Стратій Гліб Леонідович

ТК-31

Завдання (графи).

Вхідними даними є граф зі зваженими вершинами та ребрами (побудуйте граф самостійно, не менше 10 вершин та 15 ребер). Перенумеруйте вершини. Задайте координати вершин (приблизно, це потрібно лише для малювання). Перенумеруйте ребра. Задайте структуру графа, тобто визначте, які вершини поєднує кожне ребро. Збережіть координати вершин, ваги вершин, структуру графа, ваги ребер у текстовому файлі. Розв'яжіть та намалюйте розв'язки таких задач.

Завдання 1.

1. Максимальне зважене паросполучення (реберне пакування).
2. Максимальна зважена незалежна множина вершин (вершинне пакування).
3. **Мінімальне зважене реберне покриття.**
4. Мінімальне зважене вершинне покриття.
5. Мінімальна зважена домінуюча (зовнішньо стійка) множина ребер.
6. Мінімальна зважена домінуюча (зовнішньо стійка) множина вершин.
7. Максимальний зважений повний підграф (кліка).
8. **Мінімальна правильна розфарбовка вершин.**
9. **Мінімальна правильна розфарбовка ребер.**
10. Мінімальне зважене основне дерево.
11. Фундаментальна система циклів.
12. Фундаментальна система коциклів (розрізів).
13. Ексцентриситети вершин, радіус та діаметри графа, центральні та периферійні вершини.
14. Перевірте граф на ейлеровість; якщо він ейлерів (напівейлерів), знайдіть ейлерів цикл (шлях).

