Курс спецматематики в листках для 7 класса

Автор: Иванова Елена Юрьевна
Редактор: Кузнецов Глеб Михайлович
Наборщик текста: Соколовский Всеволод Владимирович

13 декабря 2023 г.

Оглавление

Предисловие

Эта книжка предназначена в первую очередь для учителей математики, работающих в профильных математических классах. Материалы книги могут быть также использованы в работе математических кружков, для дополнительных занятий и самостоятельной работы.

Мы будем ориентироваться на учителей математики, представляя удобный формат занятий в первую очередь для них.

Сама структура занятий основана на «листочковой системе», введенной в школьное образование Н.Н.Константиновым еще в 60е годы прошлого века. Начав заниматься спецматематикой с более младшими школьниками, нежели те, для которых изначально была разработана эта система, мы переработали и сам набор и порядок тем, и саму структуру.

Система была опробована автором в течение 15 лет на различных математических классах г. Москвы, выпускники которых завоевали четыре золотых и две серебряные медали на Международной математической олимпиаде школьников и получили множество наград на других всероссийских и международных соревнованиях. Часть из них уже закончила свое обучение в Вузе и плодотворно трудится на научном поприще.

В течение этих лет система модифицировалась, пока не пришла к нынешнему виду. Сейчас она достаточно гибка и, на наш взгляд, позволяет подстроиться к любому уровню школьников 7 класса, желающих изучать профильную математику.

По сути, система представляет собой «Уровневую систему листочков» [1], правила которой объявляются детям заранее. Лучше всего эти правила распечатать и выдать детям. Вот они:

Правила игры или как мы будем жить.

1. Задания по спецматематике сгруппированы по темам, а в каждой теме разнесены на два, три или более уровня.

2. Темы бывают обязательные и дополнительные.

3. Изначально при изучении новой темы все получают теоретический листок и листок уровня «один». Усвоение теоретического листка и решение (сдача) задач листка уровня «один» дает право на получение оценки «удовлетворительно», а также ведёт к получению заданий следующего уровня.

4. Чтобы перейти на следующий уровень после решения задач предлагается выполнить проверочное задание по соответствующей теме соответствующего уровня. Если задание выполнено успешно, то уровень зачтен. Если нет, то ученик возвращается к изучению плохо пройденной темы вновь и получает новые задания того же уровня.

5. Ученик может претендовать на получение следующего уровня без решения задач предыдущего. Для этого он может написать соответствующую проверочную работу, не решая задачи уровня. Если работа выполнена успешно (все верно), то ученик переводится на следующий уровень. В случае неудачи повторное выполнение проверочной работы без решения задач в этой теме для этого ученика не допускается.

6. Через некоторое оговорённое время (обычно, когда большинство освоило уровень 2-3), задачи разбираются и переходим к следующей теме. За выполнение второго уровня ставится «хорошо», за выполнение каждого следующего уровня - «отлично».

[1] Напомним, что «система в листочках» предполагает, что в классе находится несколько принимающих, что дает возможность каждому индивидуально рассказывать решения задач принимающим. Кроме того на занятиях не предполагаются учебники. Все необходимые сведения выдаются в листках и дети могут решать эти задачи, как в классе, так и дома. Тем самым каждый имеет свой собственный ритм работы и движения. Одномоментно в классе дети могут иметь много разных листков и сдавать задачи в индивидуальном темпе.

Комментарии для учителя.

Как только начинается новая тема, сначала она обсуждается в классе. Разбираются простые задачки, дается необходимый кусок теории и т.п. После этого детям выдается листок, условно называемый «Тема N. Теория. Уровень 1» В этом листке может быть приведен список задач, разобранных на занятии, короткий конспект рассказанной учителем теории, какие-то факты и задачи, которые учитель считает важным включить, но они не были рассказаны у доски.

Работа с теоретическим листком может идти по-разному. А) можно продолжить обсуждение коллективно, предлагая решить совместно какие-то задачи из выданного листка; Б) можно включить в листок набор простеньких задач по теме и предложить выполнить их письменно; В) можно выделить время для самостоятельного решения и потом разобрать индивидуально (если хватает принимающих) или у доски для всех; Г) а можно всем выдать сразу же и листок с задачами уровня 1 со словами «А теперь вы самостоятельно решаете задачи и нам рассказываете». Однако мы считаем, что вариантом Г) злоупотреблять не стоит. В течение года это возможно, но не более 1-2 раз и не на первых темах.

После того как с теоретическим листком так или иначе покончено, дети получают листок «Тема N. Задачи. Уровень 1». Обычно в таких листках от 8 до 12 задач. Предполагается, что средний ребенок должен их решить примерно за полторы недели. Приходя на каждое занятие, ученик рассказывает решенные дома задачи принимающему до тех пор, пока задачи не кончатся. Как только это произошло, ученик получает проверочную работу из 3-4 задач (но в простых уровнях может быть и больше) на основные идеи Уровня 1 и двадцать минут на письменное решение. Очевидно, что пользоваться своими записями задач листочка, теоретическим листком и т.п. не разрешается. Работа считается верно выполненной ТОЛЬКО в том случае, если ВСЕ задачи решены верно и написано полное решение. Если в какой-то задаче указан только ответ без пояснений или решение с недочетами, то работа считается невыполненной. Обычно в 1 уровне таких проблем не бывает - ребенок либо решил задачу и хорошо написал, либо нет. При переходе со 2 уровня на 3 нужно быть уже более внимательным, да и задачи там уже более содержательные.

Итак, если все задачи проверочной работы решены верно, то считается, что уровень 1 успешно пройден и ученик получает листок «Тема N. Задачи. Уровень 2» и листок «Тема N. Теория. Уровень 2», если таковой имеется.

В этом месте обращаем внимание, что в силу того, что дети получают такие листки в разное время, и новая теория не разбирается, теоретический листок должен быть составлен предельно аккуратно и давать всю необходимую информацию. В частности там могут быть включены примеры решения задач. Заметим, что если в какой-то момент уже все дети получили теоретический листок уровня 2, то имеет смысл потратить часть занятия на разбор задач 1 уровня, уделяя особое внимание тем задачам, которые являются ключевыми в этой теме, и тем задачам, классическое решение которых вы хотите донести до учеников.

Внимание! Мы считаем, что все задачи задачного листка должны быть разобраны преподавателем тем или иным способом. Либо у доски, либо индивидуально принимающим.

Еще несколько слов про пункт 5 «правил игры». Мы специально добавили в правила такую возможность. Бывает так, что ребенок уже много решал задач такого типа, и мы знаем, что он прекрасно с ними справится. В этом случае жалко времени и хочется идти дальше. Такой ребенок обычно сразу же легко пишет проверочную работу и получает следующий листок. Бывает также, что ребенок ложно считает, что он все хорошо знает и ему простые задачки решать незачем. Мы тоже в этом случае даем ему работу. Но если знания только кажущиеся, то чаще всего такой ребенок допускает при решении задач ошибки и работу не пишет. В этом случае он теряет право получить листок 2 уровня и должен вернуться к листку 1 уровня.

Что делать, если ученик сдал все задачи листка уровня 1, но не справился с проверочной работой? В этом случае ему предлагается листок «Тема N. Задачи. Уровень 1А». В этом листке содержатся задачи, аналогичные задачам предыдущего листка, только с измененными формулировками, числами и т.п. И ученик должен снова сдать все эти задачи. Как показывает практика, при переходе с уровня 1 на уровень 2 такое встречается крайне редко, а при переходе с уровня 2 на уровень 3 - часто. Поэтому всегда стоит иметь такой дубль.

В исключительных случаях (на нашей практике такое было только один раз), если вторая попытка написать проверочную работу (она уже, конечно, другая) снова неудачна, то ребенок получает листок

«Тема N. Задачи. Уровень 1Б», но прежде с ним нужно индивидуально разобрать еще раз все задачи листка А.

В зависимости от сложности темы на нее отводится от 8 до 28 уроков (от 4 до 14 занятий, если они сгруппированы парами), то есть от 2 до 7 недель. Понятно, что это условно. При необходимости можно увеличивать время до двух месяцев. Больше изучать какую-то тему нежелательно, так как она уже затирается и детям становится скучно.

Примерно один раз в три месяца мы устраиваем контрольные работы по 2-3 темам. Примеры таких работ тоже есть в книжке.

Кроме того часть занятий отведено под игры и устные зачеты. Некоторые задачи в листочках отмечены буквой «n». Эти задачи предназначены для письменной сдачи учениками. То есть они не принимаются устно, а требуется принести решение, записанное аккуратно и подробно дома. Эти решения проверяются, отмечаются не только верный / неверный ход решения, но и оформление, не в смысле чистописания (хотя это тоже приветствуется в разумных пределах), а в смысле строгости и аккуратности изложения.

Расположение материала.

Материалы условно разделены на несколько частей.

1. Материалы, которые выдаются детям. Мы постарались сформировать их в виде уже готовом к раздаче.
2. Комментарии для учителя и тексты для разбора в классе.
3. Проверочные и самостоятельные работы.
4. Решения некоторых задач и комментарии.

Глава 1

Четность

Как проходит занятие

Поскольку это первое занятие такого типа, то сначала школьникам объясняются «правила игры», отвечая на все возникающие вопросы. Далее мы предлагаем не выдавать сразу задачи для решения, а сначала поговорить в целом, как школьники понимают четные и нечетные числа, их свойства.

На доске выписываем равенства :

Ч + Ч = Ч   Ч + Н = Н   Н + Ч = Н   Н + Н = Ч

Первый факт можно предложить доказать, используя только определение чётного числа – «Число называется чётным, если его можно разделить на две равные части».[1]

Решение. Пусть число А четное и число В четное. Докажем, что число А + В также четное. По определению это значит, что число А делится на 2 и число В делится на 2. То есть А $= a+a$ и В $= b+b$. Тогда А + В $= (a+b)+(a+b)$

Тут можно проиллюстрировать свою речь картинками типа:

А = ▲ + ▲   В = ▼ + ▼   А + В = ♦ + ♦

То есть сумму можно представить в виде суммы двух равных целых слагаемых. Что и требовалось доказать. □

Аналогично для разности четных чисел. Можно предложить доказать этот факт самостоятельно или вынести позже в проверочную работу.

Еще один факт, который стоит доказать. А именно то, что сумма четного и нечетного числа нечетна.

Решение. Пусть А – четное, В – нечетное. Докажем, что А+В – четное. Будем доказывать «методом от противного». Предположим, что требуемое неверно и А+В – четное. Тогда В = (А+В)−А – разность двух четных чисел и должно быть четным. Получили противоречие. То есть А + В – нечетно. □

Далее можно всем вместе разобрать часть задач и упражнений из теоретического листка (он приведен ниже). Рекомендуется сначала обсудить задачи 1-3 этого листка и только после разбора выдать этот листок школьникам.

После выдачи листка можно предложить школьникам проверить себя – самостоятельно решить упражнения и поверить себя по ответам в конце листка. Мы обычно обсуждаем все вместе задачи на доказательство, так как в этом возрасте такие задания идут наиболее тяжело. После этого, если вопросов нет, выдать первый листок уже с заданиями.

Обращаем внимание, что первый листок включает в себя не только сами задачи, но и некоторые комментарии к ним и дополнительно «правила игры»

[1] Предварительно мы оговариваем, что пока имеем дело только с целыми числами и «делимость на две равные части» мы подразумеваем делимость целого числа на целочисленные части.

Теоретический Листок. Четность.

Прежде чем решать задачи вспомните, какие числа называются четными, а какие нечетными и их простейшие свойства.

Сумма или разность двух чисел одной четности четна.
Сумма или разность двух чисел разной четности нечетна.

Решите несколько приведенных ниже упражнений:

Упражнение 1. Сложили 3 нечетных числа. Могло ли получится 1024?

Упражнение 2. Не выполняя никаких арифметических действий, назовите чётность чисел:

1. $1000 - 947 \times 7567 \times 6 + 2009 + 2006$
2. $204 \times 121 + 5360 \times 7 + 3121 + 6731 \times 81 \times 11 - 154 - 77 + 87$
3. $(1246254651 - 45645645) \times (67876 - 59681) + (1163 - 712) \times (948 - 8569) + 886541 \times 735 + 1$
4. $1000 - 947 \times 7567 \times 76 + 2009 + 2006$
5. $204 \times 2121 + 5360 \times 7 + 3121 + 6731 \times 81 \times 11 - 154 - 77 + 87$
6. $(1246254651 - 45645645) \times (67876 - 59681) + (1163 - 712) \times (948 - 8569) + 886541 \times 735 + 1$

Упражнение 3. Имеется два числа одной четности. Какова может быть четность их разности?

Упражнение 4. Сумма двух чисел нечетна. Какой четности их разность?

Упражнение 5. Двое играют в следующую игру: первый игрок рисует на клетчатой бумаге квадрат. Затем второй игрок зачеркивает одну из клеток этого квадрата. Потом то же делает первый, и так далее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре и как ему надо играть?

Задача 1.1. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса[1], оппозиция закричала «Это обман!». Почему?

Решение. На первый взгляд, не обладая информацией о численности палат, вряд ли можно делать какие-либо выводы. Тем не менее, предположим, что описанная в задаче ситуация возможна. Если голосовавших «против» было x, то голосовавших «за» было $x+23$. Следовательно, всего проголосовало $2x + 23$ человек (нечетное число), а в двух палатах равной численности в сумме четное число членов. Противоречие. □

Решение. «без формул или на пальцах» Первоначальное утверждение: если какое-то количество можно разбить на две равные части, то это количество четно. В нашем случае из условия следует, что в парламенте четное число членов. Далее, заметим, что если к какому-либо числу прибавить нечетное число, то четность суммы поменяется (если число было четным - станет нечетным, если же было нечетным, то станет четным). Тогда количество проголосовавших «за» и «против» имеют разную четность. Но тогда их сумма нечетна, как сумма двух чисел разной четности. Противоречие. □

В приведенном примере мы использовали наблюдение, что сумма или разность четного и нечетного числа - нечетное число. Если рассматривать четность как частный случай делимости (а именно: четность - это делимость на натуральное число 2), то в данном наблюдении нет ничего необычного. Отличие четности от любой другой делимости заключается в наблюдении, что сумма двух нечетных чисел - четное число (например, сумма двух чисел, не делящихся на три, может как делиться, так и не делиться на 3). Продемонстрируем еще на одном примере, как можно это использовать.

Задача 1.2. На 99 карточках пишут числа 1, 2, ..., 99, перемешивают их, раскладывают чистыми сторонами вверх и снова пишут числа 1, 2, ..., 99. Для каждой карточки складывают два её числа и 99 полученных сумм перемножают. Докажите, что результат чётен.

[1] «большинством в 23 голоса» - значит голосующих «за» было на 23 больше, чем голосующих «против».

Решение. Так как на карточках написаны числа от 1 до 99, то среди них нечетных на одно больше чем четных. Поскольку нечетных больше половины, на какой-то карточке с обеих сторон будут нечетные числа. Их сумма будет четным числом. При умножении нескольких натуральных чисел, среди которых есть четное, получается четное число. □

В задаче 2 мы использовали также тот факт, что произведение нескольких натуральных чисел, среди которых есть четное, - четное число. Это же можно формулировать по-другому: если произведение некоторого набора натуральных чисел - число нечетное, то все эти числа нечетные.

Сумма нечетного количества нечетных чисел нечетна.

Этот факт является простым следствием того, что сумма двух нечетных чисел - четное число.

Упражнение 6. Сложили 5 целых чисел. Получили 2017. Сколько среди них может быть нечётных? А если чисел 2017?

Упражнение 7. Сколько нечетных среди первых 100 натуральных чисел? А среди 2019? А среди первых N натуральных чисел?

Задача 1.3. Филя перемножил 17 целых чисел и получил 1025, а Степашка сложил эти же числа и получил 100. Докажите, что кто-то из них ошибся.

Решение. Предположим, что Филя не ошибся. Тогда если Филя, перемножая натуральные числа, получил нечетный результат, то все множители были нечетными. Но в то же время сумма 17 нечетных чисел - нечетное число, и никак не может равняться 100. □

Чередование

Выполняя *упражнение 7*, вы, несомненно, воспользовались тем, что четные и нечетные числа в числовом ряду идут попеременно.

Упражнение 8. Укажите, в каких еще задачах, приведенных ранее, используется идея чередования.

Упражнение 9. Среди 10 целых чисел 7 четных и 3 нечетных. Какой максимальной длины цепочка последовательных чисел может быть выстроена из них в лучшем случае?

Упражнение 10. На шахматной доске на одной из клеток стоял конь. Он сделал несколько ходов и вернулся в ту же клетку. Четное или нечетное число ходов он сделал?

Упражнение 11. Дрессированный кузнечик прыгает по прямой - каждый раз на 1 метр вправо или влево. Через некоторое время он оказался в исходной точке. Докажите, что он сделал четное число прыжков.

Задача 1.4. За время летних каникул сторож посадил вдоль школьного забора 20 яблонь. 1 сентября оказалось, что число яблок на соседних деревьях отличается на 1. Может ли на всех этих яблонях быть ровно 2017 яблок?

Решение. Не может. Будем называть яблоню с четным количеством яблок четной, а с нечетным - нечетной. Предположим, что описываемое в условии возможно. Тогда четные и нечетные яблони чередуются. Следовательно, половина яблонь - четные, а половина - нечетные. Половина - это 10. Сосчитаем общее количество яблок. Нам нужно сложить 10 четных чисел и 10 нечетных. Очевидно, что эта сумма является четным числом, поэтому получить 2017 невозможно. □

Ответы к упражнениям: **1.** нет. **2.** 1) нечетно; 2) четно; 3) нечетно. **3.** любым четным числом. **4.** нечетна. **5.** Первый всегда может обеспечить себе выигрыш. Для этого он должен нарисовать квадрат, состоящий из четного числа клеток. **6.** 1) 1 или 3, или 5. 2) любое нечетное число от 1 до 2017. **7.** 1) 50; 2) 1009; 3) если N четно, то N/2, если же нечетно, то (N+1)/2. **8.** например, задача 2 и упр.5. **9.** цепочка из 7 чисел. **10.** четное.

Листок 1. Четность. Уровень 1.

Если написанная программа сработала правильно, то это значит, что во время ее работы выполнилось четное число ошибок или программист не понял задание.

Правило четности ошибок

Задачи вы можете решать как дома, так и в классе. Рекомендуется коротко записывать решение в тетрадь. Рассказывать решения задач вы будет одному из принимающих. Задачи, отмеченные значком п, приниматься в устном форме не будут. В данном случае это единственная задача 1.8. Решение таких задач надлежит выполнить в письменном виде дома и принести на занятие спецматематики. Через некоторое время часть задач будет разобрана, после чего решения этих задач приниматься не будет. Рекомендуем решать задачи по порядку, поскольку зачастую в решении следующей задачи можно использовать идею из предыдущей.

Желаем успеха!

Задача 1.5. Филя пишет на доску одно целое число, а Степашка - другое. Если произведение чётно, победителем объявляют Филю, если нечётно, то Степашку. Может ли один из игроков играть так, чтобы непременно выиграть?

Задача 1.6. Докажите, что произведение любых двух последовательных чисел четно.

Задача 1.7. Каким (четным или нечетным) может быть число $n^2 + n$, где n - целое?[1]

Задача 1.8. ^{n} Может ли для каких-нибудь целых чисел a и b быть верно:

$$ab(a - b) = 201720182019$$

В предыдущих задачах у нас обычно имелось фиксированное количество целых чисел, с которыми мы производили некоторые операции. Для решения задачи требовалось выяснить, каким - четным или нечетным - числом является результат этих операций. Можно рассмотреть обратную задачу. Пусть имеется некоторое целое число, и мы хотим разбить его на части. Возникает вопрос: на какие части мы можем его разбить и сколько среди них может быть нечетных? Или, другими словами, в виде суммы каких слагаемых можно представить данное число? Например, число 17 можно представить в виде суммы трех или пяти нечетных слагаемых, но нельзя в виде четырех.

Количество нечетных чисел.

Задача 1.9. Сумма четырнадцати целых чисел является нечетным числом. Может ли их произведение тоже быть нечётным?

Задача 1.10. За время летних каникул вдоль забора школы посадили 20 яблонь. 1 сентября оказалось, что число яблок на соседних деревьях отличается на 1. Может ли на всех этих яблонях быть ровно 2011 яблок?

Задача 1.11. На доске написано 2011 целых чисел. Всегда ли можно стереть одно из них так, чтобы сумма всех оставшихся чисел была четна?

Задача 1.12. Алиса и Базилио устроили благотворительную лотерею. Они написали на 33 билетах (занумерованных числами от 1 до 33) 33 последовательных числа от 33 до 65 (в каком-то порядке) и объявили, что выигрышным считается билет, у которого сумма номера билета и написанного на нем числа четна. Докажите, что при таких правилах им в любом случае придется кому-то выплатить выигрыш.

[1] Для решения этой задачи дети должны уметь выносить общий множитель на скобку. Если по какой-то причине это еще не изучено, то лучше давать задачу в виде произведения n и $(n + 1)$

Задача 1.13. 98 спичек разложили в 19 коробков и на каждом написали количество спичек в этом коробке. Может ли произведение этих чисел быть нечетным числом? Если да, то приведите пример, если нет, то докажите, почему.

Выполняя упражнение 7 из теоретического листочка, вы, несомненно, воспользовались тем, что четные и нечетные числа в числовом ряду идут попеременно:

1	2	3	4	5	6	...
Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	...

В следующих задачах вам придется пользоваться этим соображением неоднократно. Более того, идея чередования характерна не только для чисел. Зачастую чередуются не числа, а какие-либо свойства объектов.

Задача 1.14. Можно ли разложить несколько мячей а)* в 3; б)* в 4; в) в 2018; г) в 2019 ящиков, расставленных по кругу, так, чтобы в любых двух соседних ящиках число мячей отличалось на 1?

Задача 1.15. Вокруг круглой поляны растут 2011 сосен. Незнайка измерил высоту каждой из них и заявил, что любые две соседние сосны отличаются по высоте ровно на метр. Знайка тут же заметил, что Незнайка врет. Кому верить?

Задача 1.16. Можно ли обойти конем всю доску, побывав на каждом поле ровно один раз, начав с поля a1, а закончив на поле h8? (Если можно, то как, если нельзя, то почему.)

Письменные задачи.

Если вы заметили, в листке есть задача, отмеченная буквой ^{n} – это означает, что решение задачи должно быть выполнено в письменном виде и сдано на листке.

Для чего это сделано?

Общеизвестно, что большинству школьников достаточно сложно дается запись своих решений. И такие задания направлены как раз на вырабатывание этого умения. В том числе этим регулируется строгость изложения. Школьникам сообщается, что в письменных решениях будет учитываться не только «решил» / «не решил», а насколько связен и логичен текст.

В любом случае потом всем школьника выдаются письменные решения «от автора», чтобы они могли сравнить со своими опусами.

Переход на второй уровень

Наконец наступает момент, когда кто-то решил все задачи листка уровня 1 или просто решил, что он уже все знает из этого листка и готов к проверке.

Наступает момент проверочной работы.

Листок 1.1 Четность. Переводная работа.

1. Дайте определение чётного числа.

2. Какие из утверждений верны: А) Сумма нечётного количества чётных чисел нечётна. Б) Произведение нечётного количества чётных чисел нечётно. В) Сумма нечётного количества нечётных чисел нечётна. Г) Произведение чётного количества нечётных чисел чётно.

3. Сумма двух чисел нечетна. Какой четности может быть их разность?

4. Не выполняя никаких арифметических действий, укажите чётность числа:

$$(124789254651 - 45645646) \cdot (67776 - 59681) + (18963 - 712) \cdot (94978 - 8569) + 8865431 \cdot 735 + 17$$

5. Среди 11 целых чисел 8 четных и 3 нечетных. Какой максимальной длины цепочка последовательных чисел может быть выстроена из них в лучшем случае?

6. Аня попала в Зазеркалье, где встретила свое отражение – Яну. Потом Яна попала в свое Зазеркалье, где встретила свое отражение – конечно же, Аню-2! Аня-2 попала в свое Зазеркалье, где была Яна-2. И так происходило достаточно долго, пока зеркало не разбилось. Назовите, как звали 2019-ю девочку?

Комментарии для преподавателя

Первая проверочная работа достаточно простая. Она рассчитана на 25-35 минут.

Полные пояснения требуются только в задачах 5 и 6. В остальных только ответы.

Если все задания выполнены правильно, то считается, что школьник успешно прошел 1 уровень и получает листок 2 уровня.

Если же что-то неверно, то те, кто не сдавали задачи из листка 1 уровня, должны их решить и сдать, а те, кто сдал, но тем не менее работу написал неудачно, получает Дубль листка 1 уровня. Поскольку у нас пока не было прецедентов, что кто-то не справился с проверочной работой, то мы не обзавелись дублем. Однако учитель легко может его сделать, заменив имена и числа в задачах.

Решения переводной работы с уровня 1 на уровень 2

1. Четное число дает остаток 0 при делении на 2.

2. А) нет, потому что сумма любого количества четных чисел – четна. Б) нет, потому что произведение целых чисел четно, если хотя бы одно из них четно. В) да Г) нет, потому что произведение любого количества нечетных чисел – нечетно.

3. Только нечетной, потому что их четности различны.

4. Перепишем в виде: $\overbrace{\underbrace{(\text{Н} - \text{Ч})}_{\text{Н}} \cdot \underbrace{(\text{Ч} - \text{Н})}_{\text{Н}}}^{\text{Н}} + \overbrace{\underbrace{(\text{Н} - \text{Ч})}_{\text{Н}} \cdot \underbrace{(\text{Ч} - \text{Н})}_{\text{Н}}}^{\text{Н}} + \underbrace{(\text{Н} \cdot \text{Н})}_{\text{Н}} + \text{Н} = \text{Н} + \text{Н} + \text{Н} + \text{Н} = \text{Ч}$

5. Четные и нечетные чередуются, значит четных может быть только на 1 больше или меньше нечетных, а нечетных максимум 3. Значит четных 4. Значит всего последовательных чисел не больше 7.

6. Выпишем первые несколько имен:

1 девочка – Аня-1
2 девочка – Яна-1
3 девочка – Аня-2
4 девочка – Яна-2
5 девочка – Аня-3
6 девочка – Яна-3
...

Заметим, что Аня всегда "нечетная девочка а Яна - всегда "четная". После этого можно заметить, что номера девочек - это номер соответствующего четного или нечетного числа в последовательности. Например, Яна-5 обозначает пятое четное число, а Аня-7 – седьмое нечетное. Соответственно задача сводится к тому, чтобы узнать каким по счету является данное число. 2010 – 1005 четных и 1005 нечетных числе, следовательно 2011 – 1006 нечетное число, значит ему соответствует девочка Аня-1006 2018 – 1009 четных и 1009 нечетных числе, следовательно 2019 – 1010 нечетное число, значит ему соответствует девочка Аня-1010

Примечание. Если не получается решить задачу в общем случае, можно построить примеры при малых числах и найти в них закономерность. Предложить гипотезу и доказать ее.

Листок 1. Четность. Уровень 2.

Беды обычно приходят парами — пара за парой, пара за парой, пара за парой...

Следствие Кона из закона Мерфи

Задача 1.17. Полный комплект костей домино выложен в цепочку. На одном конце оказалась пятерка. А что могло оказаться на другом?

Задача 1.18. Из полного набора домино, подаренного родителями, Ваня потерял все кости с «пустышками». Сможет ли теперь кто-нибудь выложить оставшиеся кости в ряд?

Задача 1.19. На бирже в городе Нью-Васюки ежедневно в 10.00 проходят торги. Рано утром 1 января N-го года цены на акции фирм «Вася Inc.» и «Петя и Ко» были один и два рубля соответственно. Вечером 31 декабря того же года цены стали снова теми же. Лёша установил, что цены на акции этих фирм всегда были различны, каждый день изменялись и все время были либо один, либо два рубля. Докажите, что прошедший год был високосным.

Задача 1.20. ^{n} В разные моменты времени из пунктов A и B выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно. Доехав до своих пунктов, они опять развернулись и поехали навстречу друг другу. На этот раз они встретились в точке D и, развернувшись, вновь поехали к своим пунктам. И т.д. В какой точке отрезка AB произойдет их 2019 встреча?

Задача 1.21. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, ..., восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

Задача 1.22. 7М класс упражняется в счете. Анатолий Анатольевич написал на доске число 2011. После чего каждый ученик вышел к доске, прибавил или вычел 17 или 13 и записал получившийся результат. Когда каждый из 20 учеников вышел по одному разу, на доске оказалось написано число 2012. Анатолий Анатольевич посмотрел на доску и расстроился. Докажите, что кто-то из учеников ошибся.

Задача 1.23. У Вини-Пуха было 2019 горшочков меда. Кристофер Робин принес или забрал 9 горшочков, что именно - Пух не помнит. На следующий день Кристофер Робин снова пришел и принес или забрал 8 горшочков, на следующий день - 7 и так далее. Наконец Кристофер Робин пришел и принес или забрал один горшочек. а) Могло ли у Винни-Пуха на 10 день оказаться горшочков столько же, сколько и было в самом начале, то есть 2019? б) Сколько вообще горшочков меда могло быть у Вини-Пуха на 10 день, если все это время он мед не ел?

Разбиение на пары

Задача 1.24. Докажите, что число способов расставить на доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга, четно.

