№1

Найти частные производные до второго порядка включительно

$z = \sin(xy)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(y) \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(xy) \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(xy) \cdot y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin(xy) \cdot x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = -\sin(xy) \cdot xy + \cos(xy)$$

№2

Найти градиент функции

$u = \sin(x + 2y) + 2xyz$

$$\frac{du}{dx} = \cos(x + 2y) + \frac{yz}{\sqrt{xyz}}$$

$$\frac{du}{dy} = 2\cos(x + 2y) + \frac{xz}{\sqrt{xyz}}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{xy}{\sqrt{xyz}}$$

$$\frac{du}{dx}(M) = 3$$

$$\frac{du}{dy}(M) = 1$$

$$\frac{du}{dz}(M) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{grad } u\,(M) = \frac{du}{dx}(M)\, i + \frac{du}{dx}(M)\, j + \frac{du}{dx}(M)\, k = (3, 1, \frac{\pi}{2})$$

№5

Найти производные функции y = y(x), заданных неявно уравнениями

$y = x + \ln y$

$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$

$y' = \frac{1}{1-\frac{1}{y}}$

$x' = -\frac{F'_y}{F'_x}$

$x' = 1-\frac{1}{y}$

№6

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M.

$z = \sin x \cos y; M(\pi/4, \pi/4, 1/2)$

$\frac{d}{dx}(\sin x \cos y) = \cos(x)\cos(y)$

$\frac{d}{dy}(\sin x \cos y) = -\sin(x)\sin(y)$

$z'_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = 0,5$

$z'_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = -0,5$

По формуле:

$$z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

получим уравнение касательной плоскости:

$0,5 \cdot (x - \pi/4) + (-0,5) \cdot (y - \pi/4) - (z - 1/2) = 0$

$0,5x - 0,5y - z + 0,5 = 0$

По формуле:

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

получим уравнение нормали:

$$\frac{x-\pi/4}{-0{,}5}=\frac{y-\pi/4}{-0{,}5}=\frac{z-1/2}{-1}$$

№7

Найти стационарные точки и исследовать их

$$z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 2y + 2$$

$$\frac{dz}{dy} = -2x + 4y$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2 = 0 \\ 4y - 2x = 0 \end{cases}$$

$$(-2, -1)$$

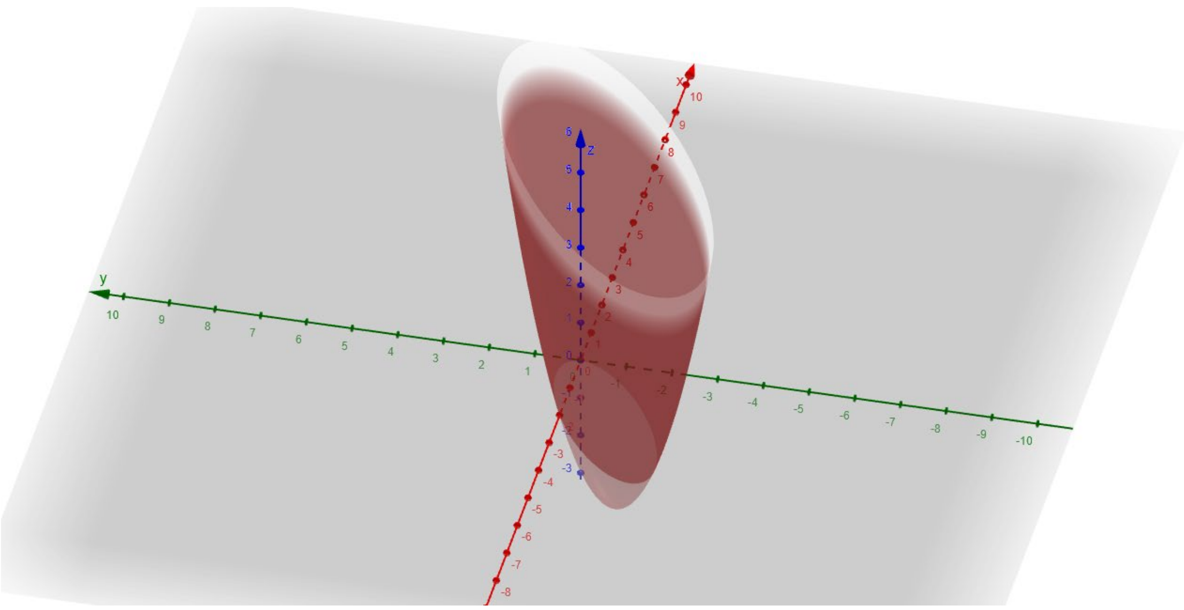
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -2 \text{ (Так как функция непрерывна)}$$

