых чисел, с которыми мы производили некоторые операции. Для решения задачи требовалось выяснить, каким – четным или нечетным – числом является результат этих операций. Можно рассмотреть обратную задачу. Пусть имеется некоторое целое число, и мы хотим разбить его на части. Возникает вопрос: на какие части мы можем его разбить и сколько среди них может быть нечетных? Или, другими словами, в виде суммы каких слагаемых можно представить данное число? Например, число 17 можно представить в виде суммы трех или пяти нечетных слагаемых, но нельзя в виде четырех.

Количество нечетных чисел.

Задача 1.9. Сумма четырнадцати целых чисел является нечетным числом. Может ли их произведение тоже быть нечётным?

Задача 1.10. За время летних каникул вдоль забора школы посадили 20 яблонь. 1 сентября оказалось, что число яблок на соседних деревьях отличается на 1. Может ли на всех этих яблонях быть ровно 2011 яблок?

Задача 1.11. На доске написано 2011 целых чисел. Всегда ли можно стереть одно из них так, чтобы сумма всех оставшихся чисел была четна?

Задача 1.12. Алиса и Базилио устроили благотворительную лотерею. Они написали на 33 билетах (занумерованных числами от 1 до 33) 33 последовательных числа от 33 до 65 (в каком-то порядке) и объявили, что выигрышным считается билет, у которого сумма номера билета и написанного на нем числа четна. Докажите, что при таких правилах им в любом случае придется кому-то выплатить выигрыш.

[3] Для решения этой задачи дети должны уметь выносить общий множитель на скобку. Если по какой-то причине это еще не изучено, то лучше давать задачу в виде произведения n и $(n + 1)$

Задача 1.13. 98 спичек разложили в 19 коробков и на каждом написали количество спичек в этом коробке. Может ли произведение этих чисел быть нечетным числом? Если да, то приведите пример, если нет, то докажите, почему.

Выполняя упражнение 7 из теоретического листочка, вы, несомненно, воспользовались тем, что четные и нечетные числа в числовом ряду идут попеременно:

1	2	3	4	5	6	...
Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	...

В следующих задачах вам придется пользоваться этим соображением неоднократно. Более того, идея чередования характерна не только для чисел. Зачастую чередуются не числа, а какие-либо свойства объектов.

Задача 1.14. Можно ли разложить несколько мячей а)*в 3; б)*в 4; в) в 2018; г)2019 ящиков, расставленных по кругу, так, чтобы в любых двух соседних ящиках число мячей отличалось на 1?

Задача 1.15. Вокруг круглой поляны растут 2011 сосен. Незнайка измерил высоту каждой из них и заявил, что любые две соседние сосны отличаются по высоте ровно на метр. Знайка тут же заметил, что Незнайка врет. Кому верить?

Задача 1.16. Можно ли обойти конем всю доску, побывав на каждом поле ровно один раз, начав с поля a1, а закончив на поле h8? (Если можно, то как, если нельзя, то почему.)

Письменные задачи.

Если вы заметили, в листке есть задача, отмеченная буквой ^{n} – это означает, что решение задачи должно быть выполнено в письменном виде и сдано на листке.

Для чего это сделано?

Общеизвестно, что большинству школьников достаточно сложно дается запись своих решений. И такие задания направлены как раз на вырабатывание этого умения. В том числе этим регулируется строгость изложения. Школьникам сообщается, что в письменных решениях будет учитываться не только «решил» / «не решил», а насколько связен и логичен текст.

В любом случае потом всем школьника выдаются письменные решения «от автора», чтобы они могли сравнить со своими опусами.

Переход на второй уровень

Наконец наступает момент, когда кто-то решил все задачи листка уровня 1 или просто решил, что он уже все знает из этого листка и готов к проверке.

Наступает момент проверочной работы.

Листок 1.1 Четность. Переводная работа.

1. Дайте определение чётного числа.

2. Какие из утверждений верны: А) Сумма нечётного количества чётных чисел нечётна. Б) Произведение нечётного количества чётных чисел нечётно. В) Сумма нечётного количества нечётных чисел нечётна. Г) Произведение чётного количества нечётных чисел чётно.

3. Сумма двух чисел нечетна. Какой четности может быть их разность?

4. Не выполняя никаких арифметических действий, укажите чётность числа:

$$(124789254651 - 45645646) \cdot (67776 - 59681) + (18963 - 712) \cdot (94978 - 8569) + 8865431 \cdot 735 + 17$$

5. Среди 11 целых чисел 8 четных и 3 нечетных. Какой максимальной длины цепочка последовательных чисел может быть выстроена из них в лучшем случае?

6. Аня попала в Зазеркалье, где встретила свое отражение – Яну. Потом Яна попала в свое Зазеркалье, где встретила свое отражение – конечно же, Аню-2! Аня-2 попала в свое Зазеркалье, где была Яна-2. И так происходило достаточно долго, пока зеркало не разбилось. Назовите, как звали 2019-ю девочку?

Комментарии для преподавателя

Первая проверочная работа достаточно простая. Она рассчитана на 25-35 минут.

Полные пояснения требуются только в задачах 5 и 6. В остальных только ответы.

