

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

ВАРИАЦИОННО-ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Содержание

Билет 1. Метод Ритца на примере задачи об упругой пластине 3

Билет 2. Энергетический метод для положительно определённых операторов
в гильбертовом пространстве 5

Билет 1. Метод Ритца на примере задачи об упругой пластине

Формулировка задачи

Рассматривается упругая тонкая пластина, занимающая область

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad S = \partial\Omega.$$

Прогиб пластины $w(x, y)$ под действием распределённой нагрузки $q(x, y)$ удовлетворяет уравнению Софи Жермен:

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D},$$

где D — жёсткость пластины.

Для защемлённого края выполняются краевые условия:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S.$$

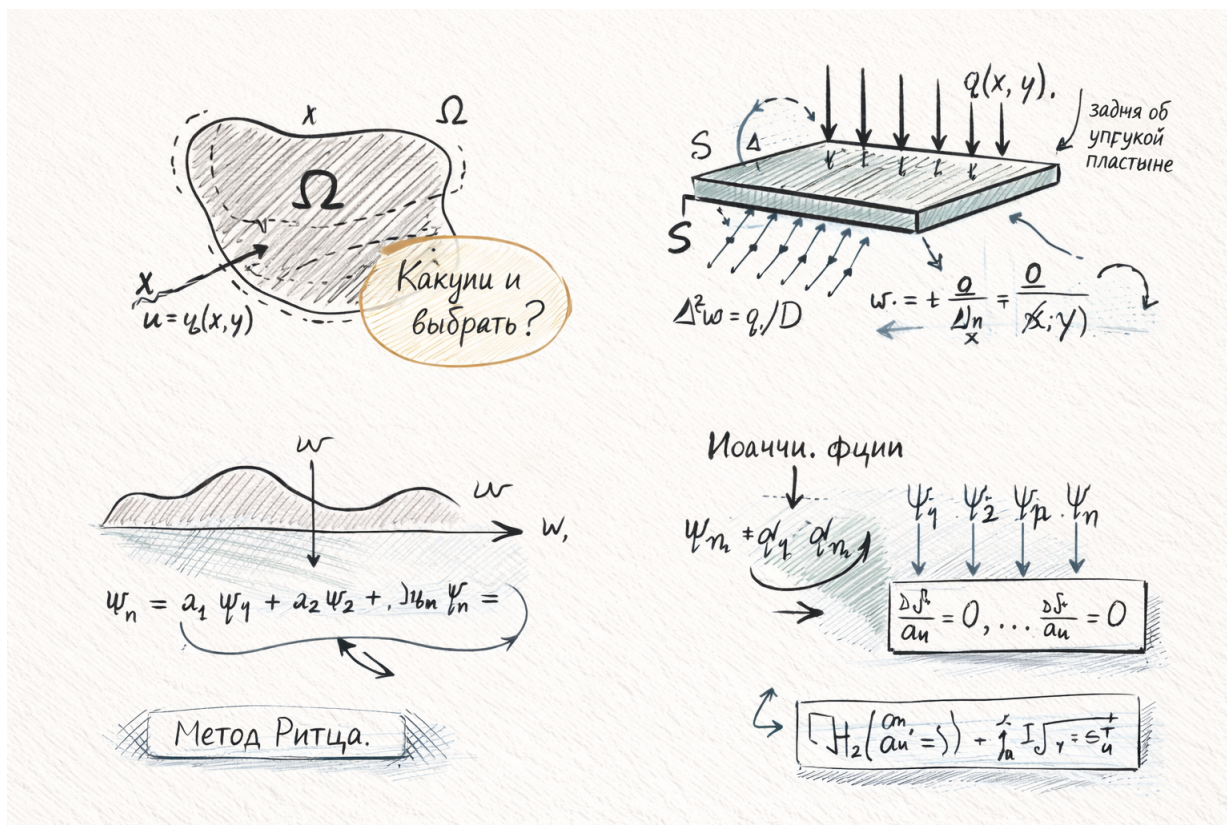


Рис. 1: Визуализация задачи об упругой пластине

Вариационная постановка

Задача эквивалентна задаче минимизации функционала полной энергии:

$$J(w) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\Delta w)^2 - f(x, y)w \right] d\Omega \rightarrow \inf$$

в классе допустимых функций

$$M = \left\{ w \in H^2(\Omega) : w|_S = 0, \frac{\partial w}{\partial n}|_S = 0 \right\}.$$

Минимум функционала соответствует физически реализуемому прогибу пластины.

Метод Ритца

Идея метода Ритца состоит в том, чтобы искать приближённое решение в виде конечной линейной комбинации:

$$w_n(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x, y),$$

где координатные функции ψ_k выбираются так, чтобы:

1. каждая ψ_k удовлетворяла краевым условиям;
2. $\psi_k \in C^3(\overline{\Omega})$;
3. система $\{\psi_k\}$ была полной в M .