Задача 1.25. Лиза сложила лист бумаги пополам, после чего вырезала из него фигурку. После разворачивания фигурка оказалась шестиугольником. Сколько различных значений могут принимать длины его сторон?

Задача 1.26. Пусть билеты для проезда в наземном транспорте[1] имеют номера от 000000 до 999999. Назовем билет «счастливым», если сумма первых трех цифр равна сумме трех последних его цифр. Докажите, что число таких «счастливых» билетов четно. (Для решения задачи вовсе не обязательно считать точное количество «счастливых» билетов)

Задача 1.27. 7Ю класс уселся за круглый стол. Елена Юрьевна между соседями-мальчиками положила по ручке, между соседями-девочками - по карандашу, а если рядом сидели мальчик и девочка,

[1]Мы не будем здесь рассматривать все возможные билеты для проезда. Безусловно, сейчас существуют и семизначные, и восьми- и даже тринадцатизначные номера для проездных документов.

то между ними она положила по тетрадке.
а) Докажите, что ей понадобиться четное число тетрадок.
б) А может ли она обойтись нечетным количеством карандашей?
в) Каким минимальным числом ручек она могла обойтись, если в классе 17 мальчиков и 5 девочек?

Задача 1.28. а) В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «-» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?
б) А если выписаны числа от 1 до 2019, можно ли получить 17?

Задача 1.29. * Для уроков информатики Михаил Владимирович приготовил 7 карточек, на которых были написаны числа от 5 до 11. Он их перемешал и предложил Глебу и Юле. Глеб взял себе три карточки, Юля - две, а оставшиеся две Михаил Владимирович отдал Ване, который их тут же потерял. Глеб сразу сказал Юле: «Я точно знаю, что сумма чисел на твоих карточках четна», и оказался абсолютно прав. Какие числа были написаны на карточках у Глеба?

Задача 1.30. * На 99 карточках пишут числа 1, 2, ..., 99, перемешивают их, раскладывают чистыми сторонами вверх и снова пишут числа 1, 2, ..., 99. Для каждой карточки складывают два её числа и 99 полученных сумм перемножают. Докажите, что результат чётен.

*Напоминаем, что задачи, отмеченные значком ^{n}, приниматься в устном форме не будут. В данном случае это единственная задача 1.20. Решение таких задач надлежит выполнить в письменном виде дома и принести на занятие спецматематики. Через некоторое время часть задач будет разобрана, после чего решения этих задач приниматься не будет. Задачи, отмеченные звездочками * не являются обязательными для получения следующего задания. Их решение может приниматься после перехода на следующий уровень.*

Желаем успеха!

Решения письменных задач.

В уровне 2 также есть письменная задача, которую нужно сдавать в письменном виде. Целесообразно после того, как все сдадут письменные задачи обоих уровней (или большинство, если все-таки есть те, кому через значительное время не удалось получить второй уровень), выдать письменные решения.

Задача 1.8^n Может ли для каких-нибудь целых чисел a и b быть верно:

$$ab(a-b) = 201720182019$$

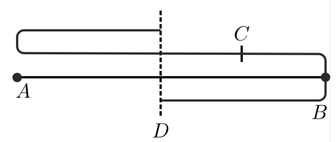
Решение. **1 способ.** Рассмотрим два случая. 1 случай: числа a и b одной четности. Тогда $a-b$ обязательно четно. Следовательно, произведение $ab(a-b)$ также будет четным. 2 случай: числа а и b разной четности. Тогда в произведении $ab(a-b)$ один из множителей четен и, следовательно, все произведение четно. Тем самым мы доказали, что для любых целых чисел а и b произведение $ab(a-b)$ четно. Но число 201720182019 нечетно, следовательно, требуемое в условии невозможно.

2 способ. Поскольку 201720182019 – нечетное число, то требуется выяснить, можно ли его разложить на три нечетных множителя указанного в условии вида. Предположим, что это возможно, тогда числа a и b должны быть нечетными, но тогда $a-b$ обязательно четно. Следовательно, произведение $ab(a-b)$ также будет четным. Противоречие. Следовательно, требуемое в условии невозможно. □

Задача 1.20^n В разные моменты времени из пунктов A и B выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно. Доехав до своих пунктов, они опять развернулись и поехали навстречу друг другу. На этот раз они встретились в точке D и, развернувшись, вновь поехали к своим пунктам. И т.д. В какой точке отрезка AB произойдет их 2019 встреча?

Решение. В точке C. Без ограничения общности можно считать, что первым выехал кто-то из A. Тогда пусть K - точка, в которой находится этот кто-то в тот момент времени, когда второй выехал из B. Теперь они одновременно стартуют - один из B, другой из K и через некоторое время прибывают в C. С этого момента точка K больше не имеет значения. Они разворачиваются и через некоторое время T одновременно прибывают в D. И так далее. Заметим, что за время T вместе оба путешественника проедут удвоенный путь от A до B. (см.рис.). Теперь, если они развернутся в точке D и поедут обратно, то за время T они снова приедут в точку C (это будет их третья встреча). И так далее. Отсюда следует, что все нечетные встречи будут происходить в точке C, а все четные - в точке D. Поскольку 2019 - нечетное число, то 2019-я встреча состоится в точке C. □

Замечание. Отметим, что мы не использовали информацию о том, кто именно выехал из какого пункта и какая именно скорость была у путешественников. Используется только неизменность скоростей. Для решения задачи это неважно. Более того, при определенных условиях точки C и D могут совпадать, но это тоже не имеет значения, поскольку приведенные выше рассуждения справедливы и для этого случая.



Переход на третий уровень

В этой теме переход на третий уровень необычен. Проверочная работа включает в себя не только задачи на тему четности и разбиения на пары, но упражнения на умение видеть аналогии.

Если в группе почти все собираются писать проверочную работу для перехода со 2 уровня на 3, то можно сначала первую часть листка разобрать вместе. Иначе – отвести больше времени на выполнение работы.

Разберем сначала несколько примеров.

1. Двое играют в следующую игру: первый игрок рисует на клетчатой бумаге квадрат. Затем второй игрок зачеркивает одну из клеток этого квадрата. Потом то же делает первый, и так далее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре и как ему надо играть?

2. Фрекен Бок и Карлсон играют в фантики. Сначала Карлсон вынимает из кармана несколько фантиков, затем фрекен Бок забирает себе один, затем Карлсон и так далее, пока фантики не кончатся. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре и как ему надо играть?

Установление аналогии. Пусть в задаче а) первый не рисует квадрат, а выкладывает фантики в виде квадрата, тогда понятно, что в этом случае «забирание» фантика соответствует зачеркиванию клетки квадрата. Тем самым мы показали, что задачи аналогичны.

1. На прямой отметили несколько точек. После этого между каждыми двумя соседними точками отметили еще по точке. Такое "уплотнение"повторили еще дважды (всего три раза). В результате на прямой оказалось отмечено 4009 точек. Сколько точек было отмечено первоначально?

2. На квартиры была очередь, и около строящегося дома появился очень странный палаточный городок: все палатки были выстроены в линию. Через некоторое время между каждыми двумя поставили ещё по одной палатке. Через некоторое время – между каждыми двумя снова по одной. Наконец дом достроили. В нём оказалось 15 этажей, на каждом этаже было 3 квартиры. Каждой семье досталось ровно по одной, и все квартиры оказались заняты. Сколько семей приехало сначала, если в одной палатке жила одна семья?

3. В буфете после городской олимпиады выстроилась очередь за бутербродами. Бутерброды задерживались, и в каждый промежуток между стоящими успело влезть по человеку. Бутерброды все еще не начали выдавать, и во все промежутки опять влезло по человеку, а потом еще по человеку. Тут наконец принесли 4009 бутербродов, и всем стоящим досталось по одному. Сколько человек стояли в очереди первоначально?

Установление аналогии. Заметим, что задачи 1 и 3 полностью аналогичны даже численно. Заменим в задаче 3 людей точками, тогда количество принесенных бутербродов в точности совпадает с окончательным количеством людей в очереди, и мы получим формулировку задачи 1. В задаче 2 общее количество семей закамуфлировано под количество квартир, которое надо сначала вычислить. Сделав это, а также заменив семьи (палатки) точками, мы получим задачу 1 с другими численными данными, в которой «уплотнение» произведено только два, а не три раза.

1. Имеется две кучки 9 камней и 10 камней. За один ход можно взять сколько угодно камней из любой (но только одной) кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

2. На шахматной доске размером 10×11 в левом нижнем углу стоит ладья. Двое по очереди ходят ею вверх или право (влево и вниз ходить не разрешается). Выигрывает тот, кто первым поставит ладью в правый верхний угол. Кто выигрывает при правильной игре?

Установление аналогии. В этом примере аналогия гораздо менее очевидна, однако она есть. Занумеруем вертикали доски от 0 до 10 (слева направо), а горизонтали от 0 до 9 (снизу вверх). Будем устанавливать соответствие следующим образом: представим себе, что мы играем в обе игры одновременно. Будем двигать ладью вверх, если берут камни из кучки с 9 камнями (назовем эту кучку – первая) и вправо, если из кучки из 10-ю камнями (назовем эту кучку – вторая). И, наоборот, при движении ладьи по горизонтали будем брать камни из второй кучки, а при движении по вертикали – из первой. Каждый раз количество взятых камней равно количеству клеток, на которые переместили ладью. Тем самым мы установили соответствие между позициями двух этих игр.[2]

[2] Другими словами: мы задаем координаты ладьи на доске и устанавливаем соответствие позиций следующим образом: позиции ладьи $(a\ ;\ b)$ соответствует позиция a камней в первой кучке и b камней во второй.

Листок 1.2. Четность. Переводная работа. Аналогии.

Как узнать, кто вы – физик или математик? Предлагается решить простейшую задачу: вскипятить воду, если дано: газовая плита, кран с водой, спички. В этом случае действия физика и математика полностью совпадают. Другая задача: вскипятить воду, если дано: все то же самое, но чайник с водой и газ включен. Что сделает физик? Просто поставит чайник на огонь. Что сделает математик? Выключит газ и выльет воду из чайника, чтобы свести задачу к предыдущей, уже решенной!

Из сборника "Физики шутят."

Найдите аналогичные между собой и аналогичные задачам из листков 1 и 2 уровня. Обращаем внимание, что числа не обязательно совпадают. Обязательно установите аналогию, как это сделано на примерах. Решать все задачи не нужно.

1. На 20 кустах малины, растущих в ряд, количество ягод на любых двух соседних кустах отличается на 1. Можно ли собрать с них 2019 ягод? (Оставлять ягоды на кустах нельзя, они сгниют)
2. У фальшивомонетчиков Гоги и Сереги есть 2018 монет номиналом от 1 до 2018 центов. Они хотят так поделить монеты, чтобы номинальная сумма центов у обоих была одинакова. Удастся ли им это сделать?
3. Воевода и его богатыри питаются золотыми рыбками. Воевода наловил 20 золотых рыбок. Тридцать три богатыря передают друг другу чашу с рыбками, и каждый кладет или забирает из чаши рыбку. Может ли в чаше в результате получиться 10 золотых рыбок?
4. У Лизы в 17 спичечных коробках живут 2010 тараканов. На каждом коробке написано количество проживающих в нем тараканов. Может ли произведение этих чисел быть нечетным числом? Если да, то приведите пример, если нет, то докажите, почему.
5. Может ли окружность пересекать в одной точке (без касания!) все стороны правильного 17-ти угольника?
6. У Ильи есть 2018 стальных шариков весом от 1г до 2018г. Он пытается разложить их на две чашки весов так, чтобы весы оказались в равновесии. Сможет ли он это сделать?
7. Катя вернулась из летнего лагеря и заявила, что в лагере, кроме нее, было еще ровно 2018 ребят, и в начале смены каждый был знаком ровно с тремя. Права ли Катя?
8. Куча семиклассников встали в круг, и каждый из них загадал число. После чего Илья Владимирович прошел круг, и для каждых двух соседей подсчитал произведение их чисел. Если у него получалось отрицательное число, то он ставил обоим этим ребятам по двойке. Всего было поставлено 10 двоек. Докажите, что кто-то из семиклассников загадал ноль.
9. Злой волшебник пообещал Мефодию Буслаеву власть над миром, если он согнет из волшебной золотой проволоки 2019-тиугольник, длины всех сторон которого составляют нечетное число сантиметров. Волшебник дал ему моток такой проволоки длиной 20 м 8 см и сказал, что проволока обязательно должна быть использована полностью. Сможет ли Мефодий получить власть над миром?
10. Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1см в какую-то сторону, во второй раз – на 2см, в третий – на 3см, и так далее. Докажите, что он не сможет за 2018 прыжков вернуться в начальную точку.

    Запишите решение задачи 8

Еще раз обращаем внимание, что в данной работе не требуется приводить решения всех задач. Для успешной сдали нужно указать аналогии и записать решение лишь одной задачи.

Решения проверочной работы с уровня 2 на уровень 3

Задачи 2 и 6 полностью аналогичны таким образом: монеты – гири. В обоих задачах требуется разделить их пополам. Также они схожи с задачей 10, в которой прыжок вправо – монета одному фальшивомонетчику, а прыжок влево - другому. Условие совпадения суммы денег эквивалентно условию попадания в начало координат. Задача 1.23 аналогична этим трем - 2, 6, 10.

номер в проверочной	номер в листках 1.1, 1.2
1,3	1.14,1.15,1.28
4	1.13
5	1.16
8	1.17,1.18
9	1.22

Решение. Задачи 8. Предположим противное, что 0 никто не загадал. Тогда пар соседей, у которых произведение отрицательно четно. Потому что количество пар «-» «+» ровно столько же, сколько пар «+» «-» (если идти, например, по часовой стрелке). А 10 – это 5 пар. Противоречие. □

Дубль уровня 2

Второй уровень достаточно сложен. Поэтому скорее всего дубль этого листка потребуется.

Листок 1. Четность. Уровень 2А

Задача 1.31. На рисунке прямая пересекает все стороны шестиугольника. Может ли прямая пересекать все стороны какого-нибудь 17-угольника, не проходя ни через одну его вершину?

Задача 1.32. По кругу зацеплены 17 шестерёнок: первая со второй, вторая с третьей, ..., семнадцатая с первой. Могут ли они вращаться?

Задача 1.33. 100 фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить фишки в обратном порядке?

Задача 1.34. Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1см в какую-то сторону, во второй раз - на 3см, в третий - на 5см, и так далее. Сможет ли он за 2011 прыжков вернуться в начальную точку?

Задача 1.35. В 7Ю учится 30 человек. На каждый день нужно назначить трое дежурных. Можно ли так составить график дежурства, чтобы через некоторое время каждый подежурил с каждым ровно один раз?

Задача 1.36. На шахматной доске стоят 17 шашек, расположенных симметрично относительно большой диагонали. Докажите, что есть шашка или шашки и на большой диагонали.

Задача 1.37. Витя и Коля купили несколько шоколадок «Вдохновение»[1] и решили их поделить между собой. Каждую плитку брал себе целиком либо Витя, либо Коля, либо они ломали ее пополам. После этого Витя заявил, что Коля взял себе на одну дольку больше. Могло ли такое быть?

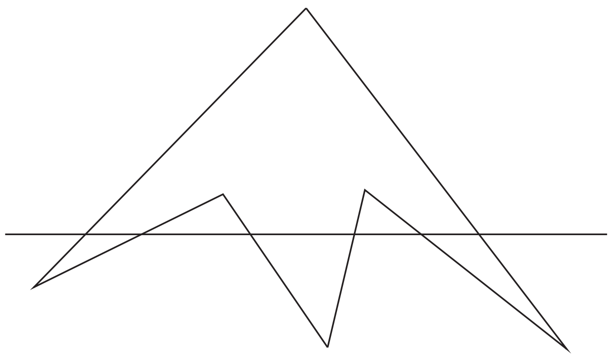


Рис. 1.1: **Задача 1.31**

[1]Шоколадка «Вдохновение» состоит из нескольких отдельных плиток, каждая из которых содержит две дольки.

Листок 1. Четность. Переводная работа 2А. Аналогии.

Найдите аналогичные между собой и аналогичные задачам из листков 1 и 2 уровня. Обращаем внимание, что числа не обязательно совпадают. Обязательно установите аналогию, как это сделано на примерах.

Задача 1А. У двоечника Вани есть 2019 дневников. Он хочет разложить их по кругу так, чтобы количество двоек в лежащих рядом дневниках отличалось на 1. Сможет ли он это сделать?

Задача 2А. На далекой планете Занзибар живут многоножки. Как-то собрались вместе 2018 многоножек с количеством ножек от 1 до 2018. Причем известно, что у всех количество ножек разное. Они хотят разбиться на две команды для игры в крокет, чтобы общее количество ножек в командах было одинаково. Удастся ли им это сделать?

Задача 3А. Михаил Владимирович написал на доске программу, содержащую 2019 строчек. После чего каждый из 20 учеников 7Ю класса вышел к доске (один или несколько раз) и дописал или стер одну строчку программы. В результате на доске оказалась записанной программа из 17 строчек. Докажите, что нечетное число раз к доске выходило четное число учеников.

Задача 4А. У Жени в 20 аквариумах живут 2019 креветок. На каждом аквариуме написано количество проживающих в нем креветок. Может ли произведение этих чисел быть нечетным числом? Если да, то приведите пример, если нет, то докажите, почему.

Задача 5А. Шахматный конь обошел все клетки шахматной доски 7x7. Мог ли он начать не с угловой клетки, а с соседней с угловой?

Задача 6А. У Ильи есть 2018 стальных шариков весом от 1г до 2018г. Он пытается разложить их на две чашки весов так, чтобы весы оказались в равновесии. Сможет ли он это сделать?

Задача 7А. Незнайка, вернувшись из путешествия, рассказывал, что в некоторой планетарной системе 2019 планет, причем каждая имеет межпланетное сообщение еще с тремя другими. Не заблуждается ли Незнайка?

Задача 8А. Лизочка играет в Зазеркалье. Каждый день она меняем имя. Если она сегодня звалась Лиза, то на следующий день – Лизавета. Если же сегодня она звалась Лизавета, то на следующий день она зовется Лизой. А еще она меняет цвет платья – два дня носит красное, а потом два дня – синее. 1 сентября она назвалась Лизой и пришла в белом, а на следующий день уже надела красное. В каком платье и с каким именем она встретит Новый Год?[1]

Задача 9А. Злой волшебник пообещал Мефодию Буслаеву власть над миром, если он соберет волшебные бусы из 49 камней, чередуя алмаз и бриллиант. Причем, чтобы алмазов было меньше, чем бриллиантов, а начинались бусы с алмаза. Сможет ли Мефодий получить власть над миром?

Задача 10А. Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1см в какую-то сторону, во второй раз – на 2 см, в третий – на 3 см, и так далее. Докажите, что он не сможет за 2010 прыжков вернуться в начальную точку.

Задача 11А. Докажите, что число способов расставить на шахматной доске 2018×2018 2018 ферзей так, чтобы они не били друг друга, четно.

Запишите решения задач 8 и 3

Уровень третий

Как показывает практика, до третьего уровня добираются далеко не все. Задания этого уровня достаточно сложны и требуют от школьников уже не только владения материалом, но и значительной доли фантазии и сообразительности.

[1] 31 декабря

Листок 1. Четность. Уровень 3.

В этом разделе собраны задачи, для решения которых придется применить несколько идей, разобранных в листках уровней 1 и 2.

Задача 1.38. Лёша нарисовал на клетчатой бумаге замкнутый путь, идущий по линиям сетки. Докажите, что он нарисовал четное число единичных отрезков (единица – сторона клетки).

Задача 1.39. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью. Каждые 15 минут она поворачивает под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет только через целое число часов.

Задача 1.40. Кузнечик прыгает а) по прямой на метр вправо или влево; б) по плоскости, каждым прыжком перемещаясь на метр на север, юг, запад или восток; в) по узлам клетчатой плоскости, каждым прыжком перемещаясь по диагонали одной из клеток. Может ли он вернуться в исходную точку через 2011 прыжков?

Задача 1.41. а) б) в) Может ли в условиях предыдущей задачи кузнечик вернуться в исходную точку через 2010 прыжков?

Задача 1.42. ^{n} Дорожки парка – линии квадратной сетки. Одна ячейка – 100 на 100 метров. Войти в парк можно через единственный вход, а выйти – через единственный выход. Петя и Вася делились впечатлениями по поводу прогулок и выяснили, что один прошел по дорожкам на 300 м меньше, чем другой, причем каждый обошел целое число дорожек (то есть, ступив на дорожку, проходил до конца без возвращений). Не ошиблись ли ребята?

Задача 1.43. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна из цифр полученной суммы четна.

Задача 1.44. 17 девочек и 17 мальчиков встали в хоровод. Докажите, что у кого-то с обеих сторон стоят девочки.

Задача 1.45. Маша и ее друзья встали в круг. Оказалось, что у каждого из них оба соседа либо оба мальчики, либо девочки. Мальчиков среди Машиных друзей пять. А сколько девочек?

Задача 1.46. Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари двух враждующих станов. Оказалось, что число рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4.

Задача 1.47. В классе 30 учеников. Они сидят за 15-ю партами. При этом оказалось, что ровно половина всех девочек сидит с мальчиками. Докажите, что их не удастся пересадить (за те же 15 парт) так, чтобы ровно половина всех мальчиков класса сидела с девочками.

Задача 1.48. Сто грустных мартышек кидают друг в друга одним кокосовым орехом. Грустная мартышка, попавшая орехом в другую грустную мартышку, становится веселой и больше не грустнеет. Мартышка, в которую попали, выбывает из игры. Каких мартышек больше выбыло из игры – веселых или грустных – к моменту, когда в игре осталась одна мартышка?

Подведение итогов и результаты.

Итак, подошло время подведения итогов. Поскольку это первый листок и школьники привыкают к новым правилам, к самостоятельной работе, то время, которое обычно отводится на листок – около полутора месяцев – примерно 12 полуторачасовых занятий. Детям заранее объявляется, когда наступает «час X», то есть день, когда задачи будут разобраны и их решения больше принимать не будут. Лучше не устраивать разбор всех задач в самом конце, а разбирать их по ходу дела. И школьникам будет проще воспринимать, и пользы от этого больше. Например, задачи листка 1 уровня рекомендуется разобрать, когда все уже готовы писать (или уже написали) проверочную работу на 1 уровень. Часть задач второго уровня можно разбирать в процессе, когда есть такая необходимость. Если в этом случае задача рассказывается тому, кто ее не смог решить, то задачу можно заменить на похожую. Главная цель – убедиться, что все ученики класса разобрались в решении всех задач 1 и 2 уровня.

В уровне 3 некоторые задачи могут остаться неразобранные, если нет людей, кто над ними думал. С другой стороны, если школьники выражают желание узнать решения задач, стоит им их рассказать.

Мы считаем, что обязательному разбору подлежат задачи из листка 3 уровня – 1.39, 1.43, 1.47 и 1.48

Оценки. Если эти листки решаются в школе, а не на кружке, то по правилам школы необходимым является выставление оценок.

Школьники, сдавшие листок 1 уровня и написавшие переводную работу на 2 уровень, но далее не продвинувшиеся, получают оценку «3» или «удовлетворительно».

Школьники, сдавшие листок 2 уровня и написавшие переводную работу на 3 уровень, но далее не продвинувшиеся, получают оценку «4» или «хорошо».

Школьники, сдавшие листок 2 уровня и написавшие переводную работу на 3 уровень и решившие не менее 8 задач из листка уровня 3, получают оценку «5» или «отлично».

Дополнительную оценку «5» можно поставить тем, кто решил все задачи листка уровня 3.

При этом не имеет значения решил школьник задачи проверочной работы с первого или со второго раза.

Решения некоторых задач.

Задача 1.17 Полный комплект костей домино выложен в цепочку. На одном конце оказалась пятерка. А что могло оказаться на другом?

Решение. Рассмотрим множество половинок всех доминошек. Всего доминошек 28, при этом каждое число (от 0 до 6) присутствует ровно на 8 половинках. Заметим, что в выложенной цепочке все половинки кроме двух крайних разбиты на пары с одинаковыми цифрами. Это означает, что среди них любое число (от 0 до 6) встречается четное число раз. Тогда, если не рассматривать неизвестный конец, пятерка встречается на одном конце и еще на четном количестве мест, а все остальные числа встречаются на четном количестве мест. Отсюда однозначно следует, что на втором конце тоже пятерка. □

Задача 1.18 Из полного набора домино, подаренного родителями, Ваня потерял все кости с «пустышками». Сможет ли теперь кто-нибудь выложить оставшиеся кости в ряд?

Решение. Не сможет. Предположим обратное: пусть кости разложены в ряд. Все половинки, кроме двух крайних, объединяются в пары с равными числами. На двух крайних числа могут быть как равные, так и нет (мы не можем ссылаться в этом месте на предыдущую задачу, так как часть косточек потеряна). Следовательно, все числа, за исключением двух, заведомо появляются четное число раз. Но после потери всех пустышек осталось ровно по 7 экземпляров каждой из 6 цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. □

Задача 1.39 Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью. Каждые 15 минут она поворачивает под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет только через целое число часов.

Решение. Введем координаты. Оси направим параллельно и перпендикулярно движению улитки. А нулем обозначим ее начальное положение. Пусть за 15 минут улитка проползает 1. Тогда:
за 15 минут улитка меняет четность одной координаты.

за 30 минут улитка меняет четность каждой координаты
за 45 минут четность хотя бы одной координаты останется измененной
за час четность каждой координаты не изменится
Потому что изменение координаты чередуется каждые 15 минут. Значит за нецелое количество часов вернуться назад (то есть не менять четность), нельзя. □

Задача 1.43 К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна из цифр полученной суммы четна.

Решение. Предположим противное. Посмотрим на 9 цифру: она складывается сама с собой, поэтому у суммы в 9 разряде будет четное, если нет перехода с 8 разряда. Значит есть и переход с 10 на 11 разряд (потому что участвуют те же цифры). Следовательно четность 11 и 7 цифр одинакова. Поэтому у суммы в 7 разряде будет четное, если нет перехода с 6 разряда. Значит есть и переход с 6 на 7 разряд (потому что участвуют те же цифры). Следовательно четность 12 и 6 цифр одинакова. повторяя аналогичные рассуждения приходим к тому, что четность 17 и 1 цифр одинакова. Но на 1 и 17 местах цифры разной четности (иначе последняя цифра суммы была бы четной). Противоречие. □

Задача 1.47 В классе 30 учеников. Они сидят за 15-ю партами. При этом оказалось, что ровно половина всех девочек сидит с мальчиками. Докажите, что их не удастся пересадить (за те же 15 парт) так, чтобы ровно половина всех мальчиков класса сидела с девочками.

Решение. Если половина всех девочек сидит с мальчиками, то остальная сидит с девочками, то есть по парам. Значит число девочек делится на 4. Для аналогичного условия для мальчиков требуется делимость их количества на 4. Но тогда сумма всех детей должна делиться на 4. Но 30 не делится на 4. Противоречие. □

Задача 1.48 Сто грустных мартышек кидают друг в друга одним кокосовым орехом. Грустная мартышка, попавшая орехом в другую грустную мартышку, становится веселой и больше не грустнеет. Мартышка, в которую попали, выбывает из игры. Каких мартышек больше выбыло из игры – веселых или грустных – к моменту, когда в игре осталась одна мартышка?

Решение. Веселых меньше. Чтобы попасть в веселую, она перед этим должны была попасть в грустную. Значит веселых, в которых попали, меньше или равно количеству выбитых грустных. Равенства быть не может в силу нечетности количества выбитых. □

Задача 1.19 На бирже в городе Нью-Васюки ежедневно в 10.00 проходят торги. Рано утром 1 января N-го года цены на акции фирм «Вася Inc.» и «Петя и Ко» были один и два рубля соответственно. Вечером 31 декабря того же года цены стали снова теми же. Лёша установил, что цены на акции этих фирм всегда были различны, каждый день изменялись и все время были либо один, либо два рубля. Докажите, что прошедший год был високосным.

Решение. Каждый день четность стоимостей акций меняется. Значит такой же стоимость может стать только через четное количество дней. Только в високосном году так бывает. □

Задача 1.21 Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, . . . , восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

Решение. Предположим, что у нас получилось их выписать в таком порядке. Тогда единица и двойка стоят на местах одинаковой четности. Ровно как и любые другие 2 соседних по величине числа. Значит все числа стоят либо на четных, либо на нечетных местах, чего быть, конечно, не может. □

Задача 1.22 7М класс упражняется в счете. Анатолий Анатольевич написал на доске число 2011. После чего каждый ученик вышел к доске, прибавил или вычел 17 или 13 и записал получившийся результат. Когда каждый из 20 учеников вышел по одному разу, на доске оказалось написано число 2012. Анатолий Анатольевич посмотрел на доску и расстроился. Докажите, что кто-то из учеников ошибся.

Решение. Каждая операция меняет четность числа. Через 20 операция четность не должна измениться, значит кто-то ошибся. □

Задача 1.23 У Вини-Пуха было 2019 горшочков меда. Кристофер Робин принес или забрал 9 горшочков, что именно - Пух не помнит. На следующий день Кристофер Робин снова пришел и принес или забрал 8 горшочков, на следующий день - 7 и так далее. Наконец Кристофер Робин пришел и принес или забрал один горшочек. а) Могло ли у Винни-Пуха на 10 день оказаться горшочков столько же, сколько и было в самом начале, то есть 2019? б) Сколько вообще горшочков меда могло быть у Вини-Пуха на 10 день, если все это время он мед не ел?