Если все задания выполнены правильно, то считается, что школьник успешно прошел 1 уровень и получает листок 2 уровня.

Если же что-то неверно, то те, кто не сдавали задачи из листка 1 уровня, должны их решить и сдать, а те, кто сдал, но тем не менее работу написал неудачно, получает Дубль листка 1 уровня. Поскольку у нас пока не было прецедентов, что кто-то не справился с проверочной работой, то мы не обзавелись дублем. Однако учитель легко может его сделать, заменив имена и числа в задачах.

Решения переводной работы с уровня 1 на уровень 2

1. Четное число дает остаток 0 при делении на 2.

2. А) нет, потому что сумма любого количества четных чисел – четна. Б) нет, потому что произведение целых чисел четно, если хотя бы одно из них четно. В) да Г) нет, потому что произведение любого количества нечетных чисел – нечетно.

3. Только нечетной, потому что их четности различны.

4. Перепишем в виде: $\overbrace{\underbrace{(\ -\ )}\cdot\underbrace{(\ -\ )}} + \overbrace{\underbrace{(\ -\ )}\cdot\underbrace{(\ -\ )}} + \underbrace{(\ \cdot\ )} + = + + + =$

5. Четные и нечетные чередуются, значит четных может быть только на 1 больше или меньше нечетных, а нечетных максимум 3. Значит четных 4. Значит всего последовательных чисел не больше 7.

6. Выпишем первые несколько имен:

1 девочка – Аня-1
2 девочка – Яна-1
3 девочка – Аня-2
4 девочка – Яна-2
5 девочка – Аня-3
6 девочка – Яна-3
...

Заметим, что Аня всегда "нечетная девочка а Яна - всегда "четная". После этого можно заметить, что номера девочек - это номер соответствующего четного или нечетного числа в последовательности. Например, Яна-5 обозначает пятое четное число, а Аня-7 – седьмое нечетное. Соответственно задача сводится к тому, чтобы узнать каким по счету является данное число. 2010 – 1005 четных и 1005 нечетных числе, следовательно 2011 – 1006 нечетное число, значит ему соответствует девочка Аня-1006 2018 – 1009 четных и 1009 нечетных числе, следовательно 2019 – 1010 нечетное число, значит ему соответствует девочка Аня-1010

Примечание. Если не получается решить задачу в общем случае, можно построить примеры при малых числах и найти в них закономерность. Предложить гипотезу и доказать ее.

Листок 1. Четность. Уровень 2.

Беды обычно приходят парами — пара за парой, пара за парой, пара за парой...

Следствие Кона из закона Мерфи

Задача 1.17. Полный комплект костей домино выложен в цепочку. На одном конце оказалась пятерка. А что могло оказаться на другом?

Задача 1.18. Из полного набора домино, подаренного родителями, Ваня потерял все кости с «пустышками». Сможет ли теперь кто-нибудь выложить оставшиеся кости в ряд?

Задача 1.19. На бирже в городе Нью-Васюки ежедневно в 10.00 проходят торги. Рано утром 1 января N-го года цены на акции фирм «Вася Inc.» и «Петя и Ко» были один и два рубля соответственно. Вечером 31 декабря того же года цены стали снова теми же. Лёша установил, что цены на акции этих фирм всегда были различны, каждый день изменялись и все время были либо один, либо два рубля. Докажите, что прошедший год был високосным.

Задача 1.20. ^{n} В разные моменты времени из пунктов A и B выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно. Доехав до своих пунктов, они опять развернулись и поехали навстречу друг другу. На этот раз они встретились в точке D и, развернувшись, вновь поехали к своим пунктам. И т.д. В какой точке отрезка AB произойдет их 2019 встреча?

Задача 1.21. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, ..., восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

Задача 1.22. 7М класс упражняется в счете. Анатолий Анатольевич написал на доске число 2011. После чего каждый ученик вышел к доске, прибавил или вычел 17 или 13 и записал получившийся результат. Когда каждый из 20 учеников вышел по одному разу, на доске оказалось написано число 2012. Анатолий Анатольевич посмотрел на доску и расстроился. Докажите, что кто-то из учеников ошибся.

Задача 1.23. У Вини-Пуха было 2019 горшочков меда. Кристофер Робин принес или забрал 9 горшочков, что именно – Пух не помнит. На следующий день Кристофер Робин снова пришел и принес или забрал 8 горшочков, на следующий день – 7 и так далее. Наконец Кристофер Робин пришел и принес или забрал один горшочек. а) Могло ли у Винни-Пуха на 10 день оказаться горшочков столько же, сколько и было в самом начале, то есть 2019? б) Сколько вообще горшочков меда могло быть у Вини-Пуха на 10 день, если все это время он мед не ел?

Разбиение на пары

Задача 1.24. Докажите, что число способов расставить на доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга, четно.

Задача 1.25. Лиза сложила лист бумаги пополам, после чего вырезала из него фигурку. После разворачивания фигурка оказалась шестиугольником. Сколько различных значений могут принимать длины его сторон?