Ребра

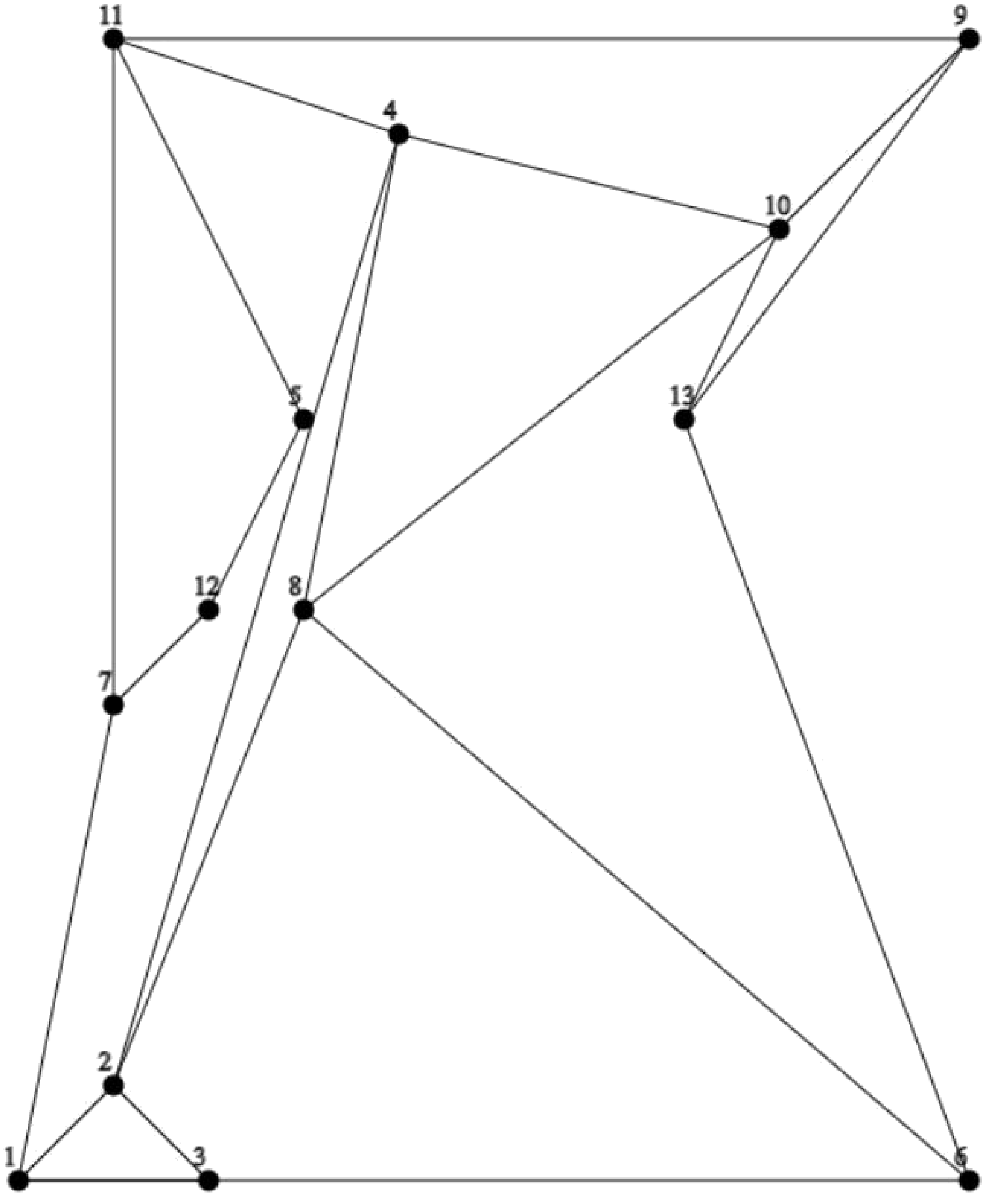
v_1 (пробіл) v_2

1 2
2 3
3 1
1 6
2 4
4 8
5 11
1 7
7 11
7 12
11 4
11 9
9 10
9 13
13 6
6 8
8 2
10 4
10 13
10 8
12 5

Координати вершин

x (пробіл) y

1 1
2 2
3 1
5 12
4 9
11 1
2 6
4 7
11 13
9 11
2 13
3 7
8 9



8.Мінімальна правильна розфарбовка вершин графа

Нехай $G(V,\ E)$ − граф, де V − множина вершин, а E − множина ребер. Мінімальною правильною розфарбовкою вершин графа називається розфарбовка його вершин мінімальною кількістю фарб так, щоб будь-які суміжні вершини були пофарбовані різними фарбами. Введемо позначення:

- $n=|V|$ − розмір графа (кількість вершин);
- $m=|E|$ − потужність графа (кількість ребер);

- v − вектор-стовпчик довжини n; кожен його елемент v_i може приймати цілочисельні значення від 1 до n − це номер фарби i-ї вершини;
- $v_0 = \max(v_1, v_2, ..., v_n)$ − допоміжна змінна (максимальний номер фарби);
- e − бінарний (тобто 0-1) вектор-стовпчик довжини m; кожен його елемент e_{ik} відповідає ребру, що поєднує вершини v_i та v_k.

Тоді задача про мінімальну правильну розфарбовку вершин графа може бути сформульована як задача цілочисельного лінійного програмування:

$$t = v_0 \to \min; \tag{1}$$

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}: v_i \le v_0; \tag{2}$$

$$\forall i: v_i \in \{1, 2, ..., n\}; \tag{3}$$

$$\forall e_{ij} \in E: v_i - v_j - n e_{ij} \le -1; \tag{4}$$

$$\forall e_{ij} \in E: v_j - v_i + n e_{ij} \le n - 1; \tag{5}$$

$$\forall e_{ij} \in E: e_{ij} \in \{0, 1\}. \tag{6}$$

Мінімізується (1) максимальний (2) номер фарби вершини (3). При цьому кольори будь-яких суміжних вершин повинні відрізнятися не менш ніж на одиницю (4, 5, 6).

Розв’язок:

Кількість ребер m = 21.

Кількість вершин n = 13.

