

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Информатика

Лабораторная работа № 2 " Синтез помехоустойчивого кода"

Вариант 21

Выполнил студент:

Маликов Глеб Игоревич

Группа № Р3124

Преподаватель: Болдырева Елена Александровна

г. Санкт-Петербург

2022

Оглавление

Задание.....	3
Дополнительное задание	3
Решение	4
Код Хэмминга (7,4).....	4
Первое сообщение	4
Второе сообщение.....	5
Третье сообщение	5
Четвёртое сообщение.....	5
Код Хэмминга (15,11).....	6
Пятое сообщение	7
Минимальное число проверочных разрядов	7
Исходный код.....	9
Вывод программы.....	9
Вывод.....	10
Список литературы	11

Задание

Построить схему декодирования классического кода Хэмминга (7;4). Показать, исходя из выбранных вариантов сообщений, имеются ли в принятом сообщении ошибки, и если имеются, то какие. Подробно прокомментировать и записать правильное сообщение.

Построить схему декодирования классического кода Хэмминга (15;11). Показать, исходя из выбранных вариантов сообщений, имеются ли в принятом сообщении ошибки, и если имеются, то какие. Подробно прокомментировать и записать правильное сообщение.

Сложить номера всех 5 вариантов заданий. Умножить полученное число на 4. Принять данное число как число информационных разрядов в передаваемом сообщении. Вычислить для данного числа минимальное число проверочных разрядов и коэффициент избыточности.

Дополнительное задание

Написать программу на любом языке программирования, которая на вход из командной строки получает набор из 7 цифр «0» и «1», записанных подряд, анализирует это сообщение на основе классического кода Хэмминга (7,4), а затем выдает правильное сообщение (только информационные биты) и указывает бит с ошибкой при его наличии.

Решение

Код Хэмминга (7,4)

Ниже приведена схема декодирования кода Хэмминга (7,4).

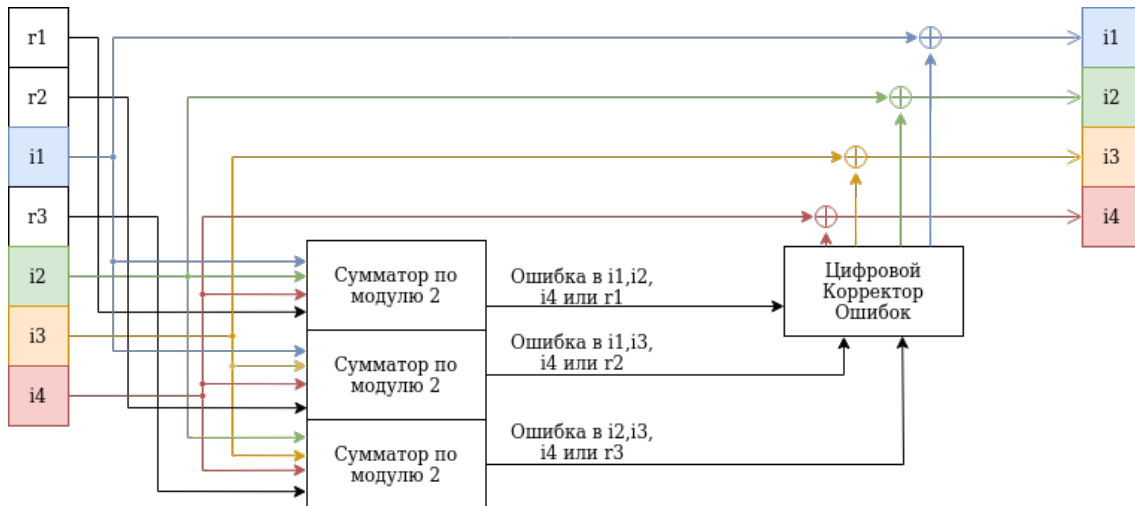


Рисунок 1 - Схема кода Хэмминга (7,4)

Первое сообщение

Делится первое сообщение (34 = 0110010) в соответствии с таблицей кода Хэмминга (7,4):

	1	2	3	4	5	6	7	
2^k	r_1	r_2	i_1	r_3	i_2	i_3	i_4	S
1	X		X		X		X	s_1
2		X	X			X	X	s_2
4				X	X	X	X	s_3