Задача 1.26. Пусть билеты для проезда в наземном транспорте[4] имеют номера от 000000 до 999999. Назовем билет «счастливым», если сумма первых трех цифр равна сумме трех последних его цифр. Докажите, что число таких «счастливых» билетов четно. (Для решения задачи вовсе не обязательно считать точное количество «счастливых» билетов)

[4] Мы не будем здесь рассматривать все возможные билеты для проезда. Безусловно, сейчас существуют и семизначные, и восьми- и даже тринадцатизначные номера для проездных документов.

Задача 1.27. 7Ю класс уселся за круглый стол. Елена Юрьевна между соседями-мальчиками положила по ручке, между соседями-девочками – по карандашу, а если рядом сидели мальчик и девочка, то между ними она положила по тетрадке.
а) Докажите, что ей понадобиться четное число тетрадок.
б) А может ли она обойтись нечетным количеством карандашей?
в) Каким минимальным числом ручек она могла обойтись, если в классе 17 мальчиков и 5 девочек?

Задача 1.28. а) В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «–» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?
б) А если выписаны числа от 1 до 2019, можно ли получить 17?

Задача 1.29. * Для уроков информатики Михаил Владимирович приготовил 7 карточек, на которых были написаны числа от 5 до 11. Он их перемешал и предложил Глебу и Юле. Глеб взял себе три карточки, Юля – две, а оставшиеся две Михаил Владимирович отдал Ване, который их тут же потерял. Глеб сразу сказал Юле: «Я точно знаю, что сумма чисел на твоих карточках четна», и оказался абсолютно прав. Какие числа были написаны на карточках у Глеба?

Задача 1.30. * На 99 карточках пишут числа 1, 2, ..., 99, перемешивают их, раскладывают чистыми сторонами вверх и снова пишут числа 1, 2, ..., 99. Для каждой карточки складывают два её числа и 99 полученных сумм перемножают. Докажите, что результат чётен.

*Напоминаем, что задачи, отмеченные значком ^{n}, приниматься в устном форме не будут. В данном случае это единственная задача 1.20. Решение таких задач надлежит выполнить в письменном виде дома и принести на занятие спецматематики. Через некоторое время часть задач будет разобрана, после чего решения этих задач приниматься не будет. Задачи, отмеченные звездочками * не являются обязательными для получения следующего задания. Их решение может приниматься после перехода на следующий уровень.*

Желаем успеха!

Решения письменных задач.

В уровне 2 также есть письменная задача, которую нужно сдавать в письменном виде. Целесообразно после того, как все сдадут письменные задачи обоих уровней (или большинство, если все-таки есть те, кому через значительное время не удалось получить второй уровень), выдать письменные решения.

Задача 1.8^n Может ли для каких-нибудь целых чисел a и b быть верно:

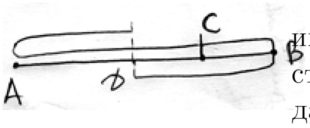
$$ab(a-b) = 201720182019$$

Решение. **1 способ.** Рассмотрим два случая. 1 случай: числа a и b одной четности. Тогда $a-b$ обязательно четно. Следовательно, произведение $ab(a-b)$ также будет четным. 2 случай: числа a и b разной четности. Тогда в произведении $ab(a-b)$ один из множителей четен и, следовательно, все произведение четно. Тем самым мы доказали, что для любых целых чисел и b произведение $ab(a-b)$ четно. Но число 201720182019 нечетно, следовательно, требуемое в условии невозможно.

2 способ. Поскольку 201720182019 – нечетное число, то требуется выяснить, можно ли его разложить на три нечетных множителя указанного в условии вида. Предположим, что это возможно, тогда числа a и b должны быть нечетными, но тогда $a-b$ обязательно четно. Следовательно, произведение $ab(a-b)$ также будет четным. Противоречие. Следовательно, требуемое в условии невозможно. □

Задача 1.20^n В разные моменты времени из пунктов A и B выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно. Доехав до своих пунктов, они опять развернулись и поехали навстречу друг другу. На этот раз они встретились в точке D и, развернувшись, вновь поехали к своим пунктам. И т.д. В какой точке отрезка AB произойдет их 2019 встреча?

Решение. В точке C. Без ограничения общности можно считать, что первым выехал кто-то из A. Тогда пусть K – точка, в которой находится этот кто-то в тот момент времени, когда второй выехал из B. Теперь они одновременно стартуют – один из B, другой из K и через некоторое время прибывают в C. С этого момента точка K больше не имеет значения. Они разворачиваются и через некоторое время T одновременно прибывают в D. И так далее. Заметим, что за время T вместе оба путешественника проедут удвоенный путь от A до B. (см.рис.). Теперь, если они развернутся в точке D и поедут обратно, то за время T они снова приедут в точку C (это будет их третья встреча). И так далее. Отсюда следует, что все нечетные встречи будут происходить в точке C, а все четные – в точке D. Поскольку 2019 – нечетное число, то 2019-я встреча состоится в точке C. □



Замечание Отметим, что мы не использовали информацию о том, кто именно выехал из какого пункта и какая именно скорость была у путешественников. Используется только неизменность скоростей. Для решения задачи это неважно. Более того, при определенных условиях точки C и D могут совпадать, но это тоже не имеет значения, поскольку приведенные выше рассуждения справедливы и для этого случая.