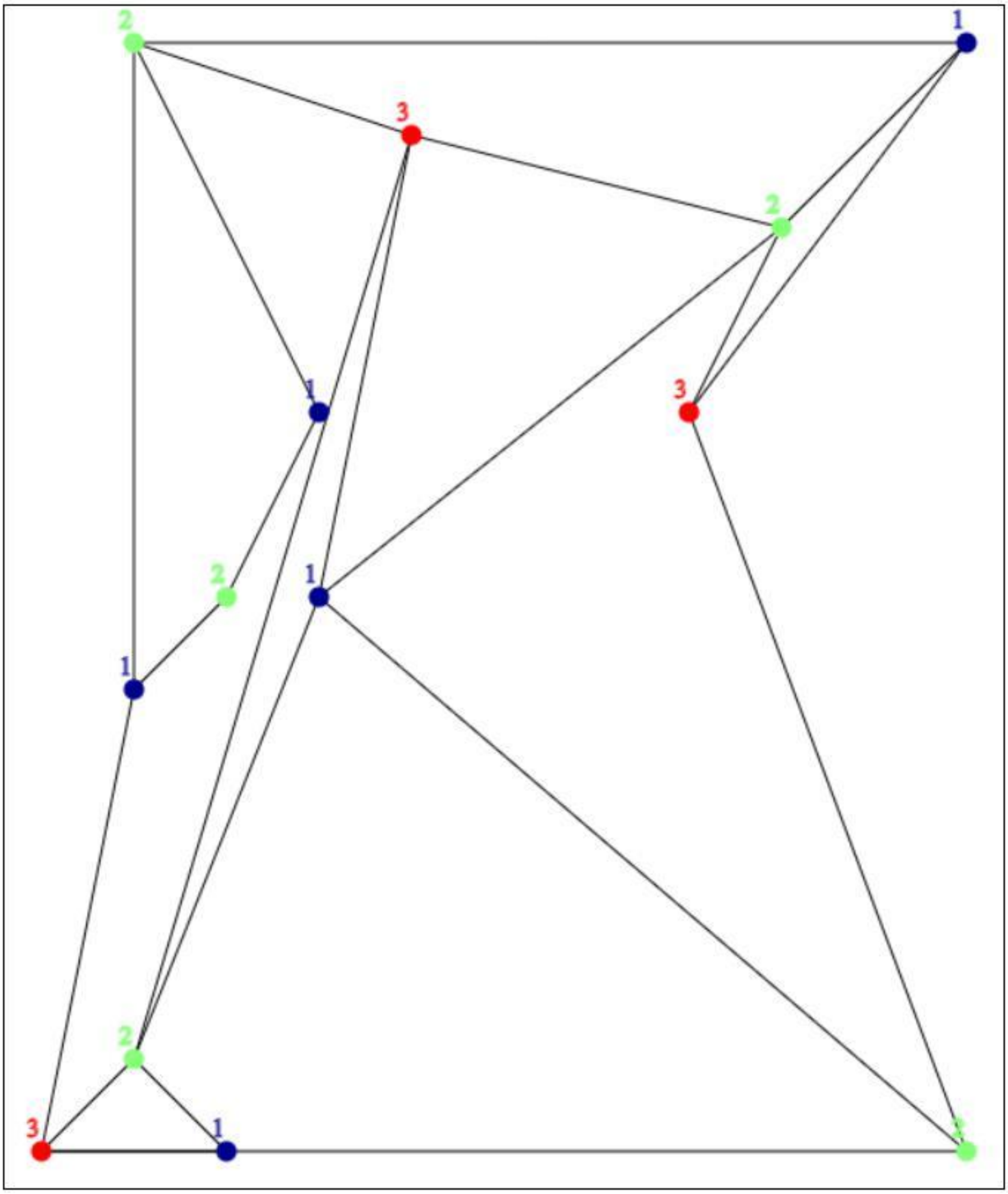
Видалимо петлі та кратні ребра у графі. Після цього потужність графа m = 21. Розмір графа n = 13. Розв’яжемо задачу цілочисельного лінійного програмування. У таблиці нижче наведений список вершин та номери фарб (кольорів) для кожної вершин.

