Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Математика

РГР 4

Вариант 8

Выполнили студенты:

Крохин Роман Олегович

Маликов Глеб Игоревич

Поток 22.2

Преподаватель: Труфанова Анна Александровна

г. Санкт-Петербург

2024

1. Записать в алгебраическом виде

$$cos(\pi/6 - i)$$

Решение

Пусть z = $\pi/6 - i$,тогда $cos(z)$ можно представить как $cos(x + iy) = cos\,x\,ch\,y - i\,sin\,x\,sh\,y$

$$cos(\pi/6 - i) = cos(\frac{\pi}{6})\,ch(-1) - i\,sin(\frac{\pi}{6})\,sh(-1)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-1} - e^{1}}{2}$$

$$\approx 1{,}3363 - i \cdot (-0{,}5876) \approx\ 1{,}3363 + 0{,}5876\,i$$

2. Вычислить все значения корня

$$\sqrt[3]{-27}$$

Решение

Формула Муавра:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(cos(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) + i * sin(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}))$$

Подставим числа:

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27}(cos(\frac{\pi + 2\pi k}{3}) + i * sin(\frac{\pi + 2\pi k}{3})), k = 0,1,2$$

Все решения:

$$\omega_0 = 3(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin(\frac{\pi}{3})) = 3(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\omega_1 = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{3}\right)\right) = -3$$

$$\omega_2 = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 3(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

3. Изобразить область, заданную неравенствами

$$\begin{cases} |z - 1 - i| \le 1 \\ Im\, z > 1 \\ Re\, z \ge 1 \end{cases}$$

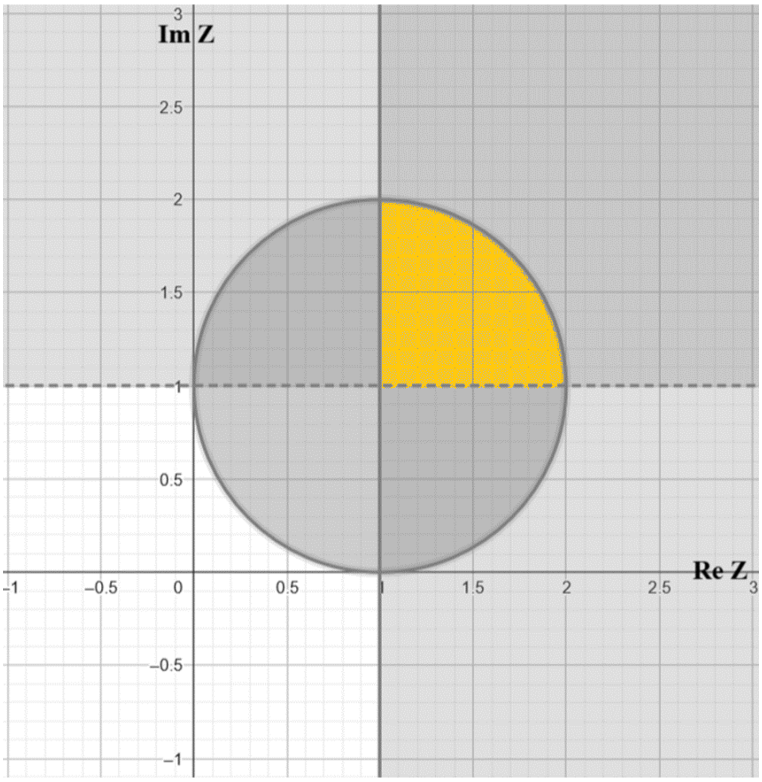
Решение

$|z - 1 - i| \le 1$ можно представить в алгебраическом виде: $|x + iy - 1 - i| \le 1$

$$\Rightarrow |(x-1) + i(y-1)| \le 1$$

Так как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то получается формула окружности радиусом ≤ 1 и центром в (1;1):

$$|(x-1) + i(y-1)| \le 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \le 1 \Rightarrow\; (x-1)^2 + (y-1)^2 \;\le 1$$



4. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию f(z), по действительной u(x, y) её части

$$u(x,y) = 2xy + 2x, f(z_0) = f(0) = 0$$

Решение

По условию Коши-Римана:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Имея $u(x,y)$ вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x$$

Интегрируем обе части:

$$\int u_x' = \int v_y' \Rightarrow \int 2y + 2\, dy = y^2 + 2y + C(x) = v(x,y)$$

$$\int u_y' = -\int v_x' \Rightarrow \int 2xdx = -x^2 + C(y) = v(x,y)$$

Приравниваем и находим $C(y)$ и $C(x)$:

$$y^2 + 2y + C(x) = -x^2 + C(y)$$

$$C(x) = -x^2 + C$$

$$C(y) = y^2 + 2y + C$$

Получаем $v(x,y)$:

$$v(x,y) = y^2 + 2y - x^2 + C$$

Так $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = 2xy + 2x + i(y^2 + 2y - x^2 + C)$$