Решение. а) за 10 дней четность количества горшочков менялась 5 раз, значит в конце должно было получиться четное количество, значит 2019 быть не могло.
б) можно получить любую четную сумму от $2011 - 45 = 1966$ до $2019 + 45 = 2056$. Доказательство опустим. □

Задача 1.11 На доске написано 2019 целых чисел. Всегда ли можно стереть одно из них так, чтобы сумма всех оставшихся чисел была четна?

Решение. Да, если сумма четна, то среди чисел есть хотя бы одно четное, которое можно зачеркнуть. В противном случае есть хотя бы одно нечетное, которое тоже можно зачеркнуть. □

Задача 1.15 Вокруг круглой поляны растут 2019 сосен. Незнайка измерил высоту каждой из них и заявил, что любые две соседние сосны отличаются по высоте ровно на метр. Знайка тут же заметил, что Незнайка врет. Кому верить?

Решение. Высота всех деревьев, стоящих на нечетных местах одинакова. Но 1 и 2019 сосны стоят рядом, и их высоты не могут отличаться на 1. Значит Незнайка врет. □

Глава 2

Принцип Дирихле

Теоретический Листок. Принцип Дирихле

Если у тебя в двух карманах три копейки, то в одном из них меньше 2 копеек.

Народная мудрость

При решении самых различных задач часто бывает полезен так называемый «принцип Дирихле», названный в честь немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле (1805 - 1859); по-другому этот принцип еще называют «принципом ящиков» или «принципом голубятни» . Этот принцип часто является хорошим средством при доказательстве важнейших теорем в теории чисел, алгебре, геометрии. Возможно, вы уже слышали про этот принцип. И скорее всего, в первый раз вы услышали его формулировку в таком шутливом виде: "Пусть есть n клеток, в которых сидят не менее $n+1$ кроликов. Тогда найдется клетка, в которой сидит не меньше двух кроликов."Доказательство этого факта чрезвычайно просто. Предположим, что это не так. Т.е. в каждой клетке сидит не более одного кролика (один или ни одного). Тогда, так как клеток n, то в клетках сидит не более, чем n кроликов, что противоречит условию. Обратите внимание, что мы не можем указать, в какой именно клетке сидит больше одного кролика (даже не можем сказать, **НА** сколько больше), мы можем только утверждать, что такая клетка обязательно есть. Полученных сведений совсем мало, однако, и на основании таких, казалось бы, незначительных сведений можно делать значительные выводы. Разберем на примерах:

Задача 2.1. В коробке лежат шарики двух цветов. Сколько шариков достаточно наугад вынуть из коробки, чтобы среди них заведомо нашлись два одного цвета?

Решение. Понятно, что двух шариков недостаточно. Может оказаться один черный, другой белый. Вынем три шарика. Т.к. цвета всего два, то, очевидно, что два шарика будут одного цвета. Т.е. достаточно вынуть три шарика.[1] □

Задача 2.2. В лесу растет миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 400 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся по крайней мере три ёлки с одинаковым числом иголок.

Решение. Будем рассаживать наших «кроликов-ёлок» по «клеткам» с номерами от 0 до 400 000. В одну «клетку» будем «сажать» те ёлки, у которых число иголок равно номеру клетки. Задача будет решена, если мы докажем, что найдет «клетка», в которой «сидит» не менее трех ёлок. Всего «клеток» 400 001 штука. И если бы в каждой из них сидело не более двух «кроликов - ёлок», то всего ёлок было бы не более, чем $2 \times 400001 = 800002$ штук. А это не так. Следовательно, найдется хотя бы одна «клетка» в которой не менее 3 «кроликов». [2] □

Иногда принцип рассуждений, использованный в предыдущей задаче, еще называют *обобщенным принципом Дирихле*: *Если в N клетках сидит не менее $(k \times N) + 1$ кролик, то найдется клетка, в которой сидит не менее $k + 1$ кролика.*

Заметим, что при $k = 1$ обобщенный принцип Дирихле превращается в обычный принцип Дирихле.

Упражнение 12. Закончите предложения:
а) В пяти тарелках лежат шесть конфет. Тогда найдется тарелка, в которой лежит ...
б) В 17 чуланах живут 19 привидений. Значит найдется чулан, в котором живет ...
в) В 10 спичечных коробках лежит 21 монетка. Тогда найдется коробок, в котором лежит ...

Упражнение 13. 25 голубей рассадили по 7 клеткам. Укажите, какие из приведенных ниже утверждений всегда верны:
а) «найдется клетка, в которой 4 голубя»; б) «найдется клетка, в которой не менее 4 голубей»; в) «найдется клетка, в которой больше 4 голубей»; г) «найдется клетка, в которой 3 голубя»;
д) «найдется клетка, в которой меньше 3 голубей»; е) «найдется клетка, в которой не более 3 голубей».

[1] Вытаскивая три шарика, мы будем уверены, что сможем выбрать из них два одного цвета, но НЕ ЗНАЕМ, КАКОГО! - черного или белого.

[2] Мы доказали, что таких елок не менее трех, но мы не знаем точно, сколько их. Может быть, 5, может быть, 100, а может быть и весь миллион. Более того, мы не знаем, сколько конкретно, иголок на них. Может, 5, может, 400 000, а может и ни одной!

Листок 1. Принцип Дирихле

Если ты в своем кармане ни копейки не нашел,
загляни в карман к соседу - очевидно, деньги там!
Григорий Остер "Вредные советы"

Задача 2.3. $^\circ$ В ящике лежат шары: 5 красных, 7 синих и 1 зеленый. Сколько шаров надо вынуть, не глядя, чтобы наверняка достать 2 шара одного цвета?

Задача 2.4. На Марс привезли 51 ящик с приборами пяти видов. Верно ли, что обязательно приборов какого-то вида было а) не более 10 ящиков, б) не менее 10 ящиков?

Задача 2.5. ^{n} Вася в течение 3 дней съел 100 шоколадок. Обязательно ли найдется ли день, в который Вася съел а) не менее 34 шоколадок б) не более 33 шоколадок?

Задача 2.6. а) В темной комнате стоит шкаф, в ящике которого лежат 24 черных и 24 синих носка. Сколько носков следует взять из шкафа, чтобы из них заведомо можно было составить по крайней мере одну пару носков одного цвета? (речь идет о минимальном числе носок) б) Сколько надо взять носков, чтобы заведомо можно было составить хотя бы одну пару носков черного цвета? в) Как изменится решение задачи, если в ящике лежат 12 пар черных и 12 пар синих ботинок и требуется составить пару одного цвета (как в пункте а) и пару черного цвета (как в пункте б)?

Задача 2.7. Белых и черных кроликов рассаживали по клеткам. Белых было больше, чем черных. Докажите, что найдется клетка, в которой белых кроликов больше, чем черных.

Задача 2.8. В коробке лежат карандаши: 7 красных и 5 синих. В темноте берут карандаши. Сколько надо взять карандашей, чтобы среди них было не меньше 2-х красных и не меньше 3-х синих?

Задача 2.9. В ящике лежат цветные карандаши: 10 красных, 8 синих и 4 желтых. В темноте берем из ящика карандаши. Какое наименьшее число карандашей надо взять, чтобы среди них заведомо было:
а) не менее 4-х карандашей одного цвета? б) не менее 6-ти карандашей одного цвета?
в) хотя бы 1 карандаш каждого цвета? г) не менее 6-ти синих карандашей?

Задача 2.10. Докажите, что среди любых n чисел найдутся два, разность[1] которых делится на $n-1$.

Задача 2.11. В классе 40 человек. В диктанте Степа сделал 13 ошибок, а остальные сделали меньше. Обязательно ли найдутся ли среди них а) 3 человека, б) 4 человека, сделавших одинаковое число ошибок?

Задача 2.12. У человека на голове не более 400000 волос, в Москве более 8 млн. жителей. Докажите, что найдутся 20 москвичей с одинаковым числом волос.

Задача 2.13. О населении города Поданк известно следующее:
а) Среди жителей Поданка не найдется двух с равным числом волос на голове.
б) Ни у одного жителя Поданка не голове не растет ровно 518 волос.
в) Жителей в Поданке больше, чем волос на голове любого из них.
Какова может быть наибольшая численность населения г. Поданка?

Напоминаем, что для получения задач следующего уровня необходимо выполнить проверочную работу, включающую задачи, похожие на приведенные выше. Задачи, отмеченные значком n, приниматься в устном форме не будут. В данном случае это единственная задача 2.5. Решение таких задач надлежит выполнить в письменном виде дома и принести на занятие спецматематики. Рекомендуем решать задачи по порядку, поскольку зачастую в решении следующей задачи можно использовать идею из предыдущей.

Желаем успеха!

[1]Здесь вам понадобится понятие остатка при делении целых чисел.

Листок 1. Принцип Дирихле. Проверочная работа.

Задача 2.14. Докажите, что среди любых шести человек всегда найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Задача 2.15. Каждый из 17 ученых переписывается с остальными. В их переписке речь идет лишь о трех темах. Каждая пара ученых переписывается друг с другом только по одной теме. Докажите, что не менее трех ученых переписываются друг с другом по одной и той же теме.

Задача 2.16. В погребе стоит 20 одинаковых банок с вареньем. В 8-ми банках клубничное варенье, в 7-ми - малиновое, в 5-ти - вишневое. Каково наибольшее число банок, которые можно в темноте вынести из погреба с уверенностью, что там осталось еще хотя бы 4 банки одного сорта варенья и 3 банки другого?

Задача 2.17. За круглым столом сидят 25 детей и 25 преподавателей и грустно смотрят друг на друга. а) Докажите, что есть ребенок, который сидит точно напротив преподавателя. б) Докажите, что есть несчастный, оба соседа которого - дети.

Задача 2.18. **В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

Листок 2. Принцип Дирихле.

«В три клетки нельзя посадить четырех зайцев так, чтобы в каждой клетке сидел ровно один заяц. Это следует из принципа Дирихле...
Заменим ученых кроликами и посадим их в ящики...»
Из школьных записей

В предыдущих задачах было ясно из условия, что именно надо считать “клетками”, а что - “кроликами”. Обычно угадать “кроликов” несложно. Скорее всего, это те объекты, про которые и надо что-то выяснить, хотя это и не всегда. Иногда надо рассматривать не все предложенные объекты, а только часть из них, или, наоборот, добавить к ним еще несколько и рассматривать все полученное множество. Перед решением каждой из следующих задач мы попросим вас указать, что именно вы считаете «клетками», а что - «кроликами»

Задача 2.19. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

Задача 2.20. ^{n} В спичечных коробках находятся 50 тараканов. Докажите, что либо в одном коробке живут 8 тараканов, либо для выкидывания коробков по одному в день потребуется больше недели.

Задача 2.21. По краю круглого стола расставлены таблички с фамилиями дипломатов, участвующих в переговорах о борьбе с мировым терроризмом. Оказалось, что дипломаты не посмотрели на таблички и каждый сел не на свое место. Можно ли повернуть стол так, чтобы хотя бы два дипломата сидели против своих табличек?

Задача 2.22. *Докажите, что среди чисел, записываемых одними единицами, найдется число, делящееся на 2007.

Задача 2.23. *Карабас Барабас пообещал Буратино открыть тайну Золотого ключика, если тот составит из чисел 0, 1, 2 волшебный квадрат 6x6 так, что в каждой строке, каждом столбце и двух диагоналях сумма чисел была различна. Помогите Буратино!

Задача 2.24. *Дано 11 различных натуральных чисел, не превосходящих 20. Докажите, что из них можно выбрать два, одно из которых делится на другое.

Задача 2.25. Докажите, что среди любых трех целых чисел найдется два, сумма которых четна.

Задача 2.26. ** Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдутся одно или несколько, сумма которых делится на 10.

Задача 2.27. Докажите, что среди любого количества человек найдутся двое, имеющих одинаковое (возможно, нулевое) число знакомых среди этих человек.

Задача 2.28. Александр Кириллович предложил ученикам 7Ю класса написать два теста, за каждый из которых можно было получить оценку 1, 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что обязательно найдутся два ученика получившие одинаковые оценки по обоим тестам, если в 7Ю учится 26 человек?

Задача 2.29. В ковре размером 4x4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1x1 метр, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки считайте точечными.)

Напоминаем, что получения задач следующего уровня необходимо выполнить проверочную работу, включающую задачи, похожие на приведенные выше. Задачи, отмеченные значком n, приниматься в устном форме не будут. В данном случае это единственная задача 2.20. Решение таких задач надлежит выполнить в письменном виде дома и принести на занятие спецматематики. Рекомендуем решать задачи по порядку, поскольку зачастую в решении следующей задачи можно использовать идею из предыдущей.

Желаем успеха!

Листок 2.2. Принцип Дирихле. Проверочная работа. Аналогии.

И снова аналогии! В это раз в этом разделе нет оригинальных задач. Поэтому решать их вам не придется. Для выполнения этого задания вам нужно только найти задачи, аналогичные приведенным выше и описать соответствие.

Задача 2.30. В кружок ходит 17 школьников. На дом им задали 3 задачи. Как потом оказалось, каждые два школьника посоветовались друг с другом ровно по одной задаче. Докажите, что найдется три кружковца, посоветовавшиеся попарно друг с другом по одной и той же задаче.

Задача 2.31. На бумаге нарисованы шесть точек. Каждые две из них соединены либо красным отрезком, либо синим. Докажите, что найдется либо красный треугольник с вершинами в нарисованных точках, либо синий.

Задача 2.32. В соревнованиях по вольной борьбе участвовало 12 человек. Каждый участник должен был встретиться с каждым из остальных по одному разу. Докажите, что в любой момент соревнования имеются два участника, проведшие одинаковое число схваток.

Задача 2.33. Мальчики танцевали вальс с девочками. После танца девочки встали в круг, и к каждой из них подошел мальчик. Оказалось, что не составилась ни одна танцевальная пара. Могут ли мальчики так перейти по кругу, чтобы составились хотя бы две танцевальные пары?

Задача 2.34. В одной пещере живут шесть гномов. Каждый день каждые два из них либо ссорятся либо снова мирятся. Докажите, что в любой день найдутся либо трое попарно помирившихся гнома, либо трое попарно поссорившихся.

Задача 2.35. 17 кумушек обсуждают по телефону три темы. Причем любые две обсуждают всегда только одну неизменную тему. Докажите, что найдутся трое, обсуждающие одну и ту же тему.

Задача 2.36. В классе 25 человек. Докажите, что обязательно найдутся два человека, имеющих одинаковое количество друзей в этом классе.

Задача 2.37. Среди шести бульбозавров любые два могут договориться друг с другом на одном из двух языков: на бульбо-языке или на завро-языке. Докажите, что найдутся три бульбозавра, говорящих на одном и том же языке.

Листок 3. Принцип Дирихле.

Задача 2.38. Докажите, что среди чисел, записываемых одними единицами, найдется число, делящееся на 2011.

Задача 2.39. Карабас Барабас пообещал Буратино открыть тайну Золотого ключика, если тот составит из чисел 0, 1, 2 волшебный квадрат 6x6 так, что в каждой строке, каждом столбце и двух диагоналях сумма чисел была различна. Помогите Буратино!

Задача 2.40. Дано 11 различных натуральных чисел, не превосходящих 20. Докажите, что из них можно выбрать два, одно из которых делится на другое.

До сих пор мы рассматривали применение принципа Дирихле для дискретных величин (то есть величин, которые можно сосчитать). Однако этот принцип точно так же можно использовать и для непрерывных величин (то есть величин, которые можно измерить). Например:

Если N кроликов съели M кг травы, то какой-то кролик съел не меньше $\frac{M}{N}$ кг и какой-то съел не больше $\frac{M}{N}$ кг.
(А если кто-то съел больше среднего, то кто-то съел меньше среднего)

Заметим, что в последней формулировке кролики играют роль клеток, а трава - роль кроликов, сидящих в этих клетках.

Задача 2.41. Пусть сумма N чисел равна A. Докажите[1], что среди этих чисел найдется число а) не больше $\frac{A}{N}$ б) не меньше $\frac{A}{N}$.

Задача 2.42. °Семья из семи человек ела торт. Его разделили на 7 частей разного размера. Докажите, что кто-то съел не меньше 1/7 торта.

Задача 2.43. Четырехугольник площади S четырьмя прямыми разбили на 9 четырехугольников. Докажите, что найдется четырехугольник, площадь которого не меньше S/9. [2]

Задача 2.44. На плоскости проведено 12 прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что какие-то две из них образуют угол не больше 15°.

Задача 2.45. Докажите, что у часов с часовой, минутной и секундной стрелкой в любой момент времени найдутся стрелки, угол между которыми не больше 120°.

Задача 2.46. *На отрезке длиной 20 см отмечено 19 точек. Докажите, что найдется интервал длиной не меньше 1 см , не содержащей ни одной выделенной точки.[3]

Задача 2.47. *На планете Зям-Лям в звездной системе Тау Кита суша занимает больше половины площади всей планеты. Докажите, что таукитяне могут прорыть туннель через центр планеты и соединяющий сушу с сушей.[4]

Задача 2.48. **Пусть в предыдущей задаче планета не обязательно имеет форму шара. Верно ли тогда утверждение про туннель?

В предыдущих задачах только стоило догадаться, к чему именно надо применить принцип Дирихле и задача “решалась”. Но часто в одной задаче приходится применять этот принцип не один раз, а то и применять, используя разные “клетки”, т.е. разные способы разбиения на группы предметов, описываемых в задаче.

В этот раз уровень 3 является не последним. Выполнение задач этого уровня дает возможность получить 4+ и возможность сдавать задачи четвертого уровня. Задача 2.48 не является обязательной для решения.
Желаем успеха!

[1] Доказательство в этой задаче как раз и является доказательством непрерывного принципа Дирихле.
[2] Огромная просьба: не нужно сводить решение этой задачи к фразе: «все следует из принципа Дирихле». Хотелось бы услышать доказательство.
[3] интервал - это «отрезок без концов»
[4] Будем считать, что техника у них для этого достаточно развита, а планета имеет форму шара.

Листок 2.4. Принцип Дирихле. Проверочная работа.

Задача 2.49. *Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдутся одно или несколько, сумма которых делится на 10.

Задача 2.50. **Две вершины выпуклого 2005-угольника будем называть далекими, если диагональ, соединяющая их, делит этот 2005-угольник на 1004-угольник и 1003-угольник. Докажите, что если все вершины исходного 2005-угольника раскрасить в 3 цвета, то найдутся либо 2 одноцветные соседние вершины, либо 2 одноцветные далекие вершины.

Задача 2.51. *Какое наименьшее количество карточек «Спортлото - 6 из 49» нужно купить, чтобы наверняка хоть на одной из них был угадан хоть один номер? [1]

Задача 2.52. *Каждая клетка таблицы 2007x2007 покрашена в один из 2006 цветов. За ход можно взять строку или столбец и, если там есть две клетки одного цвета, перекрасить эту строку или столбец в этот цвет. Можно ли за несколько ходов покрасить всю таблицу в один цвет?

Задача 2.53. *В клетках шахматной доски 8 x 8 записаны числа 1, 2, 3, ..., 62, 63, 64. Докажите, что найдутся две такие соседние клетки, что числа, записанные в них, отличаются не меньше, чем на 9. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону или вершину).

Задача 2.54. **В лесу живут 20 гномов, каждый из которых дружит по крайней мере с 14-ю другими гномами. Обязательно ли найдутся 4 гнома, которые все дружат между собой?

Задача 2.55. **На столе лежат 50 правильно идущих часов со стрелками. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола, до концов минутных стрелок будет больше, чем сумма расстояний от центра стола до центров часов.

Задача 2.56. **Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причем на каждом присутствовало ровно 10 членов комиссий. Докажите, что какие-то два члена комиссии встречались на её заседаниях по крайней мере дважды.

Задача 2.57. **На плоскости отмечены 6 точек так, что любые три из них образуют треугольник со сторонами разной длины. Докажите, что найдутся два треугольника таких, что наименьшая сторона первого одновременно является наибольшей стороной второго.

Задача 2.58. ** Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в два цвета. Докажите, что существуют две вертикальные и две горизонтальные прямые, на пересечении которых лежат точки одного цвета.

[1] Игра «Спортлото» состоит в том, что в таблице чисел от 1 до 49 следует зачеркнуть 6 любых номеров, после чего происходит розыгрыш - объявляются выигрышными какие-то 6 номеров, если происходит совпадение - этот номер угадан.

Ответы к упражнениям

12 а) … не менее двух конфет; б) не менее двух привидений; в) не менее трех монеток.
13. всегда верны только б) и е).

Решения некоторых задач

Задача 2.20 ^{n} В спичечных коробках находятся 50 тараканов. Докажите, что либо в одном коробке живут 8 тараканов, либо для выкидывания коробков по одному в день потребуется больше недели.

Решение. Предположим противное: в каждом коробке живут не более 7 тараканов и таких коробков не более семи (поскольку в неделе семь дней). Тогда в этих коробках живет максимум 7x7=49 тараканов, но у нас их больше. Противоречие. Следовательно, наше предположение неверно и либо в одном коробке живут 8 или более тараканов, либо для выкидывания коробков по одному в день потребуется больше недели. □

Задача 2.5 ^{n} Вася в течение 3 дней съел 100 шоколадок. Обязательно ли найдется ли день, в который Вася съел а) не менее 34 шоколадок б) не более 33 шоколадок?

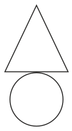
Решение. а) Предположим противное: такого дня не найдется. Это означает, что в каждый из трех дней Вася съедал менее 34 шоколадок, то есть 33 или менее. Тогда за три дня он мог съесть максимум $3 \times 33 = 99$ шоколадок, а он съел больше – 100. Противоречие. Следовательно, наше предположение неверно и такой день найдется.

б) Предположим противное: такого дня не найдется. Это означает, что в каждый из трех дней Вася съедал более 33 шоколадок, то есть 34 или более. Тогда за три дня он мог съесть минимум $3 \times 34 = 102$ шоколадок, а он съел меньше – 100. Противоречие. Следовательно, наше предположение неверно и такой день найдется. □

Глава 3

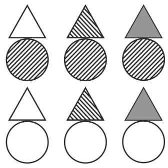
Комбинаторика

Теоретический Листок. Комбинаторика.

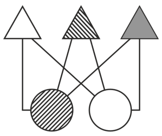


Раз, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять - можно все пересчитать, или же измерить, взвесить...

Считалка из учебника математики для 1 класса



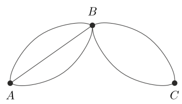
Пусть у нас есть три треугольника и два круга. Мы хотим составить фигурку такую как на рисунке сверху. Сколькими способами мы можем это сделать? Понятно, что выбор круга и выбор треугольника никак не зависят друг от друга. С любым из кругов можно выбрать любой из треугольников. Возможные комбинации приведены на рисунке справа. Итого 6 вариантов.



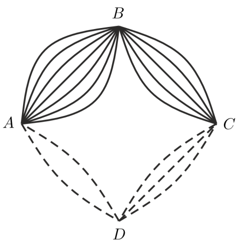
Этот же факт можно проиллюстрировать по-другому - см. рисунок слева. Те фигурки, которые можно поставить в пару, соединены линией. Сколько линий, столько и вариантов. И наконец третья иллюстрация - треугольник мы можем выбрать тремя способами, а круг - двумя, следовательно, всего $3 \times 2 = 6$ вариантов.

Итак, окончательный <u>*ответ:*</u> 6 способов.

Задача 3.1. Из города A в город B ведут 3 дороги, а из города B в город C - 2 дороги. Сколькими способами можно проехать из A в C?



Решение. Понятно, что выбор дороги между A и B никак не связан с выбором дороги между B и C. Поэтому из A в B мы можем доехать тремя способами, а из B в C - двумя способами. Поэтому всего способов - $3 \times 2 = 6$. <u>*Ответ:*</u> 6 способов.[1] □



Упражнение 14. а) Из города A в город B ведут 7 дорог, а из города B в город C - 5 дороги. Сколькими способами можно проехать из A в C?
б) Построили новый город D и из него 2 дороги ведут в A и 3 в C. Сколькими способами теперь можно проехать из A в C?

Упражнение 15. Кощей Бессмертный, желая сделать Бабе Яге подарок на Новый Год, приобрел кучу метелок трех сортов, ступы 5 сортов и головные платки 7 расцветок. Он хочет каждый Новый Год дарить Яге 1 метлу, 1 ступу и 1 платок, но так, чтобы ни один год наборы подарков не совпадали. На сколько лет ему хватит приобретенных товаров?[2]

Основное правило комбинаторики.
Если какое-то действие можно разбить на два, и первое из них можно осуществить n способами, а второе - m способами, то все действие можно осуществить $m \times n$ способами.

Упражнение 16. Переформулируйте предыдущее упражнение как задачу про дороги.

Задача 3.2. Монету бросают трижды. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно получить?

Решение. Для каждого из трех бросков имеется только два варианта: «орел» или «решка». Результат каждого броска не зависит друг от друга. Поэтому вариантов последовательностей восемь. [3]
<u>*Ответ:*</u> 8 последовательностей. □

Упражнение 17. А если в предыдущей задаче бросать монету сто раз?

Упражнение 18. Переформулируйте предыдущую задачу как задачу про дороги.

[1]Заметим, что эта задача полностью аналогична предыдущей задача про выбор треугольников и кружков: можно, например, считать, что дороги из A в B помечены одним из треугольников и выбор дороги означает выбор треугольника, а дороги из B в C помечены кругами и выбор дороги означает выбор одного из двух кругов.

[2]Считайте, что количество приобретенных предметов сколь угодно велико.

[3]При желании их все можно выписать

Задача 3.3. Назовем число симпатичным, если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует симпатичных пятизначных чисел?

Решение. Если цифры могут быть только нечетные, то вариантов для каждой позиции пять (1, 3, 5, 7 и 9). Выбор каждой цифры независим. Поэтому вариантов 5^5.
Ответ: Всего 5^5 симпатичных чисел. □

Задача 3.4. Сколько всего пятизначных чисел, которые не симпатичные, но и не неинтересные?

Решение. Число симпатичное, если в его записи встречаются только нечетные цифры, число неинтересное, если в его записи присутствуют только четные цифры. Поскольку каждая цифра либо четная, либо нечетная, то число не может быть одновременно симпатичным и неинтересным. Поэтому, если мы из общего количества пятизначных чисел вычтем количество симпатичных и количество неинтересных, то получим искомое. Всего пятизначных чисел 90000. Это можно сосчитать двумя способами:
1) всего натуральных чисел от 1 до 99999 (последнее пятизначное число) – 99999, однако числа от 1 до 9999 (всего 9999 штук) – не более, чем четырехзначные;
2) в пятизначном числе на первом месте может стоять любя цифра кроме 0, поэтому вариантов – 9, а на каждом их оставшихся четырех местах – любая из 10 цифр, поскольку выбор каждой цифры осуществляется независимо, то всего $9 \times 10^4 = 90000$ вариантов.
Сосчитаем теперь количество симпатичных чисел. Поскольку имеется пять нечетных цифр - $1, 3, 5, 7, 9$ и любая из них может стоять на любом из пяти мест, то всего симпатичных пятизначных чисел 5^5. Неинтересные числа: имеется также пять четных цифр - $0, 2, 4, 6, 8$, но на первом месте может стоять лишь одна из четырех (число не может начинаться с нуля). Поэтому вариантов неинтересных пятизначных чисел 4×5^4. Итак, искомое количество равно
$90000 - 5^5 - 4 \times 5^4 = 90000 - 5^4 = 90000 - 9 \times 625 = 90625 - 6250 = 83275$ □

Во многих комбинаторных задачах для записи результата потребуется понятие *факториала*:

Факториалом натурального числа N называется произведение всех целых чисел от 1 до N:
$N! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (N-1) \times N$ *(читается "эн факториал")*

Хотя факториал определен только для натуральных N, удобно ввести понятие 0! - будем считать его равным единице.

Упражнение 19. Чему равно а) $19! \times 20$; б) $6! \times 56$; в) $N! \times (N+1)$?

Упражнение 20. Чему равно а) $\dfrac{101!}{99!}$; б) $\dfrac{N!}{(N-1)!}$;

Задача 3.5. Сколькими способами можно расположить а) 11 человек в шеренгу; б) 11 разноцветных бусин по кругу? в) Укажите отличия между пунктами а) и б).

В предыдущей задаче рассматривается число способов, которыми можно расставить в шеренгу 11 человек. Такое расположение называется *перестановкой*. Таким образом, в этой задаче ищется число перестановок 11 человек. Число перестановок из N предметов обозначается P_N.

Задача 3.6. Выведите формулу для P_N .

Листок 1. Комбинаторика.

В этот раз задачи листочка каждого уровня рассчитаны на одно занятие. Другими словами, сдавшие 1 уровень и решающие второй, имеют времени только одно занятие - сегодняшнее. Сдающие также и первый имеют в своем распоряжении два занятия - это и еще следующее. После чего все задачи обоих уровней будут разобраны.

Задача 3.7. Сколько диагоналей и сторон у выпуклого а) 23-угольника; б) n-угольника?

Задача 3.8. Сколько есть возможностей поставить на шахматную доску
а) белую и черную б) две черных ладьи так, чтобы они не били друг друга? в) Укажите отличия между пунктами а) и б).

