

Решение задач ЕГЭ

Автор: Гриценко Глеб Михайлович

Группа: 11-И-3

Задача 1.

Условие

Исполнитель Остаточек преобразует числа и имеет следующие команды: Прибавить 1 Умножить на 2 Прибавить остаток от деления на 4 Первая команда увеличивает число на единицу, вторая — увеличивает вдвое, третья команда добавляет к числу значение остатка от деления этого числа на 4. Определите, сколько существует чисел, из которых Остаточек может получить число 80 с помощью программы длиной не более 5 команд.

Решение

С любым $n \in [1, 80]$ мы можем делать операции $n + 1$, $n \cdot 2$, $n + n \mod 4$
 \mod - это оператор нахождения остатка от деления.

Давайте разберём задачу под другим ракурсом.

У нас есть k шагов. $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

На каждом шаге мы можем делать одну операцию.

То есть:

1. Если $k = 0$:

Тогда под условие задачи подходит только искомое число.

80

2. Если $k = 1$:

Тогда подходят числа 40, 78, 79

Поскольку

$$\begin{cases} 40 \cdot 2 = 80 \\ 78 + 78 \mod 4 = 80 \\ 79 + 1 = 80 \end{cases}$$

Теперь мы можем переформулировать задачу, найдя закономерность. На $k + 1$ количестве шагов нам нужно получить одно из чисел, полученных на k -том шаге.

Например, на шаге 1 нам нужно получить число 80 каким-либо образом.

С учётом имеющихся операций, мы можем сказать что нам подходят только вышеуказанные числа.

3. Если $k = 2$

Число 40 мы можем выразить через 20, 38, 39

Число 78 мы можем выразить через 39, 75, 77

Число 79 мы можем выразить через 78

Легко заметить, что в наших найденных числах есть пересечения.

Таким образом, наш список будет 20, 39, 75, 77, 78

4. Если $k = 3$

$$\begin{cases} 20 \Rightarrow \{10, 18, 19\} \\ 39 \Rightarrow \{38\} \\ 75 \Rightarrow \{74\} \\ 77 \Rightarrow \{76\} \\ 78 \Rightarrow \{39, 75\} \end{cases}$$

Исходя из данных выводов, уберём пересечения

$$\{10, 18, 19, 38, 39, 74, 75, 76\}$$

5. Если $k = 4$

$$\begin{cases} 10 \Rightarrow \{5, 9\} \\ 18 \Rightarrow \{9, 17, 15\} \\ 19 \Rightarrow \{18\} \\ 38 \Rightarrow \{19, 37, 35\} \\ 39 \Rightarrow \{38\} \\ 74 \Rightarrow \{73, 71, 37\} \\ 75 \Rightarrow \{74\} \\ 76 \Rightarrow \{18, 74, 75\} \end{cases}$$

Получается, после ряда исключений у нас останутся

$$\{5, 9, 15, 17, 18, 19, 35, 37, 38, 39, 71, 73, 74, 75, 76\}$$

6. Если $k = 5$

$$\begin{cases} 5 \Rightarrow \{4\} \\ 9 \Rightarrow \{8\} \\ 15 \Rightarrow \{14\} \\ 17 \Rightarrow \{16\} \\ 18 \Rightarrow \{9, 17, 15\} \\ 19 \Rightarrow \{18\} \\ 35 \Rightarrow \{34\} \\ 37 \Rightarrow \{36\} \\ 38 \Rightarrow \{37, 35\} \\ 39 \Rightarrow \{38\} \\ 71 \Rightarrow \{70\} \\ 73 \Rightarrow \{72\} \\ 74 \Rightarrow \{73, 71\} \\ 75 \Rightarrow \{74\} \\ 76 \Rightarrow \{38, 35, 74\} \end{cases}$$