Переход на третий уровень

В этой теме переход на третий уровень необычен. Проверочная работа включает в себя не только задачи на тему четности и разбиения на пары, но упражнения на умение видеть аналогии.

Если в группе почти все собираются писать проверочную работу для перехода со 2 уровня на 3, то можно сначала первую часть листка разобрать вместе. Иначе – отвести больше времени на выполнение работы.

Разберем сначала несколько примеров.

1. Двое играют в следующую игру: первый игрок рисует на клетчатой бумаге квадрат. Затем второй игрок зачеркивает одну из клеток этого квадрата. Потом то же делает первый, и так далее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре и как ему надо играть?

2. Фрекен Бок и Карлсон играют в фантики. Сначала Карлсон вынимает из кармана несколько фантиков, затем фрекен Бок забирает себе один, затем Карлсон и так далее, пока фантики не кончатся. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре и как ему надо играть?

Установление аналогии. Пусть в задаче а) первый не рисует квадрат, а выкладывает фантики в виде квадрата, тогда понятно, что в этом случае «забирание» фантика соответствует зачеркиванию клетки квадрата. Тем самым мы показали, что задачи аналогичны.

1. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили еще по точке. Такое "уплотнение"повторили еще дважды (всего три раза). В результате на прямой оказалось отмечено 4009 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

2. На квартиры была очередь, и около строящегося дома появился очень странный палаточный городок: все палатки были выстроены в линию. Через некоторое время между каждыми двумя поставили ещё по одной палатке. Через некоторое время – между каждыми двумя снова по одной. Наконец дом достроили. В нём оказалось 15 этажей, на каждом этаже было 3 квартиры. Каждой семье досталось ровно по одной, и все квартиры оказались заняты. Сколько семей приехало сначала, если в одной палатке жила одна семья?

3. В буфете после городской олимпиады выстроилась очередь за бутербродами. Бутерброды задерживались, и в каждый промежуток между стоящими успело влезть по человеку. Бутерброды все еще не начали выдавать, и во все промежутки опять влезло по человеку, а потом еще по человеку. Тут наконец принесли 4009 бутербродов, и всем стоящим досталось по одному. Сколько человек стояли в очереди первоначально?

Установление аналогии. Заметим, что задачи 1 и 3 полностью аналогичны даже численно. Заменим в задаче 3 людей точками, тогда количество принесенных бутербродов в точности совпадает с окончательным количеством людей в очереди, и мы получим формулировку задачи 1. В задаче 2 общее количество семей закамуфлировано под количество квартир, которое надо сначала вычислить. Сделав это, а также заменив семьи (палатки) точками, мы получим задачу 1 с другими численными данными, в которой «уплотнение» произведено только два, а не три раза.

1. Имеется две кучки 9 камней и 10 камней. За один ход можно взять сколько угодно камней из любой (но только одной) кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

2. На шахматной доске размером 10×11 в левом нижнем углу стоит ладья. Двое по очереди ходят ею вверх или право (влево и вниз ходить не разрешается). Выигрывает тот, кто первым поставит ладью в правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре?

Установление аналогии. В этом примере аналогия гораздо менее очевидна, однако она есть. Занумеруем вертикали доски от 0 до 10 (слева направо), а горизонтали от 0 до 9 (снизу вверх). Будем устанавливать соответствие следующим образом: представим себе, что мы играем в обе игры одновременно. Будем двигать ладью вверх, если берут камни из кучки с 9 камнями (назовем эту кучку – первая) и вправо, если из кучки из 10-ю камнями (назовем эту кучку – вторая). И, наоборот, при движении ладьи по горизонтали будем брать камни из второй кучки, а при движении по вертикали – из первой. Каждый раз количество взятых камней равно количеству клеток, на которые переместили ладью. Тем самым мы установили соответствие между позициями двух этих игр.[5]

[5]Другими словами: мы задаем координаты ладьи на доске и устанавливаем соответствие позиций следующим образом: позиции ладьи $(a\ ;\ b)$ соответствует позиция a камней в первой кучке и b камней во второй.

Листок 1.2. Четность. Переводная работа. Аналогии.

Как узнать, кто вы – физик или математик? Предлагается решить простейшую задачу: вскипятить воду, если дано: газовая плита, кран с водой, спички. В этом случае действия физика и математика полностью совпадают. Другая задача: вскипятить воду, если дано: все то же самое, но чайник с водой и газ включен. Что сделает физик? Просто поставит чайник на огонь. Что сделает математик? Выключит газ и выльет воду из чайника, чтобы свести задачу к предыдущей, уже решенной!

Из сборника "Физики шутят."

Найдите аналогичные между собой и аналогичные задачам из листков 1 и 2 уровня. Обращаем внимание, что числа не обязательно совпадают. Обязательно установите аналогию, как это сделано на примерах. Решать все задачи не нужно.