Задача 3.9. Сколько существует шестизначных чисел с разными цифрами?

Задача 3.10. У нас есть 13 шариков - 12 черных и 1 зеленый. Найдите число а) всех перестановок; б) всех различных перестановок.[1]

Задача 3.11. Та же задача, что и предыдущая, но не один зеленый шарик, а два (всего получается 11 черных и 2 зеленых).

Задача 3.12. Шася знает 14 дебютов, 11 миттельшпилей и 13 эндшпилей. Сколь разнообразна Шасина игра в шахматы?[2]

[1] Одинаковыми считаются те, при которых шары с одинаковым номерами одного цвета.
[2] Дебют - начало партии, миттельшпиль - середина, эндшпиль - окончание.

Листок 1. Комбинаторика. Проверочная работа.

Задача 3.13. Будем считать число неинтересным, если в его записи присутствуют только четные цифры. Сколько всего неинтересных пятизначных чисел?

Задача 3.14. В алфавите племени Мумба-Бумба всего три буквы: Б, У и М. Словом считается любая не пустая последовательность не более чем из четырех букв. Сколько всего слов в языке племени Мумба-Бумба?

Задача 3.15. 22 лампочки расположены в ряд. Сколькими способами мы можем зажечь две из них?

Задача 3.16. Сколькими способами можно выбрать в племени 7Ю класса из 20 человек а) вождя и его советника; б) двух дозорных?

Задача 3.17. В Доминандии, как и у нас, есть игра в домино, только точек на домино не от 0 до 6, а от 0 до 2011. Сколько всего доминошек в этой игре?

Задача 3.18. Сколько в мире десятизначных чисел, у которых все цифры разные?

Задача 3.19. Чему равно а) $17! \times 18$; б) $8! \times 90$; в) $(N-2)! \times (N-1)$?

Задача 3.20. Вычислите а) $\dfrac{2011!}{2010!}$; б) $\dfrac{(N+1)!}{(N-1)!}$; в) $\dfrac{(N+1)!-N!}{N}$

Задача 3.21. Может ли число $N!$ оканчиваться а) одной пятеркой; б) одной восьмеркой; в) семью нулями?

Решение некоторых задач проверочной

Задача 3.20 Вычислите а) $\dfrac{2011!}{2010!}$; б) $\dfrac{(N+1)!}{(N-1)!}$; в) $\dfrac{(N+1)!-N!}{N}$

Решение. в) $\dfrac{(N+1)!-N!}{N} = \dfrac{N! \times (N+1) - N!}{N} = \dfrac{((N+1)-1)N!}{N} = \dfrac{N \times N!}{N} = N!$ □

Задача 3.21 Может ли число $N!$ оканчиваться а) одной пятеркой; б) одной восьмеркой; в) семью нулями?

Решение. а) Если число оканчивается пятеркой, то по признаку делимости на 5 оно должно делиться на 5. Следовательно, если какой-то факториал оканчивается на 5, то среди его множителей должна быть пятерка. Поэтому это не может быть менее, чем 5!. Но 5! Оканчивается нулем и, соответственно, последняя цифра равна нулю во всех последующих факториалах.
б) Из пункта а) следует, что все факториалы больше 5! Не могут быть искомыми, так как не оканчиваются на 8. Поэтом достаточно проверить оставшиеся первые 5 факториалов: 0! = 1, не подходит; 1! = 1 - не подходит; 2! = 2 - не подходит; 3! = 6 - не подходит; 4! = 24 - не подходит. Тем самым доказано, что такого быть не может. в) Заметим, что ноль на конце дает произведение 5 и 2. Поскольку в разложении любого факториала пятерок меньше, чем двоек, то количество нулей на конце совпадает с количеством пятерок в разложении. Посмотрим, какие числа могут давать эти пятерки: 5; 10; 15; 20 - по одной пятерке; 25 - две пятерки. Поэтому факториалы от 0! до 24! Имеют на конце не более 4 нолей, а от 25! до 29! - ровно 6. Факториалы от 30! до 34! Имеют ровно 7 нолей, что требовалось выяснить. □

Листок 2. Комбинаторика.

Задача 3.22. Пусть теперь дано 9 черных и 4 зеленых шарика. Выясните, сколько существует перестановок, при которых первые 3 шарика зеленые?

Задача 3.23. а) Сколько всего существует различных перестановок 13 шариков из предыдущей задачи? б) А сколькими способами можно выбрать 3 шарика из 13-ти, разложенных в ряд, шариков? в) Укажите отличия между пунктами а) и б).

Задача 3.24. Давайте, заменим 10 черных шариков из задачи 3.10 на 10 разноцветных (получится 13 шариков, среди которых 2 зеленых и 11 других цветов). Вопрос: сколько теперь различных перестановок?

Задача 3.25. Теперь добавим 3 синих шарика к 13-ти из задачи 3.14 (будет 16 шариков 12-ти цветов). Тот же вопрос: сколько теперь различных перестановок?

Задача 3.26. Возьмем 10 шариков, среди которых 3 зеленых, 2 черных, 2 белых и 3 других различных цветов. Как много разных перестановок в этом случае?

Задача 3.27. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове МАТЕМАТИКА?

Задача 3.28. Есть на свете некто, кого зовут Словак Разнобукевич. Если взять его фамилию, и стереть несколько букв[1], сколько различных фамилий может получиться?

Задача 3.29. На бумажной полоске написано слово АБВГДЕЙКА. Сколькими способами можно разрезать эту полоску на три слова? [2]

Задача 3.30. Дана полоска АБВ...ЭЮЯ. (всего 33 буквы). Сколько способов разрезать эту полоску на 3 слова?[3]

Аналогии

Задача 3.31. ^{n}Сколькими способами можно разложить 17 одинаковых шаров в четыре ящика? (в каждый ящик нужно положить хотя бы один шар)

Задача 3.32. Сколькими способами можно представить число 17 в виде 4 натуральных слагаемых, если способы, отличающиеся порядком слагаемых, различны?[4]

Задача 3.33. Дана шахматная доска 33×33, причем левая нижняя клетка черная. Тогда такой вопрос: сколько есть вариантов положить 3 черные шашки на белые поля в самой верней горизонтали доски?

Задача 3.34. Гадкий Миша решил испортить всем новый год - он хочет разорвать елочную гирлянду, состоящую из 22 лампочек, на 4 части (в каждой части должна быть хотя бы одна лампочка, иначе Мише будет неинтересно!) А мы хотим узнать, сколькими способами с такой затеей он может испортить праздник?

Задача 3.35. Маленькая Шура решила устроить праздник своим родителям. Для этого она выгребла все монеты из свинки-копилки, пошла в магазин, где продавались воздушные шарики, но обнаружила, что ей не хватает денег, чтоб купить весь магазин, а хватает ровно на 4 шарика. И вот проблема: всего шариков 22 и все разных цветов.... Итак, сколько вариантов у Шуры выбрать 4 шарика из 22 шариков на прилавке?

Упражнение 21. Найдите все аналогии из вышеприведенных задач.

[1] Как минимум одну, но не все!
[2] Не обязательно осмысленных
[3] Смысл слов не важен.
[4] Например: $4+4+4+5$ и $4+5+4+4$ - разные случаи.

Листок 2. Комбинаторика. Проверочная работа

1. В 7Ю учится 20 человек.
   a. Сколькими способами их можно выстроить в ряд?
   b. Сколькими способами их можно выстроить в ряд, если Лиза и Катя хотят стоять рядом?
   c. если Лиза хочет стоять правее Кати (не обязательно рядом)?
   d. если Ваня хочет стоять правее Глеба, а Глеб правее Миши?

2. В 7Ю учится 20 человек. Сколькими способами можно разбить их на две равные команды
   a. если эти команды называются Фениксы и Сфинксы.
   b. если мы не различаем эти команды?
   c. Если в Сфинксах и Фениксах может быть не равное число участников.

3. В 7Ю учится 20 человек - 10 мальчиков и 10 девочек.
   a. Сколькими способами они могут разбиться на пары?
   b. если в паре должны быть мальчик и девочка?
   c. В классе 12 парт. Сколькими способами они могут рассесться в классе?
   d. если они должны сидеть по двое?
   e. если они должны сидеть по двое - мальчик с девочкой?

4. В 7Ю учится 20 человек. Иван Андреевич хочет выставить им четвертные оценки.
   a. Сколькими способами он это может сделать, если он ставит 2, 3, 4 и 5?
   b. если он не хочет ставить 2?
   c. Если он хочет поставить не больше трех двоек?

Листок 3. Комбинаторика.

Задача 3.36. * Сколькими способами можно представить число n в виде нескольких натуральных слагаемых, если а) $n = 3$; б) $n = 33$; в) n - произвольное натуральное число?

Задача 3.37. * Сколькими способами можно представить а) число 11 в виде 3 целых положительных слагаемых? б) число n в виде 3 целых положительных слагаемых?
в**) число n в виде $k < n$ целых положительных слагаемых?[1]

Задача 3.38. * Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь
а) разноцветных б) черных ладей, чтобы они друг друга не били?

Задача 3.39. * Докажите формулу: $(n+1)! - n! = n! \times n$

Задача 3.40. * Сколькими способами можно поставить на шахматную доску
а) белого и черного б) двух белых королей так, чтобы они не били друг друга?

Задача 3.41. ** "Распался коллектив музыкального ансамбля племени Мумба-Бумба! На седьмом костре состоится формирование нового музыкального ансамбля из 37 аборигенов!"- звучали Мумб-Бумбские новости, переведенные лингвистами на наш язык. Также ученые выяснили, что в племени Мумба-Бумба были аборигены 7 различных расцветок (в каждой деревне жили аборигены своей расцветки, это как разные флаги в разных странах): Белые, Черные, Красные, Желтые, Синие, Зеленые и Серо-буро-малиновые в крапинку (или в горошек, ученые точно не установили). Возникает весьма интересный и высоко научный вопрос: сколько предстояло тогда Мумб-Бумбскому жюри перебрать различных вариантов составления нового ансамбля, если считать, что аборигены одной расцветки все на одно лицо и что
а) в ансамбле должны присутствовать аборигены всех расцветок?
б) допускается отсутствие в ансамбле аборигенов какой-либо расцветки?

Задача 3.42. Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть семерка или остальных?

Задача 3.43. ** Сколькими способами можно разбить 7А класс (25 человек) на две не обязательно равные группы?

Задача 3.44. ** В левом нижнем углу шахматной доски стоит ладья. Сколькими способами она может пройти в правый верхний угол, если она может ходить только вверх и вправо?[2]

[1] Способы, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными

[2] Одними и теми же способами считаются те, когда их пути совпадают.

Ответы к упражнениям

14. а) 35; б) 41. **15.** на 105 лет. **16.** Например, так: из города А в город Б ведет 3 дороги, из города Б в город В 5 дорог, а из города В в город Г - 7 дорог. Сколькими способами можно проехать из города А в Г? **17.** 2^{100}. **18.** Между городами А и В, В и С и С и Д по две дороги. Сколькими способами можно проехать из А в Д? **19.** а) 20!; б) 8!; в) $(N+1)!$ **20.** а) $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{99! \times 100 \times 101}{99!} = 100 \times 101 = 10100$; б) $\dfrac{N!}{(N-1)!} = \dfrac{(N-1)! \times N}{(N-1)!} = N$. **Задача 3.6** $P_N = N!$

Решения некоторых задач

Задача 3.29 На бумажной полоске написано слово АБВГДЕЙКА. Сколькими способами можно разрезать эту полоску на три слова? [3]

Решение. Резать полоску можно только между буквами, поэтому по сути дела задача сводится к выбору промежутков между букв, где нужно поставить перегородки. Так как требуется разрезать на три слова, то надо выбрать два промежутка. Букв всего девять, следовательно, промежутков восемь. Таким образом, задача свелась к задаче о том, сколькими способами можно выбрать два предмета из восьми. Первый предмет можно выбрать восемью способами, а второй уже только семью. Всего $8 \times 7 = 56$ способов. Но каждый из способов мы сосчитали дважды (например, выбор предмета №6 и №8 можно осуществить так: выбрать сначала №6, а потом №8, или наоборот - сначала №8, а затем №6). Поэтому мы должны полученный результат разделить на два.

Итак, окончательный ответ: 28 способов. □

[3] Не обязательно осмысленных

Глава 4

Теория Чисел

Листок 4. Теория чисел.

- Мы поделим их поровну: 7 тебе и 7 мне, - сказал Карлсон.
- Но так не получится, - возразил Малыш. - $7 + 7 = 14$, а у нас только 10 плюшек.
- В нынешних школах как-то по-дурацки считают, - ответил тот. - но я из-за этого страдать не намерен. По крайней мере, свои я уже взял, - добавил он и прикрыл пухлой ладошкой дымящуюся горку.

Астрид Линдгрен «Три повести о Малыше и Карлсоне».

По определению целое число a делится на не равное нулю целое число b, если существует целое число q такое, что $a = bq$. В этом случае число a называется делимым, b - делителем, а q - частным. В дальнейшем, речь будет идти только о целых числах.

Упражнение 22. Запишите общий вид чисел, делящихся а) на 2; б) на 17; в) на 2012.

В литературе существует несколько способов обозначить делимость:

Если целое число a делится на целое число b, то говорят, что a кратно b, пишут $a \vdots b$. Соответственно запись $a \not\vdots\, b$ означает, что a не делится на b, или a не кратно b.

Наряду с такими обозначениями используются запись $b \mid a$, означающая, что a делит b, т.е. a является делителем b. Запись $b \nmid a$, что означает, что a не делит b, т.е. a не является делителем b.

Делимость целых чисел обладает несколькими основными свойствами:

Свойство 1. Если a и b делятся на c, то их сумма и произведение тоже делятся на c.

Доказательство. Поскольку $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $a = cq_1$ и $b = cq_2$, где q_1 и q_2 - целые числа. Следовательно, $a+b = c(q_1+q_2)$ и $ab = c_2(q_1q_2)$. Что означает по определению, что $(a+b) \vdots c$ и $(ab) \vdots c$, поскольку если q_1 и q_2 - целые числа, то их сумма и произведение также являются целыми числами. $\square$

Свойство 2. Если $a \vdots c$, но $b \not\vdots\, c$, то $(ab) \vdots c$, и $(a + b) \not\vdots\, c$.

Доказательство. 1) Поскольку $a \vdots c$, то $a = cq$, где q - целое число. Следовательно, $ab = c(qb)$, т.е. $(ab) \vdots c$. 2) Доказательство того, что $(a + b) \not\vdots\, c$, будем проводить методом «*от противного*». Предположим, что $(a + b) \vdots c$, тогда из доказанного выше свойства следует, что $(a + b) + (-a) \vdots c$,[1] т.е. $b \vdots c$, но $b \not\vdots\, c$ по условию, значит мы пришли к противоречию. Итак, наше предположение, что $(a + b) \vdots c$, было неверно, следовательно, $(a + b) \not\vdots\, c$.[2] $\square$

Пользуясь основными свойствами, решите следующие задачи:

[1] Здесь одно из слагаемых равно $(a+b)$, а другое $(-a)$. Вообще говоря, здесь в неявном виде используется утверждение, что «если a делится на с, то и $(-a)$ делится на с». Докажите это утверждение самостоятельно!

[2] При доказательстве теоремы методом «*от противного*» сначала допускают, что утверждение этой теоремы неверно. Затем посредством некоторых рассуждений стараются получить либо заведомо неверное утверждение, либо утверждение, противоречащее условию теоремы. При правильных рассуждениях противоречие может получиться только за счет того, что неверным было первоначальное допущение о том, что теорема неверна. Отсюда делают вывод, утверждение теоремы верно.

Задача 4.1. Докажите, что, если $a \vdots b$, и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Задача 4.2. Пусть $a \vdots c$, и $b \vdots d$. Докажите, что $(ab) \vdots (cd)$.

Задача 4.3. Даны два числа a и b такие, что $a \vdots b$. Можно ли утверждать, что $a^n \vdots b^n$ при любом натуральном n?

Упражнение 23. Запишите условия предыдущих задач и свойств, используя вместо символа $\vdots$ символ $|$.

Деление с остатком.

Действительность никогда не делится на разум без остатка.

Автор неизвестен

Отметим на числовой оси точки, соответствующие целым числам. Пусть b - некоторое натуральное (целое положительное) число. Выделим на рисунке все целые числа, кратные b. Они расположены на оси на равном расстоянии b друг от друга (Рис. 4.1a). Каждое из этих чисел имеет общий вид bt, где t - некоторое целое число.

(a) (b)

Рис. 4.1

Как было определено в начальной школе, если $a = qb$, то q - это частное от деления a на b. Будем считать, что остаток в данном случае равен 0. Попробуем ввести понятие остатка, если целое число a не делится на b. Раз a не кратно b, то оно попадает между двумя выделенными числами, пусть эти числа qb и $(q+1)b$ (Рис. 4.1b). Тогда число $r = a - qb$ есть целое число, удовлетворяющее неравенству $0 < r < b$. В этом случае назовем частным число q, а остатком число r.

Теперь сформулируем общее утверждение:

Если a и b - целые числа, причем b больше нуля, то существуют такие целые числа q и r, что $a = bq + r$, где r удовлетворяет неравенству $0 \leqslant r < b$. Эти числа q и r определяются по данным a и b единственным образом. Частным называется число q, а остатком число r.

Чтобы найти частное q и остаток r, не нужно, конечно, рисовать отрезок длины a на числовой оси и «укладывать» на нем много раз отрезок длины b. Для этого существует более рациональный способ. Это - известное всем правило деления одного числа а на другое число b «столбиком». Это деление можно производить до тех пор, пока остаток не станет меньше, чем делитель. Например, если делить 1999 на 17, то при делении получается частное 117 и остаток 10.

Примечание. В утверждении, обведенном в рамочку, сказано, что делитель b - положительное число, и остаток таков, что $0 \leqslant r < b$, но делимое a при этом может быть как положительное, так и отрицательное или вообще равное 0. Например, $a = -22$, $b = 7$, тогда $(-22) = (-4)\cdot 7 + 6$, где $0 \leqslant 6 < 7$, т.е. остаток при делении (-22) на 7 равен 6.

Упражнение 24. Какой остаток дает число
а) -1 при делении на 7; б) (-150) при делении на 19; в) (-54321) при делении на 4?

Упражнение 25. Докажите, что числа а) 10^4 и 10^6; б) 10^5 и -1; в) -123456789 и 9876543210 дают одинаковые остатки при делении на 11.

Докажем основные свойства остатков:

Свойство 3. Если к произвольному целому числу x прибавить число y, делящееся на c, то остаток при делении x на c не изменится.

Доказательство. Пусть $x = cq + r$, $y = cs$, тогда x будет равен $c(q + s) + r$, где $0 \leqslant r < c$,[3] т.е. остаток не изменился. □

Свойство 4. Если при делении на c целые числа a и b дают остатки r_1 и r_2 соответственно, тогда суммы $(a + b)$ и $(r_1 + r_2)$ при делении на c дают одинаковые остатки.

Доказательство. Пусть $a = cq_1 + r_1$, $b = cq_2 + r_2$, тогда $(r_1 + r_2) = (a + b) - c(q_1 + q_2)$. Из доказанного выше свойства 0 следует, что $(a + b)$ и $(r_1 + r_2)$ при делении на c дают одинаковые остатки. □

Свойство 5. Если при делении на c целые числа a и b дают остатки r_1 и r_2, тогда произведения (ab) и $(r_1 r_2)$ при делении на c дают одинаковые остатки.

Доказательство. Пусть $a = cq_1 + r_1$, $b = cq_2 + r_2$, тогда $(r_1 r_2) = (ab) - c(q_1 q_2 c + q_1 r_2 + r_1 q_2)$, т.е. (ab) и $(r_1 r_2)$ при делении на c дают одинаковые остатки, т.к. отличаются на число, кратное c. □

С помощью этих свойств очень легко находить остатки.[4]

Пример. 16131 при делении на 13 дает остаток 2. Действительно, $16131 = 131 + 16 \cdot 10 \cdot 10$, где 131 дает остаток 1, а у числа $16 \cdot 10 \cdot 10$ такой же остаток, как и у числа $3 \cdot (-3) \cdot (-3)$. Остаток у 16131 такой же, как остаток у числа $(1 + 27)$, значит, он равен 2.

Рассмотрим все числа, которые дают остаток r при делении на b. Чтобы отметить все такие числа на числовой оси, надо взять отмеченные ранее числа, кратные b (Рис. 4.1а), и сдвинуть их вправо на r (Рис. 4.2)

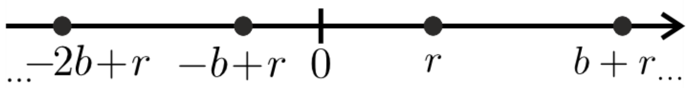


Рис. 4.2

Отметим, что общий вид числа, дающего остаток r при делении на b, это $x = bt + r$,[5] где t - произвольное целое число. Пусть в этой формуле t пробегает все множество чисел ..., 2, 1, 0, 1, 2,..., в то время как b и r фиксированы и не меняются (скажем, $b = 8$, $r = 5$, тогда $x = 8t + 5$). При этом формула дает все возможные целые числа, для которых остаток от деления на b равен r. Если изобразить эти числа на оси, то получится множество точек, отстоящих друг от друга на расстоянии b (см. Рис. 4.2 и Рис. 4.3 - на последнем приведено множество точек $x = 8t + 5$).

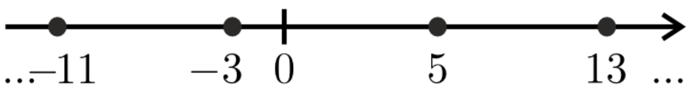


Рис. 4.3

Таким образом, если задано $b > 0$, то все множество целых чисел можно разбить на b классов: к одному классу отнести все числа, дающие при делении на b остаток 1, к другому - остаток 2, и так далее. Эти классы можно записать так:

$$x = bt + 1; \quad x = bt + 2; \quad ...; \quad x = bt + (b - 1)$$

и, наконец, последний (вернее «нулевой») класс $x = bt$. В него входят все числа, дающие при делении на b остаток 0, т.е. делящиеся на b. (Например, если $b = 8$, то всего классов 8: $x = 8t$, $x = 8t + 1$, ..., $x = 8t + 7$.) Каждое число обязательно попадает в один и только в один класс. То есть число не может давать двух различных остатков при делении на одно и то же число.[6]

ИТАК:

[3] Объясните, почему это неравенство верно.

[4] По существу мы с вами доказали, что если нам интересуют только остатки, то на любом шаге вычислений мы можем рассматривать только остатки, пренебрегая целой частью.

[5] Заметим, что в качестве r вовсе не обязательно брать остаток от деления, можно взять любое другое число, дающее тот же остаток. Просто взятие остатка зачастую является наиболее удобным для понимания того, как устроен данный набор чисел.

[6] Это утверждение означает корректность определения деления с остатком.

Множество всех чисел с остатком r при делении на b образуют один класс, называемый классом r по модулю b (например, класс 5 по модулю 8 это множество всех чисел, которые дают остаток 5 при делении на 8). Если взять произвольное целое число x и рассмотреть его по модулю n, то чтобы определить в каком классе находится наше число, надо рассмотреть его остаток при делении на n (например, $x = 13$, а $n = 8$, тогда число x попадает в класс 5 по модулю 8). Таким образом, если взять натуральное число n, то все целые числа разбиваются ровно на n классов, и каждое целое число попадает ровно в один из них.[7]

Обозначение: A ≡ B (mod C), если A и B дают одинаковые остатки при делении на C.

Упражнение 26. Запишите общий вид числа, которое при делении а) на 22 дает такой же остаток, что и 2012; б) на 13 дает такой же остаток, что и 31; в) на 2012 дает такой же остаток, что и (-22).

Упражнение 27. Определите, к какому классу относится число а) 2012 по модулю 17; б) 2012 по модулю 2011; в) (-2010) по модулю 22; г) 2004^{13} по модулю 1024?

Упражнение 28. Выясните, какие из утверждений являются верными:
а) 5 ≡ 17 (mod 2); б) 21 ≡ 154 (mod 5); в) -21 ≡ 154 (mod 5); г) 2007 ≡ 2021 (mod 19); д) 1234567897 ≡ 7987654321 (mod 9); е) 17 ≡ -17 (mod 3).

Упражнение 29. Может ли целое число одновременно находиться в классах 1 по модулю 7, 1 по модулю 9, 1 по модулю 11, 1 по модулю 13? (Если да, то приведите пример такого числа, если нет, то докажите, что их нет.)

Свойство 6. Два числа x_1 и x_2 попадают в один и тот же класс по модулю b в том и только в том случае, если их разность $x_1 - x_2$ делится на b.

Выше мы уже говорили, что числа, делящиеся на n, расположены на числовой оси «равномерно», то есть через каждые n - 1 чисел. Как каждое второе число является четным (и, соответственно, среди двух последовательных чисел обязательно найдется четное) так и каждое третье число делится на 3 (и, соответственно, среди трех последовательных чисел будет ровно одно, делящееся на три). Эти свойства используются при решении многих задач.

Задача 4.4. Докажите, что произведение трех последовательных чисел делится на 6.

Доказательство. Поскольку среди любых двух последовательных чисел одно обязательно четное, то произведение делится на 2. Кроме того, среди любых трех последовательных чисел одно обязательно делится на 3, значит, произведение делится на 3. Поэтому произведение делится на 6. □

Внимание! Мы при доказательстве воспользовались тем фактом, что если число (в данном случае произведение трех последовательных чисел) делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Более общий факт:

Свойство 7. Если число A делится на b и делится на c и числа b и c взаимно просты (то есть не имеют общих делителей), то A делится на произведение bc.

Задача 4.5. Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 - n$ кратно 6.

Доказательство. $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ - произведение трех последовательных чисел. Как было доказано в задаче 4.4, оно делится на 6. □

Десятичная запись числа

У чисел, с которыми мы работаем, есть единицы, десятки, сотни... Часто, когда точно неизвестно, каково количество этих самых единиц, десятков, сотен, используют запись с неизвестными: $\overline{xyz}$ - это число, в котором x сотен, y десятков и z единиц, т.е. $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. В следующих двух задачах будет полезно представлять числа именно в таком виде.

[7]Заметим, что множества всех целых чисел, дающих одинаковый остаток при делении на n, называют также классами вычетов по модулю n. Обозначают $\tilde{d} = \{z \in \mathbb{Z} | z - d \,\vdots\, n\}$ - это все числа, имеющие одинаковый с числом d остаток при делении на n. Например, числа -1, 3, 7 попадают в класс вычетов $\tilde{3}$ по модулю 4.

Упражнение 30. Что за числа зашифрованы в записи: а) $\overline{1x}$; б) $\overline{xy5}$; в) $\overline{ab1c0}$?

Упражнение 31. Пусть некоторое число a делится на простое число p. Что вы можете сказать про a^2? а про a^n?

Упражнение 32. Пусть A - квадрат некоторого числа. Выясните, на какую цифру может заканчиваться A?

Упражнение 33. Известно, что $A = x^2$. При этом A делится на 3. Что вы можете сказать про число x?

Упражнение 34. Известно, что $A = x^2$. При этом A делится на 2007. Что вы можете сказать про число x?

Ответы к упражнениям

22. а) $2n$, где n - целое; б) $17n$, где n - целое; в) $2012n$, где n - целое. **23. Свойство 1**: если $c \mid a$ и $c \mid b$, то $c \mid (a + b)$ и $c \mid (ab)$; **Свойство 2**: если $c \mid a$, но $c \nmid b$, то c $\mid ab$, но $c \nmid (a + b)$; **Задача 4.1**: докажите, что, если $c \mid b$, а $b \mid a$, то $c \mid a$; **Задача 4.2**: пусть $c \mid a$, а $d \mid b$. Докажите, что $(cd)|(ab)$; **Задача 4.3**: даны два числа a и b такие, что $b \mid a$. Можно ли утверждать, что $bn \mid an$ при любом натуральном n? **24.** а) 6; б) 2; в) 3. **26.** а) $22t + 2012$ или $22t + 10$; б) $13t + 31$ или $13t + 5$; в) $2012t - 22$ или $2012t + 1990$. **27.** а) $\tilde{6}$; б) $\tilde{1}$; в) $\tilde{14}$; г) $\tilde{0}$. **28.** а), в), д). **30.** а) число вида $10 + x$, где x - цифра; б) число вида $100x + 10y + 5$; в) число вида $10000a + 1000b + 100 + 10c$. **31.** Тогда a^2 делится на p^2, а a^n делится на p^n. **32.** На 0, 1, 4, 5, 6 или 9. **33.** Тогда x также делится на 3. **34.** $2007 = 9 \times 223$. Тогда x обязательно делится на $3 \times 223 = 669$.

Листок 4. Теория чисел. Уровень 1.

Задача 4.6. Докажите, что, если $a \vdots b$, а $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Задача 4.7. Пусть $a \vdots c$, а $b \vdots d$. Докажите, что $(ab) \vdots (cd)$.

Задача 4.8. Даны два числа a и b такие, что $a \vdots b$. Можно ли утверждать, что $a^n \vdots b^n$ при любом натуральном n?

Задача 4.9. Известно, что $(ab) \vdots c$ и что $(a+b) \vdots c$. Докажите следующее[1]:

а) $(a^2+b^2) \vdots c$

б) $(a^3+b^3) \vdots c^2$

Задача 4.10. Докажите, что, если $a^2 \vdots (a+b)$, то и $b^2 \vdots (a+b)$.