При $z_0 = 0$ и $f(z_0) = 0$:

$$f(0) = 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + i(0^2 + 2 \cdot 0 - 0^2 + C) = 0$$

$$i \cdot C = 0$$

$$C = 0$$

$$f(z) = 2xy + 2x + i(y^2 + 2y - x^2)$$

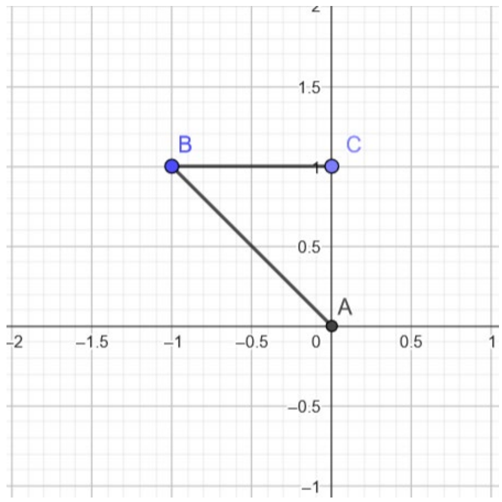
5. Вычислить интеграл по заданной кривой

$$\int\limits_{ABC} (z^2 + 1)\, dz$$

ABC − ломаная, $z_A = 0$, $z_B = -1 + I$, $z_C = i$

Решение

Ломаная изображена следующим графиком:



Интегралом от функции комплексного переменного определенной на кривой вычисляется сведением к определенному интегралу в параметрической форме $z = z(t)$ и применяется формула:

$$\int\limits_{AB} f(z)\, dz = \int\limits_{t_2}^{t_1} f\big(z(t)\big) z'_t\, dt$$

Интеграл от ABC можно представить как $\int_{AB} f\big(z(t)\big) z'_t\, dt + \int_{BC} f\big(z(t)\big) z'_t\, dt$:

Для AB:

Кривая описывается функцией $y = -x$

Пределы интегрирования: от 0 до -1

Находим z'_x:

$$z = x + i \cdot (-x) = x - ix \Rightarrow\ z'_x = 1 - i$$

Заменяем в $f(z)$:

$$f(z) = (x - ix)^2 + 1 = x^2 - 2ix^2 - x^2 + 1 = -2ix^2 + 1$$

Для BC:

Кривая описывается функцией $y = 1$

Пределы интегрирования: от -1 до 0

Находим z'_x:

$$z = x + i \cdot 1 = x + i \Rightarrow \; z'_x = 1$$

Заменяем в $f(z)$:

$$f(z) = (x+i)^2 + 1 = x^2 + 2ix - 1 + 1 = x^2 + 2ix$$

$$\int\limits_{ABC} (z^2+1)\,dz = \int\limits_{AB} (-2ix^2+1)(1-i)\,dt + \int\limits_{BC} (x^2+2ix)\cdot 1\,dt$$

Интеграл от AB:

$$\int\limits_0^{-1} -2ix^2 + 1 - 2x^2 - i\,dx =$$

$$= \; 2i\int\limits_{-1}^{0} x^2\,dx + \int\limits_0^{-1} dx + 2\int\limits_{-1}^{0} x^2\,dx + i\int\limits_{-1}^{0} dx =$$

$$= 2i\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + x|_0^{-1} + 2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + i(x)|_{-1}^{0} =$$

$$= 2i\left(0 - \left(\frac{-1}{3}\right)\right) + (-1-0) + 2\left(0 - \left(\frac{-1}{3}\right)\right) + i\big(0-(-1)\big) =$$

$$= \frac{2i}{3} - 1 + \frac{2}{3} + i = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}i$$

Интеграл от BC:

$$\int\limits_{-1}^{0} x^2 + 2ix\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} x^2\,dx + 2i\int\limits_{-1}^{0} x\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + 2i\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$0 - \left(\frac{-1}{3}\right) + 2i\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - i$$

Сумма двух интегралов даёт:

$$-\frac{1}{3} + \frac{5}{3}i + \frac{1}{3} - i = \frac{2}{3}i$$

6. Определить область аналитичности функции. Разложить функцию в степенной ряд во всей области аналитичности

$$\frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$$

Решение

Разложим функцию на простые члены:

$$\frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z+7}-\frac{2}{2z-7}$$

Найдем точки, где функция не аналитична:

$$z_1=-7$$
$$z_2=0$$
$$z_3=\frac{7}{2}$$

Рассмотрим каждый промежуток и в каждом из них представим функцию как степенной ряд Лорана:

$$< -7:$$
$$-\frac{2}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n(z+7)^n+\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{7}\right)^n+\frac{2}{7}\sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{2z}{7}\right)^n$$
$$> -7\,;\ < 0:$$
$$-\frac{2}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n(z+7)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{7}{z}\right)^n+\frac{2}{7}\sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{2z}{7}\right)^n$$
$$> 0;\ < \frac{7}{2}:$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{7}{z}\right)^n+\frac{2}{7}\sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{2z}{7}\right)^n$$
$$> \frac{7}{2}:$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{7}{z}\right)^n+\frac{1}{2z}\sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{7z}{2}\right)^n$$

7. Найти изолированные особые точки функции, определить их тип

$$f(z) = z^2 \, sin\frac{1}{z}$$

Решение

Особая точка в $f(z)$ это такая точка, где нарушается аналитичность функции.