Подстановка w_n в функционал приводит к функции

$$J(w_n) = J_n(a_1, \dots, a_n),$$

минимум которой находится из системы уравнений:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n A_{ik} a_k = B_i, \quad i = 1, \dots, n,}$$

где

$$A_{ik} = \iint_{\Omega} \Delta \psi_i \Delta \psi_k d\Omega, \quad B_i = \iint_{\Omega} f \psi_i d\Omega.$$

Полученная система линейна и имеет единственное решение.

Сходимость метода

Минимальные значения функционала удовлетворяют цепочке:

$$J_1^{(0)} \geq J_2^{(0)} \geq \dots \geq \inf J(w).$$

При выполнении условий полноты системы $\{\psi_k\}$ приближённые решения w_n сходятся к точному решению задачи.

Дополнительные вопросы и пояснения

1. Почему уравнение пластины имеет четвёртый порядок? Поскольку изгиб пластины определяется кривизнами, которые зависят от вторых производных прогиба. Уравнения равновесия связывают моменты и поперечные силы, что приводит к оператору четвёртого порядка Δ^2 .

2. Почему задача формулируется вариационно? Потому что упругая система в состоянии равновесия минимизирует потенциальную энергию. Вариационная постановка:

$$\delta J(w) = 0$$

эквивалентна уравнению Софи Жермен и позволяет применять приближённые методы.

3. В каком функциональном пространстве ищется решение? Решение ищется в пространстве $H^2(\Omega)$, поскольку в функционале участвуют вторые производные w . Краевые условия задают подпространство допустимых функций.

4. Как выбираются координатные функции ψ_k ? Координатные функции выбираются так, чтобы они автоматически удовлетворяли краевым условиям. Например, для прямоугольной области:

$$\psi_{mn}(x, y) = x^2(a-x)^2y^2(b-y)^2P_m(x)P_n(y),$$

где P_m, P_n — полиномы.

5. Почему система уравнений метода Ритца линейна? Потому что функционал $J(w)$ квадратичен по w , а приближение w_n линейно зависит от коэффициентов a_k . Минимизация приводит к линейной системе.

6. В чём физический смысл метода Ритца? Метод Ритца ищет форму прогиба пластины, которая минимизирует энергию изгиба в ограниченном классе допустимых форм. При увеличении числа координатных функций форма всё точнее приближается к реальной.

7. Когда метод Ритца применять нельзя напрямую? Если функционал не ограничен снизу или минимум не достигается (контрпример Вейерштрасса), необходимо уточнение класса функций или использование других вариационных методов.

Билет 2. Энергетический метод для положительно определённых операторов в гильбертовом пространстве

1. Положительно определённые операторы

Определение и свойства

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$.

Линейный оператор $A : D_A \subset H \rightarrow H$ называется **положительно определённым**, если:

1. A — самосопряжённый: $A = A^*$, т.е. $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in D_A$
2. A — положительный: $(A\varphi, \varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \in D_A$

3. A — строго положительный: существует $c > 0$ такое, что

$$(A\varphi, \varphi) \geq c\|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in D_A$$

Константа c называется **константой положительной определённости** или **константой эллиптичности**.

Энергетическое пространство

Для положительно определённого оператора A определим **энергетическое пространство** H_A как пополнение D_A по норме:

$$\|\varphi\|_A = \sqrt{(A\varphi, \varphi)}$$

Это норма, эквивалентная исходной:

$$\sqrt{c}\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_A \leq \sqrt{\|A\|}\|\varphi\|,$$

где $\|A\|$ — норма оператора A .

Скалярное произведение в H_A :

$$[\varphi, \psi]_A = (A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$$

2. Теорема о функционале энергии

Вариационная задача

Рассмотрим задачу минимизации функционала энергии. Пусть дана задача:

$$Au = f, \quad u \in D_A, \quad f \in H$$

Ей соответствует вариационная задача:

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v) \rightarrow \min_{v \in H_A}$$

Основная теорема

Теорема. Пусть A — положительно определённый оператор в гильбертовом пространстве H , $f \in H$. Тогда:

1. Существует единственное решение $u \in H_A$ вариационной задачи:

$$J(u) = \inf_{v \in H_A} J(v)$$

2. Это решение удовлетворяет операторному уравнению:

$$Au = f$$

3. Минимальное значение функционала равно:

$$J(u) = -\frac{1}{2}(f, u) = -\frac{1}{2}\|u\|_A^2$$

4. Энергия функции v может быть выражена как:

$$\|v - u\|_A^2 = J(v) - J(u)$$

то есть расстояние от v до решения в энергетической норме равно избытку функционала энергии.