Задача 4.11. [n] Докажите, что если $a_1 \vdots c$, $a_2 \vdots c$, $\ldots$, $a_{n-1} \vdots c$, но $a_n \not\vdots c$, то $(a_1+a_2+\ldots+a_n) \not\vdots c$.

Задача 4.12. Глеб на каждой следующей перемене съедает в два раза больше бутербродов с сыром, чем на предыдущей. Может ли он за две перемены подряд съесть а) 2010 бутербродов? б) 2012?

Задача 4.13. В Радужном городе живут 13 чебурашек. У каждого чебурашки есть 3 воздушных шарика: 1 красный, 1 синий и 1 зелёный. Могут ли чебурашки поменяться своими шариками друг с другом так, чтобы у каждого оказались шарики только какого-либо одного цвета?

Задача 4.14. [n] Группа детского сада построилась парами. Известно, что в каждой паре у одного в три раза больше конфет, чем у второго. Может ли общее число конфет быть равным 2007?

Задача 4.15. В одном из подъездов 8-этажного дома на 1 этаже находятся квартиры от № 97 до № 102. На каком этаже и в каком (по номеру) подъезде находится квартира 178? (на всех этажах одинаковое число квартир и все подъезды устроены одинаково)

Задача 4.16. Знайка собирал свои книги в путешествие. Он упаковал все книги в пачки по 4 штуки. Потом он заметил, что все книги можно упаковать по 6 книг в каждую пачку. Наблюдавший за всем этим Незнайка воскликнул: «Слушайте, так ведь если можно упаковать все книги по 4 и по 6 книг в пачку, значит можно уложить также все книги по 24 в каждой пачке!». Прав ли Незнайка?

Задача 4.17. Астроном Стекляшкин тоже задумал упаковать свои книги и отнести на чердак. Он обнаружил, что если их связывать по 4, по 5 или по 6 книг в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если по 7 книг в пачку, то лишних книг не остается. Сколько, самое меньшее, книг хотел отнести на чердак Стекляшкин?

Задача 4.18. Прочитав листок «Делимость» и не решив ни одной задачи, Гоша рассердился разорвал его на 7 частей. Подумав, он взял некоторые куски и порвал каждый еще на 7 частей, и так далее.... В какой- то момент ему это надоело и он ушел в буфет. В это время в класс заглянула Юля и обнаружила 2009 кусков. Она утверждает, что часть кусков Гоша успел потерять. Можно ли ей верить?

Задача 4.19. Лиза решила склеить порванный листок. Она нашла все недостающие кусочки и стала склеивать всё обратно. Сначала она склеила вместе 4 куска, потом ещё 4 куска, и так далее... Но, не склеив до конца весь листок, она обнаружила, что ей пора в музыкальную школу. Поэтому она оставила все куски и ушла. Могло ли в результате всех стараний Лизы остаться ровно 2009 кусков?

Задача 4.20. Андрей приобрёл в магазине несколько бутылочек лимонада «Black Death» по 35 руб. 77 коп., несколько шоколадок по 14 руб. и несколько конфет по 6 руб. 30 коп. за штуку. На кассе ему сообщили, что он должен заплатить 1000 руб. Докажите, что подсчёт произведен неверно.

Задача 4.21. Найдите последнюю цифру числа: а) 1999^{1999}; б) 333^{333}; в) 2007^{2007}.

Задача 4.22. [n] Петя купил общую тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2006?

Внимание! В этот раз в этой части три письменных задачи - 4.11, 4.14 и 4.22.

[1]Подсказка: воспользуйтесь формулами сокращённого умножения.

Листок 4. Теория чисел. Уровень 2.

Задача 4.23. Докажите, что число не может попасть в два разных класса (т.е. что число не может давать двух различных остатков при делении на одно и то же число).[1]

Задача 4.24. Можно ли разрезать 6 прутьев длиной по 1 м каждый на 10 кусков длиной 27 см, 16 кусков длиной 15 см и 15 кусков длиной 6 см?

Задача 4.25. Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 3n^2 + 2n$ кратно 6.

Задача 4.26. Докажите, что при любом натуральном n число $n(n+1)^2(3n+2)$ кратно 4.

Задача 4.27. Докажите, что для любого простого $p > 3$ число $p^2 - 1$ делится на 24.

Задача 4.28. [n] Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 5n$ делится на 3.

Для решения следующих двух задач рекомендуется вспомнить задачи из предыдущего листка.

Задача 4.29. Докажите, что

а) из 8 целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность которых делится на 7.

б) из 5 чисел всегда можно выбрать два таких, у которых разность квадратов делится на 7.

Задача 4.30. Докажите, что среди чисел, написанных только единицами найдётся число, делящееся на 2012.

Задача 4.31. Докажите, что сумма квадратов двух последовательных целых чисел при делении на 4 даст остаток 1.

Задача 4.32. Докажите, что, если число $a^2 + b^2$ делится на 7, то числа a и b делятся на 7.

Задача 4.33. [n] Число a - чётное, не кратное 4. Докажите, что число a^2 при делении на 32 даст остаток 4.

Задача 4.34. Число a не делится ни на 2, ни на 3. Найдите остаток от деления числа a^2 на 6.

Задача 4.35. Докажите, что при любом целом a число $a^2 + 1$ не делится на 3.

Предыдущая задача представляется нам очень важной, поэтому она выделена в тексте и несколько следующих задач используют её же идею.

Задача 4.36. Целые числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

Задача 4.37. [n] Может ли сумма квадратов двух целых чисел, не кратных 3, быть квадратом некоторого целого числа?

Задача 4.38. Докажите, что остаток от деления натурального числа на 3 (или 9) равен остатку от деления на 3 (или, соответственно, на 9) суммы его цифр.

Задача 4.39. Сформулируйте и докажите признаки делимости а) на 3; б) на 9; в) на 11.

Задача 4.40. Из трёхзначного числа вычли число, получающееся из него же перестановкой цифр. Докажите, что результат вычитания делится на 9.

Задача 4.41. Ваня показывает числовой фокус. Задумайте трёхзначное число с разными цифрами. Запишите его цифры в обратном порядке. Получится ещё одно число. Вычтите из большего числа меньшее. Зачеркните в полученной разности любую цифру, кроме нуля, а оставшееся число сообщите Ване. Ваня тут же назовет вычеркнутую цифру. Как он это делает?

Задача 4.42. Найдите все пятизначные числа

а) вида $\overline{34x5y}$, которые делятся на 36; б) вида $\overline{71x1y}$, которые делятся на 45.

[1] Другими словами мы просим вас доказать корректность определения деления с остатком.

Листок 4. Теория чисел. Уровень 3.

Задача 4.43. а) Филипп возводил число в квадрат и получил 1234567897. Учительница поставила ему двойку. Докажите, что у неё были на то основания.

б) «С чего бы это вдруг?» – подумал Филипп. Он попробовал ещё раз и получил 1234567895. Учительница поставила ему вторую двойку. Докажите, что и это число не является точным квадратом.

в) После очередной попытки было получено число 1234567896. Посмотрела учительница на Филиппа и тихонько заплакала. Докажите, что Филипп снова ошибся.

Задача 4.44. Известно, что $3x + 7y$ делится на 19. Докажите, что $44x + 90y$ тоже делится на 19.

Задача 4.45. * У царя Дадона в одиночных камерах сидели 100 пленников. Поворот ручки отпирает каждую камеру, следующий поворот запирает, ещё один снова отпирает и т.д. К празднику царь решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку на двери каждой камеры. Все двери оказались отперты. Но тут пришел второй посыльный и повернул ручку каждой второй камеры. Двери камер 2, 4, 6, ... вновь оказались заперты. Следующий посланец повернул ручки камер 3, 6, 9, 12 и т.д. Ещё один - в каждой четвёртой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ручку сотой камеры. Наконец наступил праздник, и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил Дадон?

Задача 4.46. * Верны ли следующие части «признака делимости на 27»:

а) если сумма цифр числа делится на 27, то число делится на 27.

б) если число делится на 27, то сумма его цифр делится на 27.

Задача 4.47. Мальчик Костя живёт в 20-этажном доме. После того, как Костя однажды покатался в лифте, в нём стали работать только две кнопки: «+5» (при нажатии на эту кнопку лифт поднимается на 5 этажей вверх, если это возможно), и «-7» (при нажатии на неё лифт опускается на 7 этажей вниз). Можно ли, пользуясь таким лифтом, попасть

а) с первого этажа на второй?

б) со второго этажа на первый?

в) А можно ли вообще пользоваться этим лифтом, т.е. позволяет ли он добираться с любого этажа на любой другой?[1]

Задача 4.48. * a, b, c - нечётные натуральные числа, не являющиеся квадратами.

Может ли число $a^b b^c c^a$ быть полным квадратом?

Задача 4.49. ** Верно ли, что существует число, кратное 2012, и имеющее сумму цифр, равную 2012?

Задача 4.50. * Число состоит из 36 цифр. Разрешается разбить его на группы из шести цифр и как-нибудь переставить эти группы. Известно, что одна из перестановок в семь раз больше другой. Докажите, что эта большая перестановка делится на 49.

Задача 4.51. ** У каждого марсианина три руки и несколько антенн. Несколько марсиан взялись за руки так, что каждый взял за руки трёх других, и все руки при этом оказались заняты. При этом выяснилось, что количество антенн у любых двух взявшихся за руки марсиан отличается ровно в 6 раз. Может ли суммарное количество антенн у марсиан быть ровно 2006?

[1] Карикатура из газеты «Большой Новосибирск».

Листок 4. Теория чисел. Уровень 3+.

Задача 4.52. Докажите, что

а) число тогда и только тогда делится на 4, когда две его последние цифры образуют число, делящееся на 4.

б) число тогда и только тогда делится на 8, когда число, составленное из трех последних его цифр делится на 8.

Задача 4.53. Попробуйте сформулировать и доказать признаки делимости на 7 и на 13.
(<u>Подсказка</u>: $1001 = 7 \times 11 \times 13$*)*

Задача 4.54. Перед боем с белогвардейцами у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов. Василий Иванович израсходовал в бою в 8 раз меньше патронов, чем Петька, а осталось у него в 9 раз больше патронов, чем у Петьки. Докажите, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на 71.

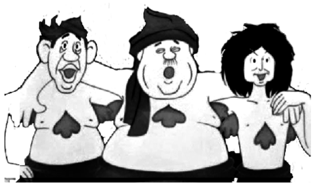
Задача 4.55. Автоматический хозрасчётный калькулятор предоставляет следующие услуги:

I) Умножение имеющегося числа на три за 5 коп.;

II) Прибавление к имеющемуся числу четырёх за 2 коп.

Число 1 вводится бесплатно. Какую наименьшую сумму нужно потратить, чтобы получить число 2012?

Задача 4.56. * Назовём автобусный билет с шестизначным номером счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?



Задача 4.57. * Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету не отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

Решения некоторых задач.

Уровень 1.

Задача 4.11. ^{n} Докажите, что если $a_1 \vdots c$, $a_2 \vdots c$, $\ldots$, $a_{n-1} \vdots c$, но $a_n \not\vdots\, c$, то $(a_1 + a_2 + ... + a_n) \; \vdots \; c$.

Решение. Предположим противное. Т.е. пусть $(a_1 + a_2) \; \vdots \; c$. Тогда $a_1 + a_2 + \; ... \; + a_n = kc$. В свою очередь $a_i = b_i c$ для всех i от 1 до $n-1$, т.к. по условию $a_i \vdots c$ для этих значений i. Имеем: $a_n = kc - a_1 - a_2 - ... - a_{n-1} = kc - b_1c - b_2c - \; ... \; - b_{n-1}c = c(k - b_1 - b_2 - ... - b_{n-1}) = cB$, где B - некоторое целое число, поскольку $k, b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ по условию целые. Таким образом получаем, что a_n делится на с по определению делимости, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и $(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ не делится на c. □

Задача 4.14. ^{n} Группа детского сада построилась парами. Известно, что в каждой паре у одного в три раза больше конфет, чем у второго. Может ли общее число конфет быть равным 2007?

Решение. Рассмотрим общее количество конфет в одной паре. Т.к. у одного из детей конфет в 3 раза больше, чем у другого, то количество конфет у обоих в сумме кратно 4. (если у одного x конфет, то у другого $3x$ конфет и в сумме $4x$) Аналогично кратно 4 количество конфет у любой пары. Поэтому общее количество конфет у всех пар вместе также кратно 4. Но 2007 на 4 не делится. Следовательно, такое суммарное количество конфет быть не может. □

Задача 4.22. ^{n} Петя купил общую тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2006?

Решение. Заметим, что нумеруя страницы по порядку, Петя написал на страницах одного листа последовательные числа. Поэтому на любых, в том числе и вырванных, 25-ти листах написаны 25 чётных и 25 нечётных чисел. Сумма таких 50-ти чисел всегда не четна (нечётное число нечётных чисел), поэтому 2006 получиться не могло. □

Уровень 2.

Задача 4.28. ^{n} Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 5n$ делится на 3.

Решение.

<u>Способ 1</u>. Рассмотрим 3 случая.

1) n делится на 3. Но тогда поскольку и n^3 и $5n$ делятся в этом случае на 3, то их сумма также делится на 3.

2) $n = 3k+1$ (n при делении на 3 даёт остаток 1). Тогда $n^3 = (3k+1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 3A + 1$, то есть n^3 при делении на 3 также даёт остаток 1. $5n = 5(3k+1) = 15k + 3 + 2 = 3B + 2$, т.е. $5n$ в этом случае при делении на 3 даёт остаток 2. Отсюда следует, что $n^3 + 5n = 3A + 1 + 3B + 2 = 3(A + B + 1)$ делится на 3.

3) $n = 3k+2$ (n при делении на 3 даёт остаток 2). Тогда $n^3 = (3k+2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 = 3A + 2$, то есть n^3 при делении на 3 даёт остаток 2. $5n = 5(3k+2) = 15k + 9 + 1 = 3B + 1$, т.е. $5n$ в этом случае при делении на 3 даёт остаток 1. Отсюда следует, что $n^3 + 5n = 3A + 2 + 3B + 1 = 3(A + B + 1)$ делится на 3.

Поскольку все возможные случаи разобраны, доказательство завершено.

<u>Способ 2</u>. Скажем, что $n^3 + 5n = n(n^2 + 5)$. Рассмотрим 2 случая.

1) n делится на 3. Тогда и всё выражение делится на 3, т.к. включает в себя множитель, кратный трём.

2) n не делится на 3. Тогда n^2 при делении на 3 может давать только остаток 1. *(этот факт был разобран и доказан на уроке и есть в листке - при записи решения доказательство этого факта записывать не нужно)* Тогда $n^2 + 5$ делится на 3 и всё выражение делится на 3.

Поскольку все возможные случаи разобраны, доказательство завершено.

□

Задача 4.33. ^{n} Число a - чётное, не кратное 4. Докажите, что число a^2 при делении на 32 даст остаток 4.

Решение. $a = 4k+2$ - такой общий вид у чётных чисел, не кратных 4. Тогда $a^2 = (4k+2)^2 = 16k^2+16k+4 = 16k(k+1)+4$. Но $k(k+1)$ - произведение двух последовательных чисел, следовательно, оно чётно. Поэтому $16k(k+1)+4 = 32A+4$, где A - целое, что и требовалось доказать. $\square$

Задача 4.37 ^{n} Может ли сумма квадратов двух целых чисел, не кратных 3, быть квадратом некоторого целого числа?

Решение. Если число не кратно 3, то его квадрат при делении на 3 всегда даёт остаток 1. Тогда сумма двух таких квадратов при делении на 3 даёт остаток 2 и *не может* быть полным квадратом, потому что полный квадрат при делении на 3 даёт остаток либо 0, либо 1. $\square$

Глава 5

Теория Множеств

Листок 5. Теория множеств.

Множество есть многое,
мыслимое нами как единое.

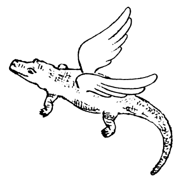
Георг Кантор

- Они рисовали мышеловки, месяц, математику, множество... Ты когда-нибудь видела, как рисуют множество? - спросила Соня.
- Множество чего? - спросила Алиса.
- Ничего, - отвечала Соня. - Просто множество!

Льюис Кэрролл, "Алиса в стране чудес."

Что такое *множество*? Наверно, каждый математик хоть раз задумывался, что это такое. В обычной жизни каждый из нас легко использует это понятие. Это некий набор предметов, утверждений, каких-либо объектов. Будь это множество целых чисел, корней уравнения, геометрическое множество точек на плоскости, множество спутников Юпитера, всех Александров на Земле, арифметических операций или даже хрюкающих фрюкозябриков. Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*.[1] В жизни, употребляя слово "множество подразумевается, что тех "элементов о которых идёт речь, - "много". Совсем другое дело в математике - множество может состоять из одного, двух элементов, или даже не содержать ни одного элемента. Такое множество без элемента, называется пустым множеством и обозначается знаком $\varnothing$. Таковым, например, является множество всех летающих крокодилов.

Упражнение 35. Что представляют собой следующие множества:
а) множество натуральных делителей числа 12;
б) множество точек, равноудалённых от двух данных;
в) множество точек, равноудалённых от трёх данных, не лежащих на прямой;
г) множество точек, равноудалённых от трёх данных, лежащих на прямой;
д) множество точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых;
е) множество букв, используемых при написании слова СПЕЦМАТЕМАТИКА?



Дадим ещё несколько определений:

Определение 1. Множество X называется *подмножеством* множества Y, если каждый элемент множества X принадлежит множеству Y. Обозначение: $X \subset Y$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Упражнение 36. Докажите, что множество X является подмножеством множества Y тогда и только тогда, когда любой элемент, не принадлежащий Y, не принадлежит и множеству X.

Определение 2. Множества X и Y *равны*, если $X \subset Y$ и $Y \subset X$, т.е. если они состоят из одних и тех же элементов.

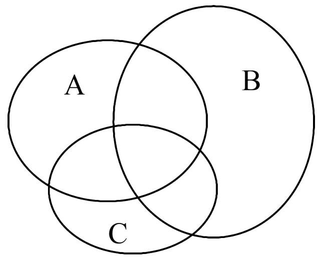
Определение 3. *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. В частности пересечением бесконечного семейства множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому множеству этого семейства.

Определение 4. *Объединением* множеств A и B называется множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. В частности объединением бесконечного семейства множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному множеству этого семейства.

Определение 5. *Разностью* множеств A и B называется множество $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \notin B\}$. *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество $A \Delta B = \{x \mid x \in A \backslash B \text{ или } x \in B \backslash A\}$.

[1] Считают, что один и тот же элемент не может входить в множество дважды. Таким образом, множество 2, 2, 3 есть не что иное, как множество 2, 3, просто представленное другой записью.

Упражнение 37. Выразите пересечение $A \cap B$, используя только операции разности множеств.

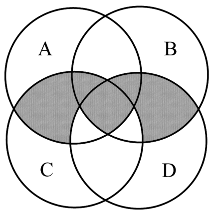


Упражнение 38. На рисунке изображены три множества: A, B и C. Изобразите следующие множества: а) $(A \cap B) \cup C$; б) $(A \cup B) \cap C$;
в) $(A \backslash B) \cap C$; г) $(C \backslash B) \cap (C \backslash A)$; д) $(A \Delta B) \cap (A \Delta C)$

Задача 5.1. Докажите, что для любых множеств A, B и C справедливо соотношение $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Решение. Если мы докажем, что все элементы множества из левой части принадлежат множеству из правой части требуемого равенства и наоборот, что все элементы множества из правой части принадлежат множеству из левой части, то утверждение будет доказано. Пусть элемент $x \in (A \cup B) \cap C$. Это значит, что x принадлежит одновременно множеству C и объединению множеств A и B.[2] Если $x \in (A \cup B)$, то это значит, что он обязательно принадлежит или A, или B. Следовательно, если $x \in A$, то он принадлежит пересечению множеств A и C и, значит, принадлежит множеству, из правой части. Аналогично, если $x \in B$. Таким образом, если $x \in (A \cup B) \cap C$, то $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Докажем теперь, что если $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, то $x \in (A \cup B) \cap C$. Пусть x принадлежит объединению пересечений множеств A и C и B и C. Следовательно, он принадлежит C и одному из множеств A или B (а может быть обоим сразу). Условие того, что элемент принадлежит или множеству A, или множеству B означает, что $x \in (A \cup B)$. Значит, $x \in (A \cup B) \cap C$. $\square$

Упражнение 39. Составьте всевозможные пересечения и объединения следующих множеств:
$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ $B = \{8; 3; 5; 10; 4\}$ $C = \{6; 7; 9; 4; 8; 10; 11; 12\}$ $D = \{10; 9; 8\}$.



Задача 5.2. Найдите подмножества X и Y множества A, состоящего из 25 сердитых индюков, если для любого подмножества $B \subset A$ выполнено равенство $X \cap B = Y \cup B$. А если множество A любое и даже не индюков? *(Обсудите эту задачу в классе)*

Задача 5.3. Даны четыре множества A, B, C и D, изображённые на рисунке слева. При помощи операций $\cap$, $\cup$, $\backslash$ и Δ выразите закрашенное множество M через A, B, C и D.

Метод кругов Эйлера

"В будущем все комнаты в домах будут круглые"
"Это почему ещё?"
"А чтобы родители не могли ставить детей в угол!
Из разговора в песочнице.

Некоторые задачи очень легко решаются, если их переформулировать на язык множеств. Удобно изображать множества в виде кругов (или диаграмм) на плоскости, которые делят её на куски. Например, для множеств A и B получим четыре куска (множества): $\{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}, \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}, \{x \mid x \notin A \text{ и } x \in B\}, \{x \mid x \notin A \text{ и } x \notin B\}$.

Такой метод схемы получил название метода кругов (или диаграмм) Эйлера.[3]

Контрольный вопрос 1. На сколько частей разделят плоскость "круги Эйлера"для 3 множеств? А 5?

Задача 5.4. (задача - шутка) Кого больше: котов, кроме тех котов, которые не являются Васьками, или Васек, кроме тех Васек, которые не являются котами? :-)

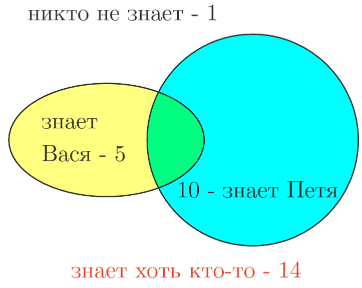
Задача 5.5. Петя и Вася разучивали песни. Оказалось, что из сборника "Наши любимые песни"Петя знает 10 песен, а Вася не знает и 10. Сколько песен знают оба, если в сборнике 15 песен, и только одну из них не знают ни Петя, ни Вася?

[2]Объединение множеств A и B можно разбить на три части (некоторые из них, возможно, пустые): элементы, принадлежащие только A, элементы, принадлежащие только B и элементы, принадлежащие одновременно и A, и B (т.е. пересечению A и B).

[3]Иногда такие диаграммы называют также диаграммами Эйлера – Венна

Решение.

Первый способ. Т.к. Вася не знает 10 песен, то из оставшихся он знает 5 ($15-10=5$), а количество песен, которые точно знает хоть кто-нибудь из них $=14$ ($15-1=14$). Считая песни, известные мальчикам по отдельности, получается $10+5=15$, но песен должно быть 14. Значит, одну песню мы сосчитали дважды: это та песня, которую знают оба.



Второй способ. Т.к. оба не знают только одну песню, то из 10 песен, что не знает Вася, Петя не знает 1, а остальные 9 знает. Тогда остаётся одна песня, которую знает Вася и которую должен знать Петя.

Ответ: лишь 1 песню знают оба мальчика. □

Задача 5.6. В толковом словаре для информатиков можно насчитать всего 10 понятных русских слов, и столько же (т.е. 10) непонятных иностранных слов. Чего в словаре больше: понятных слов или иностранных слов?

	русские	**иностранные**
понятные	**10**	**понятные иностранные**
непонятные		**10**

Решение. Нарисуем условие в виде схемы. Понятных слов в словаре всего на 10 больше, чем понятных иностранных слов (к понятным иностранным прибавляется ещё 10 понятных русских). Но и иностранных слов всего на 10 больше, чем тех же самых понятных иностранных (т.к. к ним прибавляется ещё 10 непонятных иностранных), а значит и тех и других слов в словаре одинаково.

Ответ: одинаково. □

Задача 5.7. Докажите, что для любых множеств A, B и C справедливо соотношение:
$(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$.

Решение. Если мы докажем, что все элементы множества из левой части принадлежат множеству из правой части требуемого равенства и наоборот: все элементы множества из правой части принадлежат множеству из левой части, то утверждение будет доказано.

1) Пусть элемент $x \in (A \cup B)\backslash C$. Это значит, что x принадлежит объединению множеств A и B и не принадлежит множеству C. Если $x \in (A \cup B)$, то это значит, что он обязательно принадлежит или A, или B. Поэтому, если $x \in A$, то, т.к. он не принадлежит C, то он принадлежит $(A\backslash C)$. Аналогично, если $x \in B$, то он принадлежит $(B\backslash C)$. Т.е. в любом случае x $\in (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$.

2) Пусть теперь x $\in (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$. Если x $\in (A\backslash C)$, то в частности он принадлежит A, если же x $\in$ (B$\backslash C$), то он принадлежит B. Следовательно, в любом случае $x \in (A \cup B)$. Но x не принадлежит C, т.к. ни множество $(A\backslash C)$, ни множество $(B\backslash C)$ не имеют с C общих элементов. Таким образом, x $\in (A \cup B)\backslash C$. □

Задача 5.8. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

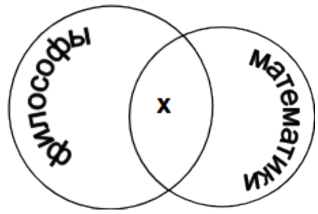
<u>Ответ:</u> доля голубоглазых среди блондинов больше.

Решение. Введем обозначения: *Б* – все блондины, *Г* – все голубоглазые, *бг* – голубоглазые блондины и *Л* – все люди. Тогда запишем, что дано в условии: $\frac{бг}{Г} > \frac{Б}{Л}$ (*). Требуется сравнить $\frac{бг}{Б}$ и $\frac{Г}{Л}$. Заметим, что произведение чисел *Б* и *Г* положительно, поскольку это количество людей, каждое из которых отлично от нуля. Поэтому, помножив обе части и неравенства (*) на дробь $\frac{Г}{Б}$, мы не изменим его знака. Имеем: $\frac{бг}{Г} \times \frac{Г}{Б} > \frac{Б}{Л} \times \frac{Г}{Б} \Leftrightarrow \frac{бг}{Б} > \frac{Г}{Л}$, т.е. доля голубоглазых среди блондинов больше. □

Задача 5.9. В стране Чудаков живут только философы и математики, причём каждый двенадцатый математик - философ, а каждый тринадцатый философ – математик. Какой процент составляют философы?

<u>Ответ:</u> $54\frac{1}{6}\%$.

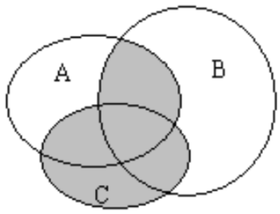
Решение. Пусть количество людей, являющихся одновременно и философами, и математиками, равно x (см. рис.). Тогда математиков $12x$, а философов – $13x$. Поскольку математики-философы учитываются в обоих множествах, то общее количество людей в стране Чудаков равно $12x + 13x - x = 24x$. Теперь легко сосчитать процент:



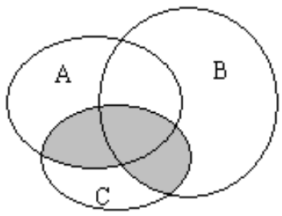
Процент философов $= \dfrac{\textit{количество философов}}{\textit{количество всех жителей}} \times 100\% = \dfrac{13x}{24x} \times 100\% = 54\dfrac{1}{6}\%$. □

Ответы к упражнениям

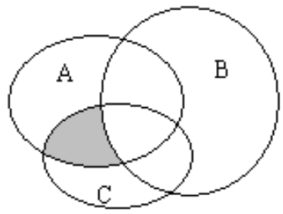
35. а) $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; б) серединный перпендикуляр; в) точка – пересечение серединных перпендикуляров треугольника; г) $\varnothing$ - пустое множество; д) две перпендикулярные прямые, являющиеся биссектрисами углов образованных этими прямыми; е) $\{С;\ П;\ Е;\ Ц;\ М;\ А;\ Т;\ И;\ К;\ А\}$. **37.** Например так: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ **37.** Например так: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ **38.**



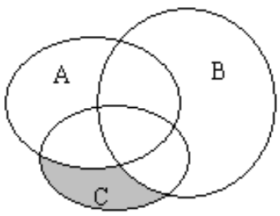
а)



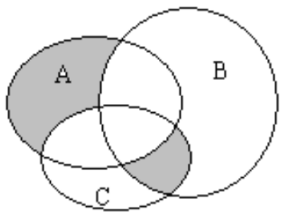
б)



в)



г)



д)

39. Частичные ответы:

$A \cap B = \{3; 4; 5; 8\}$; $B \cap C \cap D = \{8; 10\}$; $A \cap B \cap C \cap D = \{8\}$; $A \cup = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} = A \cup B \cup C \cup D$

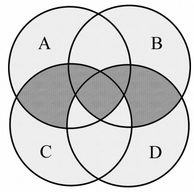
Листок 5. Теория множеств. Уровень 1.