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 4$$

так как $\det > 0$, то точка экстремума существует и она является минимумом



№8

Проверить является ли функция u решением уравнения (e)

$u = \sin(x^2y^2z)\,;(e)\colon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + x^6y^4u = 0$

$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos(x^2y^2z)\cdot x^2y^2$

$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -x^2y^2\sin(x^2y^2z)\cdot x^2y^2 = -x^4y^4\sin(x^2y^2z)$

$(e)\colon -x^4y^4\sin(x^2y^2z) + x^6y^4\sin(x^2y^2z) = 0$

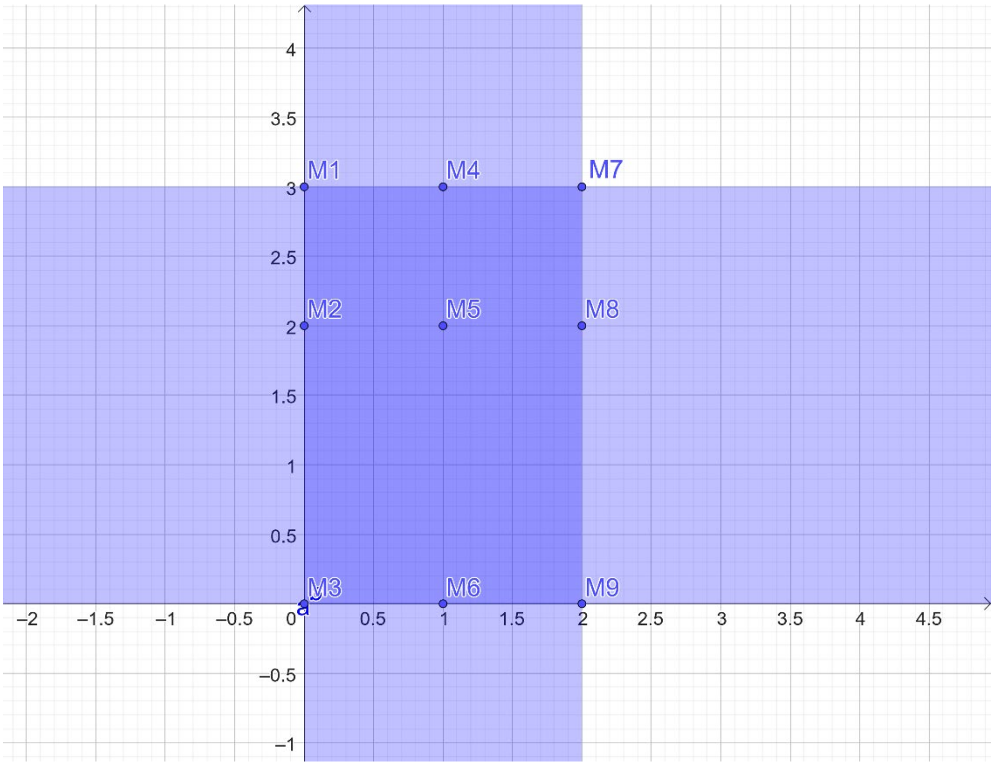
$x^6y^4\sin(x^2y^2z) \neq x^4y^4\sin(x^2y^2z)$

№9

Найти наибольшее и наименьшее значение функции z в области D

$z = -x^2 + 2x - y^2 + 4y$

$D\colon 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 3$



$Z'_x = -2x + 2$

$z'_y = -2y + 4$

$\begin{cases} -2x + 2 = 0 & x = 1 \\ -2y + 4 = 0 & y = 2 \end{cases}$ (M5)

