

Методы Рунге-Кутта

Залялов Александр, Лобанов Глеб, Солодовников Никита,
группа 183

Постановка задачи

Хотим решить систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

где y_1, \dots, y_n — функции от t . В векторной форме:

$$\frac{D\vec{y}}{Dt} = f(\vec{y})$$

где $\vec{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Предполагаем известным начальное условие $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$.

Вид решения

$$\vec{g}^{(i)} = f \left(\vec{y}_0 + h \sum_{j=1}^K a_{ij} \vec{g}^{(j)} \right);$$

$$\vec{y}(t_0 + h) \approx \vec{y}_0 + h \sum_{i=1}^K b_i \vec{g}^{(i)};$$

► K, a_{ij}, b_i — заранее фиксированные константы.

Вид решения

$$\vec{g}^{(i)} = f \left(\vec{y}_0 + h \sum_{j=1}^K a_{ij} \vec{g}^{(j)} \right);$$

$$\vec{y}(t_0 + h) \approx \vec{y}_0 + h \sum_{i=1}^K b_i \vec{g}^{(i)};$$

- ▶ K, a_{ij}, b_i — заранее фиксированные константы.
- ▶ В явных методах $a_{ij} = 0$ при $j \geq i$.

Метод Эйлера

$$K = 1;$$

$$a = (0);$$

$$b = (1);$$

$$K = 4;$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$b = \left(\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \right).$$

$$\vec{g}^{(1)} = f(\vec{y}_0);$$

$$\vec{g}^{(2)} \approx f(\vec{y}_0) + \frac{h}{2} f'_t(\vec{y}_0);$$

$$\vec{g}^{(3)} \approx f(\vec{y}_0) + \frac{h}{2} f'_t(\vec{y}_0) + \frac{h^2}{4} f''_{tt}(\vec{y}_0);$$

$$\vec{g}^{(4)} \approx f(\vec{y}_0) + hf'_t(\vec{y}_0) + \frac{h^2}{2} f''_{tt}(\vec{y}_0) + \frac{h^3}{4} f'''_{ttt}(\vec{y}_0);$$

$$\vec{g}^{(1)} = f(\vec{y}_0);$$

$$\vec{g}^{(2)} \approx f(\vec{y}_0) + \frac{h}{2} f'_t(\vec{y}_0);$$

$$\vec{g}^{(3)} \approx f(\vec{y}_0) + \frac{h}{2} f'_t(\vec{y}_0) + \frac{h^2}{4} f''_{tt}(\vec{y}_0);$$

$$\vec{g}^{(4)} \approx f(\vec{y}_0) + h f'_t(\vec{y}_0) + \frac{h^2}{2} f''_{tt}(\vec{y}_0) + \frac{h^3}{4} f'''_{ttt}(\vec{y}_0);$$

Линейной комбинацией этого собираем ряд Тейлора для y :

$$y \approx y_0 + h y' + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{6} y^{(3)} + \frac{h^4}{24} y^{(4)}.$$