Задача 5.10. Докажите, что для любых множеств A, B и C справедливы соотношения:
а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; б) $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$

Задача 5.11. При каких условиях множества A и B справедливы следующие соотношения:
а) $A \backslash B = A$; б) $A \backslash B = B$; в) $A \cup B = A$; г) $A \cap B = A$;
д) $A \backslash B = B \backslash A$; е) $A \cup B = A \cap B$; ж) $A \cup B = A \backslash B$; з) $A \cap B = A \backslash B$?

Задача 5.12. Известно, что $A = B \cup C$. Верно ли тогда, что $A \backslash B = C$?

Задача 5.13. Известно, что $A \backslash B = C$. Верно ли тогда, что $A = B \cup C$?



Задача 5.14. Известно, что $A \subset B \cup C$, $B \subset A \cup C$, $C \subset A \cup B$. Следует ли отсюда, что $A = B = C$?

Задача 5.15. Даны четыре множества A, B, C и D, изображённые на рисунке справа. При помощи операций $\cap$, $\cup$, $\backslash$ и Δ выразите закрашенное множество M через A, B, C и D.[1]

Метод "кругов Эйлера"

Задача 5.16. Из 42 хемулей 17 собирают пуговицы, а 29 очень любят сладкое. При этом 13 хемулей не интересуются ни сластями, ни пуговицами. Сколько сладкоежек собирают пуговицы?

Задача 5.17. Три лентяя красили пол в комнате площадью 12м^2. Сначала один покрасил 5м^2 синей краской, затем второй – 4м^2 красной краской и, наконец, третий – 3м^2 желтой. В результате оказалось, что любыми двумя цветами покрашена площадь в $1,5$м^2, а $0,5$м^2 покрашена всеми тремя цветами.

Какая площадь пола покрашена в синий цвет? Какова площадь неокрашенного пола?

Задача 5.18. В классе послушных девочек столько же, сколько непослушных мальчиков. Кого в классе больше: послушных детей или мальчиков?

Задача 5.19. В Швейцарии 95% населения знают немецкий язык, 80% – французский, а 75% – английский или итальянский. Сколько процентов населения заведомо владеет тремя языками?

Задача 5.20. В семье крестьянина семеро детей любят капусту, шестеро – морковь, пятеро – горох, четверо – капусту и морковь, трое – капусту и горох, двое – морковь и горох, а один любит всё. Сколько всего детей в семье крестьянина (если нет таких, кто не любит ни капусту, ни морковь, ни горох)?

Задача 5.21. На пиратском корабле трудятся 67 морских разбойников. У 47 из них есть ухо, у 35 – глаз, а у 23 счастливчиков есть и то, и другое. Новая инструкция Профсоюза Работников Абордажного Крюка предписывает корабельному врачу учитывать также наличие носа. Оказалось, что 20 пиратов имеют нос, 12 – и нос, и ухо, 11 – и нос, и глаз, а 5 – все три органа. Сколько пиратов не имеют ничего?

Задача 5.22. Все животные старухи Шапокляк, кроме двух, – кошки; все, кроме двух – собаки; и все, кроме двух – попугаи, а остальные – тараканы. Сколько всего животных у старухи Шапокляк? Какие именно это животные?

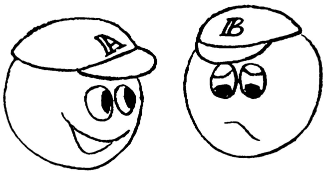
[1] Лёня утверждает, что M можно выразить, использовав лишь 6 операций! За сколько операций это сделаете Вы?

Листок 5. Теория множеств. Уровень 2.

Задача 5.23. Докажите тождества[1] *(формулы де Моргана)*:

а) $X\backslash(A \cup B) = (X\backslash A) \cup (X\backslash B)$; б) $X\backslash(A \cup B) = (X\backslash A) \cup (X\backslash B)$.

Задача 5.24. Ниже описаны два множества слов и словосочетаний. По какому принципу построены эти множества?



Множество А	Множество В
русский	английский
слово	буква
два слова	одно слово
сочетание слов	словосочетание
десять букв	девять букв
двадцатичетырехбуквенный	двадцатитрехбуквенный

Задача 5.25. * Назовём слова (словосочетания) из множества A в предыдущей задаче «весельчаковыми», а из множества B – «грустняковыми». Придумайте слово (словосочетание), которое нельзя было бы отнести ни к «весельчаковому», ни к «грустняковому» множеству.

Задача 5.26. Даны два множества (они могут пересекаться).

а) Сколько элементов в их объединении, если известно, сколько в каждом из них и в их пересечении?

б) А если множеств 3?

Задача 5.27. Решите задачу 20 для n множеств.

Задача 5.28. Поступили последние сведения о населении, являющемся гражданами Российской Федерации:

1) среди людей, которые едят абрикосы, есть и такие, которые не учатся в классах ТЛ «ДваждыДва»;

2) люди, играющие в пинг-понг, но не учащиеся классов ТЛ «ДваждыДва», не едят морковку.

Правда ли, что если русский не ест морковку – ещё не факт, что он не играет в пинг-понг?

[1] Т.е. равенства, верные для любых множеств A, B и X.

Листок 5. Теория множеств. Уровень 3.

Задача 5.29. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причём для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимаются не менее $\frac{2}{3}$ этого класса.

Задача 5.30. Дано множество M из n элементов, в котором выбрано несколько подмножеств. Известно, что любое не выбранное подмножество данного множества M представляется в виде пересечения некоторых выбранных подмножеств. Какое наименьшее число подмножеств могло быть выбрано?

Задача 5.31. * *(Теорема Холла о различных представителях.)* Пусть система множеств такова, что объединение любых k из них содержит не менее k различных элементов. Докажите, что тогда можно выбрать по одному элементу в каждом множестве так, что все выбранные элементы будут различны.

Задача 5.32. * Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трёх из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Докажите, что все числа можно разбить на две группы так, чтобы для любых двух чисел из одной группы одно число делилось на другое.

Задача 5.33. * Среди бесконечного количества гангстеров каждый охотится за каким-нибудь одним из остальных. Докажите, что существует бесконечное подмножество этих гангстеров, в котором ни один не охотится за кем-либо из этого подмножества.

Задача 5.34. * Даны натуральные числа $n \geqslant k \geqslant 1$. Рассмотрим все возможные подмножества множества $\{1, 2, ..., n\}$, состоящие из k чисел, и в каждом из них выберем наименьшее. Докажите, что среднее арифметическое всех выбранных чисел равно $\frac{n+1}{k+1}$. (Например, $n = 3$, $k = 2$. Исходное множество есть $\{1, 2, 3\}$. k - элементные подмножества есть $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$. Выбираем в каждом из них наименьший элемент, получаем: 1, 1, 2. Среднее арифметическое равно $\frac{1+1+2}{3} = \frac{4}{3} = \frac{n+1}{k+1}$)

Глава 6

Метод Математической Индукции

Листок 6. Метод математической индукции.

Страдания двоечника Васи.

В тексте общего характера, как известно читателям книжек про Шерлока Холмса, слово "индукция" означает *"рассуждение от частного к общему"* - в противовес дедукции, *"рассуждению от общего к частному"*. Примеры бытовой индукции часто можно услышать в разговорах: *"У меня было трое знакомых по имени Вася и все они оказались дураками. Ясное дело, все Васи такие"*. Некорректность этого вывода очевидна даже тем, кто никогда не слыхал ни про Жуковского, ни про Тредиаковского. Более корректный вывод про Васю можно найти в анналах средней школы села Липовое.[1]

Жил-был в селе Липовое двоечник Вася. Получал он двойки по всем предметам и в большом количестве. И что бы с ним учителя не делали, от двоек этих никак не мог он избавиться. И так он достал всех учителей, что решили они навести порядок среди двоек и созвали однажды педсовет, который, как говорят, единогласно принял два решения:

1. Каждый понедельник ученик Вася Пупкин должен получать двойку.

2. Если учитель видит в журнале, что вчера Вася получил двойку, сегодня ему тоже нужно поставить двойку - так ему, двоечнику!

Интересно, что произойдёт в субботу? Согласно 1. в понедельник Васе двойка обеспечена. Тогда (см. 2.) бедный мальчик получит двойку и во вторник. А раз во вторник, то и в среду. Потом в четверг. Потом в пятницу. Значит, и в субботу!

Представляется интуитивно очевидным, что если бы школу не закрывали в воскресенья и каникулы, череда Васиных двоек продлилась бы бесконечно.

Мы вплотную подошли к осознанию *принципа математической индукции*. В истории про Васю речь идёт о конечном числе шагов. В принципе математической индукции мы оперируем бесконечным числом шагов. Можно попробовать сформулировать его так:

Если число 1 обладает некоторым свойством, и вместе с каждым натуральным числом n этим свойством обладает следующее за ним число $n+1$, то этим свойством обладают вообще все натуральные числа.

Пример. Если число 1 - хорошее, и из того, что число n - хорошее следует, что число $n+1$ - хорошее, получаем, что тогда все натуральные числа хорошие. ☺

А теперь просто задача.

Задача 6.1. Из квадрата $16 \cdot 16$ произвольно вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на "уголки" из трёх клеток.

Решение. Попытаемся сначала решить более простую аналогичную задачу. Во-первых, уменьшим размеры квадрата (например, до $4 \cdot 4$ или $2 \cdot 2$), а, во-вторых, временно зафиксируем вырезанную клетку в углу квадрата. Ну, с квадратом $2 \cdot 2$, вообще всё просто, - какую бы клетку мы не вырезали, оставшиеся три клетки образуют требуемый "уголок" (рис. 1а). А что же делать в квадрате $4 \cdot 4$? Разрежем его на четыре квадратика $2 \cdot 2$.

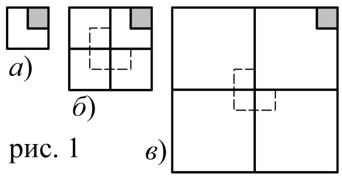


рис. 1

С тем, у которого имеется вырезанная клетка, всё ясно. Если далее попытаться разрезать оставшийся "большой уголок" на маленькие, то оказывается, что это можно сделать единственным способом (вспомните известную задачу на разрезание уголка из трёх квадратов), причём один из получившихся уголков будет принадлежать всем трем квадратикам $2 \cdot 2$ (рис. 1б), вырезая из каждого именно угловую клетку. Попробуем теперь разрезать на уголки квадрат $8 \cdot 8$ с вырезанным уголком. Делим его на четыре квадрата $4 \cdot 4$: с одним - всё ясно, у остальных вырежем "уголок" из трёх клеток, примыкающих

[1]Печальная история двоечника Васи была любезно предоставлена нам А.С.Головановым (ГУАСом)

к центру большого квадрата. Каждый из квадратов при этом потеряет по одной клетке, причём опять же именно по угловой (рис. 1в), а значит, оставшиеся части (как мы уже знаем) можно разрезать на "уголки" из трёх клеток.

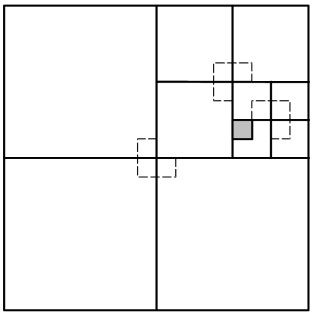


рис. 2

Наверное, все уже поняли, что произойдёт дальше. По аналогичному сценарию мы можем разрезать на требуемые "уголки" и квадрат $16 \cdot 16$, и квадрат $32 \cdot 32$, и т.д. Однако мы забыли, что задача звучала несколько иначе, нежели та, которую мы пока решили, а именно: вырезается из квадрата $16 \cdot 16$ не угловая клетка, а произвольная! Что же делать?

Довести полученное нами решение до искомого не так уж и трудно. Квадрат $16 \cdot 16$ делим на четыре квадрата $8 \cdot 8$, один из которых (тот, где вырезанная клетка) делим на четыре квадрата $4 \cdot 4$, один из них опять же делим на четыре квадрата $2 \cdot 2$ и начинаем вырезать "уголки". Сначала в том квадратике, где имеется вырезанная клетка, затем "уголки" от трёх оставшихся квадратиков $2 \cdot 2$, $4 \cdot 4$ и $8 \cdot 8$ (рис. 2).

Далее каждый из оставшихся квадратов с вырезанной угловой клеткой мы умеем разрезать на "уголки" из трех клеток. □

Обсудим решение. Проследим за логикой наших рассуждений. Сначала мы существенно упростили искомую задачу (уменьшили размеры и передвинули, как захотели вырезанную клетку), затем, получив решение самой простой задачи, заметили, что при решении следующей задачи мы можем воспользоваться уже полученным результатом. Далее, как снежный ком - при решении третьей задачи пользуемся результатами второй и так можно продолжать до бесконечности. Ясно, что, идя так по цепочке, мы дойдем до каждого из её утверждений, значит все они верны. Таким образом, мы доказали даже более сильный факт, чем требовалось: любой квадрат $2n \cdot 2n$ без одной клетки можно разрезать на "уголки" из трех клеток.

Описанный процесс очень напоминает всем знакомую детскую игру - выстраиваешь друг за другом костяшки домино, а затем толкаешь первую. Она повалит вторую, та - третью и так до тех пор, пока не упадут все (рис. 3). Только в наших рассуждениях вместо падающих доминошек - последовательные доказательства утверждений.

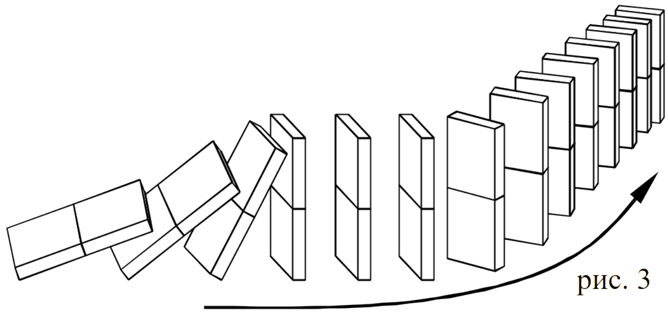


рис. 3

Доказали одно, оно влечёт за собой доказательство следующего, следующее - дальше и т.д.[2]

Основные определения.

Прежде чем вводить какие-либо определения заметим, что в предыдущих рассуждениях (задача 6.1) все доказываемые утверждения были очень похожи и отличались только степенью двойки в размерах квадрата. Поэтому естественно занумеровать все эти утверждения.

Первое (A_1): квадрат $2^1 \cdot 2^1$ без одной клетки можно разбить на "уголки".

Второе (A_2): квадрат $2^2 \cdot 2^2$ без одной клетки можно разбить на "уголки".

Третье (A_3): квадрат $2^3 \cdot 2^3$ без одной клетки можно разбить на "уголки"...

Упражнение 40. Сформулируйте пятое, семнадцатое и 2012-е утверждения в этой цепочке.

Упражнение 41. Сформулируйте n-е, $(n+1)$-е и k-е утверждения в этой цепочке.

Таким образом, можно представить, что все наши утверждения выстроились в очередь (за доказательством!) друг за другом как "доминошки", а мы приготовились их "толкать". Понятно, надо убедиться, что падая, каждая заденет и увлечёт за собой следующую.

[2] Для знатоков: это ещё не индукция в чистом виде. Это пока только рассуждения, подобные индукционным

Основная схема. Изложенный выше метод рассуждений требует установления истинности двух фактов:

> ***Факт 1.*** Первое утверждение верно. (мы можем толкнуть первую доминошку)
> ***Факт 2.*** Если интересующее нас утверждение верно на каком-то шаге, то верно и следующее за ним утверждение. (толкнув одну, уроним и следующую)

Первый факт называется *базой (базисом) индукции*, второй - *индукционным переходом* или *шагом индукции*. Индукционный переход включает в себя *посылку (предположение) индукции* (утверждение верно при $n = k$) и *заключение* (утверждение верно при $n = k + 1$). Другими словами, шаг индукции состоит в переходе от посылки к заключению, т.е. в выводе, что заключение верно, если верна посылка. (если упадет k-я доминошка, то упадет и $(k + 1)$-я)

Итак, пусть имеется последовательность утверждений: A_1, A_2, ..., A_n, ... Для того, чтобы доказать справедливость *всех* утверждений этой последовательности, можно поступить следующим образом:

1. Доказать истинность утверждения A_1;

2. Доказать, что при *любом* натуральном n из справедливости утверждения A_n следует справедливость утверждения $A_n + 1$.

Логический приём, позволяющий заключить, что рассматриваемое утверждение верно для всех натуральных чисел, коль скоро справедливы и базис, и переход называется *методом математической индукции* (ММИ). Утверждения $A_1, A_2, A_3, ...$ называют частными формулировками, а утверждение "для всякого n имеет место A_n" - универсальной формулировкой. Если мы доказали и базу, и переход, то истинность универсальной формулировки основана на следующем стандартном рассуждении:

> Утверждение A_1 истинно, т.к. мы доказали базу индукции. Последовательно применяя индукционный переход при $k = 1, 2, 3, ...$, получаем истинность утверждений $A_2, A_3, A_4, ...$. Этим способом мы можем последовательно дойти до любого значения n и убедиться, что это A_n истинно. Следовательно, для всякого n утверждение A_n справедливо.

Таким образом, метод математической индукции заключается, по существу, в разрешении не пользоваться стандартным рассуждением в каждой конкретной ситуации, т.е. он позволяет сделать заключение об истинности универсальной формулировки сразу, как только установлена истинность базиса индукции и индукционного перехода.

Доказательство числовых тождеств.

"Все равны! Ибо равенство ещё не тождество!"
Афоризм неизвестного автора.

Задача 6.2. Докажите, что при любом натуральном n справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Решение. У нас имеется последовательность утверждений:
$A_1 : 1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$; $A_2 : 1 + 2 = \dfrac{2 \cdot 3}{2}$; $A_3 : 1 + 2 + 3 = \dfrac{3 \cdot 4}{2}$; ...
1. *База индукции:* очевидно, что утверждение A_1 верно.
2. *Индукционный переход:* пусть утверждение верно для $n = k$, или, другими словами, пусть верно какое-то утверждение A_k, т.е. верно равенство $1 + 2 + 3 + ... + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ (предположение, что A_k верно называется *индукционным предположением*). Докажем, что тогда утверждение верно и для $n = k + 1$, т.е. верно утверждение A_{k+1}. Для этого добавим к обеим частям A_k по $(k + 1)$:

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Но это как раз и есть утверждение A_{k+1}. В силу принципа математической индукции верны все утверждения A_1, A_2, ... , т.е. наша формула верна при любом натуральном n. $\square$

Замечание 1. Обращаем ваше внимание, что при выполнении индукционного перехода важно показать, что все проводимые рассуждения справедливы для любого k.

Замечание 2. Вместо утверждения A_1 в качестве базы индукции мы могли взять, например, утверждение A_5. Тогда, выполнив индукционный переход, мы бы доказали, что исходное утверждение верно для всех натуральных n, начиная с 5.[3]

Задача 6.3. Докажите, что сумма углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

Решение. Утверждение задачи имеет смысл при всех натуральных $n \geqslant 3$, поэтому и базой индукции будет соответственно $n = 3$.

База: утверждение A_3 верно по теореме о сумме углов треугольника.

Переход. выведем заключение о том, что "сумма углов выпуклого $(k+1)$-угольника равна $180^\circ \cdot ((k+1)-2) = 180^\circ \cdot (k-1)$" из предпосылки "сумма углов выпуклого k-угольника равна $180^\circ \cdot (k-2)$". Для этого в $(k+1)$-угольнике возьмём две вершины по разные стороны от какой-либо вершины, и соединим их диагональю (это всегда возможно ввиду выпуклости многоугольника)[4] $\square$

Задачи на делимость.

Техника составления и обоснования индукционных переходов при решении задач на делимость похожа на соответствующую технику для тождеств: для доказательства обычно выясняется, КАК изменяется выражение при переходе от k к $k+1$ и проверяется делимость этого "изменения" на нужное число.

Задача 6.4. Докажите, что $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9 при любом натуральном n.

Решение. Утверждение задачи имеет смысл при всех натуральных $n \geqslant 3$, поэтому и базой индукции будет соответственно $n = 3$.

База: $(n = 1)$: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ - делится на 9.

Переход. пусть при $n = k$ утверждение задачи истинно (т.е. $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 \,\vdots\, 9$ при некотором k). Докажем тогда, что при $n = k+1$ утверждение также справедливо (т.е. $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3 \,\vdots\, 9$). В самом деле,

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = \underbrace{(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3}_{\vdots\, 9 \text{ по предположению индукции}} + \underbrace{9k^2 + 27k + 27}_{\text{очевидно} \,\vdots\, 9}$$

а сумма двух чисел, кратных 9, также кратна 9, что и требовалось доказать.

Тем самым переход доказан и всё утверждение доказано. $\square$

[3]Заметим, что тогда справедливость утверждений 1, 2, 3, 4 мы не доказали и ничего про них не знаем. Такая индукция имеет смысл, если для меньших значений n утверждение не определено. Например, в задачах про многоугольники число сторон не может быть меньше 3, поэтому нет смысла рассматривать утверждения для "двуугольников" или "одноугольников".

[4]Существует несколько определений выпуклого многоугольника. В данном случае можно использовать любое из двух:

Первое - "многоугольник называется выпуклым, если для любых двух его точек A и B отрезок AB целиком принадлежит этого многоугольнику". (аналогичным образом можно дать определение любой выпуклой фигуры)

Второе - "многоугольник называется выпуклым, если любая диагональ принадлежит ему целиком", которая разобьёт исходный многоугольник на две части: на треугольник и выпуклый k-угольник. Сумму углов исходного многоугольника можно получить, сложив сумму углов треугольника (180°) и сумму углов k-угольника ($180^\circ(k-2)$ - индукционное предположение!). Складывая эти суммы, получаем $180^\circ(k-1)$, что и требовалось доказать.

Задача 6.5. Докажите, что $47^n + 22$ кратно 23 при любом натуральном n.

Решение.

<u>*База*</u> ($n = 1$): $47 + 22 = 69$ - делится на 23.

<u>*Переход*</u>. Пусть при $n = k$ утверждение задачи истинно (т.е. $47^k + 22 \,\vdots\, 23$ при некотором k). Докажем тогда, что при $n = k + 1$ утверждение также справедливо (т.е. что $47k + 1 + 22 \,\vdots\, 23$). В самом деле,

$$47^{k+1} + 22 = 47^k \cdot 47 + 22 \cdot 47 - 22 \cdot 47 + 22 = 47 \cdot \underbrace{(47^k + 22)}_{\vdots\, 23 \text{ по предположению индукции}} - \overbrace{(22 \cdot 46)}^{\text{очевидно} \,\vdots\, 23}$$

а разность двух чисел, кратных 23, также кратна 23, что и требовалось доказать.

Тем самым переход доказан и всё утверждение доказано. □

Замечания к листку.

Метод математической индукции является серьёзным инструментом для решения задач. Как и любой инструмент перед применением он требует подготовки. В данном конкретном случае подготовка будет заключаться в произнесении "стишка", посвященного ММИ. Помните, что прежде чем начать рассуждение, вы должны сообщить, по какой переменной вы будете вести индукцию, например, так: "Будем доказывать методом математической индукции *по n* или *по числу переменных* или *по количеству треугольников* или ..." Далее вы обязаны указать Базу и доказать её. Затем сформулировать индукционное предположение и переход, который собираетесь доказать. Потом доказать переход и завершить доказательство изящной фразой: "Тем самым переход доказан и всё утверждение доказано".

Задача 6.6. Докажите, что число 111...11 (243 единицы) делится на 243.

Решение. [5] Будем доказывать общее утверждение, а именно, что число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n. Индукция по показателю n.

<u>База</u>: 111 делится на 3.

<u>*Индукционное предположение*</u>. Пусть верно для $n = k$, т.е. верно, что число, записываемое k единицами, делится на 3^k.

<u>*Переход*</u>. Докажем для $n = k+1$. Разделим число, записанное 3^{k+1} единицами на число, записанное 3^k единицами. Получим число 100..010..01 (две последовательности нулей по 3^k - 1 штук). Очевидно, что полученное число делится на 3. Следовательно, исходное число делится на 3^{k+1} и тем самым индукционный переход, а, значит, и всё утверждение, доказаны. В частности оно доказано для $n = 5$, поэтому доказано требуемое утверждение, т.к. $243 = 3^5$. □

В предыдущей задаче был осуществлён характерный приём при доказательстве с помощью метода математической индукции, а именно - *обобщение утверждения*. Вместо конкретного утверждения, для конкретного значения длины, количества и т.п. доказывается утверждение *в общем виде*, а требуемое утверждение является частным случаем доказанного. Аналогичный приём был осуществлён в самой первой задаче про разрезание клетчатой доски.

Задача 6.7. В прямоугольнике $3 \cdot 2011$ (2011 столбцов и 3 строки) стоят фишки 3 цветов, по 2011 каждого цвета. Докажите, что можно переставить в каждой строке фишки так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трёх цветов.

Задача 6.8. На фестивале военно-морской песни собрались 100 хоровых коллективов из разных стран. Каждый хор поёт три песни подряд и тут же уезжает. Жюри, ознакомившись с текстами, выяснило, что каждая песня оскорбительна ровно для одной из стран-участниц. Докажите, что можно составить их расписание выступлений так, чтобы никому не пришлось выслушивать более трех оскорбительных для него песен.

Задача 6.9. * Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2100, в десятичной записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

Задача 6.10. * На доске в строчку написаны 100 цифр - нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия: 1) заменять первую цифру (нуль на единицу и единицу на нуль), 2) заменять цифру, стоящую после первой единицы. (Пример: в последовательности 0001101... можно заменить подчёркнутые цифры) Докажите, что с помощью конечного числа таких замен можно получить любую наперёд заданную комбинацию нулей и единиц.

Задача 6.11. Имеется 2011 квадратов. Докажите, что их можно разрезать на части, из которых сложится один квадрат.

Неравенства.

"Равенство двух неравенств возможно только в том случае, когда неравенства идентичны."

Афоризм неизвестного автора.

Приёмы доказательств неравенств более разнообразны, однако, наиболее часто используется следующий факт "сложения неравенств": если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$. Здесь в роли неравенства $a > b$ выступает неравенство для k, а c и d - "довески" к левой и правой частям соответственно при переходе от k к $k+1$. Кроме того, часто используются промежуточные неравенства. т.е. если нужно доказать, что $A > B$, то доказывают, что $A > C$, а затем пользуются тем, что $C > B$.

Задача 6.12. Докажите, что модуль суммы любого числа слагаемых не превосходит суммы модулей этих слагаемых.

[5] Заметим, что при решении аналогичных задач возникают типичные ошибки: признака делимости на 27, аналогичного признакам делимости на 3 и на 9 - нет; если число делится на 3 и на 9, то совсем не обязательно, что оно делится на 27.

Задача 6.13. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство $2^n > n$.

Решение.

<u>*База*</u>: $n = 1$. $2^1 > 1$ - верно.

<u>*Переход*</u>. Пусть доказано для $n = k$, т.е. (<u>*индукционное предположение*</u>) пусть верно

$$2^k > k \tag{6.1}$$

Докажем для $n = k + 1$, т.е. докажем, что тогда верно $2^{k+1} > k + 1$.

1 способ. Умножим обе части верного по предположению неравенства 6.1 на 2, получим верное неравенство $2k + 1 > 2k$. Но для любого натурального k выполняется $2k \geqslant k + 1$, следовательно, верно, что $2k + 1 > k + 1$.

2 способ. Воспользуемся неравенством, верным для любого натурального k выполняется $2k > 1$. Прибавим к этому неравенству верное по предположению неравенство 6.1. Получим $2k + 2k > k + 1$. Но выражение в правой части равно $2k + 1$, следовательно, доказано утверждение для $n = k + 1$.

Тем самым переход доказан и всё утверждение доказано. □

Задача 6.14. ^{n} Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство $3n > n + 1$.

Задача 6.15. При каких натуральных n выполнено: а) $2n > 2n + 1$; б) $2n > n^2$?

Задача 6.16. ^{n} Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} > \dfrac{4^n}{n+1}$

Задача 6.17. * Докажите, что при любом натуральном n, начиная с 2, справедливо неравенство:

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$$

Задача 6.18. Докажите, что при любом натуральном n, начиная с 2, справедливо неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{14}$$

Задача 6.19. Докажите *неравенство Бернулли*: $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x \geqslant -1, n \in \mathbb{N}$.

Задача 6.20. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} < 2$$

Решение. Докажем неравенство индукцией по n.

<u>*База*</u>: $(n = 1)$. $1 + \frac{1}{2} < 2$ верно.

<u>*Индукционное предположение*</u>. Пусть верно для $n = k$, т.е. верно, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^k} < 2 \tag{6.2}$$

<u>*Переход*</u>. Докажем для $n = k + 1$, т.е. докажем, что тогда верно

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} < 2 \tag{6.3}$$

Разделим обе части неравенства (6.2) на 2. Получим: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} < 1$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства по 1, получаем неравенство (6.3). Тем самым переход доказан и требуемое неравенство доказано. □

Парадокс изобретателя.