$]y = 0$

$z = -x^2 + 2x;\ z' = -2x + 2; x = 1$ (M6)

$]y = 3$

$z = -x^2 + 2x - (3^2) + 4 \cdot 3;$

$z = -x^2 + 2x + 3;\ z' = -2x + 2; x = 1$ (M4)

$]x = 0$

$z = -y^2 + 4y;\ z' = -2y + 4; y = 2$ (M2)

$]x = 2$

$z = -(2^2) + 2 \cdot 2 - y^2 + 4y;\ z' = -2y + 4; y = 2$ (M8)

Крайние точки прямоугольника

M1: (0;3); M3: (0;0); M7: (2;3); M9: (3;0)

Значения z в точках:

M1: $-(0^2) + 2 \cdot 0 - (3^2) + 4 \cdot 3 = 3$

M2: $-(0^2) + 2 \cdot 0 - (2^2) + 4 \cdot 2 = 4$

M3: $-(0^2) + 2 \cdot 0 - (0^2) + 4 \cdot 0 = 0 \Leftarrow$ Наименьшее значение

M4: $-(1^2) + 2 \cdot 1 - (3^2) + 4 \cdot 3 = 4$

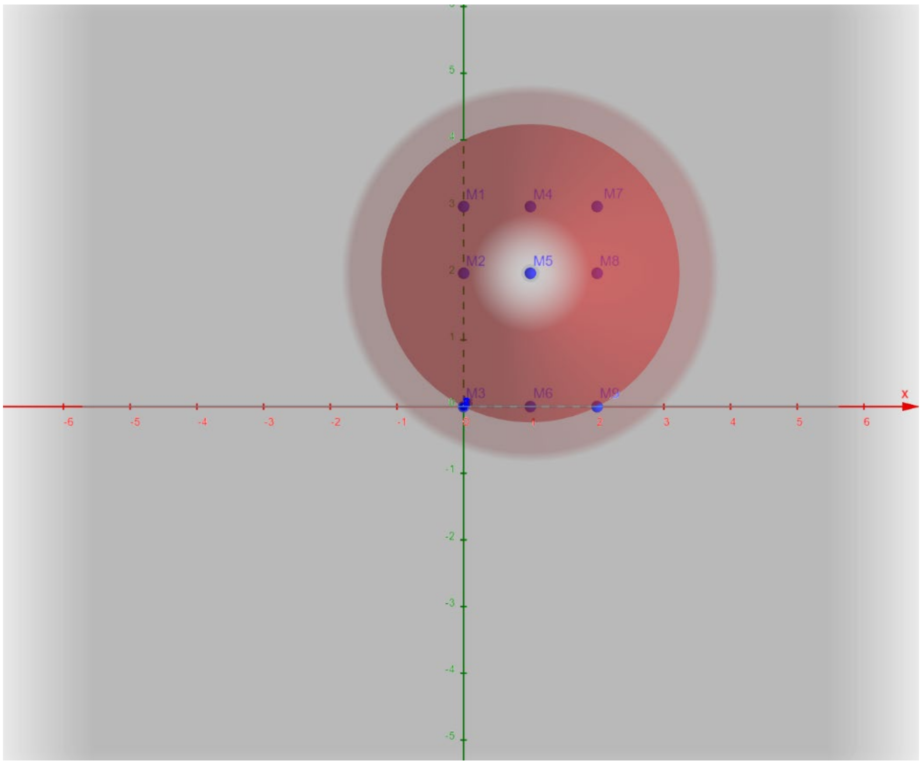
M5: $-(1^2) + 2 \cdot 1 - (2^2) + 4 \cdot 2 = 5 \Leftarrow$ Наибольшее значение

M6: $-(1^2) + 2 \cdot 1 - (0^2) + 4 \cdot 0 = 1$

M7: $-(2^2) + 2 \cdot 2 - (3^2) + 4 \cdot 3 = 3$

M8: $-(2^2) + 2 \cdot 2 - (2^2) + 4 \cdot 2 = 4$

M9: $-(2^2) + 2 \cdot 2 - (0^2) + 4 \cdot 0 = 0 \Leftarrow$ Наименьшее значение


M1
M4
M7
M2
M5
M8
M3
M6
M9
x