Доказательство (идея)

Функционал энергии — это квадратичный функционал. Его первая вариация:

$$\delta J(v; \psi) = (Av, \psi) - (f, \psi) = (Av - f, \psi)$$

Для минимума необходимо $\delta J(u; \psi) = 0$ при всех $\psi \in H_A$:

$$(Au - f, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in H_A$$

Поскольку H_A плотно в H , отсюда следует $Au = f$.

Строгая положительная определённость гарантирует строгую выпуклость функционала и единственность минимума.

3. Примеры положительно определённых дифференциальных операторов

Пример 1: Оператор Штурма-Лиувилля

Рассмотрим на $H = L_2(a, b)$ оператор:

$$Au = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u$$

с граничными условиями Дирихле: $u(a) = u(b) = 0$.

Здесь:

- $p(x) \geq p_0 > 0$, $p \in C^1[a, b]$
- $q(x) \geq 0$, $q \in C[a, b]$

Оператор положительно определён с константой $c = p_0 > 0$:

$$(Au, u) = \int_a^b \left[p(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + q(x)u^2 \right] dx \geq p_0 \int_a^b \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = p_0 \|u\|_{H^1}^2$$

Энергетическое пространство $H_A = H_0^1(a, b)$ (соболевское пространство функций с нулевыми граничными условиями).

Пример 2: Оператор Лапласа

На области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с граничными условиями Дирихле: $u|_{\partial\Omega} = 0$,

$$Au = -\Delta u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Положительно определён с константой $c = \lambda_1 > 0$, где λ_1 — первое собственное значение оператора Лапласа.

$$(Au, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \lambda_1 \int_{\Omega} u^2 dx$$

Энергетическое пространство: $H_A = H_0^1(\Omega)$ (градиентная норма $\|\nabla u\|_{L_2}$).

Пример 3: Оператор упругой пластины

Введённый в Лекции 1, оператор четвёртого порядка:

$$Au = \Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

с граничными условиями жёсткой заделки: $u|_{\partial\Omega} = 0, \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0$.

Положительно определён:

$$(Au, u) = \int_{\Omega} (\Delta u)^2 d\Omega \geq c \|\nabla^2 u\|_{L_2}^2$$

Энергетическое пространство: $H_A = H_0^2(\Omega)$ (норма вторых производных).

4. Применение к методу Бубнова-Галеркина

Для положительно определённого оператора метод Бубнова-Галеркина становится методом Ритца (совпадают).

Ищем приближенное решение:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$$

минимизируя функционал энергии:

$$J(u_n) = \frac{1}{2} (Au_n, u_n) - (f, u_n) \rightarrow \min$$

Условия минимума дают систему линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n (A\varphi_i, \varphi_k) \alpha_k = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{1, n}$$

или в матричной форме:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} \alpha_k = B_i$$

где $A_{ik} = (A\varphi_i, \varphi_k)$, $B_i = (f, \varphi_i)$.

Положительная определённость гарантирует:

- Матрица $\{A_{ik}\}$ положительно определена, система имеет единственное решение
- Погрешность оценивается в энергетической норме:

$$\|u - u_n\|_A^2 \leq J(u) - J(u_n) = \inf_{v \in H_n} J(v) - J(u_n)$$

Билет 3. Энергетический метод для только положительных операторов

Определение положительного оператора

Оператор A в гильбертовом пространстве H называется **положительным**, если:

$$(Au, u) \geq 0 \quad \forall u \in D_A, \quad (Au, u) = 0 \Rightarrow u = 0$$

То есть A положительный, но не обязательно положительно определённый (может не быть эквивалентности норм).

Отличия от положительно определённых операторов

Для положительно определённого оператора верно $\exists \gamma > 0$:

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$$

Для только положительного оператора такой константы может не быть. Энергетическая норма может быть намного «слабее» обычной нормы в H .

Энергетическое пространство для положительного оператора

При работе с положительным оператором также строится энергетическое пространство H_A как пополнение D_A по норме $|\cdot|_A$:

$$|u|_A = \sqrt{(Au, u)}$$

Однако из $|u|_A = 0$ следует только $u = 0$, но из $u = 0$ не следует $|u|_A = 0$ в исходном пространстве (автоматически верно, но иная структура).

Функционал энергии для положительного оператора

Для положительного оператора исходная вариационная задача формулируется иначе.

