Методы Рунге-Кутта

Залялов Александр, Лобанов Глеб, Солодовников Никита,
группа 183

Постановка задачи

Хотим решить систему

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = f_2(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} = f_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

где $y_1, \dots, y_n$ — функции от t. В векторной форме:

$$\frac{D\vec{y}}{Dt} = f(\vec{y})$$

где $\vec{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Предполагаем известным начальное условие $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$.

Вид решения

$$\vec{g}^{(i)} = f\left(\vec{y_0} + h\sum_{j=1}^{K} a_{ij}\vec{g}^{(j)}\right);$$

$$\vec{y}(t_0 + h) \approx \vec{y_0} + h\sum_{i=1}^{K} b_i\vec{g}^{(i)};$$

- K, a_{ij}, b_i — заранее фиксированные константы.

Вид решения

$$\vec{g}^{(i)} = f\left(\vec{y_0} + h\sum_{j=1}^{K} a_{ij}\vec{g}^{(j)}\right);$$

$$\vec{y}(t_0 + h) \approx \vec{y_0} + h\sum_{i=1}^{K} b_i\vec{g}^{(i)};$$

- K, a_{ij}, b_i — заранее фиксированные константы.
- В явных методах $a_{ij} = 0$ при $j \geq i$.

Метод Эйлера

$$K = 1;$$

$$a = \left(0\right);$$

$$b = \left(1\right);$$

RK4

$$K = 4;$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

RK4

$$\vec{g}^{(1)} = f(\vec{y_0});$$

$$\vec{g}^{(2)} \approx f(\vec{y_0}) + \frac{h}{2} f_t'(\vec{y_0});$$

$$\vec{g}^{(3)} \approx f(\vec{y_0}) + \frac{h}{2} f_t'(\vec{y_0}) + \frac{h^2}{4} f_{tt}''(\vec{y_0});$$

$$\vec{g}^{(4)} \approx f(\vec{y_0}) + h f_t'(\vec{y_0}) + \frac{h^2}{2} f_{tt}''(\vec{y_0}) + \frac{h^3}{4} f_{ttt}'''(\vec{y_0});$$

RK4

$$\vec{g}^{(1)} = f(\vec{y_0});$$

$$\vec{g}^{(2)} \approx f(\vec{y_0}) + \frac{h}{2} f'_t(\vec{y_0});$$

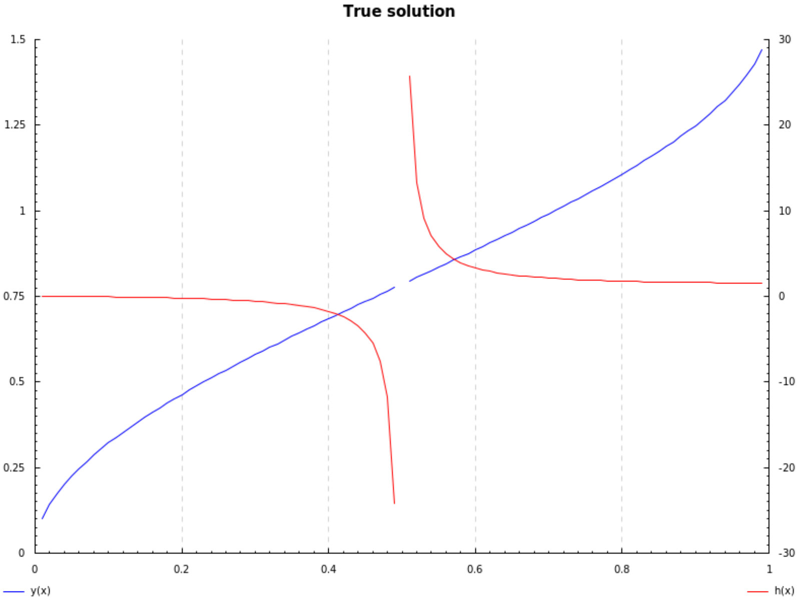
$$\vec{g}^{(3)} \approx f(\vec{y_0}) + \frac{h}{2} f'_t(\vec{y_0}) + \frac{h^2}{4} f''_{tt}(\vec{y_0});$$

$$\vec{g}^{(4)} \approx f(\vec{y_0}) + h f'_t(\vec{y_0}) + \frac{h^2}{2} f''_{tt}(\vec{y_0}) + \frac{h^3}{4} f'''_{ttt}(\vec{y_0});$$