1. На 20 кустах малины, растущих в ряд, количество ягод на любых двух соседних кустах отличается на 1. Можно ли собрать с них 2019 ягод? (Оставлять ягоды на кустах нельзя, они сгниют)
2. У фальшивомонетчиков Гоги и Сереги есть 2018 монет номиналом от 1 до 2018 центов. Они хотят так поделить монеты, чтобы номинальная сумма центов у обоих была одинакова. Удастся ли им это сделать?
3. Воевода и его богатыри питаются золотыми рыбками. Воевода наловил 20 золотых рыбок. Тридцать три богатыря передают друг другу чашу с рыбками, и каждый кладет или забирает из чаши рыбку. Может ли в чаше в результате получиться 10 золотых рыбок?
4. У Лизы в 17 спичечных коробках живут 2010 тараканов. На каждом коробке написано количество проживающих в нем тараканов. Может ли произведение этих чисел быть нечетным числом? Если да, то приведите пример, если нет, то докажите, почему.
5. Может ли окружность пересекать в одной точке (без касания!) все стороны правильного 17-ти угольника?
6. У Ильи есть 2018 стальных шариков весом от 1г до 2018г. Он пытается разложить их на две чашки весов так, чтобы весы оказались в равновесии. Сможет ли он это сделать?
7. Катя вернулась из летнего лагеря и заявила, что в лагере, кроме нее, было еще ровно 2018 ребят, и в начале смены каждый был знаком ровно с тремя. Права ли Катя?
8. Куча семиклассников встали в круг, и каждый из них загадал число. После чего Илья Владимирович прошел круг, и для каждых двух соседей подсчитал произведение их чисел. Если у него получалось отрицательное число, то он ставил обоим этим ребятам по двойке. Всего было поставлено 10 двоек. Докажите, что кто-то из семиклассников загадал ноль.
9. Злой волшебник пообещал Мефодию Буслаеву власть над миром, если он согнет из волшебной золотой проволоки 2019-тиугольник, длины всех сторон которого составляют нечетное число сантиметров. Волшебник дал ему моток такой проволоки длиной 20 м 8 см и сказал, что проволока обязательно должна быть использована полностью. Сможет ли Мефодий получить власть над миром?
10. Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1см в какую-то сторону, во второй раз – на 2см, в третий – на 3см, и так далее. Докажите, что он не сможет за 2018 прыжков вернуться в начальную точку.

Запишите решение задачи 8

Еще раз обращаем внимание, что в данной работе не требуется приводить решения всех задач. Для успешной сдали нужно указать аналогии и записать решение лишь одной задачи.

Решения проверочной работы с уровня 2 на уровень 3

Задачи 2 и 6 полностью аналогичны таким образом: монеты – гири. В обоих задачах требуется разделить их пополам. Также они схожи с задачей 10, в которой прыжок вправо – монета одному фальшивомонетчику, а прыжок влево - другому. Условие совпадения суммы денег эквивалентно условию попадания в начало координат. Задача 1.23 аналогична этим трем - 2, 6, 10.

номер в проверочной	номер в листках 1.1, 1.2
1,3	1.14,1.15,1.28
4	1.13
5	1.16
8	1.17,1.18
9	1.22

Решение. Задачи 8. Предположим противное, что 0 никто не загадал. Тогда пар соседей, у которых произведение отрицательно четно. Потому что количество пар «-» «+» ровно столько же, сколько пар «+» «-» (если идти, например, по часовой стрелке). А 10 – это 5 пар. Противоречие. □

Дубль уровня 2

Второй уровень достаточно сложен. Поэтому скорее всего дубль этого листка потребуется.

Листок 1. Четность. Уровень 2А

Задача 1.31. На рисунке прямая пересекает все стороны шестиугольника. Может ли прямая пересекать все стороны какого-нибудь 17-угольника, не проходя ни через одну его вершину?

Задача 1.32. По кругу зацеплены 17 шестерёнок: первая со второй, вторая с третьей … семнадцатая с первой. Могут ли они вращаться?

Задача 1.33. 100 фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить фишки в обратном порядке?

Задача 1.34. Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1см в какую-то сторону, во второй раз – на 3см, в третий – на 5см, и так далее. Сможет ли он за 2011 прыжков вернуться в начальную точку?

Задача 1.35. В 7Ю учится 30 человек. На каждый день нужно назначить трое дежурных. Можно ли так составить график дежурства, чтобы через некоторое время каждый подежурил с каждым ровно один раз?

Задача 1.36. На шахматной доске стоят 17 шашек, расположенных симметрично относительно большой диагонали. Докажите, что есть шашка или шашки и на большой диагонали.

Задача 1.37. Витя и Коля купили несколько шоколадок «Вдохновение»[6] и решили их поделить между собой. Каждую плитку брал себе целиком либо Витя, либо Коля, либо они ломали ее пополам. После этого Витя заявил, что Коля взял себе на одну дольку больше. Могло ли такое быть?

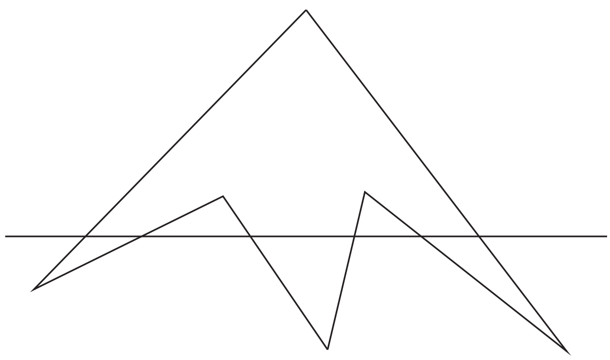


Рис. 1.1: **Задача 1.31**

[6]Шоколадка «Вдохновение» состоит из нескольких отдельных плиток, каждая из которых содержит две дольки.