Для $f(z) = z^2 \, sin\frac{1}{z}$ аналитичность нарушается при $z_0 = 0$:

$$\lim_{z \to z_0 = 0} z^2 \, sin\frac{1}{z} = 0$$

т. к. $-1 \leq sin(x) \leq 1$ а z^2 при $z_0 = 0$ равен 0

Так особая точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой т. к. предел существует и конечен.

8. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^4 + 2z^2 + 3}{2z^6}$$

Решение

Найдем особые точки:

$$z_0 = 0$$

Кратность 6

$$|z| < \frac{1}{2}$$

Попадает: $z_0 = 0$

Интеграл по замкнутому находится через формулу:

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res}\; f(z)$$

Где z_k особая точка входящая в область контура, $\underset{z_k}{res}\, f(z)$вычет функции $f(z)$ в точке z_k.

Особая точка $z_0 = 0$ является полюсом так как предел от $f(z_0) = \infty$. Так вычет от z_0находится по формуле:

$$\underset{z_k}{res}\, f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d_{k-1}}{dz^{k-1}} (f(z)(z - z_0)^k) \right)$$

$$\underset{z_0}{res}\, f(z) = \frac{1}{(6-1)!} \lim_{z \to 0} \left(\frac{d_{6-1}}{dz^{6-1}} \left(\frac{(z^4 + 2z^2 + 3)}{2z^6} (z-0)^6 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{5!} \lim_{z \to 0} \left(\frac{d_5}{dz^5} \left(\frac{(z^4 + 2z^2 + 3)}{2} \right) \right) = \frac{1}{5!} \cdot 0$$

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{(z^4 + 2z^2 + 3)\, dz}{2z^6} = \frac{2\pi i}{5!} \cdot 0 = 0$$

9. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\,sin\,t - 2}$$

Решение

Пусть z – комплексное число в показательной форме, т. е. $z = e^{it}$ с модулем = 1

Отсюда получается:

$$dz = ie^{it}\,dt$$

$$dt = \frac{dz}{ie^{it}} = \frac{dz}{iz}$$

$$sin\,t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

Подставим в интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(\frac{\sqrt{3}}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) - 2\right)} =$$

Преобразуем знаменатель:

$$iz\left(\frac{\sqrt{3}}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) - 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}z\left(z - \frac{1}{z}\right) - 2iz = \frac{\sqrt{3}}{2}z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2iz$$

$$= \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{\sqrt{3}}{2}z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2iz}$$

Находим особые точки:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}z^2 - 2iz - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\frac{2i \pm \sqrt{-4 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2i \pm \sqrt{-4+3}}{\sqrt{3}} = \frac{2i \pm i}{\sqrt{3}}$$

$$z_0 = \frac{3i}{\sqrt{3}};\; z_1 = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

$$|z_0| = \sqrt{3}; |z_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Только z_1 попадает в $|z| = 1$

Интеграл по замкнутому находится через формулу:

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res}\ f(z)$$

Где z_k особая точка входящая в область контура, $\underset{z_k}{res}\, f(z)$вычет функции $f(z)$ в точке z_k.

Особая точка $z_1 = \frac{i}{\sqrt{3}}$ является полюсом так как предел от $f(z_1) = \infty$. Так вычет от z_1находится по формуле:

$$\underset{z_k}{res}\, f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d_{k-1}}{dz^{k-1}} (f(z)(z - z_0)^k) \right)$$

z_1 имеет кратность 1:

$$\underset{z_1}{res}\, f(z) = \lim_{z \to \frac{i}{\sqrt{3}}} \left(\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 2iz} \right) \left(z - \frac{i}{\sqrt{3}} \right) \right) =$$

$$= \lim_{z \to \frac{i}{\sqrt{3}}} \left(\left(\frac{1}{\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} z - \frac{3}{2} i \right)} \right) \left(z - \frac{i}{\sqrt{3}} \right) \right) =$$

$$= \lim_{z \to \frac{i}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} z - \frac{3}{2} i} \right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{i}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \cdot i} = \frac{1}{\frac{i}{2} - \frac{3i}{z}} = \frac{1}{-i} = \frac{-i^2}{-i} = \frac{i^2}{i} = i$$

Так интеграл равен:

$$2\pi i \cdot \mathrm{res}\, z_1 = 2\pi i \cdot i = -2\pi$$