№1

Найти общее решение уравнения

$$xy' + y = y^2$$

Решение

$$xy' = y^2 - y$$

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - y$$

$$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$ln(x) + C = ln(\frac{y-1}{y})$$

$$Cx = \frac{y-1}{y}$$

$$Cx - 1 = -\frac{1}{y}$$

$$y(x) = \frac{1}{1 - C_1 x}$$

№2

Найти общее решение уравнения

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

Решение

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0 \mid : dx$$

$$P(x, y) = x + y - 2;\ Q(x, y) = x - y + 4$$

Уравнение является уравнением в полных дифференциалах так как:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$f(x,y) = \int x + y - 2\,dx = \frac{x^2}{2} + xy - 2x + C(y)$$

Дифференцируем f (x, y) относительно y, чтобы найти C(y):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + C'(y) = Q(x,y)$$

$$x + C'(y) = x - y + 4$$

$$C'(y) = -y + 4$$

$$C(y) = -\int (y-4)\,dy = -\frac{y^2}{2} + 4y + C_1$$

Общий интеграл:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - 2x - \frac{y^2}{2} + 4y + C_1$$

Общее решение:

$$y(x) = x \pm \sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2x - C_1 + 8} + 4$$

№3

Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$xy' - \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 0$$

Решение

$$y' - \frac{y}{x^2 + x} = 1$$

Уравнение не однородное, решение по методу Бернулли:

$$y = u \cdot v; y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x^2 + x} = 1$$

$$v\left(u' - \frac{u}{x^2 + x}\right) + uv' = 1$$

Пусть $u' - \frac{u}{x^2+x} = 0$

$$\begin{cases} u' - \dfrac{u}{x^2 + x} = 0 \\ uv' = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x^2 + x}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x^2 + x}$$

$$ln|u| = ln|x| - ln|x + 1|$$

$$u(x) = \frac{x}{x + 1}$$

Из второго уравнения

$$v' = \frac{1}{u}$$

Используя найденное значение u(x):

$$v' = \frac{x + 1}{x}$$

$$dv = \frac{x + 1}{x} dx$$

$$v(x) = x + ln|x| + C_1$$

$$y = \left(\frac{x}{x + 1}\right)(x + ln|x| + C_1) = \frac{x(x + \ln|x| + C_1)}{x + 1}$$

Частное решение:

При y(1) = 0:

$$0 = \frac{1(1 + ln\,1 + C_1)}{1 + 1}$$

$$1 + 0 + C_1 = 0$$

$$C_1 = -1$$

$$y(x) = \frac{x(x + ln|x| - 1)}{x + 1}$$

№4

Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных

$$y'' - 6y' + 9y = 16e^{-x} + 9x - 6$$

Решение

№5

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y''' - \ y' = 0;\ y(0) = 3;\ y'(0) = -1;\ y''(0) = 1$$

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow\ \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = -1$$

Общее решение:

$$y(x) = C_0e^{0x} + C_1e^x + C_2e^{-x} = \ C_0 + C_1e^x + C_2e^{-x}$$

Поиск констант:

По условию $y(0) = 3$:

$$C_0 + C_1e^0 + C_2e^{-0} = 3\ \Rightarrow C_0 + C_1 + C_2 = 3$$

По условию $y'(0) = -1$:

$$y'(x) = (C_0 + C_1e^x + C_2e^{-x})'_x = \ C_1e^x - C_2e^{-x}$$

$$C_1e^0 - C_2e^{-0} = -1\ \Rightarrow C_1 - C_2 = -1$$

По условию $y''(0) = 1$:

$$y''(x) = (C_1e^x - C_2e^{-x})'_x = \ C_1e^x + C_2e^{-x}$$

$$C_1e^0 + C_2e^{-0} = 1\ \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$$

Получается система:

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 = 3 \\ C_1 - C_2 = -1 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

Из второго уравнения $C_1 = C_2 - 1$

$$C_2 - 1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$C_1 = 1 - 1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$C_0 + 0 + 1 = 3 \Rightarrow C_0 = 2$$

Частное решение имеет вид:

$$y(x) = 2 + 0e^x + 1e^{-x} = \ 2 + e^{-x}$$

№6

Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение по характеристическому полиному однородной его части, и решить его

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Решение

Составим дифференциальное уравнение:

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$$

По характеристическому полиному:

$$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -1$$

$$\hat{y} = C_0 e^{-2x} + C_1 e^{-x}$$

Частное решение y*(x) находится через систему:

$$\begin{cases} C_0{}'(x) y_1(x) + C_1{}'(x) y_2(x) = 0 \\ C_0{}'(x) y_1{}'(x) + C_1{}'(x) y_2{}'(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_0{}'(x) e^{-2x} + C_1{}'(x) e^{-x} = 0 \\ -2C_0'(x) e^{-2x} - C_1{}'(x) e^{-x} = \dfrac{1}{e^x + 1} \end{cases}$$

$$C_0'(x) = \frac{-C_1'(x) e^{-x}}{e^{-2x}} = -C_1'(x) e^x$$

Вставим во второе уравнение:

$$-C_1'(x) e^x \cdot\ -2e^{-2x} - C_1'(x) e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$C_1'(x)e^{-x} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$C_1'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$C_1(x) = ln(e^x + 1)$$

Подставим $C_1'(x)$ в уравнение $C_0'(x)$

$$C_0'(x) = -\frac{e^x}{e^x + 1} \cdot e^x$$

$$C_0(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = -e^x + \ln(e^x + 1)$$

Так y(x) это сумма общего решения и частного решения:

$$y(x) = C_0 e^{-2x} + C_1 e^{-x} + +e^{-2x}(-e^{-x} + \ln(e^x + 1)) + e^{-x}(\ln(e^x + 1))$$

№7

Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \;\; x(0) = -1 \\ \dot{y} = z + x, \;\; y(0) = 1 \\ \dot{z} = x + y, \;\; z(0) = 0 \end{cases}$$

Решение

Матрица системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение данной системы:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda - 2) \cdot -(\lambda + 1)^2$$

$$\lambda_0 = 2; \; \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Простой корень $\lambda_0 = 2$:

$$\begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix} \sim \begin{matrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}x_1 = x_3\\ x_3 = x_2\end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} e^{2t}$$

Корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, кратность 2

$$\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{matrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix}-1\\ l\\ 0\end{pmatrix} e^{-t}$$

Система имеет два линейно независимых решения, следовательно, для собственного значения λ = -1 его алгебраическая и геометрическая кратности совпадают. Так общее решение системы имеет вид:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} e^{-t}$$

Общее решение:

$$x(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t}$$
$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t}$$
$$z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$$

Решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t}, \; x(0) = -1\\ y(t) = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \; y(0) = 1\\ z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \; z(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}C_1 - C_2 - C_3 = -1\\ C_1 + C_3 = 1\\ C_1 + C_2 = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}C_2 = -C_1\\ C_3 = 1 - C_1\end{matrix} \Rightarrow C_1 + C_1 - 1 + C_1 = -1 \Rightarrow \begin{matrix}C_1 = 0\\ C_3 = 1\\ C_2 = 0\end{matrix}$$

Частное решение:

$$x(t) = -e^{-t}$$
$$y(t) = e^{-t}$$
$$z(t) = 0$$