Вершини
та їхні
кольори

Номер	Колір
1	3
2	2
3	1
4	3
5	1
6	2
7	1
8	1
9	1
10	2
11	2
12	2
13	3

Мінімальна кількість кольорів t_{min} = 3. На малюнку вершини розфарбовані різними кольорами: чим менше номер, тим ближче до синього колір вершини, а чим більше номер − тим ближче до червоного.

Мінімальна правильна розфарбовка вершин:



9. **Мінімальна правильна розфарбовка ребер.**

Нехай $G(V, E)$ − граф, де V − множина вершин, а E − множина ребер. Мінімальною правильною розфарбовкою ребер графа називається розфарбовка його ребер мінімальною кількістю фарб так, щоб будь-які суміжні ребра були пофарбовані різними фарбами. Вочевидь, мінімальна кількість фарб у такій розфарбовці (вона називається хроматичним індексом та позначається $\chi'(G)$) не може бути меншою за δ − максимальний ступінь вершини. З іншого боку, згідно теореми Візінга $\chi'(G) \leq \delta+1$. Введемо позначення:

- $n=|V|$ − розмір графа (кількість вершин);
- $m=|E|$ − потужність графа (кількість ребер);
- p_i − ступінь вершини v_i: кількість інцидентних до неї ребер;
- $f_i=p_i(p_i-1)/2$ − кількість різних пар ребер, інцидентних до вершини v_i;
- e − вектор-стовпчик довжини m; кожен його елемент e_k може приймати цілочисельні значення від 1 до m − це номер кольору k-о ребра;
- $e_0 = \max(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ − допоміжна змінна (максимальний номер кольору);
- v − бінарний (тобто 0-1) вектор-стовпчик довжини $f_1+f_2+\ldots+f_n$; кожен його елемент v_{ij} відповідає парі ребер, що поєднуються в i-й вершині.

Тоді задача про мінімальну правильну розфарбовку ребер графа може бути сформульована як задача цілочисельного лінійного програмування:

$$t = e_0 \to \min; \tag{1}$$

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}: e_k \le e_0; \tag{2}$$

$$\forall k: e_k \in \{1, 2, \ldots, m\}; \tag{3}$$

$$\forall v_{ij}: e_{i1} - e_{i2} - m v_{ij} \le -1; \tag{4}$$

$$\forall v_{ij}: e_{i2} - e_{i1} + m v_{ij} \le m-1; \tag{5}$$

$$\forall v_{ij}: v_{ij} \in \{0, 1\}. \tag{6}$$

Мінімізується (1) максимальний (2) номер кольору ребра (3). При цьому кольори будь-якої пари ребер, інцидентних до однієї вершини, повинні відрізнятися не менш ніж на одиницю (4, 5, 6).

Розв'язок:

Кількість ребер $m = 21$.

Кількість вершин $n = 13$.

