РГР ЛИНАЛ

ВАРИАНТ 7

ХОРОШЕВ МАКСИМ ДЕНИСОВИЧ

КЛИМЕНКО ВЛАДИСЛАВ ИГОРЕВИЧ

КОНОНЫХИН КИРИЛЛ ДМИТРИЕВИЧ

МАЛИКОВ ГЛЕБ ИГОРЕВИЧ

ЗАДАНИЕ 1А

♦ Будет ли линейным оператором, действующим в $\mathbb{V}$, каждое из следующих отображений $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$?

а) $\mathbb{V} = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, то есть линейное пространство, в котором действует отображение, совпадает с линейным пространством всех матриц второго порядка с вещественными элементами. Для любой матрицы $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

7. $A(\mathsf{M}) = \det(\mathsf{M}) \cdot \mathsf{M}$, где $\det(\mathsf{M}) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}$ — определитель матрицы M;

РЕШЕНИЕ

Задача 1

а-7) $A(M) = \det(M)\cdot M$; $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

· Пусть $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ - произвольная квадратная матрица второго порядка.

· По условию:

$$A(N) = \det(N)\cdot N;$$

· Поэтому:

$$A(M) + A(N) = \det(M)\cdot M + \det(N)\cdot N;$$

$$A(M+N) = \det(M+N)\cdot(M+N);$$

$$\det(M)\cdot M + \det(N)\cdot N \neq \det(M+N)\cdot(M+N);$$

следовательно $A(M) + A(N) \neq A(M+N)$

значит A - не линейный оператор.

ЗАДАНИЕ 1Б

б) $\mathbb{V} = V_3(O)$, то есть линейное пространство, в котором действует отображение, совпадает с линейным пространством всех векторов в пространстве, начало которых находится в начале координат, и стандартными операциями сложения векторов и умножения на число. Для любого вектора $\mathbf{x} \in V_3(O)$ и некоторых фиксированных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3(O)$

з). $A(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|\mathbf{x}$ (здесь $|\mathbf{x}|$ означает длину вектора, затем это число умножается на вектор $\mathbf{x}$) ;

РЕШЕНИЕ

б-7) $A(x) = |x| \cdot x$

- Пусть вектор $k \in V_3(O)$ - произвольный вектор
- По условию:

$$A(k) = |k| \cdot k$$

- Поэтому:

$$A(x) + A(k) = |x| \cdot x + |k| \cdot k$$

$$A(x+k) = |x+k| \cdot x+k$$

$$(|x| \cdot x) + (|k| \cdot k) \neq |x+k| \; x+k$$

следовательно $A(x) + A(k) \neq A(x+k)$

значит A - не линейный оператор

ЗАДАНИЕ 1В

$\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$. Для любого многочлена $f(x) = f_0 x^n + \cdots + f_n \in \mathbb{R}[x]$

$A(f) = 3f'' + f' - f;$

РЕШЕНИЕ

в-7) $A(f) = 3f'' + f' - f$

· Пусть g - произвольный многочлен

· По условию:

$$A(g) = 3g'' + g' - g$$

· Поэтому:

$$A(f) + A(g) = 3f'' + f' - f + 3g'' + g' - g$$

$$A(f+g) = 3(f+g)'' + (f+g)' - (f+g)$$

$$3f'' + f' - f + 3g'' + g' - g = 3(f+g)'' + (f+g)' - (f+g)$$

следовательно $A(f) + A(g) = A(f+g)$

$$A(\alpha \cdot f) = 3(\alpha \cdot f)'' + (\alpha \cdot f)' - (\alpha \cdot f) =$$

$$= \alpha(3f'' + f' - f) = \alpha \cdot A(f)$$

значит A - линейный оператор

ЗАДАНИЕ 2

4). Пусть P_x — оператор ортогонального проектирования пространства (проектирования любого вектора пространства)на ось Ox, P_y — на ось Oy, P_z — на ось Oz. Пусть P_{xy} — оператор ортогонального проектирования пространства (проектирования любого вектора пространства)на плоскость Oxy, P_{xz} — на плоскость Oxz, P_{yz} — на плоскость Oyz. Найти операторы: а) P_x+P_y; б) P_zP_{yz}; в) $P_x+P_y+P_z$; г) $I-P_x$; д) P_y+P_{xz}; е) $P_{xy}+P_{xz}$; ж) $P_{xy}+P_{xz}+P_{yz}$; и) $P_{xy}P_{yz}$.

РЕШЕНИЕ

Задача 2 Клименко Владислав (368300)

7 вариант.