Таблица 1 - Таблица кода Хэмминга (7,4)

$$r_1 = 0; r_2 = 1; i_1 = 1; r_3 = 0; i_2 = 0; i_3 = 1; i_4 = 0;$$

Вычисляются значения контрольных бит результата:

$$r_1 \text{ рез} = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$$

$$r_2 \text{ рез} = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0;$$

$$r_3 \text{ рез} = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1;$$

Рассчитываются синдромы:

$$s_1 = r_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = r_1 \text{ рез} \oplus r_1 \text{ исх} = 1 \oplus 0 = 1;$$

$$s_2 = r_2 \oplus i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_2 \text{ рез} \oplus r_2 \text{ исх} = 0 \oplus 1 = 1;$$

$$s_3 = r_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_3 \text{ рез} \oplus r_3 \text{ исх} = 1 \oplus 0 = 1;$$

Полученный синдром: $S(1, 1, 1)$. Ошибочный бит седьмой (i_4). Исправляется ошибочный бит и правильная последовательность равна 0110011.

Второе сообщение

Делится второе сообщение ($56 = 1111011$) в соответствии с таблицей 1.

$$r_1 = 1; r_2 = 1; i_1 = 1; r_3 = 1; i_2 = 0; i_3 = 1; i_4 = 1;$$

Вычисляются значения контрольных бит результата:

$$r_1 \text{ рез} = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$

$$r_2 \text{ рез} = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1;$$

$$r_3 \text{ рез} = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0;$$

Рассчитываются синдромы:

$$s_1 = r_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = r_1 \text{ рез} \oplus r_1 \text{ исх} = 0 \oplus 1 = 1;$$

$$s_2 = r_2 \oplus i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_2 \text{ рез} \oplus r_2 \text{ исх} = 1 \oplus 1 = 0;$$

$$s_3 = r_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_3 \text{ рез} \oplus r_3 \text{ исх} = 0 \oplus 1 = 1;$$

Полученный синдром: $S(1, 0, 1)$. Ошибочный бит пятый (i_2). Исправляется ошибочный бит и правильная последовательность равна 1111111.

Третье сообщение

Делится третье сообщение ($78 = 1000101$) в соответствии с таблицей 1.

$$r_1 = 1; r_2 = 0; i_1 = 0; r_3 = 0; i_2 = 1; i_3 = 0; i_4 = 1;$$

Вычисляются значения контрольных бит результата:

$$r_1 \text{ рез} = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0;$$

$$r_2 \text{ рез} = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1;$$

$$r_3 \text{ рез} = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$

Рассчитываются синдромы:

$$s_1 = r_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = r_1 \text{ рез} \oplus r_1 \text{ исх} = 0 \oplus 1 = 1;$$

$$s_2 = r_2 \oplus i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_2 \text{ рез} \oplus r_2 \text{ исх} = 1 \oplus 0 = 1;$$

$$s_3 = r_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_3 \text{ рез} \oplus r_3 \text{ исх} = 0 \oplus 0 = 0;$$

Полученный синдром: $S(1, 1, 0)$. Ошибочный бит третий (i_1). Исправляется ошибочный бит и правильная последовательность равна 1010101.

Четвёртое сообщение

Делится четвёртое сообщение ($63 = 0110100$) в соответствии с таблицей 1.

$$r_1 = 0; r_2 = 1; i_1 = 1; r_3 = 0; i_2 = 1; i_3 = 0; i_4 = 0;$$

Вычисляются значения контрольных бит результата:

$$r_1 \text{ рез} = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0;$$

$$r_2 \text{ рез} = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$$

$$r_3 \text{ рез} = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1;$$

Рассчитываются синдромы:

$$s_1 = r_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = r_1 \text{ рез} \oplus r_1 \text{ исх} = 0 \oplus 0 = 0;$$

$$s_2 = r_2 \oplus i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_2 \text{ рез} \oplus r_2 \text{ исх} = 1 \oplus 1 = 0;$$

$$s_3 = r_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = r_3 \text{ рез} \oplus r_3 \text{ исх} = 1 \oplus 0 = 1;$$

Полученный синдром: $S(0, 0, 1)$. Ошибочный бит четвёртый (r_3). Исправляется ошибочный бит и правильная последовательность равна 0111100.

Код Хэмминга (15,11)

Ниже приведена схема декодирования кода Хэмминга (15,11).

