№1

Зная, что поток F векторного поля A по определению есть интеграл по поверхности S от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности,

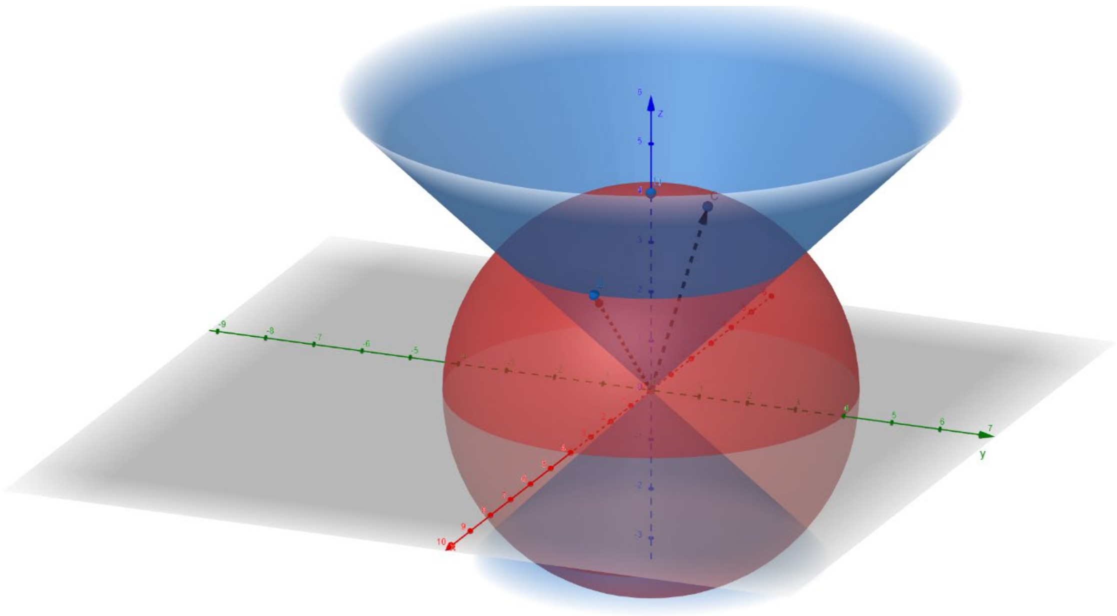
$$F = \iint\limits_S \vec{a}\vec{n}\,ds$$

Рассчитать поток векторного поля A через замкнутую поверхность S двумя способами

$$A = xy\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + zx\vec{k},$$

$$S\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + y^2 = z^2, (z \geq 0) \end{cases}$$

Представление замкнутой области:



Первый способ

По формуле Остроградского — Гаусса можно представить поток векторного поля через интеграл объёма замкнутой поверхности:

$$\iint\limits_S a \cdot dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} a \cdot dV$$

Дивергенция векторного поля:

$$div\, a = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = y + z + x$$

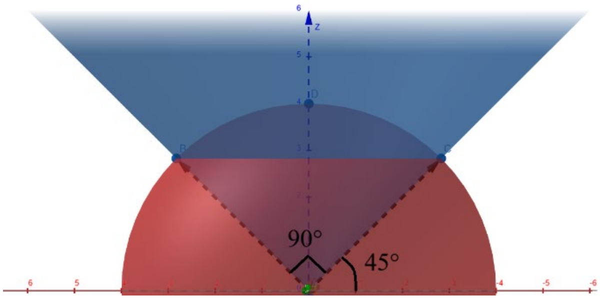
Переход функции области в сферические координаты:

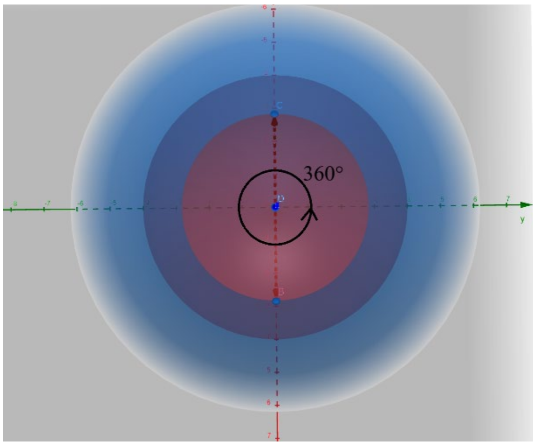
$$\begin{cases} x = \rho\, cos\, \varphi\, sin\, \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \ \Rightarrow \rho = 4 \Rightarrow \ 0 \le \rho \le 4$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \ \Rightarrow \ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$$

$$\varphi \in \ [0; 2\pi]$$





Переход дивергенции векторного поля в сферические координаты:

$$div\, a = y + z + x \Rightarrow \ \rho(\sin \varphi \sin \theta + cos\, \varphi\, sin\, \theta + \ \cos \theta)$$