Попробуем доказать при помощи метода математической индукции два неравенства:

$$1)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad 2)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Базис индукции проверяется без труда

$$1)\ \frac{1}{2}<\frac{1}{1}=\frac{1}{\sqrt{1}} \quad \text{и} \quad 2)\ \frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+1}}$$

По предположению индукции, мы имеем

$$1)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k+1}{\sqrt{2k+2}}=\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

и

$$2)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\frac{2k+1}{\sqrt{2k+2}}=\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$$

нам остаётся доказать, что

$$1)\ \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \text{и} \quad 2)\ \frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{k+2}}$$

Возводя обе части неравенства в квадрат, избавляясь от знаменателей и раскрывая скобки, приходим к эквивалентным неравенствам

$$1)\ 4k^3+8k^2+5k+1\leqslant 4k^3+8k^2+4k \quad \text{и} \quad 2)\ 4k^3+12k^2+9k+2\leqslant 4k^3+12k^2+12k+4$$

Вспоминая, что число k натуральное, легко убедиться, что левое неравенство неверно, а правое верно. Но как же так оказалось? Ведь правое неравенство сильнее (!), и из него автоматически следует левое. Дело в том, что хотя во втором случае нам и пришлось доказывать более сильное заключение, но одновременно с этим мы могли пользоваться и более сильным предположением индукции. При этом, ни в коем случае нельзя считать первое неравенство неверным. Наша неудача в нём говорит лишь о том, что не годится конкретный метод доказательства - математическая индукция.

Подобная ситуация получила название *парадокс изобретателя.*[6]

Парадокс изобретателя предложил нам ещё одну идею доказательства неравенств, а именно - усиление утверждения. Примером такого метода может служить задача: "Докажите неравенство $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$." Вместо доказательства требуемого неравенства мы доказываем по индукции более сильное неравенство $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.", а затем пользуемся тем, что $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$.

[6] На рисунке приведена карикатура на Иммануила Канта (1724 - 1804). Современные кенигсбержцы достаточно хорошо знают великого земляка Иммануила Канта. Он известен как философ и как профессор Кенигсбергского университета, написавший большое количество философских работ, в том числе изданную на русском языке "Критику чистого разума". Но Кант известен не только как философ и преподаватель, но и как простой человек, имеющий свои слабости. Известен он также и как педант, как человек, не покидавший Кенигсберг всю свою жизнь и дальше его окрестностей не выезжавший. Но мало кто знает, что он еще прославился и как изобретатель, достигнув высот, которые если не уравнивают его с Леонардо да Винчи, то, по крайней мере, ставят его в один ряд со многими изобретателями мирового значения. Кто бы мог предположить, что такой обыденный канцелярский прибор, как дырокол впервые был придуман и использован Кантом. Единственное отличие от современного дырокола, имеющего отверстие 5 мм, является то, что Кант использовал аналогичный прибор с отверстием 11,6 мм. По этому диаметру отверстия всегда можно определить дырокол, изобретенный Кантом. До середины 19 века не было документов, которые имели бы такие аккуратные отверстия, кроме документов Иммануила Канта. Первые листы, подшитые к делу с отверстием 11,6 мм, обнаружили советские исследователи в 1956 году. Они датировались декабрем 1799 г., и эта дата была объявлена датой первого употребления дырокола, изобретенного Кантом. Но через пять лет уже в Германии были обнаружены бумаги Канта с отверстием диаметром 11,6 мм за октябрь 1787 г. И дата первого употребления дырокола в канцелярском мире сдвинулась на 12 лет...

При опросе работников канцелярий оказалось, что 75% из них знают Иммануила Канта только как изобретателя дырокола; 5% - что он еще является философом, и 2% - что он еще преподавал в Кенигсбергском университете. Остальные 18% вообще ничего не слышали о Канте. ☺

Разберём еще один пример.

Задача 6.21. Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}<2.$

Решение. Сначала усилим наше утверждение и рассмотрим равенство $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}$. Теперь это равенство будем доказывать индукцией по n.

База: $n=1$. $1+\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}$ верно.

Индукционное предположение. Пусть верно для $n=k$, т.е. верно, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^k}=2-\frac{1}{2^k}. \tag{6.4}$$

Переход. Докажем для $n=k+1$, т.е. докажем, что тогда верно

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^{k+1}}. \tag{6.5}$$

Для доказательства этого факта прибавим к каждой части верного по предположению равенства (6.4) дробь $\frac{1}{2^{k+1}}$. Получим:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}.$$

В левой части мы имеем в точности левую часть доказываемого равенства (6.5), а в правой:

$$2-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=2-2\times\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=2-\frac{1}{2^{k+1}}$$

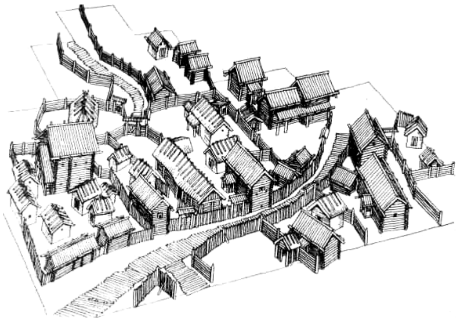
, что есть правая часть неравенства (6.5). Тем самым переход доказан и усиленное утверждение доказано. Но раз верно более сильное утверждение, то верно и исходное неравенство. □

Задача 6.22. * Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство
$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{n^2}<2.$

Задача 6.23. * На краю пустыни имеется неограниченный склад продовольствия и воды. Путешественник может нести на себе запас еды и питья на неделю (7 дней). Он может в любом месте пустыни делать свой склад еды и питья на сколько угодно дней (считается, что запасы не пропадают и не портятся). Докажите, что путешественник сможет пересечь пустыню.[7]

[7]Для программистов. В 2002 году на студенческом кубке мира по программированию была задача "Пересечение пустыни": "Вам предстоит пеший поход через пустыню между двумя заданными её точками. В начальной точке путешествия вы можете запастись провизией и неограниченным количеством воды. В разных местах пустыни могут находиться оазисы, где вы можете восполнить запасы воды, а также оставить часть провизии на хранение. На прямоугольной карте пустыни ваш маршрут задаётся координатами его начальной и конечной точек, а также мест, где расположены оазисы, при этом шаг координатной сетки равняется одной миле. Во время путешествия провизию и воду вы тратите, не отдыхая в оазисах, а синхронно продвижению по маршруту (по единице веса на каждую милю). Хотя в конечную точку маршрута можно прийти налегке, в случае досрочного окончания запасов дальнейшее продвижение по пустыне невозможно. Разумеется, предельный суммарный вес провизии и воды, который вы способны нести, ограничен; приобрести на старте более миллиона весовых единиц еды вам также не удастся. В качестве исходных данных известны координаты начальной и конечной точек маршрута, всех оазисов, а также максимальный вес груза, который вы способны нести. Необходимо определить, возможен ли переход, отвечающий заданным условиям, и если да, то каким запасом провизии необходимо для него запастись." Что называется - найдите 10 отличий ☺

Математическая индукция и догадка по аналогии.



Иногда встречаются задачи, в которых нет очевидной формулы для n-го утверждения. Её придётся сначала придумать, а затем ещё и доказать. Возникает вопрос: как придумать? Для этого обычно рассматривают несколько частных случаев и на их основании пытаются вывести общую формулу.

Задача 6.24. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке?[8]

Решение. Обозначим через A_n количество частей, на которые делят плоскость n прямых. Найдём несколько значений A_n при небольших значениях n вручную:

$A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 4, A_3 = 7, A_4 = 11$. Ага! $A_1 = A_0 + 1, A_2 = A_1 + 2, A_3 = A_2 + 3, A_4 = A_3 + 4$.

Похоже, что $A_n = 1 + (1 + ... + n)$, но это пока лишь догадка, основанная на предположении, что добавление n-ой прямой увеличивает число частей на n. Итак, мы сформулировали гипотезу, которую попытаемся сейчас доказать с помощью индукции.

База. Для $n = 0$ (прямых не проведено). Число кусков - 1. Верно.

Переход. Пусть доказано для количества кусков A_k, тогда k прямых общего положения разбивают плоскость на $1 + \dfrac{k(k+1)}{2}$ частей. Докажем, что тогда $A_{k+1} = 1 + \dfrac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = 1 + \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Пусть проведена $k+1$ прямая. Выберем любую прямую и временно удалим её из рассмотрения... Тогда оставшиеся k прямых разбивают плоскость на $1 + \dfrac{k(k+1)}{2}$ частей. Вновь проведём $(k+1)$-ю прямую. Эта прямая пересекает старые прямые в k точках (прямых k и с каждой пересекается) и, значит, рассекает $k+1$ старых кусков. Следовательно, $A_{k+1} = A_k + k + 1 = 1 + \dfrac{k(k+1)}{2} + k + 1 = 1 + \dfrac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = 1 + \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Наша гипотеза доказана.

Ответ: $1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Задача 6.25. На какое число частей могут разбивать плоскость n равносторонних не пересекающихся треугольников?

Задача 6.26. В городе Заборске N домов. Какое наибольшее число заборов можно построить в этом городе, если по приказу мэра должны выполняться следующие условия:

1) заборы не должны пересекаться;

2) каждый забор ограничивает хотя бы один дом;

3) никакие два забора не ограничивают один и тот же набор домов?

Замечание 3. Отметим, что рассуждения "по аналогии" не всегда подсказывают верную формулу. Наиболее известным является пример Леонарда Эйлера:

Верно ли, что число $n^2 + n + 41$ - простое при любом натуральном n?[9]

Кажется, что это действительно так. "Экспериментируя" с небольшими значениями n, можно обнаружить, что при всех n от 1 до 39 получаются простые числа. Но: $402 + 40 + 41 = 412$ или $412 + 41 + 41 = 41 \times 43$.

[8] Такие прямые называются прямыми общего положения.

[9] В XVIII веке многие математики были увлечены идеей поиска формулы простых чисел. Как раз в это время и была предложена данная формула, которая, однако, не оправдала надежд.

Задача 6.27. * На доске написаны два числа 1, 1. Впишем между ними их сумму: 1, 2, 1. Повторим операцию: 1, 3, 2, 3, 1. После трёх операций на доске будет написано 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1. Какова будет сумма всех чисел после 100 таких операций?

Другие схемы индукции.

Бэкон[10] выдвинул новаторскую идею, в соответствии с которой главным методом познания должна стать индукция.

Из учебника философии для студентов.

До раздела "догадки по аналогии" при доказательстве индукционного перехода требовалась истинность только одного (предыдущего по номеру) утверждения. Исключение составляет только задача 6.26, но о геометрических задачах мы поговорим позже.

Мы уже говорили, что иногда предположения об истинности одного утверждения недостаточно и требуется предположение об истинности сразу нескольких утверждений. Посмотрим, как изменится схема метода математической индукции в этом случае:

1) *База индукции*. Доказываем истинность утверждения A_p;

2) *Индукционное предположение*. Пусть справедливы все утверждения $A_p, A_{p+1}, ..., A_n$.

3) *Индукционный переход*. Пользуясь индукционным предположением доказываем, что тогда справедливо утверждение A_{n+1}.

Безусловно, такой способ доказательства правомерен, ибо если волна доказательства дошла до A_k, то она до этого прошла и все предшествующие утверждения цепочки. При сохранении обычной базы переход в этом случае будет выглядеть так: "При любом натуральном k из истинности утверждений $A_1, A_2, ..., A_k$ вытекает истинность A_{k+1}". Примером такой задачи, где для доказательства перехода требуется истинность всех предыдущих утверждений, может служить задача 6.26. Разберём ещё один пример.

Задача 6.28. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных степеней двойки (возможно, включая нулевую).

Решение. Пусть наше натуральное число равно n. Докажем утверждение индукцией по n.

База: если n равно 1 или 2, то представление очевидно: $1 = 2^0, 2 = 2^1$.

Индукционное предположение. Пусть верно для всех $n < k$, докажем для n, равного k.

Переход. Рассмотрим максимальную степень двойки, не превосходящую n. Тогда $2^m \leqslant k < 2^{m+1}$. Пусть $A = k - 2^m$. Очевидно, что $0 \leqslant A < k$. Тогда по индукционному предположению A можно представить в виде суммы различных степеней двоек (если A равно нулю, то $k = 2^m$ и представление найдено). Но кроме того $A < 2^m$. Это значит, что в представлении A эта степень двойки не участвует. Поэтому $k = 2^m + A$ даёт нам искомое представление. Тем самым переход доказан и требуемое утверждение доказано. □

Задача 6.29. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких степеней тройки (возможно, включая нулевую), где каждая степень встречается не более двух раз.

Задача 6.30. Михаил Владимирович выписал в строчку 100 чисел и расставил между ними знаки арифметических действий. Витя расставляет скобки по правилам арифметики. Какое максимальное количество пар скобок он сможет расставить?

В предыдущих трёх задачах в качестве индукционного предположения было выбрано условие, что утверждение верно для ВСЕХ предыдущих n. В этом случае база по-прежнему содержит только одно утверждение, поскольку для доказательства следующего требуется только одно предыдущее, для доказательства следующего - только два предыдущих и так далее. Однако бывают случаи, когда для выполнения индукционного перехода требуется одно и то же фиксированное количество предыдущих утверждений. Тогда приходится в качестве базы индукции доказывать отдельно нужное количество начальных утверждений. Так, если при доказательстве перехода используется два предыдущих утверждения, придётся доказывать базу из двух утверждений, если же три, то из трёх. Разберём на примере.

[10] Фрэнсис Бэкон (1561 - 1626) считается основателем эмпирического (опытного) направления в философии - английский философ и политический деятель (в 1620 - 1621 гг. — лордканцлер Великобритании, второе должностное лицо в стране после короля)

Задача 6.31. Последовательность чисел $\{b_n\}$ задана следующим образом: $b_1 = 3; b_2 = 12; b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$. Докажите, что каждый член этой последовательности делится на 3.

Решение. Докажем утверждение индукцией по номеру n члена последовательности.

База: если n равно 1 или 2, то $b_1 = 3; b_2 = 12$, очевидно, делятся на 3.

Индукционное предположение. Пусть верно для $n = k$ и $n = k - 1$.

Переход. Докажем для $n = k+1$. $b_{k+1} = b_k + 2b_{k-1}$. Поскольку по предположению b_k и b_{k-1} делятся на 3, то и сумма $b_k + 2b_{k-1}$ также делится на 3. Тем самым переход доказан и требуемое утверждение доказано. □

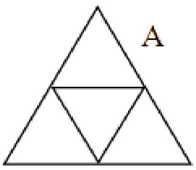
Задача 6.32. Докажите, что если число $a + \dfrac{1}{a}$ - целое, то и число $a^n + \dfrac{1}{a^n}$ - целое при любом натуральном n.

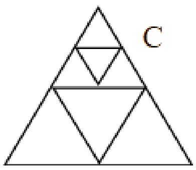
Задача 6.33. Последовательность чисел $\{a_n\}$ задана следующим образом: $a_1 = 1; a_2 = 2; a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ при всех $n > 2$. Докажите, что $a_{n+6} = a_n$ для любого натурального n.

Задача 6.34. Последовательность чисел $\{a_n\}$ задана следующим образом: $a_1 = 3; a_2 = 5; a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Докажите, что $a_n = 2^n + 1$ для любого натурального n.

Замечание 4. Не всегда из истинности утверждений A_p, A_{p+1}, ..., A_n можно сразу вывести истинность A_{n+1}, а, например, только A_{n+3}. В этом случае приходится применять несколько индукций. Например, отдельно для чётных чисел (с базой A_2 и индукционным предположением об A_{2n}, получая A_{2n+2}) и отдельно - для нечётных (с базой A_1 и индукционным предположением об A_{2n-1}, получая A_{2n+1}). Это так называемая индукция с двумя (или более) базами...

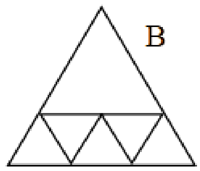
Задача 6.35. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого $n \geqslant 6$.

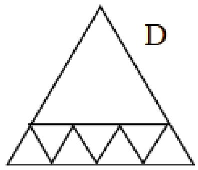

A


C

Решение. Попробуем сначала разрезать треугольник на небольшое количество треугольников (см. рис.) Заметим, что разбив любой из участвующих в разбиении треугольник на 4 так, как на рисунке A, мы увеличиваем количество треугольников разбиения на 3. Тем самым можно легко получить последовательность разбиений с шагом 3. Откуда возникает идея доказательства. Итак, будем доказывать утверждение индукцией по количеству треугольников разбиения.

База. Для $n = 6$, 7 и 8 - рисунки B, C и D соответственно. *Переход*. Пусть доказано для количества треугольников $n = k$. Докажем для $n = k+3$. Действительно, если есть разбиение на k треугольников, то разбив один из них так, как на рисунке A, получим искомое. Тем самым переход доказан и утверждение доказано. □


B


D

Задача 6.36. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество квадратов, начиная с шести.

Задача 6.37. Покемон Миша умеет рвать любой лист бумаги на 4 части, а покемон Гриша - на 6 частей. Докажите, что они смогут разобрать лист бумаги на любое количество кусков, начиная с девяти.

До сих пор мы говорили об индукции "вверх", т.е. когда мы поднимались от меньших значениях n к большим. Заметим, что принципиальных различий в самом построении доказательства нет. Изменится база (теперь это будет не наименьшее возможное значение n, а наибольшее из возможных), и индукционный переход будет осуществляться не от k к $k+1$, а от k к $k-1$.

Упражнение 42. Запишите, как выглядит схема доказательства для индукции в отрицательном направлении.

Индукция в геометрии.

Применение индукция в геометрии является одним из наиболее сложных. Зачастую просто неясно, по какому параметру её следует вести. Кроме того, при доказательстве приходится использовать геометрические факты, необходимость которых в исходной формулировке не ощущается. Выше была разобрана задача о сумме углов выпуклого многоугольника. Докажем с помощью индукции эту формулу для произвольного многоугольника.

Определение 6. Многоугольником назовём замкнутую ломаную на плоскости без самопересечений.

Важный геометрический факт. В любом многоугольнике найдётся диагональ, целиком лежащая внутри этого многоугольника.

Задача 6.38. Докажите, что сумма углов любого n-угольника равна $180^\circ \times (n-2)$.

Решение. Утверждение задачи имеет смысл при всех натуральных $n \geqslant 3$, поэтому и базой индукции будет соответственно $n = 3$.

База. Утверждение A_3 верно по теореме о сумме углов треугольника.

Индукционное предположение. Пусть утверждение верно для всех многоугольников с количеством углов, не превосходящим k.

Переход. Рассмотрим произвольный $(k+1)$-угольник. Согласно "важному геометрического факту" найдётся диагональ, лежащая целиком внутри этого многоугольника. Это значит, что эта диагональ разбивает данный многоугольник на два, причём количество углов в каждом из них заведомо меньше $(k+1)$ (поскольку диагональ отсекает как минимум треугольник). Пусть у одного полученного многоугольника количество углов m, тогда у второго $(k+1) - m + 2 = k - m + 3$.[11] По индукционному предположению для обоих многоугольников верна формула для суммы углов. Но сумма углов исходного многоугольника равна сумме углов двух полученных многоугольников. Поэтому искомая сумма равна $180^\circ \times (m-2) + 180^\circ \times (k-m+3-2) = 180^\circ \times (k-1) = 180^\circ((k+1)-2)$. А это требуемая формула для $(k+1)$-угольника, что и требовалось доказать. Тем самым переход доказан и всё утверждение доказано. □

Задача 6.39. Докажите, что всякий (не обязательно выпуклый) многоугольник можно разделить на треугольники непересекающимися диагоналями.

Задача 6.40. ** Докажите, что выпуклый многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.

Задача 6.41. Докажите, что если n точек не лежат на одной прямой, то среди прямых, их соединяющих, не менее n различных.

Задача 6.42. ^{n} Несколько кругов одного радиуса положили на стол так, что никакие два не перекрываются. Докажите, что круги можно раскрасить в четыре цвета так, что любые два касающихся круга будут разного цвета.

Задача 6.43. * Дан остроугольный треугольник $A_0B_0C_0$. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — центры квадратов, построенных на сторонах B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0. С треугольником $A_1B_1C_1$ делаем то же самое. Получаем треугольник $A_2B_2C_2$ и т.д. Доказать, что $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ пересекает $\Delta A_nB_nC_n$ ровно в 6 точках.

Задача 6.44. * Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя выбрать больше n диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку.

Задача 6.45. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует, и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трёх разных цветов.

[11] Заметим, что для произвольной диагонали это неверно. Для невыпуклого многоугольника диагональ может пересекать стороны этого многоугольника.

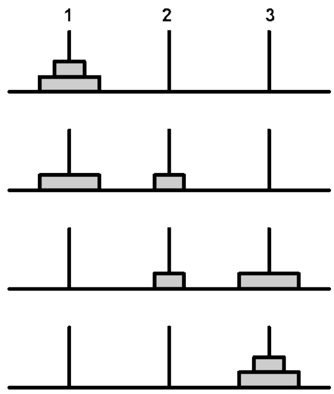
Задача 6.46. ** На окружности радиуса 1 отмечена точка O и из неё циркулем делается засечка вправо радиусом l. Из полученной точки O_1 в ту же сторону тем же радиусом делается вторая засечка, и так делается 2011 раз. После этого окружность разрезается во всех 2011 засечках, и получается 2011 дуг. Сколько дуг различных длин может при этом получиться?

Очень известные задачи.

"В Великом храме города Бенарас, под собором, отмечающим середину мира, находится бронзовый диск, на котором укреплены 3 алмазных стержня, высотой в один локоть и толщиной с пчелу. При создании мира Бог Брама поместил на один из стержней 64 диска из чистого золота, причём так, что каждый меньший диск лежит на большем. Это и есть башня Брамы. День и ночь монахи в храме занимаются тем, что перекладывают диски в соответствии с наставлением Брамы так, чтобы меньший диск никогда не оказывался под большим. Как только все 64 диска будут переложены со стержня, на который Бог Брама сложил их при создании мира, на другой стержень, башня вместе с храмом обратятся в пыль и под громовые раскаты погибнет мир."

Старинная легенда.

Традиционно применение индукции рассказывают, иллюстрируя очень известными примерами. Это так называемая классика жанра. Любой мало-мальски уважающий себя математик с такими примерами знаком. Часть таких классических задач были уже приведены выше (в частности задача 6.1). В этой же главе хочется привести решение ещё двух классических задач, без которых не обходится практически ни одно изложение метода индукции. В первую очередь это задача про головоломку "Ханойская башня".



Эта головоломка (иногда еще её называют "Башня Брамы" или "Конец света") придумана в 1883 году французским математиком Эдуардом Люка.[12]На её создание его вдохновила старая легенда о башне Брамы.

Игра "Ханойская башня". Имеется пирамида из n колец, надетых на стержень, и два пустых стержня той же высоты. Диаметры колец убывают от основания пирамиды к её вершине (т.е. у основания находится самое большое кольцо, наверху - самое маленькое). Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Требуется переложить все кольца с одного стержня на другой.

Задача 6.47. Докажите, что можно переложить все кольца в игре Ханойская башня на один из пустых стержней, и что это можно сделать за $2n - 1$ перекладываний.

Решение. Будем доказывать требуемое утверждение индукцией по количеству колец.

База. n = 1. Очевидно, что одно кольцо можно переложить за одно перекладывание, и что $2^1 - 1 = 1$.

Замечание. Несмотря на то, что совершенно верно в качестве базы рассматривать значение n, равное 1, чтобы показать, как происходят перекладывания, разберём случай для $n = 2$.

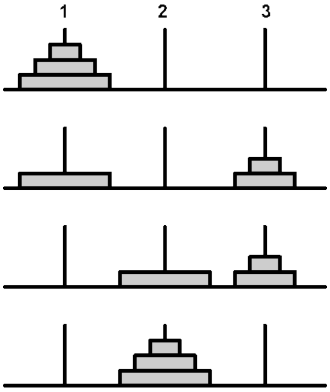
На рисунке изображена пирамидка с двумя кольцами и два пустых стержня. Стержни занумерованы числами от 1 до 3. На последующих рисунках изображено, как следует осуществлять перекладывания, чтобы переместить пирамидку с первого стержня на третий:

$$1 \to 2; 1 \to 3; 2 \to 3.$$

[12]Франсуа Эдуард Анатоль Люка (1842-1891) - французский математик, профессор. Работал в лицее Лунле-Гран в Париже. Важнейшие работы Люка относятся к теории чисел и неопределённому анализу. Считал, что с помощью машин или каких-либо приспособлений сложение удобнее производить в двоичной системе, чем в десятичной. Исследовал числе Мерсенна и обобщил понятия чисел Фибоначчи, получивших имя чисел Люка.

Предположение. Пусть утверждение верно для пирамидки с количеством колец $n = k$, т.е. мы можем переместить пирамидку из k колец на другой стержень за $2^k - 1$ перекладываний.

Переход. Пусть теперь есть пирамидка из $n = k+1$ колец. Будем считать, что самое нижнее - самое большое кольцо - неподвижно. Тогда оставшиеся k колец можно переложить на другой стержень, не нарушая правила игры за $2^k - 1$ перекладываний. Заметим, что поскольку оставшееся кольцо самое большое, то на него можно класть любое из перекладываемых колец. □

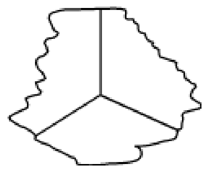


Переложив пирамидку из k колец, переложим $(k+1)$-е кольцо на свободный стержень. Теперь переложим за $2^k - 1$ перекладываний пирамидку обратно на это кольцо. Всего получилось $2^k - 1 + 2^k - 1 + 1 = 2 \times 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ перекладываний, что и требовалось доказать.

Заметим, что число перемещений дисков, которые должны совершить монахи в легенде, равно 2^{64} - 1 или 18 446 744 073 709 551 615. Если бы монахи, работая день и ночь, делали каждую секунду одно перемещение диска, их работа продолжалась бы 580 миллиардов лет.

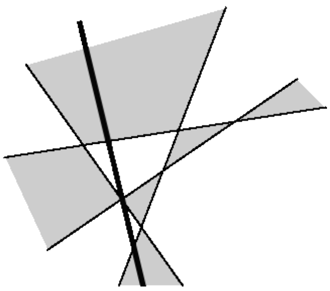
Заканчивая обсуждать эту задачу, остается только проиллюстрировать переход от двух колец к трем (см.рис.)

Задача 6.48. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были окрашены в разные цвета. (Соседними называются области, имеющие общий участок границы.)



Замечание. Плоскость, поделённую на области какими-то линиями и раскрашенную в несколько цветов так, что точки одной области окрашены в один цвет, называют картой. Прежде всего, заметим, что не каждую карту можно раскрасить так, как требуется в условии задачи. Например, карту на рисунке требуемым образом раскрасить нельзя.

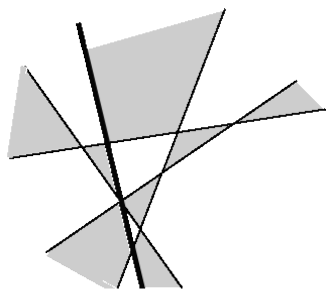
Решение. Будем доказывать требуемое утверждение индукцией по количеству прямых.



База. $n = 1$. Очевидно, что если прямая одна, то она делит всю плоскость на две полуплоскости и карту раскрасить можно: одну полуплоскость покрасим в белый цвет, а вторую - в чёрный.

Предположение. Пусть утверждение верно для $n = k$ прямых, т.е. мы можем раскрасить требуемым образом любую карту, образованную пересечением k прямых.

Переход. Рассмотрим карту из $n = k + 1$ прямых. Выберем какую-нибудь прямую и выкинем её из рассмотрения.



Тогда оставшиеся k прямых образую карту, которую мы можем раскрасить. Сделаем это и вернем $(k+1)$-ю прямую на место. Эта прямая делит всю плоскость на две полуплоскости. Чтобы построить раскраску для новой карты, в одной из плоскостей оставим раскраску областей такой, какая она есть, а в другой поменяем на противоположную, т.е. белые области перекрасим в чёрные, а чёрные - в белые. Почему новая раскраска будет удовлетворять условию? В каждой из полуплоскостей как граничили области разных цветов так и граничат. Новые границы могли появиться только за счет новой прямой. Если эта прямая делит какую-либо область на две части, то теперь эти части разных цветов, поскольку они находятся в разных полуплоскостях, а одну полуплоскость мы перекрашивали, а другую оставили без изменения.

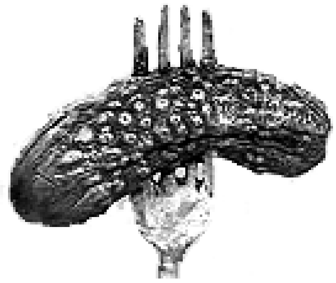
Тем самым переход доказан и все утверждение доказано. □

Лирическое отступление.

Полная и неполная индукция.

Говоря об индукции вообще, различают *полную* и *неполную* индукцию. Применяя полную индукцию, мы лишь тогда считаем себя вправе объявить об истинности универсальной формулировки, когда убедились в её истинности для каждого без исключения значения n. Метод неполной индукции состоит в переходе к универсальной формулировке после проверки истинности частных формулировок для отдельных, но не всех значений n.

В повседневной жизни мы постоянно пользуемся методом неполной индукции. Так, желая купить на рынке солёных огурцов, пробуем кусочек одного огурца (который протягивает нам продавец). Если он нравится, покупаем, например, 1 кг, рассудив так: "Если один огурец хороший, то и все хорошие". Это и есть метод неполной индукции в действии. Однако, не исключено, что все купленные огурцы окажутся плохими, кроме того одного, который мы попробовали. Другой пример. Магазин закупает партию яблок, и товаровед проверяет не одно яблоко, а по нескольку плодов из каждого ящика.