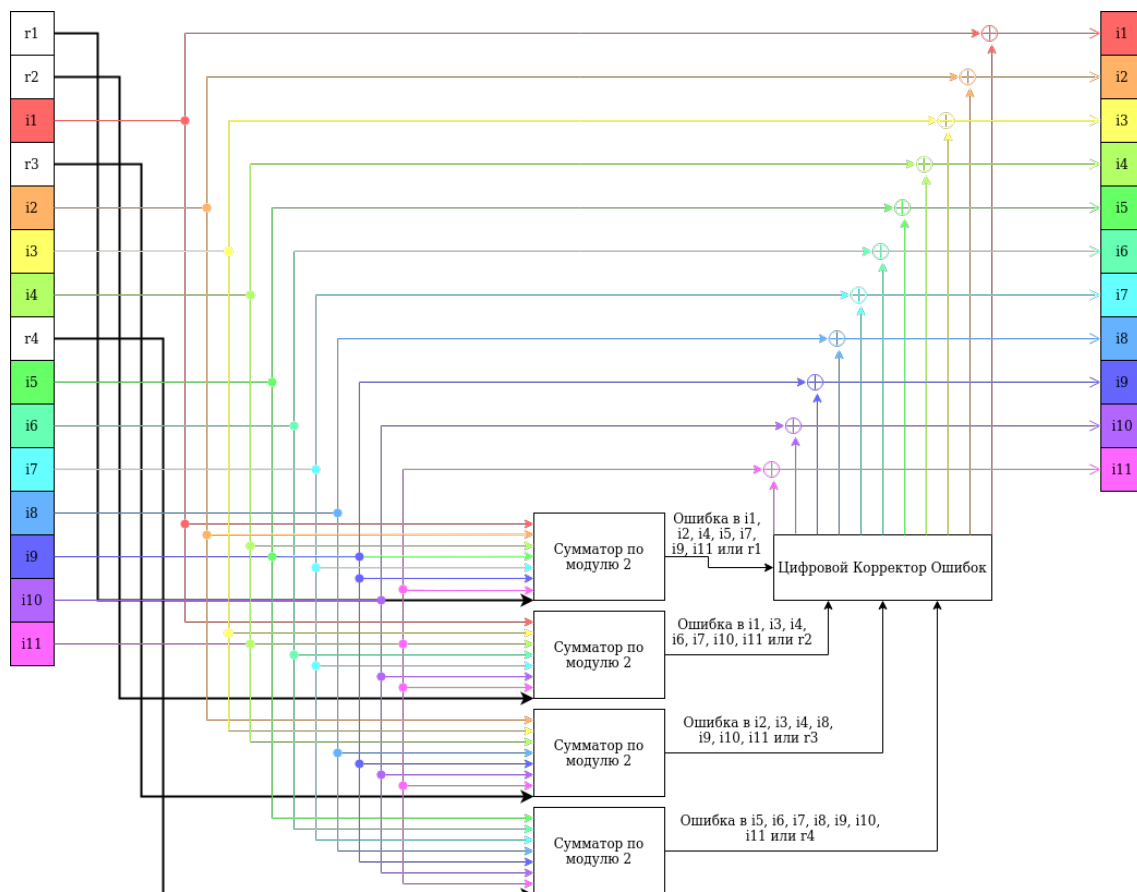


Рисунок 2 - Схема кода Хэмминга (15,11)

Пятое сообщение

Полученное сообщение 22 = 011000101100001.

Делится сообщение в соответствии с таблицей кода Хэмминга (15,11):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
2^k	r_1	r_2	i_1	r_3	i_2	i_3	i_4	r_4	i_5	i_6	i_7	i_8	i_9	i_{10}	i_{11}	S
1	X		X		X		X		X		X		X		X	s_1
2		X	X			X	X			X	X			X	X	s_2
4				X	X	X	X					X	X	X	X	s_3
8								X	X	X	X	X	X	X	X	s_4

Таблица 2 - Таблица кода Хэмминга (15,11)

$r_1 = 0; r_2 = 1; i_1 = 1; r_3 = 0; i_2 = 0; i_3 = 0; i_4 = 1; r_4 = 0; i_5 = 1; i_6 = 1; i_7 = 0; i_8 = 0; i_9 = 0; i_{10} = 0; i_{11} = 1;$

Вычисляются значения контрольных бит результата:

$$r_1 \text{ рез} = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 \oplus i_5 \oplus i_7 \oplus i_9 \oplus i_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$

$$r_2 \text{ рез} = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$

$$r_3 \text{ рез} = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_8 \oplus i_9 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$

$$r_4 \text{ рез} = i_5 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_8 \oplus i_9 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1;$$