φ - оператор проектирования на плоскость O_{xyz}. Найдем матрицу этого оператора в стандартном базисе $e_1 = i = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = j = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = k = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Составим матрицу каждого оператора:

$P_x = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $P_y = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $P_z = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$P_{xy} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $P_{xz} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $P_{yz} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Найдем операторы:

а) $P_x + P_y = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

б) $P_z \cdot P_{yz} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

в) $P_x + P_y + P_z = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

г) $I - P_x = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

д) $P_y + P_{xz} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

е) $P_{xy} + P_{xz} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ж) $P_{xy} + P_{xz} + P_{yz} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

и) $P_{xy} \cdot P_{yz} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ 3

. Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 = x$, $\mathbf{e}_2 = x^2$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x]_2$

7. $Af = 2f'' + 3f$.

РЕШЕНИЕ

Задача 3 в7

Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $R[x]_2$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе e0 = 1, e1 = x, e2 = x^2 и его определитель.

$$Af(x) = 2f'' + 3f$$

1.
Для того, чтобы отображение являлось л. о, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

1) A(f + g) = A(f) + A(g).
2) A(α · f) = α · A(f).

Проверим первое условия: пусть g(x) – произвольный многочлен из пространства P. Тогда составим уравнение.

A(f) + A(g) = 2f''(x) + 3f(x) + 2g''(x) + 3g(x). – аналогично формуле A(f + g) = A(f) + A(g). .

Проверим 2 условие

A(α · f) = 2(α · f)''(x) + 3(α · f)(x) = α · (2f''(x) + 3f(x)) = α · A(f).
→ является линейным оператором

2. Для того, чтобы найти матрицу оператора A в базисе
e = {e0, e1, e2} необходимо вычислить образы базисных векторов
$A(e_0) = 2\cdot(1)'' + 3\cdot(1) = 3$,
$A(e_1) = 2\cdot(x)'' + 3\cdot(x) = 3x$,
A(e_2)= 2·(x2)'' +3·(x2) =2+3x2.
Разложим найденные векторы $A(e_0)$, $A(e_1)$, $A(e_2)$ по базису e = {e1, e2, e3},
имеем

$A(e_0) = 3e_0 + 0e_1 + 0e_2 = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, $A(e_1) = 0e_0 + 3e_1 + 0e_2 = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$, $A(e_2) = 2e_0 + 0e_1 + 3e_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$.

Из получившихся векторов составляем матрицу A , расставляя их по столбцам, в результате получаем A_e

$$A_e = \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \ |A| = 27$$

ЗАДАНИЕ 4

Линейный оператор A в базисе $\mathbf{f}_1(x) = 1$, $\mathbf{f}_2(x) = x$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2$ имеет матрицу A_f. Найти матрицу A_g линейного оператора A в базисе $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. $A_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{g}_1(x) = 2 - 3x + x^2$;
$\mathbf{g}_2(x) = -1 + 3x - x^2$;
$\mathbf{g}_3(x) = -2x + x^2$;

РЕШЕНИЕ

Найдем координаты $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу $T_{f\text{->}g}$ перехода от базиса f к базису g

$$T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим обратную матрицу

$$T^{-1}_{f\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу A_g линейного оператора A в базисе g по формуле

$A_g = T^{-1} * A_f * T$

$$A_g = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

ЗАДАНИЕ 5

Найдите ранг, базисы ядра и образа линейного оператора A $\mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ такого, что для любой матрицы $\mathsf{X} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$

7. $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

РЕШЕНИЕ

Задача 5

Найдите ранг, базисы ядра и образа линейного оператора $A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ такого, что для любой матрицы $X \in M_2(\mathbb{R})$

7) $$AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

С помощью базиса E в $M_2(\mathbb{R})$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

строится матрица A_E

$$A_{E_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_1 - 3E_2 + E_3$$

$$A_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = -2E_2 - 3E_4$$

$$A_{E_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

Date

$$A_{E_4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_4$$

$$A_{E_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad A_{E_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_{E_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Приводится матрица к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \overset{III - I/3}{\sim} \begin{matrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{matrix} \overset{III + II \cdot 2/9}{\sim} \begin{matrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2/9 & -2/9 \end{matrix}$$

$$-3x_1 = 2x_2 \qquad x_1 = 0$$
$$-3x_2 = x_4 - x_3 \qquad x_2 = 0$$
$$2/9\, x_3 = 2/9\, x_4 \qquad x_3 = x_4$$

$\underline{Rang = 3}$ $\quad \dim(\mathrm{Ker}\, A) = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\, A) = 3$

$$\mathrm{Ker}\, A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im}\, A = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

+0,75