Листок 1. Четность. Переводная работа 2А. Аналогии.

Найдите аналогичные между собой и аналогичные задачам из листков 1 и 2 уровня. Обращаем внимание, что числа не обязательно совпадают. Обязательно установите аналогию, как это сделано на примерах.

Задача 1А. У двоечника Вани есть 2019 дневников. Он хочет разложить их по кругу так, чтобы количество двоек в лежащих рядом дневниках отличалось на 1. Сможет ли он это сделать?

Задача 2А. На далекой планете Занзибар живут многоножки. Как-то собрались вместе 2018 многоножек с количеством ножек от 1 до 2018. Причем известно, что у всех количество ножек разное. Они хотят разбиться на две команды для игры в крокет, чтобы общее количество ножек в командах было одинаково. Удастся ли им это сделать?

Задача 3А. Михаил Владимирович написал на доске программу, содержащую 2019 строчек. После чего каждый из 20 учеников 7Ю класса вышел к доске (один или несколько раз) и дописал или стер одну строчку программы. В результате на доске оказалась записанной программа из 17 строчек. Докажите, что нечетное число раз к доске выходило четное число учеников.

Задача 4А. У Жени в 20 аквариумах живут 2019 креветок. На каждом аквариуме написано количество проживающих в нем креветок. Может ли произведение этих чисел быть нечетным числом? Если да, то приведите пример, если нет, то докажите, почему.

Задача 5А. Шахматный конь обошел все клетки шахматной доски 7х7. Мог ли он начать не с угловой клетки, а с соседней с угловой?

Задача 6А. У Ильи есть 2018 стальных шариков весом от 1г до 2018г. Он пытается разложить их на две чашки весов так, чтобы весы оказались в равновесии. Сможет ли он это сделать?

Задача 7А. Незнайка, вернувшись из путешествия, рассказывал, что в некоторой планетарной системе 2019 планет, причем каждая имеет межпланетное сообщение еще с тремя другими. Не заблуждается ли Незнайка?

Задача 8А. Лизочка играет в Зазеркалье. Каждый день она меняем имя. Если она сегодня звалась Лиза, то на следующий день – Лизавета. Если же сегодня она звалась Лизавета, то на следующий день она зовется Лизой. А еще она меняет цвет платья – два дня носит красное, а потом два дня – синее. 1 сентября она назвалась Лизой и пришла в белом, а на следующий день уже надела красное. В каком платье и с каким именем она встретит Новый Год?[7]

Задача 9А. Злой волшебник пообещал Мефодию Буслаеву власть над миром, если он соберет волшебные бусы из 49 камней, чередуя алмаз и бриллиант. Причем, чтобы алмазов было меньше, чем бриллиантов, а начинались бусы с алмаза. Сможет ли Мефодий получить власть над миром?

Задача 10А. Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1см в какую-то сторону, во второй раз – на 2 см, в третий – на 3 см, и так далее. Докажите, что он не сможет за 2010 прыжков вернуться в начальную точку.

Задача 11А. Докажите, что число способов расставить на шахматной доске 2018×2018 2018 ферзей так, чтобы они не били друг друга, четно.

Запишите решения задач 8 и 3

Уровень третий

Как показывает практика, до третьего уровня добираются далеко не все. Задания этого уровня достаточно сложны и требуют от школьников уже не только владения материалом, но и значительной доли фантазии и сообразительности.

[7] 31 декабря

Листок 1. Четность. Уровень 3.

В этом разделе собраны задачи, для решения которых придется применить несколько идей, разобранных в листках уровней 1 и 2.

Задача 1.38. Лёша нарисовал на клетчатой бумаге замкнутый путь, идущий по линиям сетки. Докажите, что он нарисовал четное число единичных отрезков (единица – сторона клетки).

Задача 1.39. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью. Каждые 15 минут она поворачивает под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет только через целое число часов.

Задача 1.40. Кузнечик прыгает а) по прямой на метр вправо или влево; б) по плоскости, каждым прыжком перемещаясь на метр на север, юг, запад или восток; в) по узлам клетчатой плоскости, каждым прыжком перемещаясь по диагонали одной из клеток. Может ли он вернуться в исходную точку через 2011 прыжков?

Задача 1.41. а) б) в) Может ли в условиях предыдущей задачи кузнечик вернуться в исходную точку через 2010 прыжков?

Задача 1.42. ^{n} Дорожки парка – линии квадратной сетки. Одна ячейка – 100 на 100 метров. Войти в парк можно через единственный вход, а выйти – через единственный выход. Петя и Вася делились впечатлениями по поводу прогулок и выяснили, что один прошел по дорожкам на 300 м меньше, чем другой, причем каждый обошел целое число дорожек (то есть, ступив на дорожку, проходил до конца без возвращений). Не ошиблись ли ребята?

Задача 1.43. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна из цифр полученной суммы четна.