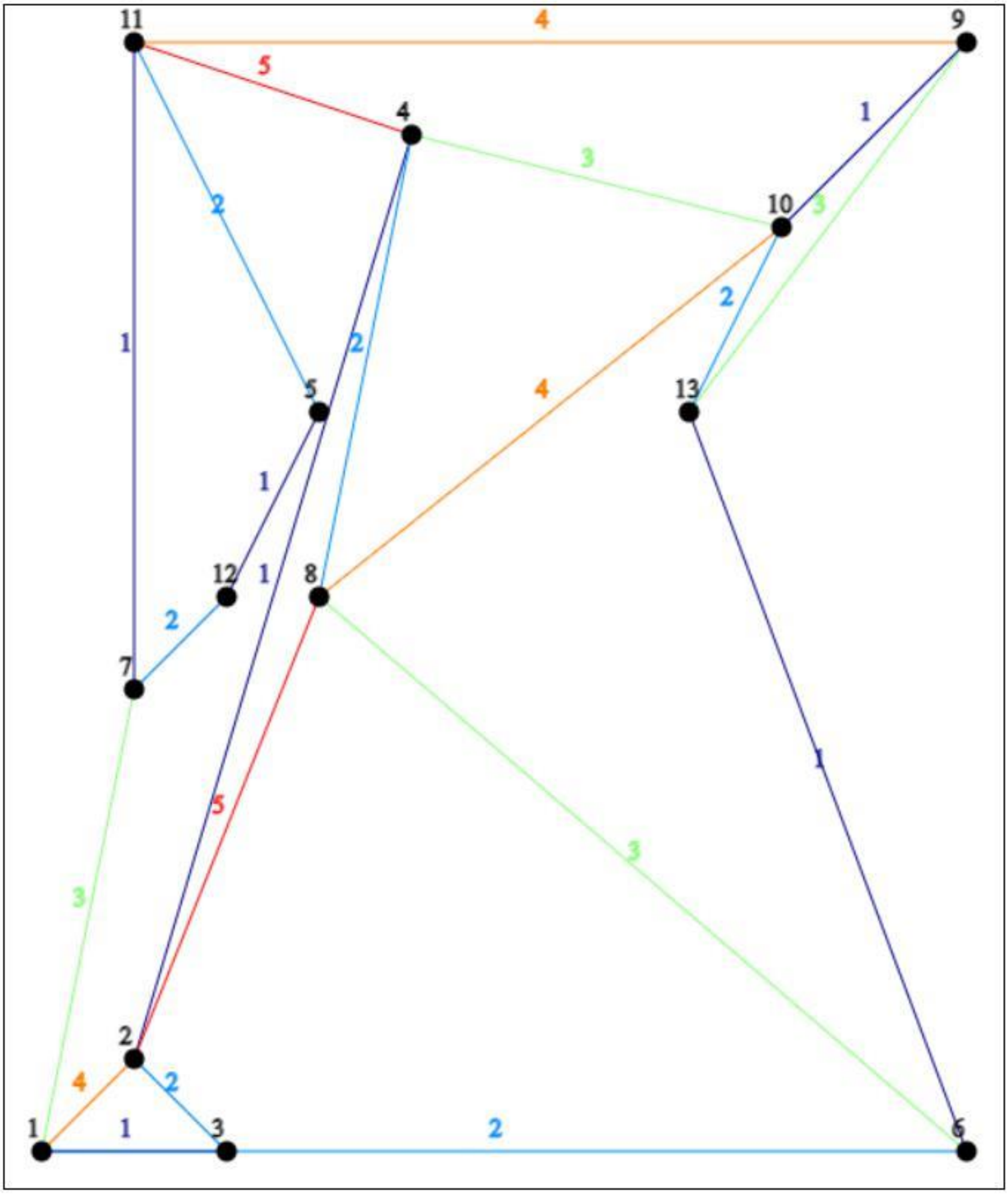
Видалимо петлі та кратні ребра у графі. Після цього потужність графа $m = 21$. Розмір графа $n = 13$. Розв'яжемо задачу цілочисельного лінійного програмування. У таблиці нижче наведений список ребер та номери фарб (кольорів) для кожного ребра.

Ребра та їхні кольори

Номер	v_1	v_2	Колір
1	1	2	4
2	2	3	2
3	3	1	1
4	1	6	2
5	2	4	1
6	4	8	2
7	5	11	2
8	1	7	3
9	7	11	1
10	7	12	2
11	11	4	5
12	11	9	4
13	9	10	1
14	9	13	3
15	13	6	1
16	6	8	3
17	8	2	5
18	10	4	3
19	10	13	2
20	10	8	4
21	12	5	1

Мінімальна кількість кольорів $t_{\min} = 5$. На малюнку ребра розфарбовані різними кольорами: чим менше номер, тим ближче до синього колір вершини, а чим більше номер – тим ближче до червоного