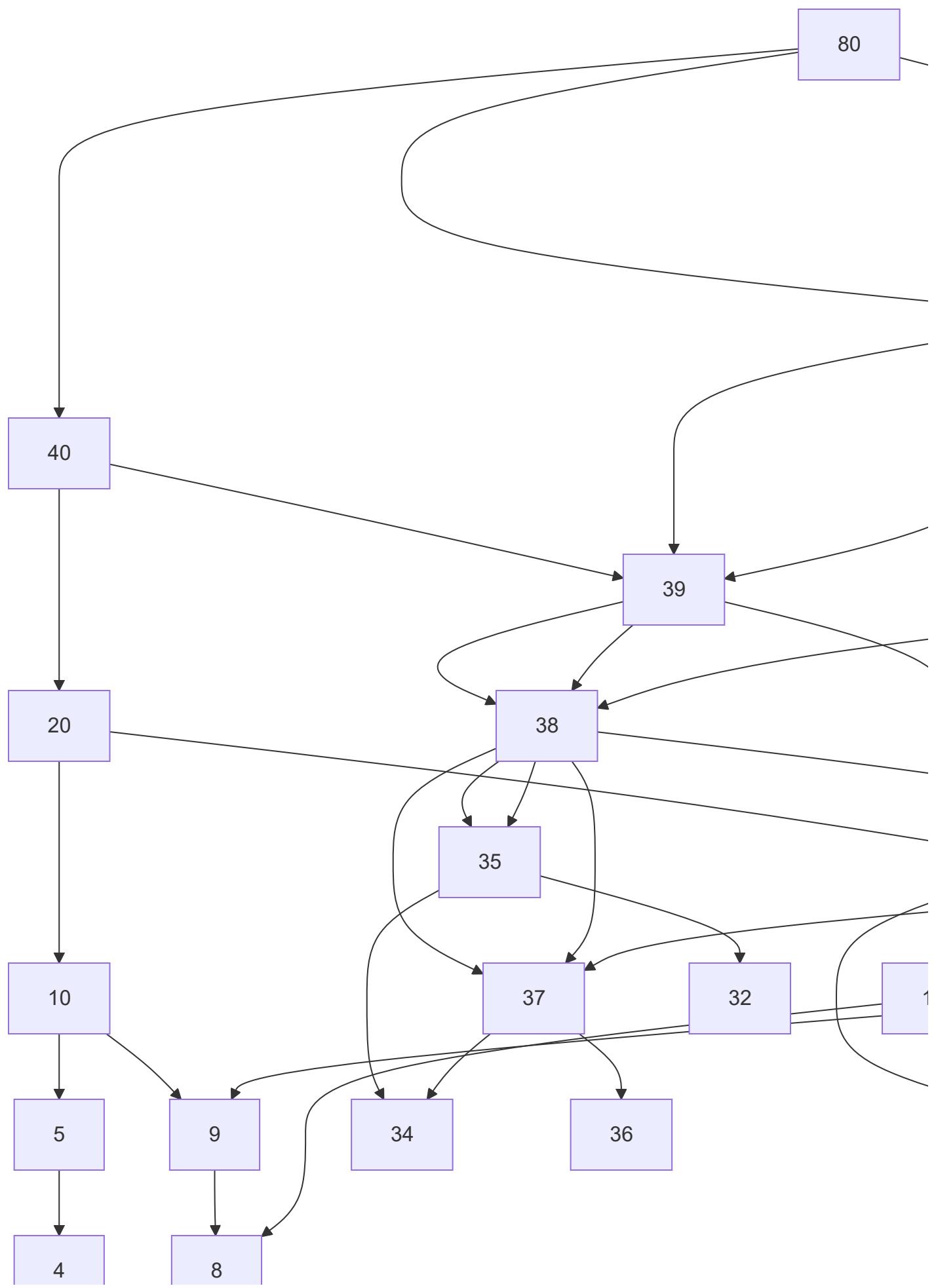
Из этих уровней мы можем найти все числа, с учётом вычитания исключений:

$$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 7$$

Посчитав данные количество, можем дать ответ на задачу.