Задача 1.44. 17 девочек и 17 мальчиков встали в хоровод. Докажите, что у кого-то с обеих сторон стоят девочки.

Задача 1.45. Маша и ее друзья встали в круг. Оказалось, что у каждого из них оба соседа либо оба мальчики, либо девочки. Мальчиков среди Машиных друзей пять. А сколько девочек?

Задача 1.46. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4.

Задача 1.47. В классе 30 учеников. Они сидят за 15-ю партами. При этом оказалось, что ровно половина всех девочек сидит с мальчиками. Докажите, что их не удастся пересадить (за те же 15 парт) так, чтобы ровно половина всех мальчиков класса сидела с девочками.

Задача 1.48. Сто грустных мартышек кидают друг в друга одним кокосовым орехом. Грустная мартышка, попавшая орехом в другую грустную мартышку, становится веселой и больше не грустнеет. Мартышка, в которую попали, выбывает из игры. Каких мартышек больше выбыло из игры – веселых или грустных – к моменту, когда в игре осталась одна мартышка?

Подведение итогов и результаты.

Итак, подошло время подведения итогов. Поскольку это первый листок и школьники привыкают к новым правилам, к самостоятельной работе, то время, которое обычно отводится на листок – около полутора месяцев – примерно 12 полуторачасовых занятий. Детям заранее объявляется, когда наступает «час X», то есть день, когда задачи будут разобраны и их решения больше принимать не будут. Лучше не устраивать разбор всех задач в самом конце, а разбирать их по ходу дела. И школьникам будет проще воспринимать, и пользы от этого больше. Например, задачи листка 1 уровня рекомендуется разобрать, когда все уже готовы писать (или уже написали) проверочную работу на 1 уровень. Часть задач второго уровня можно разбирать в процессе, когда есть такая необходимость. Если в этом случае задача рассказывается тому, кто ее не смог решить, то задачу можно заменить на похожую. Главная цель – убедиться, что все ученики класса разобрались в решении всех задач 1 и 2 уровня.

В уровне 3 некоторые задачи могут остаться неразобранные, если нет людей, кто над ними думал. С другой стороны, если школьники выражают желание узнать решения задач, стоит им их рассказать.

Мы считаем, что обязательному разбору подлежат задачи из листка 3 уровня – 1.39, 1.43, 1.47 и 1.48

Оценки. Если эти листки решаются в школе, а не на кружке, то по правилам школы необходимым является выставление оценок.

Школьники, сдавшие листок 1 уровня и написавшие переводную работу на 2 уровень, но далее не продвинувшиеся, получают оценку «3» или «удовлетворительно».

Школьники, сдавшие листок 2 уровня и написавшие переводную работу на 3 уровень, но далее не продвинувшиеся, получают оценку «4» или «хорошо».

Школьники, сдавшие листок 2 уровня и написавшие переводную работу на 3 уровень и решившие не менее 8 задач из листка уровня 3, получают оценку «5» или «отлично».

Дополнительную оценку «5» можно поставить тем, кто решил все задачи листка уровня 3.

При этом не имеет значения решил школьник задачи проверочной работы с первого или со второго раза.

Решения некоторых задач.

Задача 1.17 Полный комплект костей домино выложен в цепочку. На одном конце оказалась пятерка. А что могло оказаться на другом?

Решение. Рассмотрим множество половинок всех доминошек. Всего доминошек 28, при этом каждое число (от 0 до 6) присутствует ровно на 8 половинках. Заметим, что в выложенной цепочке все половинки кроме двух крайних разбиты на пары с одинаковыми цифрами. Это означает, что среди них любое число (от 0 до 6) встречается четное число раз. Тогда, если не рассматривать неизвестный конец, пятерка встречается на одном конце и еще на четном количестве мест, а все остальные числа встречаются на четном количестве мест. Отсюда однозначно следует, что на втором конце тоже пятерка. □

Задача 1.18 Из полного набора домино, подаренного родителями, Ваня потерял все кости с «пустышками». Сможет ли теперь кто-нибудь выложить оставшиеся кости в ряд?

Решение. Не сможет. Предположим обратное: пусть кости разложены в ряд. Все половинки, кроме двух крайних, объединяются в пары с равными числами. На двух крайних числа могут быть как равные, так и нет (мы не можем ссылаться в этом месте на предыдущую задачу, так как часть косточек потеряна). Следовательно, все числа, за исключением двух, заведомо появляются четное число раз. Но после потери всех пустышек осталось ровно по 7 экземпляров каждой из 6 цифр 1,2,3,4,5,6. □

Задача 1.39 Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью. Каждые 15 минут она поворачивает под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет только через целое число часов.

Решение. Введем координаты. Оси направим параллельно и перпендикулярно движению улитки.

А нулем обозначим ее начальное положение. Пусть за 15 минут улитка проползает 1. Тогда:
за 15 минут улитка меняет четность одной координаты.
за 30 минут улитка меняет четность каждой координаты
за 45 минут четность хотя бы одной координаты останется измененной
за час четность каждой координаты не изменится
Потому что изменение координаты чередуется каждые 15 минут. Значит за нецелое количество часов вернуться назад (то есть не менять четность), нельзя. □

Задача 1.43 К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна из цифр полученной суммы четна.