Мінімальна правильна розфарбовка ребер:



3. Мінімальне зважене реберне покриття

Вершини ті ж самі, а ребра тепер з вагами:

Ребра та їхні ваги

v_1 (пробіл) v_2	Вага
1 2	7
2 3	1
3 1	5
1 6	8
2 4	2
4 8	5
5 11	7
1 7	1
7 11	11
7 12	6
11 4	4
11 9	12
9 10	7
9 13	9
13 6	5
6 8	1
8 2	6
10 4	8
10 13	3
10 8	5
12 5	4

Нехай $G(V, E)$ − граф, де V − множина вершин, а E − множина ребер. Мінімальним (зваженим) реберним покриттям називається мінімальна за потужністю або загальною вагою підмножина ребер $E_1 \in E$, які є інцидентними до всіх вершин графа. Введемо позначення:

- $n=|V|$ − розмір графа (кількість вершин);
- $m=|E|$ − потужність графа (кількість ребер);
- $\boldsymbol{A}$ − бінарна (тобто 0-1) матриця інцидентності розміром $n \times m$; кожен її елемент $a_{ik}=1$, якщо i-а вершина інцидентна до k-о ребра; і $a_{ik}=0$ у протилежному випадку; у кожному стовпці такої матриці рівно дві одиниці, а решта нулі;

- ***e*** – бінарний вектор-стовпчик довжини m; кожен його елемент e_k=1, якщо k-е ребро включається у мінімальне зважене реберне покриття, і e_k=0, якщо ні;
- ***w*** – вектор-стовпчик ваг ребер довжини m;
- ***1*** – вектор-стовпчик з одиниць потрібної довжини;
- t – цільова функція: загальна вага ребер, включених у мінімальне зважене реберне покриття.

Тоді задача про мінімальне зважене реберне покриття може бути сформульована як задача бінарного лінійного програмування:

$$t = (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}) \rightarrow \min; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Ae} \geq \boldsymbol{1}; \tag{2}$$

$$\forall k{:}\ e_k \in \{0, 1\}. \tag{3}$$

Мінімізується загальна вага ребер, включених у мінімальне зважене реберне покриття (1). При цьому кожній вершині повинно бути інцидентним хоча б одне таке ребро (2), а кожне ребро може або включатися у мінімальне зважене реберне покриття, або ні (3)

Розв'язок:

Кількість ребер m = 21.

Кількість вершин n = 13.