Ответ: 34

Для более наглядной демонстрации изобразим как график





Наиболее наглядной демонстрации, увы не получилось.
Сделаем задачу на языку Python.

```
MAX_STEPS = 5
# Максимальное количество шагов

TARGET = 80
# Целевое число, которое нужно получить

def predecessors(n):
    """
    Функция возвращает все числа, из которых можно получить число n за один
    шаг.
    Это обратные переходы для каждой команды:
    """
    prev = set() # предыдущие числа

    if n - 1 >= 0:
        prev.add(n - 1)

    if n % 2 == 0:
        prev.add(n // 2)

    for r in range(4): # остаток от деления от 0 до 3 (включ)
        p = n - r
        if p >= 0 and p % 4 == r:
            prev.add(p)

    return prev

all_numbers = set([TARGET]) # начинаем с самого числа 80

current_level = set([TARGET])

for step in range(1, MAX_STEPS + 1):
```

```

next_level = set()
for number in current_level:
    preds = predecessors(number)
    next_level.update(preds)
all_numbers.update(next_level)
current_level = next_level

result = sorted(all_numbers)

print(f"Количество чисел: {len(result)}")

```

Задача 2

Условие.

Квадрат разписан на $N \times N$ клеток ($1 < N < 20$). Исполнитель Буквоед может перемещаться по клеткам, выполняя за одно перемещение одну из двух команд: вправо или вниз. По команде вправо Буквоед перемещается в соседнюю правую клетку, по команде вниз – в соседнюю нижнюю. При попытке пересечь границы квадрата, обозначенные жирными линиями, Буквоед разрушается. В каждой клетке квадрата записано число от 10 до 99 или латинская буква Р. Посетив клетку, Буквоед платит за её посещение, плата равна значению числа в клетке; это также относится к начальной и конечной точке маршрута. За посещение клетки Р плата не взимается. Определите минимальную и максимальную плату, которую заплатит Буквоед, пройдя из левой верхней клетки в правую нижнюю, при этом маршрут должен проходить через две клетки Р. В ответе укажите два числа – сначала минимальную, затем максимальную плату.

Исходные данные для Буквоеда записаны в файле в виде прямоугольной таблицы, каждая ячейка которой соответствует клетке квадрата.

Поскольку решение руками возможно, с временными затратами в 3-4 часа, предлагаю обратиться к решению на Python

```

# Сетка у нас 20 на 20, это размер нашей таблицы
N = 20

# Тут вставляем всю сетку из условия, Р заменяем на 0 для удобства
grid = [
    [93, 76, 12, 31, 48, 60, 90, 37, 20, 24, 82, 31, 49, 38, 30, 96, 96, 26,
     55, 59],
    [46, 82, 71, 65, 76, 35, 70, 86, 86, 55, 81, 34, 52, 12, 55, 53, 33, 51,
     48, 51],
    [34, 41, 17, 87, 66, 89, 44, 92, 20, 59, 65, 62, 66, 66, 60, 84, 72, 60,
     28, 70],
    [55, 48, 72, 11, 11, 98, 62, 31, 31, 31, 69, 'P', 79, 19, 88, 90, 56, 85, 36, 73],
    [94, 75, 87, 14, 56, 63, 79, 94, 87, 90, 35, 75, 69, 86, 86, 86, 24, 16]
]