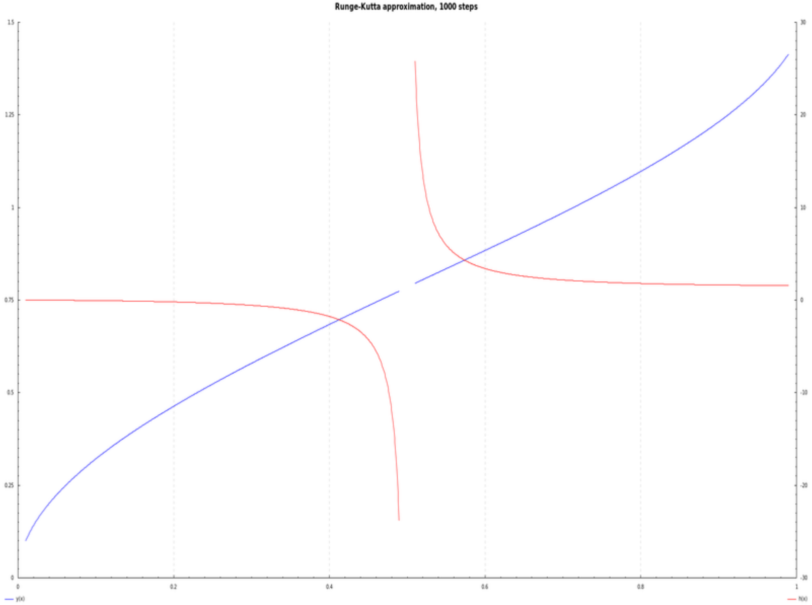
Линейной комбинацией этого собираем ряд Тейлора для y:

$$y \approx y_0 + hy' + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{6} y^{(3)} + \frac{h^4}{24} y^{(4)}.$$

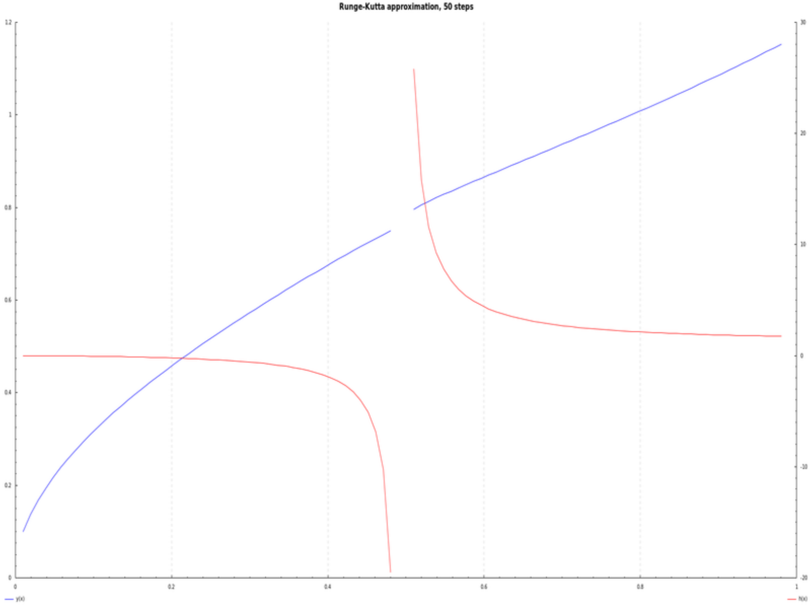
Ответ на систему



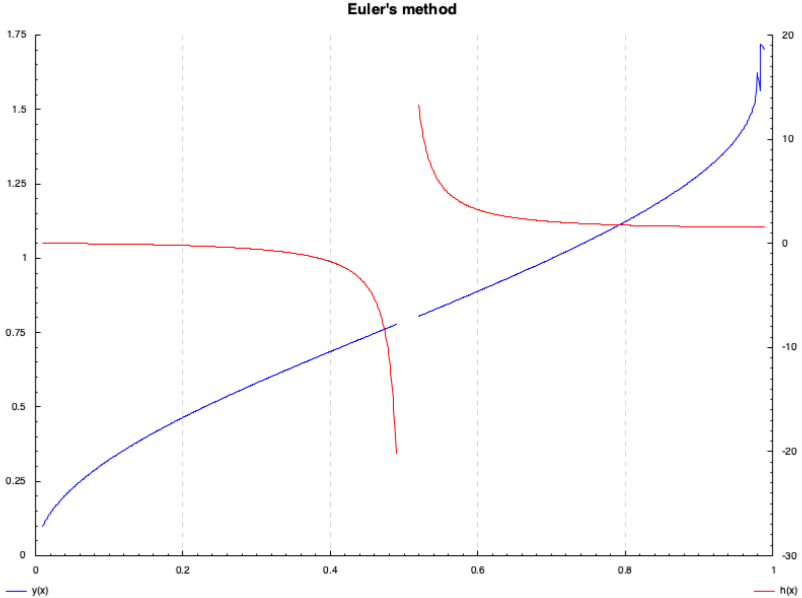
Сравнение методов : Метод Рунге-Кутта при делении отрезка на 1000 частей



Сравнение методов : Метод Рунге-Кутта при делении отрезка на 50 частей



Сравнение методов : Метод Эйлера при делении отрезка на 1000 частей



Анализ графиков

1. Как мы можем видеть метод Рунге-Кутта дает решение почти неотличимое от настоящего при достаточно маленьком размере шага.
2. Метод Эйлера, который является методом 2 порядка, дает хорошие графики только при достаточно маленьком шаге(можно сравнить вывод метода Рунге-Кутта при 50 точках и Эйлера при 1000). Это объясняется тем, что метод Рунге-Кутта имеет больший порядок точности.