Рассчитываются синдромы:

$$s_1 = r_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 \oplus i_5 \oplus i_7 \oplus i_9 \oplus i_{11} = r_1 \text{ рез} \oplus r_1 \text{ исх} = 0 \oplus 0 = 0;$$

$$s_2 = r_2 \oplus i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = r_2 \text{ рез} \oplus r_2 \text{ исх} = 0 \oplus 1 = 1;$$

$$s_3 = r_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_8 \oplus i_9 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = r_3 \text{ рез} \oplus r_3 \text{ исх} = 0 \oplus 0 = 0;$$

$$s_4 = r_4 \oplus i_5 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_8 \oplus i_9 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = r_4 \text{ рез} \oplus r_4 \text{ исх} = 1 \oplus 0 = 1;$$

Полученный синдром: S (0, 1, 0, 1). Ошибочный бит десятый, то есть i_6 .
Исправляется ошибочный бит и правильная последовательность равна 011000101000001.

Минимальное число проверочных разрядов

Сложение пяти вариантов:

$$34 + 56 + 78 + 63 + 22 = 253$$

Умножение на 4:

$$253 \times 4 = 1012$$

Для кодового слова с 1012 информационными разрядами, необходимо иметь такое количество проверочных разрядов (r) которое удовлетворяет неравенство $2^r \geq r + 1012 + 1$. Такое неравенство верно при:

$$r = 10, \text{ т.е. } 2^{10} \geq 10 + 1012 + 1; 1024 \geq 1023$$

Коэффициент избыточности рассчитывается с помощью деления числа проверочных разрядов (r), на общее число разрядов (n), которое соответствует сумме проверочных разрядов с информационными (i). В данном случае, $r = 10$ а $n = r + i = 10 + 1012 = 1022$. Соответственно, коэффициент избыточности = $10 / 1022 = 0.0097847358$

Исходный код

Для выполнения дополнительного задания был использован язык программирования Python.

```
1 import re
2
3 binary_7: str = input("Введите семизначный бинарный код: ")
4 while bool(re.search(r'^10', binary_7)) or (len(binary_7) != 7):
5     print("Вы ввели недопустимое значение")
6     binary_7 = input("Введите семизначный бинарный код: ")
7
8 lst = []
9 for letter in binary_7:
10     lst.append(int(letter))
11 print("Введённый бинарный код: ", lst)
12 print("Введённые информационные биты: ", lst[2], lst[4], lst[5], lst[6])
13
14 r1_source, r2_source, r3_source = lst[0], lst[1], lst[3]
15 r1_res = (lst[2] + lst[4] + lst[6]) % 2
16 r2_res = (lst[2] + lst[5] + lst[6]) % 2
17 r3_res = (lst[4] + lst[5] + lst[6]) % 2
18 s1 = (r1_res + r1_source) % 2
19 s2 = (r2_res + r2_source) % 2
20 s3 = (r3_res + r3_source) % 2
21 err_bit: int = (s1 + s2 * 2 + s3 * 4) - 1
22 print("Неправильный бит: ", err_bit + 1)
23 lst[err_bit] = (lst[err_bit] + 1) % 2
24
25 print("Правильный бинарный код: ", lst)
26 print("Правильные информационные биты: ", lst[2], lst[4], lst[5], lst[6])
```

Доступно в <https://github.com/glebmavi/HammingCode7-4.git>

Вывод программы

Программа была запущена с значением: 0110010. Ожидаемая правильная последовательность: 0110011.

```
Введите семизначный бинарный код: 0110010
Введённый бинарный код:  [0, 1, 1, 0, 0, 1, 0]
Введённые информационные биты:  1 0 1 0
Неправильный бит:  7
Правильный бинарный код:  [0, 1, 1, 0, 0, 1, 1]
Правильные информационные биты:  1 0 1 1
```

Process finished with exit code 0

Вывод

В данной работе рассматривались два вида классического кода Хэмминга (7,4) и (15,11) и были использованы для декодирования пяти сообщений. Код Хэмминга, имеет самокорректировку и является помехоустойчивым, часто применяется для корректировки сообщений имеющих не более одной ошибки, и проверочные биты занимают значительную часть сообщения, что увеличивает его коэффициент избыточности.

Список литературы

Балакишин П.В., Соснин В.В., Машина Е.А. (2020) Информатика. – СПб: Университет ИТМО. – 122 с.

Питерсон У., Уэлдон Э. (1972) Коды, исправляющие ошибки: Пер. с англ. М.: Мир, 1976, 594 с.