```

```

35, 64],
    [48, 56, 60, 45, 99, 40, 33, 37, 55, 83, 72, 19, 36, 41, 28, 47, 92, 56,
29, 44],
    [74, 52, 48, 28, 20, 83, 31, 41, 68, 18, 41, 41, 44, 20, 50, 32, 59, 20,
19, 44],
    [34, 69, 18, 21, 21, 37, 37, 62, 30, 99, 68, 69, 13, 94, 69, 10, 38, 42,
35, 34],
    [92, 49, 72, 52, 76, 16, 94, 18, 84, 14, 47, 41, 39, 72, 34, 36, 15, 71,
31, 29],
    [40, 93, 26, 36, 37, 16, 63, 21, 62, 38, 59, 26, 60, 82, 40, 47, 46, 39,
27, 70],
    [65, 30, 45, 68, 47, 25, 10, 22, 74, 93, 52, 58, 93, 94, 65, 16, 83, 79,
28, 42],
    [50, 93, 'P', 25, 43, 24, 80, 51, 56, 46, 63, 81, 58, 68, 53, 86, 83, 74, 77, 47],
    [76, 25, 64, 11, 46, 91, 18, 36, 81, 46, 63, 99, 20, 51, 39, 44, 52, 30, 12, 83],
    [69, 87, 27, 59, 26, 45, 26, 54, 16, 73, 77, 80, 67, 60, 20, 'P', 44, 56, 99, 25],
    [68, 43, 39, 83, 12, 91, 13, 56, 71, 77, 10, 28, 42, 69, 37, 28, 60, 74, 89, 18],
    [77, 17, 23, 85, 13, 59, 54, 74, 30, 34, 24, 43, 55, 36, 95, 55, 58, 90, 94, 34],
    [82, 85, 27, 73, 45, 12, 11, 47, 35, 99, 65, 95, 71, 89, 48, 66, 24, 57, 24, 47],
    [72, 18, 87, 19, 84, 24, 16, 91, 23, 53, 93, 64, 51, 57, 48, 90, 57, 81, 75, 59],
    [60, 18, 46, 39, 71, 18, 75, 10, 68, 58, 23, 77, 86, 18, 26, 54, 78, 14, 15, 75],
    [71, 36, 20, 18, 32, 54, 36, 31, 43, 96, 76, 74, 24, 49, 36, 83, 20, 55, 33, 32],
]

```

Все P заменяем на 0, чтобы проще считать стоимость

```

for i in range(N):
    for j in range(N):
        if grid[i][j] == 'P':
            grid[i][j] = 0

```

Создаем dp таблицу: для каждой клетки храним кортеж (мин. плата, макс. плата)

```

# i - строка, j - столбец, k - количество P пройденных до этой клетки (0,1,2)
dp = [[[float('inf'), -float('inf')]] for _ in range(3)] for _ in range(N)]
for _ in range(N)]

```

Начальная точка (0,0)

```

start_P = 1 if grid[0][0]==0 else 0 # если первая клетка P, считаем как 1
dp[0][0][start_P] = (grid[0][0], grid[0][0]) # мин и макс плата одинаковы в начале

```

Основной цикл: проходим по всем клеткам

```

for i in range(N):
    for j in range(N):
        for k in range(3):
            # если мы сюда не дошли, пропускаем

```

```

if dp[i][j][k][0] == float('inf'):
    continue
cost_min, cost_max = dp[i][j][k]

# идем вправо
if j+1 < N:
    nk = k + (1 if grid[i][j+1]==0 else 0) # увеличиваем счетчик
P, если клетка P
    if nk <= 2: # нас интересуют только пути с <=2 P
        prev_min, prev_max = dp[i][j+1][nk]
        new_min = cost_min + grid[i][j+1]
        new_max = cost_max + grid[i][j+1]
        # обновляем минимальное и максимальное значение
        dp[i][j+1][nk] = (min(prev_min,new_min),
max(prev_max,new_max))

# идем вниз
if i+1 < N:
    nk = k + (1 if grid[i+1][j]==0 else 0)
    if nk <= 2:
        prev_min, prev_max = dp[i+1][j][nk]
        new_min = cost_min + grid[i+1][j]
        new_max = cost_max + grid[i+1][j]
        dp[i+1][j][nk] = (min(prev_min,new_min),
max(prev_max,new_max))

# Внизу справа в клетке (19,19) берем путь с ровно 2 P
answer_min, answer_max = dp[N-1][N-1][2]
print(f"Минимальная плата: {answer_min}")
print(f"Максимальная плата: {answer_max}")

```

Ответ: 1553 2545