Решение. Предположим противное. Посмотрим на 9 цифру: она складывается сама с собой, поэтому у суммы в 9 разряде будет четное, если нет перехода с 8 разряда. Значит есть и переход с 10 на 11 разряд (потому что участвуют те же цифры). Следовательно четность 11 и 7 цифр одинакова. Поэтому у суммы в 7 разряде будет четное, если нет перехода с 6 разряда. Значит есть и переход с 6 на 7 разряд (потому что участвуют те же цифры). Следовательно четность 12 и 6 цифр одинакова. повторяя аналогичные рассуждения приходим к тому, что четность 17 и 1 цифр одинакова. Но на 1 и 17 местах цифры разной четности (иначе последняя цифра суммы была бы четной). Противоречие. □

Задача 1.47 В классе 30 учеников. Они сидят за 15-ю партами. При этом оказалось, что ровно половина всех девочек сидит с мальчиками. Докажите, что их не удастся пересадить (за те же 15 парт) так, чтобы ровно половина всех мальчиков класса сидела с девочками.

Решение. Если половина всех девочек сидит с мальчиками, то остальная сидит с девочками, то есть по парам. Значит число девочек делится на 4. Для аналогичного условия для мальчиков требуется делимость их количества на 4. Но тогда сумма всех детей должна делиться на 4. Но 30 не делится на 4. Противоречие. □

Задача 1.48 Сто грустных мартышек кидают друг в друга одним кокосовым орехом. Грустная мартышка, попавшая орехом в другую грустную мартышку, становится веселой и больше не грустнеет. Мартышка, в которую попали, выбывает из игры. Каких мартышек больше выбыло из игры – веселых или грустных – к моменту, когда в игре осталась одна мартышка?

Решение. Веселых меньше. Чтобы попасть в веселую, она перед этим должны была попасть в грустную. Значит веселых, в которых попали, меньше или равно количеству выбитых грустных. Равенства быть не может в силу нечетности количества выбитых. □

Задача 1.19 На бирже в городе Нью-Васюки ежедневно в 10.00 проходят торги. Рано утром 1 января N-го года цены на акции фирм «Вася Inc.» и «Петя и Ко» были один и два рубля соответственно. Вечером 31 декабря того же года цены стали снова теми же. Лёша установил, что цены на акции этих фирм всегда были различны, каждый день изменялись и все время были либо один, либо два рубля. Докажите, что прошедший год был високосным.

Решение. Каждый день четность стоимостей акций меняется. Значит такой же стоимость может стать только через четное количество дней. Только в високосном году так бывает. □

Задача 1.21 Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, ..., восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

Решение. Предположим, что у нас получилось их выписать в таком порядке. Тогда единица и двойка стоят на местах одинаковой четности. Ровно как и любые другие 2 соседних по величине числа. Значит все числа стоят либо на четных, либо на нечетных местах, чего быть, конечно, не может. □

Задача 1.22 7М класс упражняется в счете. Анатолий Анатольевич написал на доске число 2011. После чего каждый ученик вышел к доске, прибавил или вычел 17 или 13 и записал получившийся результат. Когда каждый из 20 учеников вышел по одному разу, на доске оказалось написано число 2012. Анатолий Анатольевич посмотрел на доску и расстроился. Докажите, что кто-то из учеников ошибся.

Решение. Каждая операция меняет четность числа. Через 20 операция четность не должна измениться, значит кто-то ошибся. □

Задача 1.23 У Вини-Пуха было 2019 горшочков меда. Кристофер Робин принес или забрал 9 горшочков, что именно – Пух не помнит. На следующий день Кристофер Робин снова пришел и принес или забрал 8 горшочков, на следующий день – 7 и так далее. Наконец Кристофер Робин пришел и принес или забрал один горшочек. а) Могло ли у Винни-Пуха на 10 день оказаться горшочков столько же, сколько и было в самом начале, то есть 2019? б) Сколько вообще горшочков меда могло быть у Вини-Пуха на 10 день, если все это время он мед не ел?

Решение. а) за 10 дней четность количества горшочков менялась 5 раз, значит в конце должно было получиться четное количество, значит 2019 быть не могло.
б) можно получить любую четную сумму от $2011 - 45 = 1966$ до $2019 + 45 = 2056$. Доказательство опустим. □

Задача 1.11 На доске написано 2019 целых чисел. Всегда ли можно стереть одно из них так, чтобы сумма всех оставшихся чисел была четна?

Решение. Да, если сумма четна, то среди чисел есть хотя бы одно четное, которое можно зачеркнуть. В противном случае есть хотя бы одно нечетное, которое тоже можно зачеркнуть. □

Задача 1.15 Вокруг круглой поляны растут 2019 сосен. Незнайка измерил высоту каждой из них и заявил, что любые две соседние сосны отличаются по высоте ровно на метр. Знайка тут же заметил, что Незнайка врет. Кому верить?

Решение. Высота всех деревьев, стоящих на нечетных местах одинакова. Но 1 и 2019 сосны стоят рядом, и их высоты не могут отличаться на 1. Значит Незнайка врет. □