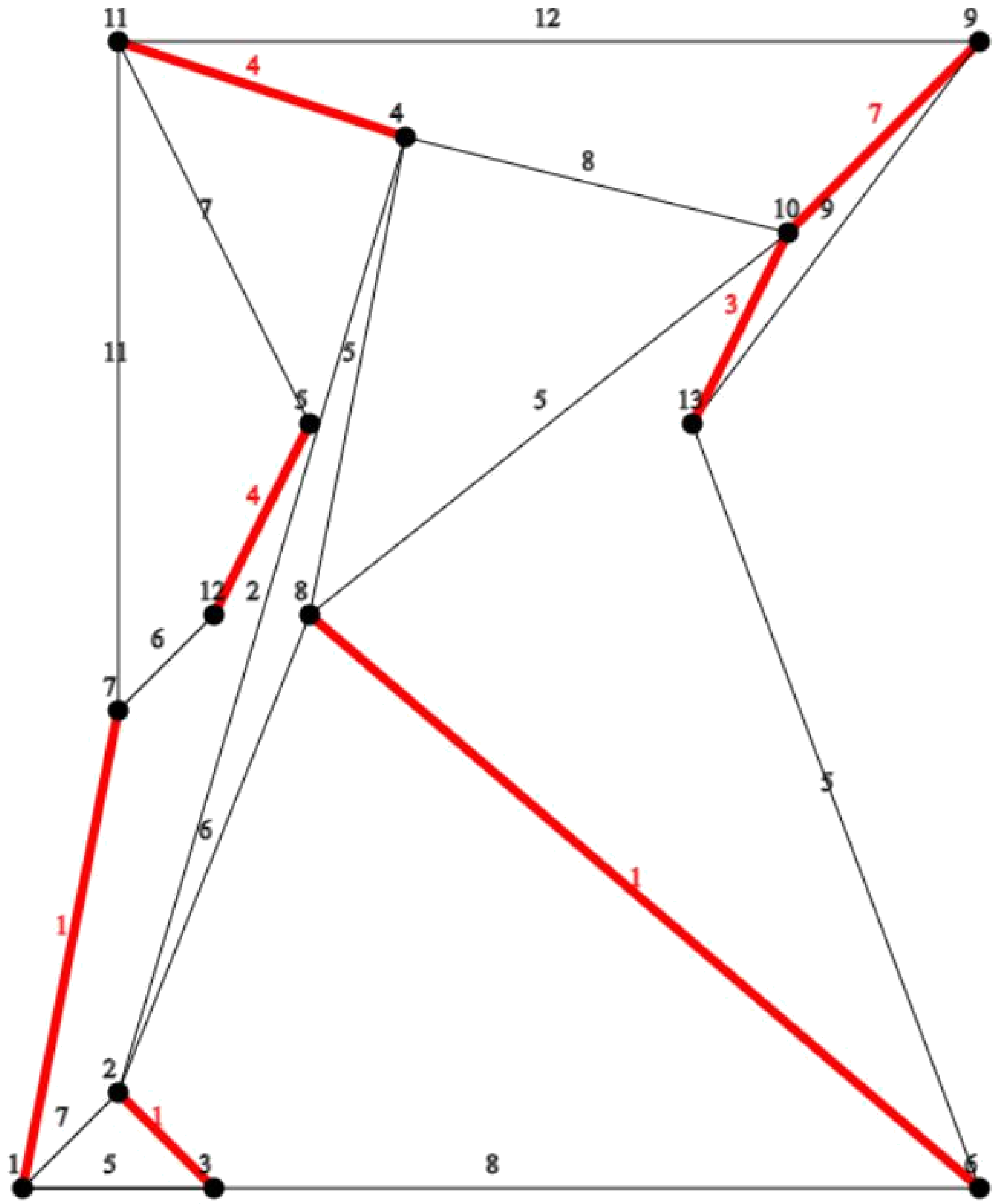
Видалимо петлі у графі. Після цього потужність графа m = 21. Розмір графа n = 13. Розв’яжемо задачу бінарного лінійного програмування. У таблиці нижче наведений список ребер, їхні ваги, та показано, чи включається кожне ребро у мінімальне зважене реберне покриття.

Ребра та їхні ваги

Номер	v_1	v_2	Вага	Включаємо?
1	1	2	7	Ні
2	2	3	1	Так
3	3	1	5	Ні
4	1	6	8	Ні
5	2	4	2	Ні
6	4	8	5	Ні
7	5	11	7	Ні
8	1	7	1	Так
9	7	11	11	Ні
10	7	12	6	Ні
11	11	4	4	Так
12	11	9	12	Ні
13	9	10	7	Так
14	9	13	9	Ні
15	13	6	5	Ні
16	6	8	1	Так
17	8	2	6	Ні
18	10	4	8	Ні
19	10	13	3	Так
20	10	8	5	Ні
21	12	5	4	Так

Загальна мінімальна вага t_{min} = 21. На першому малюнку показаний заданий граф. На другому малюнку ребра, що входять у мінімальне зважене реберне покриття, виділені червоним кольором; показані ваги ребер.

<u>Мінімальне зважене реберне покриття:</u>


11
12
9
4
4
7
8
7
10
9
3
11
5
5
13
5
4
12
2
8
6
7
5
6
1
1
2
7
1
1
5
3
8
6