Якобиан преобразования к сферическим координатам равен:

$$J = \rho^2\, sin\, \theta$$

Подставим в формулу Остроградского — Гаусса:

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} a \cdot dV =$$

$$= \iiint\limits_V \rho(\sin \varphi \sin \theta + cos\, \varphi\, sin\, \theta + \ \cos \theta) \cdot \rho^2\, sin\, \theta\, d\varphi d\theta d\rho$$

$$= \iiint\limits_V \rho^3(\sin^2 \theta\, (\sin \varphi + cos\, \varphi) + \ \cos \theta\, sin\, \theta)\, d\varphi d\theta d\rho$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho^3 (\sin^2\theta\,(\sin\varphi + cos\,\varphi) + \cos\theta\, sin\,\theta) d\rho$$

$$= 64 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta \sin\varphi + \sin^2\theta\, cos\,\varphi + \cos\theta\, sin\,\theta)\, d\varphi$$

$$= 64 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\sin^2\theta \int_0^{2\pi} cos\,\varphi\, d\varphi\right) + \left(\sin^2\theta \int_0^{2\pi} sin\,\varphi\, d\varphi\right) + \left(\cos\theta sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\right) d\theta$$

$$= 64 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2\theta (\sin\varphi|_0^{2\pi}) + \sin^2\theta(-cos\varphi|_0^{2\pi}) + \cos\theta sin\theta \cdot 2\pi\, d\theta$$

$$= 64\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} sin\,2\theta\, d\theta$$

$$= 32\pi(-cosu|_{\pi/2}^{3\pi/2})$$

$$= 32\pi(-0+0) = 0$$

Поток векторного поля = 0

Второй способ

По определению потока векторного поля через поверхность — поверхностный интеграл второго рода по поверхности S:

$$F = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS$$

Переход векторного поля в сферические координаты:

$$\vec{A} = \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\theta \vec{\imath} + \rho^2 \cos\theta \sin\varphi \sin\theta\, \vec{\jmath} + \rho^2 \cos\varphi \cos\theta\, sin\theta \vec{k}$$

Нахождение вектора нормали:

$$f(\varphi,\theta)\text{ сферы} = (\rho\, sin\,\varphi\, cos\,\theta\,, \rho\, sin\,\varphi\, sin\,\theta\,, \rho\, cos\,\theta)$$

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial\varphi}\times\frac{\partial f}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial f}{\partial\varphi}\times\frac{\partial f}{\partial\theta}\right|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi}\times\frac{\partial f}{\partial\theta} = \rho^2\sin\theta\left(\sin\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right)$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\varphi}\times\frac{\partial f}{\partial\theta}\right| = \rho^2 sin\theta$$

$$\vec{n} = \sin\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$F = \iint\limits_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \iint\limits_D \vec{A}\cdot\vec{n}\cdot J\,d\theta\,d\varphi =$$

$$\vec{A}\cdot\vec{n}\cdot J =$$

$$= (\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\vec{\imath} + \rho^2\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \rho^2\cos\varphi\cos\theta\, sin\theta\vec{k})$$
$$\cdot(\sin\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k})\cdot\ \rho^2\, sin\,\theta$$

$$= \rho^4\sin^2\theta(\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int\limits_0^{2\pi} \rho^4\sin^2\theta(\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta$$
$$+ \cos^2\theta\cos\varphi)\ d\varphi$$

$$\rho = 4\ \Rightarrow 64\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2\theta(\sin^2\theta\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi + sin\,\theta\, cos\theta\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi$$
$$+ \cos^2\theta\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi)\,d\theta =$$

$$= 64\pi \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2\theta(0 + \cos\theta\sin\theta + 0)\,d\theta$$

$$= 64\pi \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 64\pi(\frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4})$$

$$= 64\pi \cdot 0 = 0$$

Исправление:

Данный интеграл рассчитывает только поверхность сферы, ограниченной конусом. Необходимо вычислить и прибавить поток поверхности конуса, ограниченного сферой:

Находится нормаль для поверхности:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Переход в цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\,\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho^2\, cos^2\,\varphi + \rho^2\, sin^2\,\varphi = z^2 \;\Rightarrow \rho^2 = z^2 \;\Rightarrow \rho = z$$

$$f(\rho,\varphi) = \big(x(\rho,\varphi); y(\rho,\varphi); z(\rho,\varphi)\big)$$

$$\vec{n}\,dS = \left(\frac{\partial f}{\partial\rho} \times \frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) d\rho\, d\varphi$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ cos\,\varphi & sin\,\varphi & 1 \\ -\rho\, sin\,\varphi & \rho\, cos\,\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\rho\cos\varphi\vec{\imath} - \rho\sin\varphi\vec{\jmath} + \rho\vec{k}$$

$$\vec{A} = \rho^2\, cos\,\varphi\, sin\,\varphi\vec{\imath} + \rho^2\, sin\,\varphi\vec{\jmath} + \rho^2\, cos\,\varphi\vec{k}$$

$$\iint\limits_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \int\limits_0^4 d\rho \int\limits_0^{2\pi} -\rho^3(\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^r\varphi - \cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= -\int_{0}^{4} (\rho^3 \cdot 0 + \rho^3 \cdot \pi - \rho^3 \cdot \pi)\, d\rho = 0$$

Так сумма потока по поверхности сферы и потока по поверхности конуса равен 0.

№2

Найти площадь фигуры, ограниченной функциями:

$$D: \left\{ y^2 - 2y + x^2 = 0;\ y^2 - 4y + x^2 = 0;\ y = \frac{x}{\sqrt{3}};\ y = \sqrt{3}x \right\}$$

Построим графики функций: [График]

Заметим, что координаты x точек, в которых прямые пересекают окружности одинаковые.

Найдем координаты точек пересечения прямыми окружностей:

$$\sqrt{3}y = \sqrt{4y - y^2}$$

$$y = 0, y = 1$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}y = \sqrt{2y - y^2}$$

$$y = 0, y = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Поделим фигуру на части и найдем их площади:

$S_1 = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}x} dy = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}x - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) dx = \frac{3\sqrt{3}}{4} -$
площадь области ограниченной прямыми

$$S_2 = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = 2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$
$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \text{площадь ограниченная меньшей окружностью}$$

$$S_3 = \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = 2\int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{4-x^2}dx$$
$$= \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$
$$- \text{ площадь ограниченная большей окружностью}$$

$$S = S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\pi}{2} - \text{ сложим все полученные результаты}$$

№3

https://github.com/AntonSexov/calculus_cgw

№4

При помощи формулы Стокса проверьте, что

$$\oint_L f d\vec{l} = - \iint_S \nabla f \times d\vec{S},$$

где S – гладкая односвязная поверхность, ограниченная замкнутой кривой L,

$f(x; y; z)$ – непрерывно дифференцируемая скалярная функция в некоторой пространственной области, содержащей поверхность S,

$d\,l = (dx; dy; dz)$ – направленный элементарный участок кривой L,

$dS = (dydz; dzdx; dxdy)$ – направленный элементарный участок поверхности S.

Решение

Формула Стокса устанавливает связь между циркуляцией векторного поля вдоль замкнутой кривой и потоком ротора этого поля через поверхность, ограниченную этой кривой. Она имеет вид:

$$\oint_L \boldsymbol{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\vec{S}$$

где **F** - векторное поле, L - замкнутая кривая, S - поверхность, ограниченная кривой L, dl – направленный элементарный участок кривой L, и dS – направленный элементарный участок поверхности S.

В задании, f – непрерывно дифференцируемая скалярная функция, но не векторное поле. Так нам нужно преобразовать эту скалярную функцию в векторное поле. Можно рассмотреть векторное поле F, компоненты которого равны частным производным функции f.

$$\vec{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Но тогда $\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \nabla f$, а это в свою очередь равен 0 так как ротор градиента любой скалярной функции равен нулю. Таким образом, правая часть исходного уравнения обращается в ноль.

Следовательно, утверждение, представленное в вопросе, не является верным в случае если левая часть не равна нулю.