Если выбранные яблоки спелые, то магазин примет решение "все яблоки спелые", т.е. также воспользуется методом неполной индукции, и закупит все ящики. Даже универсальные законы природы формулируются на основе отдельных наблюдений. А потому и наши повседневные решения (скажем, о качестве огурцов), и научные выводы (например, о законах природы), если они высказаны в виде универсальных формулировок, верны не абсолютно, а в лучшем случае лишь с высокой степенью правдоподобия.

Иное дело математика. Метод неполной индукции, используемый в естественных науках, в математике не имеет права на существование. Нередко случается, что частная формулировка A_n верна для отдельных значений n, и вместе с тем не удается найти таких значений, для которых она неверна. Тогда есть основание предположить, что универсальная формулировка истинна, - но только предположить, поскольку то, что не удалось найти сегодня, будет, возможно, открыто завтра. Вот ещё примеры (помимо примера Эйлера, разобранного выше), говорящие о том, что метод неполной индукции в математике не работает.

Числа Ферма. Знаменитый математик XVII в. Пьер Ферма изучал числа вида $2^{2^n}+1$. Их так и назвали - числа Ферма. Учёный полагал, что все эти числа простые. И у него на то, казалось бы, имелись основания: действительно, числа такого вида являются простыми при $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Однако в XVIII в. Леонард Эйлер обнаружил, что при $n = 5$ это число равно произведению двух простых чисел 641 и 6700417. Более того, неизвестно, существуют ли простые числа Ферма помимо пяти вышеуказанных.

Части внутри окружности. На окружности взяли n точек и соединили их всевозможными отрезками. Оказалось, что никакие три из этих отрезков не пересекаются в одной точке. На сколько частей они делят круг? При n = 1, 2, 3, 4, 5 получаем соответственно 1, 2, 4, 8, 16 частей и напрашивается вывод, что при любом n количество частей равно 2^{n-1}. А на самом деле их будет

$$\cfrac{\cfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24+n(n-1)}}{2+1}$$

Двучлен $x^n - 1$. Если разлагать двучлен x^{n-1} на множители при различных значениях n, то окажется, что у каждого из многочленов - сомножителей коэффициенты равны $\pm$ 1. Например, $x^6-1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Гипотезу о том, что это справедливо для любого n доказать, однако, почему-то не удавалось. А в 1941 г. выяснилось, что указанная особенность разложения двучлена x^n-1 на множители существует при всех n до 104 включительно, а в случае $n = 105$ появляется многочлен, отдельные коэффициенты которого равны -2.

Квадрат вида 991n^2 + 1. Ещё один весьма убедительный пример. Подставляя в выражение $991n^2+1$ вместо n последовательно целые числа 1, 2, 3, ... , мы никогда не получим числа, являющегося полным квадратом, сколько бы дней или даже лет мы ни посвятили этим вычислениям. Однако, если мы сделаем отсюда вывод о том, что все числа такого вида не являются квадратами, то мы ошибёмся. На самом деле, среди чисел вида $991n^2 + 1$ имеются квадраты, только наименьшее значение n, при котором число $991n^2 + 1$ есть полный квадрат, очень велико. Вот это число: $n =$ 12 055 735 790 331 359 447 442 538 767.

Парадокс кучи.

Встретились два приятеля, стали разговаривать. Вдруг взгляд одного из них упал на кучу песка.

- Видишь кучу песка? - спросил он. - А на самом деле её нет.
- Почему? - удивился его приятель.
- Очень просто, - ответил тот. - Давай рассудим: одна песчинка, очевидно, не образует кучи песка. Если n песчинок не могут образовать кучи песка, то и после прибавления еще одной песчинки они по-прежнему не могут образовать кучи. Следовательно, никакое число песчинок не образует кучи, т.е. кучи песка нет.

Мы только что описали известный *парадокс кучи.*

К этому парадоксу можно сделать следующий комментарий: метод полной математической индукции нельзя применять, как показывает парадокс, к объёмно неопределённым понятиям, каковым является понятие "куча песка". На рисунке слева приведена иллюстрация к парадоксу букета.

Упражнение 43. Сформулируйте парадокс букета и объясните, почему в данном случае не работает метод математической индукции.

Наконец-то мы подобрались к концу этого листка. Долго-долго мы шли от простейших примеров к достаточно сложным доказательствам. Теперь этот метод будет преследовать вас всюду. Это мощнейший инструмент математики, используйте его с умом. В заключение остаётся только добавить, что мы рассмотрели далеко не все схемы индукции. Но, зная основные приемы, вы легко сможете обосновать остальные. Заметим только, что бывает *двойная индукция* (по двум переменным) или *ветвящаяся индукция*, когда сначала утверждение доказывается не для всех n, а только для некоторых, например, для степеней двойки, а потом с помощью индукции в отрицательном направлении уже для остальных значений n. Кроме того, шаг индукции может быть не обязательно целым. А также бывает не только доказательство по индукции, но и определения по индукции. Например, когда члены некоторой последовательности, кроме нескольких первых, задаются индуктивно, т.е. через предыдущие. Так заданные последовательности называют *рекуррентными* или *возвратными.* Одной из наиболее известных рекуррентных последовательностей является ряд *чисел Фибоначчи*: $\Phi_1 = 1; \Phi_2 = 1; \Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$. Числам Фибоначчи будет посвящен один из последующих листков.

Для тех, кому показалось мало и не хочется расставаться с индукцией. ☺

Задача 6.49. На химической конференции присутствовало k учёных химиков и алхимиков, причём химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики всегда отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, а иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого учёного хочет установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому учёному может задать вопрос: "Кем является такой-то: химиком или алхимиком?". (В частности, может спросить, кем является сам этот учёный)

Доказать, что математик может установить это за:

а) $4k$ вопросов;

б) $2k-2$ вопросов.

Решение. Приводимое решение даёт возможность выяснить, кто - химик, а кто - алхимик, даже за меньшее, чем $2k-2$, число вопросов, а именно за $q = 3m$ вопросов, если $k = 2m+1$ - число нечётное, и за $3m-2$ вопросов, если $k = 2m$ - число чётное. Вначале мы рассмотрим нечётные k. Искомый способ определим индукцией по m.

База. Если на конференции присутствовал $k = 1$ учёный ($m = 0$), то он, очевидно, химик, поскольку химиков должно быть больше; никаких вопросов в этом случае задавать не надо: $q = 0 = 3 \times 0$.

Индукционное предположение. Предположим теперь, что для всех нечётных чисел, меньших данного числа $k = 2m+1$, мы уже имеем способ, позволяющий решить задачу в требуемое число вопросов.

Переход. Укажем такой способ для числа $k = 2m+1$. Перенумеруем для удобства всех участников конференции произвольным образом и начнём спрашивать второго, третьего и т.д. учёных, кто есть первый учёный. Этот опрос мы прекратим, как только произойдёт одно из двух событий:

Событие А. Среди опрошенных учёных большинство высказалось за то, что первый учёный — алхимик.

Событие В. Число учёных, утверждающих, что первый учёный - химик, равно m. Ясно, что если произошло **событие А**, и к этому моменту t учёных утверждали, что первый учёный - химик, и f - что он алхимик, то $f = t+1$. (Действительно, $f > t$, а если предположить, что $f \geqslant t+2$, то **событие А** должно произойти хотя бы на один вопрос раньше.) Ясно, кроме того, что при этом опросе было задано $q_1 = f + t = 2f - 1$ вопросов. (Частным случаем **события А** является ситуация, когда уже второй учёный сказал, что первый является алхимиком - здесь $t = 0, f = 1$.) Если же произошло **событие В** и при этом f учёных утверждали, что первый учёный - алхимик, то общее число заданных вопросов равно $q_1 = m + f$.

Нетрудно видеть, что опрос прервётся до того, как будут опрошены все учёные, присутствующие на конференции. В самом деле, предположим противное. Значит, перед опросом последнего учёного не произошло ни одно из **событий А, В**. Пусть в этот момент среди опрошенных учёных t человек высказались 6 за то, что первый учёный - химик и f - за то, что он алхимик. Поскольку не произошло **события А**, $f \leqslant t$. Поскольку не произошло **события В**, $t \leqslant m-1$. Поэтому общее число опрошенных $f+t \leqslant 2(m-1)$. Добавив к ним первого и последнего учёных, мы получаем, что общее число участников конференции не превосходит $2m$, тогда как их $2m+1$. Полученное противоречие доказывает, что одно из **событий - А** или **В** - произойдёт до того, как будет опрошен последний учёный.

Пусть произошло **событие А**. Тогда мы утверждаем, что в группе учёных, состоящей из первого учёного и всех опрошенных учёных, число алхимиков не меньше числа химиков. Действительно, если первый учёный - химик, то те f учёных, которые утверждали, что он алхимик, - сами алхимики. Поскольку общее число учёных в рассматриваемой группе есть $1 + t + f = 2f$, число алхимиков в группе в этом случае не меньше числа химиков. Если же первый учёный - алхимик, то алхимиками являются и те t учёных, которые утверждали, что он химик. Поэтому и в этом случае число алхимиков не меньше $1 + t = f$, т.е. не меньше половины. Далее, поскольку общее число химиков превосходит по условию задачи общее число алхимиков, в оставшейся группе из $k - 2f = 2(m-f) + 1$ учёных число химиков также должно превосходить число алхимиков. Число $k-2f$, очевидно, меньше k, поэтому по *предположению индукции* существует способ, позволяющий за $q_2 = 3(m-f)$ вопросов выяснить, кто в оставшейся группе учёных есть химик и кто - алхимик. Выберем теперь из этой группы произвольного химика (такой, очевидно, найдётся) и спросим его (на это уйдёт $q_3 = 1$ вопрос), кто есть первый учёный. Если он алхимик, то те t учёных, которые утверждали, что он химик, - алхимики. Поэтому нам остаётся лишь выяснить у выбранного нами химика, "кто есть кто" среди тех f учёных, которые утверждали, что первый учёный - алхимик (на это уйдёт ещё $q_4 = f$ вопросов). В результате мы восстановим полную картину разбиения участников конференции на химиков и алхимиков и истратим на это $q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 2f - 1 + 3(m - f) + 1 + f = 3m$ вопросов, что и требовалось.

Если же первый учёный оказался химиком, то те f учёных, которые утверждали, что он алхимик, сами являются алхимиками. Поэтому нам остаётся выяснить у выбранного нами химика лишь "кто есть кто" в группе из t учёных, утверждавших, что первый учёный - химик. На это мы затратим $q_4 = t$ вопросов. Общее число вопросов $q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 2f - 1 + 3(m - f) + 1 + t = 3m - 1$ в этом случае даже меньше того числа вопросов, которое мы вправе использовать. Тем самым случай, когда произошло **событие A**, полностью разобран.

Рассмотрим теперь тот случай, когда произошло **событие B**. Мы утверждаем, что в этом случае первый учёный - химик. В самом деле, если бы он был алхимиком, то и те m учёных, которые утверждали, что он химик, тоже были алхимиками и общее число алхимиков было бы не меньше $m + 1$, т.е. больше половины, а это противоречит условию задачи. Итак, первый учёный - химик, а те f учёных, которые утверждали, что он алхимик, сами - алхимики. Выясним теперь у первого учёного "кто есть кто" среди тех m учёных, которые утверждали, что он химик (на это уйдёт $q_2 = m$ вопросов), и "кто есть кто" среди остальных учёных, не участвовавших в опросе (на это уйдёт ещё $q_3 = k - (1 + m + f) = 2m + 1 - 1 - m - f = m - f$ вопросов). Таким образом, мы полностью выясним "кто есть кто" на конференции и затратим на это $q = q_1 + q_2 + q_3 = m + f + m + m - f = 3m$ вопросов. Тем самым оба случая - и когда происходит **событие A**, и когда происходит **событие B** - рассмотрены, и поэтому для нечётного числа участников задача полностью решена. Пусть теперь $k = 2m$ - чётное число. Удалим одного участника. По доказанному, за $3m - 1$ вопрос мы узнаем "кто есть кто". С помощью ещё одного вопроса, заданного химику, мы узнаем, кем является последний участник. □

Упражнение 44. Прочитайте решение предыдущей задачи не менее трёх раз.

Упражнение 45. Разберитесь в решении предыдущей задачи.

Задача 6.50. Докажите пункт а) предыдущей задачи более простым способом...

Фокусы по индукции. Вырежьте из картона 999 одинаковых карточек. На 111 карточках напишите 1, на 111 карточках - 2, и т.д., на последних 111 карточках напишите 9. Переверните все карточки цифрой вниз и тщательно перемешайте. Затем возьмите совершенно произвольно n карточек, где n - любое целое число от 1 до 100, и положите их на стол цифрой вверх. Тогда цифры, написанные на всех n выбранных карточках, обязательно окажутся одинаковыми! Сколько бы раз ни повторять этот фокус и какое бы n ни выбирать ($1 \leqslant n \leqslant 100$), результат неизменно будет один: на всех n карточках будет одна и та же цифра! Каждый может на досуге проверить сказанное экспериментально.

Задача 6.51. * На плоскости даны $2n + 1$ точек. Постройте $(2n + 1)$-угольник, для которого эти точки являются серединами сторон.

Задача 6.52. * Докажите, что шахматную доску 2007×2007 можно обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле ровно один раз.

Задача 6.53. * В некотором государстве каждые два города соединены дорогой. На каждой дороге разрешено движение только в одну сторону. Докажите, что найдётся город, выехав из которого можно объехать все государство, побывав в каждом городе ровно один раз.

Задача 6.54. * Двум гениальным математикам сообщили по натуральному числу и сказали, что эти числа отличаются на единицу. После этого они по очереди задают друг другу один и тот же вопрос: "Знаешь ли ты моё число?". Докажите, что рано или поздно один из них ответит положительно.

Задача 6.55. * На круглом барабане 64 сектора. Докажите, что в каждый сектор можно записать шестизначное число из цифр 1 и 2 так, чтобы все числа были различными и любые два соседних различались ровно в одном разряде.

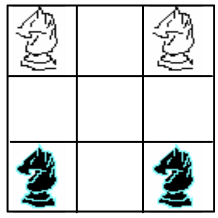
Задача 6.56. * Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

Глава 7

Графы

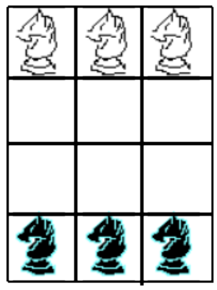
Листок 7. Графы.

Задача 7.1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим (туда и обратно) маршрутам: Земля - Меркурий, Плутон - Венера, Земля - Плутон, Плутон - Меркурий, Уран - Нептун, Сатурн - Юпитер, Меркурий - Венера, Нептун - Сатурн, Юпитер - Марс и Марс - Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?



Задача 7.2. На шахматной доске 3×3 стоят два чёрных и два белых коня (см. рис.). Как поменять чёрных и белых коней местами за наименьшее число ходов? Докажите, что число ходов не может быть меньше найденного.

Задача 7.3. Заменим одного из чёрных коней из предыдущей задачи на красного. Как теперь поменять чёрного и красного коней местами? За какое число ходов это можно сделать?



Задача 7.4. * На шахматной доске 4×3 стоят три чёрных и три белых коня (см. рис.) Как поменять чёрных и белых коней местами? ** Каково наименьшее число ходов?

Определение 7. *Графом* называется конечное множество точек на плоскости, некоторые пары которых соединены линиями. Эти точки называются *вершинами* графа, а линии - *рёбрами* графа.

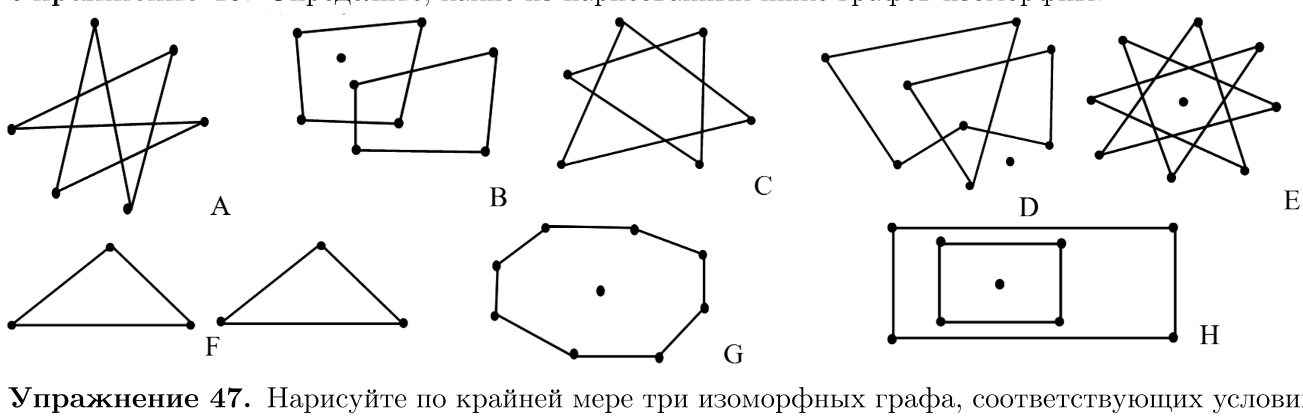
Определение 8. Граф, у которого каждое ребро имеет направление, называется ориентированным графом.

Задача 7.5. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы любое число, составленное из двух соседних цифр в том же порядке, делилось либо на 7, либо на 13.

Задача 7.6. а) В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что из одного города можно долететь самолётом в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий городов, при делении на 5 даёт остаток 1. Можно ли добраться из города 1 в город 9? б) Как изменится решение задачи, если города соединены авиалинией в том и только в том случае, когда двузначное число, составленное из названий городов, делится на 3?

Заметим, что изобразить условие каждой из приведенных выше задач можно с помощью различных графов. Но любой из них поможет нам. Важно лишь, какие именно вершины соединены друг с другом, а какие - нет. Такие "одинаковые", но по-разному нарисованные графы называют *изоморфными*.

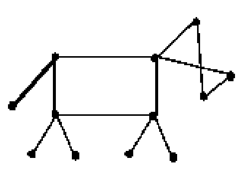
Упражнение 46. Определите, какие из нарисованных ниже графов изоморфны:



Упражнение 47. Нарисуйте по крайней мере три изоморфных графа, соответствующих условию задачи (7.1).

Мы будем считать, что каждое ребро соединяет различные вершины (нет петель), а каждые две вершины соединены не более чем одним ребром (нет кратных рёбер).

Определение 9. Количество рёбер, выходящих из данной вершины, называется *степенью* этой вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется *нечётной*, а имеющая чётную степень - *чётной*.



Упражнение 48. Укажите степени всех вершин, изображённых на рисунке справа. Сколько здесь чётных вершин, сколько нечётных?

Задача 7.7. Известны степени всех вершин графа. Выведите формулу для подсчёта количества рёбер в этом графе.

Теорема 1. Число нечётных вершин любого графа чётно.

Задача 7.8. Докажите теорему 1.

Заметим, что задачу 7.7 часто называют *леммой о рукопожатиях*. Почему? Попробуйте решить такую задачу: "Докажите, что количество человек, когда-либо живших на земле и сделавших за свою жизнь нечётное число рукопожатий - чётно." Что общего между этой задачей и теоремой 1? Чему равно количество всех рукопожатий?

Задача 7.9. Программисты одного НИИ решили соединить имеющиеся у них 2003 компьютера проводами так, чтобы каждый компьютер был соединен ровно с 3 другими. Удастся ли им осуществить свою идею?

Решение. Если бы это было возможно, то можно было нарисовать граф, где вершины являлись бы изображением компьютеров, а рёбра - проводами. Тогда нарисованный граф имел бы 2003 нечётные вершины, что по лемме о рукопожатиях невозможно. □

Упражнение 49. Переформулируйте на языке графов задачу 1.30 из главы 1 "Четность".

Упражнение 50. Переформулируйте на языке графов задачу 2.33 из главы 2 "Принцип Дирихле".

Задача 7.10. Докажите, что если в графе не менее двух вершин, то в нём есть вершины одинаковой степени.

Задача 7.11. * У Маши 24 одноклассника, причём все они имеют различное число друзей в этом классе. Сколько из них дружат с Машей?

Задача 7.12. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, через другие города).

Определение 10. Путём в графе называется последовательность рёбер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего, последовательность проходимых при этом вершин от A до B также называется *путём, соединяющим вершины A и B*.[1]

Определение 11. Граф называется связным, если любые его две вершины могут быть соединены путём.

Таким образом, решение задачи 7.12 есть доказательство того, что граф дорог страны Семерка связен. Если граф несвязен, то в нём можно выделить *компоненты связности*, т.е. "куски", являющиеся связными графами. Если таких кусков нельзя выделить меньше двух, то граф будет *двухсвязным*, если три, то - *трёхсвязным* и т.д.

Упражнение 51. Укажите число компонент связности для графов из упражнения 46.

Задача 7.13. Верно ли, что любая последовательность рёбер, в которой каждые два имеют общий конец, является путем?

Задача 7.14. В графе n вершин. Степень каждой из них не меньше $\dfrac{n-1}{2}$. Докажите, что граф связен.

Определение 12. Замкнутый путь (т.е. путь, у которого совпадают начало и конец), не проходящий через одну вершину дважды, называется *циклом*.

Задача 7.15. На кружок ходит 20 школьников. Однажды им было задано на дом 20 задач. Оказалось, что каждый школьник решил ровно две задачи, а каждую задачу решило ровно два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, что каждый школьник расскажет по одной из решенных им задач и все задачи будут разобраны.

Теорема 2. Если из каждой вершины конечного графа выходит ровно два ребра, то такой граф является либо циклическим, либо объединением циклических.

Задача 7.16. Докажите теорему 2.

[1] Вообще говоря, проходимые при этом вершины и рёбра не обязаны быть различными. Путь, в котором никакие вершины и рёбра не встречаются два раза, называют *простым путём*. В данном же листке мы пока не будем выделять различные виды путей.

Задача 7.17. а) Каково необходимое условие, чтобы у графа можно было обойти все рёбра ровно по одному разу? б) и вернуться в исходную вершину?

Задача 7.18. а) Можно ли из одного куска проволоки согнуть каркас куба, не проходя ни по одному ребру дважды? б) А каркас октаэдра? (*Замечание*: октаэдр представляет собой две четырёхугольные пирамиды, склеенные основаниями.)

Определение 13. Граф называется *эйлеровым*, если в нём существует замкнутый путь, проходящий через все рёбра ровно по одному разу. Такой путь, соответственно, называют *эйлеровым циклом.*

Упражнение 52. Приведите примеры эйлеровых графов.

Замечание. Вообще говоря, пути и циклы без самопересечений называют *простыми.* В частности приведенное выше определение цикла есть определение *простого цикла.* Чаще всего в задачах, говоря о циклах, имеют в виду простые циклы.

Контрольный вопрос 2. Верно ли, что эйлеров цикл не имеет самопересечений, то есть всегда является простым циклом?

Задача 7.19. * В одном городе на каждом перекрёстке сходится чётное число улиц. Известно, что с любой улицы можно проехать на любую другую. Докажите, что можно объехать все улицы города, побывав на каждой ровно один раз.

Задача 7.20. ^{n} В стране Миллениум некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 2007 авиалиний, из города Тьма-Таракань - одна, а из всех остальных городов - ровно по 2008 авиа-линии. Можно ли из Тьмы-Таракани добраться в столицу?

Задача 7.21. ^{n} Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Задача 7.22. В стране Стодорожной из каждого города выходит ровно 100 дорог и из любого города можно проехать в любой другой. Одну из дорог закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь можно добраться из любого города в любой другой.

Задача 7.23. * Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один и тот же день несколько коротышек простудились и заболели, и, хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки, навещая своих больных друзей, заболевали на следующий день после посещения. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно 1 день, причём после этого у него по крайней мере ещё один день есть иммунитет, т.е. он здоров и заразиться в этот день не может (число дней иммунитета у каждого коротышки может быть своё). Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делали их.

Докажите, что:

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно закончится.

Задача 7.24. ** В Простоквашинской начальной школе учится 20 детей. У любых двух из них есть общий дед. Докажите, что тогда найдется Простоквашинский дедушка, у которого в этой школе учится не менее 14-ти внуков и внучек. (Замечание: человек не может иметь более двух дедушек.)

Аналогии.

И снова старый добрый раздел. Как обычно, вам не нужно пытаться решить *ВСЕ* задачи этого раздела. Необходимо указать все аналогичные задачи, после чего решить одну (если аналогичная задача не была решена ранее) из них на выбор. В этот раз мы постарались вас запутать, изменив числовые данные в задачах, поэтому задачи могут быть аналогичны друг другу, даже имея различные числовые данные.

Задача 7.25. В лицее 55 кабинетов. Хакер Макс решил соединить телефонными проводами каждый кабинет ровно с пятью другими. Сможет ли он это сделать?

Задача 7.26. Во дворе живут 4 пёсика: Бобик, Робик, Тобик и Толстолобик. Каждому из них случалось драться с кем-нибудь из остальных, причём у Бобика, Робика и Тобика число тех, с кем они дрались - разное. Со сколькими собаками двора дрался Толстолобик?

Задача 7.27. Докажите, что среди девяти человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых.

Задача 7.28. На плоскости нарисованы 9 точек. Костя соединил некоторые из них синим цветом, а Миша все остальные точки соединил красным. Докажите, что найдётся либо синий треугольник, либо красный четырёхугольник с красными диагоналями.

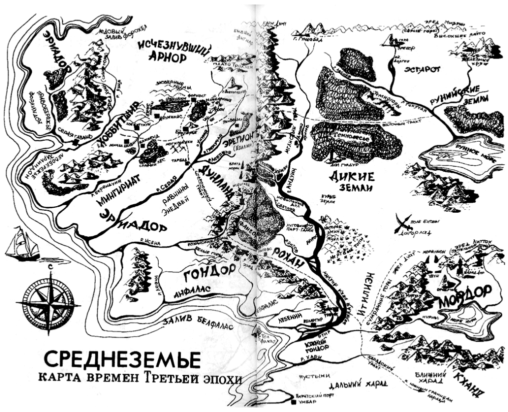
Задача 7.29. В сказочной стране Перра-Терра живут карабасы и барабасы. Каждый карабас знаком с 4 барабасами и 7 карабасами, а каждый барабас знаком с 6 карабасами и 5 барабасами. Кого в стране больше - карабасов или барабасов?

Задача 7.30. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Задача 7.31. Проходит волейбольный турнир школы по круговой системе (каждая команда играет с каждой ровно один раз). Участвует 17 команд. В том числе и команда 7Ю класса. В некоторый момент времени оказалось, что все команды (кроме команды 7Ю) сыграли разное количество матчей. Сколько матчей к этому моменту сыграла команда 7Ю класса?

Задача 7.32. В кружке танцев каждая девочка познакомилась с 6 мальчиками и 7 девочками, а каждый мальчик - с 3 девочками и 4 мальчиками. Кого в кружке больше: мальчиков или девочек?

Задача 7.33. Резидент одной из иностранных разведок сообщил, что пятнадцать республик бывшего Советского Союза заключили несколько двусторонних соглашений так, что каждая из них заключила договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия?



Задача 7.34. Докажите, что на любой географической карте с 2008 странами найдутся по крайней мере две страны с одинаковым числом соседей.

Задача 7.35. В государстве N ровно $2n+1$ городов. Новый президент издал указ, по которому каждый город должен быть соединён автострадой ровно с $2k+1$ другими. Для каких значений n и k можно выполнить указ президента?

Задача 7.36. В стране Девятка девять городов. Некоторые из них соединены авиалиниями (туда и обратно). Докажите, что либо найдутся три города, которые можно облететь по циклу, либо четыре города, никакие два из которых не соединены авиалинией.

Задача 7.37. В графе каждая вершина покрашена в синий или зелёный цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелёными, а каждая зелёная с девятью синими и шестью зелёными. Каких вершин больше - синих или зелёных?

Дополнительные задачи.

Задача 7.38. На шахматной доске 4×4 расположена фигура - "летучая ладья", которая ходит так же как и обычная ладья, но не может за один ход стать на поле соседнее с предыдущим. Может ли она обойти всю доску, становясь на каждое поле по одному разу и вернуться на исходное поле?

Задача 7.39. В Тридевятом царстве любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно добраться в любой другой не более, чем по двум дорогам.

Задача 7.40. * В одном городе любые двое - либо друзья, либо враги. Каждый человек может в некоторый момент поссорится со всеми своими друзьями и помириться со всеми своими врагами. Оказалось, что таким образом любые трое могут стать друзьями. Докажите, что тогда и все люди в этом городе могут стать друзьями.

Задача 7.41. * В стране 201 город, из каждого выходит ровно 10 дорог, причем из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно выбрать 20 городов, никакие два из которых не соединены дорогой.

Задача 7.42. * На турбазе 12 домиков, между которыми крот прокопал 56 непересекающихся подземных ходов (два домика соединяются не более чем одним ходом). Докажите, что крот из любого домика может попасть в любой другой, передвигаясь по этим ходам.

Задача 7.43. * Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата 4×4, представить в виде объединения

а) восьми ломаных длиной 5;

б) пяти ломаных длиной 8?