Исследовать на равномерную сходимость по параметру $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ интегралы

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \cos(xy)\, dx \tag{1}$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx \tag{2}$$

Для исследования на равномерную сходимость интеграла (1), можно оценить его с помощью критерия Вейерштрасса.

Пусть на множестве $[a;b) \times E$ определена функция $f(x;\alpha)$, такая что при любом $\alpha \in E$ сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ с особенностью в точке b.

Пусть $\exists g : [a,\ b) \to \mathbb{R}\ \forall x \in [a;b)\ \forall \alpha \in E \mapsto |f(x;\alpha)| \leqslant g(x)$ и интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится.

Тогда интеграл $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ сходится равномерно на E.

Функция $|e^{-x} \cos x\, y| \leq e^{-x}$ для всех $x \geq 0$ и $y \in R$, так как $-1 \leq \cos(xy) \leq 1$ при любых $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ и $x \geq 0$

При этом интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ сходится как эталонный.

Таким образом, мы получили сходящийся интеграл с функцией больше, чем функция начального интеграла. Значит, по критерию Вейерштрасса, интеграл (1) сходится равномерно.

В интеграле (2) можно заметить, что при отрицательных значениях y интеграл (2) расходится. Из-за этого данный интеграл не сходится равномерно

$$\lim_{x\to\infty} e^{x} \frac{\sin x}{x} = \text{ Не существует}$$

Вариант 7 Задача 3

Исследовать на равномерную сходимость по параметру $\boldsymbol{\alpha \in [a_0, +\infty), \alpha_0 > 0}$ интеграл:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$$

Для исследования на равномерную сходимость интеграла, можно оценить его с помощью критерия Вейерштрасса.

Пусть на множестве $[a;b) \times E$ определена функция $f(x;\alpha)$, такая что при любом $\alpha \in E$ сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ с особенностью в точке b.

Пусть $\exists g : [a,\ b) \to \mathbb{R}\ \forall x \in [a;b)\ \forall \alpha \in E \mapsto |f(x;\alpha)| \leqslant g(x)$ и интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится.

Тогда интеграл $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ сходится равномерно на E.

Функция $e^{-\alpha x^2} \leq e^{-\alpha x}$ при всех $x \geq 0$ и $\alpha > 0$. При этом интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ при $\alpha > 0$ сходится как эталонный.

Таким образом, мы получили сходящийся интеграл с функцией больше, чем функция начального интеграла. Значит, по критерию Вейерштрасса, интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$ сходится равномерно.