Правильная пирамида

В. К. Егерев, А. Г. Мордкович

Решению многих геометрических задач присущ характер искусственности, что дало основание немецкому философу прошлого века Артуру Шопенгауэру бросить геометрии упрек в использовании «доказательств-мышеловок». Действительно, решение геометрических задач содержит мало шаблонов и часто производит впечатление фокуса. Тем более важно знать тот небольшой арсенал «стандартных» приемов, которые все-таки используются при решении этих задач. О некоторых приемах уже шла речь на страницах нашего журнала (см. например, статью И. А. Кушнир «Метод вспомогательного элемента», «Квант», 1974, № 2). В этой статье рассказывается еще об одном таком приеме.

1. «Метод кастрюльки»

Начнем с небольшой притчи. Андрею объяснили, как сварить яйцо: «Сними с гвоздя кастрюльку, налей туда воды, положи яйцо, зажги газ, поставь кастрюльку на газовую плиту и сними через 5 минут после того, как закипит вода». Андрюша так и сделал, все хорошо получилось. Но как-то, проснувшись утром, Андрей увидел, что вода в кастрюльку уже налита и газ горит. Подумав, он погасил газ, вылил воду и повесил кастрюльку на гвоздик, а затем сделал так, как его учили.

Несмотря на кажущуюся несуразность такого поведения, метод возвращения к исходным данным задачи, которую мы умеем решать, является иногда наиболее рациональным. Назовем его «методом кастрюльки».

2. Соотношения между углами в пирамиде

На рисунке 1 изображена часть правильной n-угольной пирамиды SABCD..., SH-высота, SK-апофема. Введем следующие обозначения:

- α-угол между боковым ребром и плоскостью основания;
- β-угол между боковой гранью и плоскостью основания;
- γ-угол между смежными боковыми ребрами;
- φ-угол между смежными боковыми гранями.

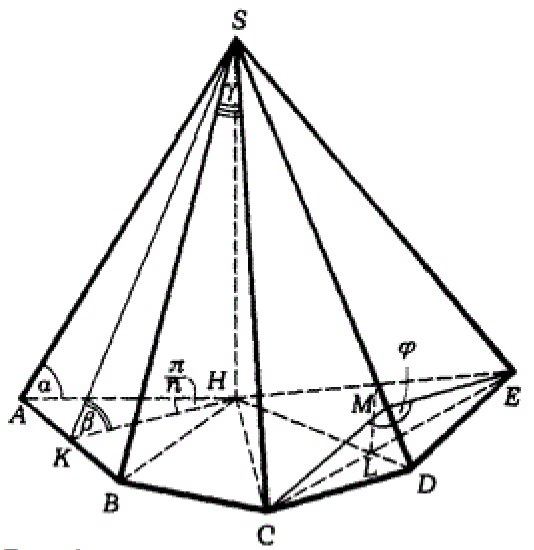

Рис. 1.

Углы	Соотношения		Область изменения углов	Связи между углами
$\alpha:\varphi$	$\sin\alpha=\cot\frac{\varphi}{2}\cot\frac{\pi}{n}$	(1)	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	
$\alpha:\gamma$	$\cos\alpha=\sin\frac{\gamma}{2}/\sin\frac{\pi}{n}$	(2)	$0<\beta<\frac{\pi}{2}$	$\gamma<\pi-2\alpha$
$\alpha:\beta$	$\tan\alpha=\tan\beta\cdot\cos\frac{\pi}{n}$	(3)	$0<\gamma<\frac{\pi}{2}$	$\alpha<\beta$
$\beta:\gamma$	$\cos\beta=\tan\frac{\gamma}{2}/\cot\frac{\pi}{n}$	(4)	$\pi-\frac{2\pi}{n}<\varphi<\pi$	
$\beta:\varphi$	$\tan\beta=\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}$	(5)		$\varphi>\pi-2\beta$
$\gamma:\varphi$	$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$	(6)		