Теорема:

Пусть A — положительный оператор, и пусть существует элемент $u_0 \in H_A$ такой, что линейный функционал $l(v) = (f, v)$ продолжим на H_A и ограничен. Тогда существует единственный элемент $\tilde{u} \in H_A$ такой, что:

$$[\tilde{u}, v]_A = l(v) \quad \forall v \in H_A$$

Это решение минимизирует функционал (в обобщённом смысле):

$$F(u) = [u, u]_A - 2l(u) \rightarrow \min$$

Примеры положительных (но не положительно определённых) операторов

Пример 1: задача Неймана

Рассмотрим оператор Лапласа с условиями Неймана:

$$Au = -\Delta u, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0$$

Имеем:

$$(Au, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega = 0 \quad \text{для } u = \text{const}$$

но $\|u\|_{L_2} \neq 0$ для ненулевой константы. Оператор положительный, но не положительно определённый.

Пример 2: оператор в бесконечной области

Для уравнения $Au = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j})$ в неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$:

$$(Au, u) = \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} d\Omega \geq 0$$

Положительная определённость не гарантирована из-за поведения функций на бесконечности.

Условия разрешимости для положительного оператора

Для задачи $Au = f$ с положительным оператором разрешимость требует специальных условий. В частности, для задачи Неймана необходимо условие ортогональности:

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = 0$$

Это отражает факт, что константные функции лежат в ядре оператора.

Обобщённое решение

Обобщённым решением уравнения $Au = f$ с положительным оператором называется элемент $u_0 \in H_A$ такой, что:

$$[u_0, v]_A = l(v) \quad \forall v \in H_A$$

где l — ограниченный линейный функционал, порождённый f .

Такое решение существует и единственно в факторпространстве $H_A / \ker(A)$.

Дополнительные пояснения

В.: Чем энергетический метод для положительного оператора сложнее?

О.: При работе с только положительным оператором энергетическая норма может обращаться в нуль на ненулевых элементах (на ядре оператора). Нужно работать в факторпространстве по ядру либо налагать дополнительные условия ортогональности.

В.: Как практически разрешить задачу с положительным оператором?

О.: Обычно задачу сводят к положительно определённой, добавляя малый положительный оператор (регуляризация), либо налагают условие нормировки (например, $\int_{\Omega} u \, d\Omega = 0$ для задачи Неймана).

В.: Почему условие $\int_{\Omega} f \, d\Omega = 0$ необходимо для задачи Неймана?

О.: Это следует из того, что для любого решения $Au = f$ имеем:

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \int_{\Omega} Au \, d\Omega = 0 \quad (\text{формула Остроградского})$$

Таким образом, условие совместности исходит из самой природы дифференциального оператора.

В.: Как задача Неймана связана с задачей Дирихле?

О.: Задача Дирихле даёт положительно определённый оператор (граничное условие убирает константные функции), а задача Неймана даёт только положительный оператор (константные функции остаются в ядре оператора).

Билет 4. Исследование задачи о минимуме функционала энергии. Пространства H_A

Вариационная задача минимизации

Рассмотрим вариационную задачу для положительно определённого оператора:

$$J(u) = [u, u]_A - 2(f, u) \rightarrow \min, \quad u \in H_A$$

где H_A — энергетическое пространство оператора A .

Функционал $J(u)$ называется функционалом энергии. Его минимум эквивалентен решению операторного уравнения:

$$Au = f$$

в обобщённом смысле.

Критерий минимума

Функция $u_0 \in H_A$ минимизирует $J(u)$ тогда и только тогда, когда:

$$\left. \frac{d}{dt} J(u_0 + tv) \right|_{t=0} = 0 \quad \forall v \in H_A$$

Вычисляя:

$$\left. \frac{d}{dt} [u_0 + tv, u_0 + tv]_A - 2(f, u_0 + tv) \right|_{t=0} = 2[u_0, v]_A - 2(f, v) = 0$$

Таким образом, минимум даёт:

$$[u_0, v]_A = (f, v) \quad \forall v \in H_A$$

Структура энергетического пространства H_A

Определение: Энергетическое пространство H_A — это пополнение D_A по энергетической норме $|\cdot|_A$.

Элемент $u \in H_A$ тогда и только тогда, когда:

$$\exists \{u_n\} \subset D_A : \quad |u_n - u_m|_A \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty$$

Пространство H_A само является гильбертовым пространством со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]_A$.

Вложение и отношение между H , H_A и D_A

Связь норм:

Для положительно определённого оператора существуют константы c_1, c_2 такие, что:

$$c_1 \|u\|_H \leq |u|_A \leq c_2 \|u\|_H \quad \forall u \in D_A$$

где $\|u\|_H$ — норма в исходном гильбертовом пространстве H .

Однако в расширенном пространстве H_A норма $|\cdot|_A$ может быть существенно сильнее нормы, индуцированной из H .

Вложения:

$$D_A \subset H_A, \quad H_A \subset H^*$$

где H^* — двойственное пространство к H .

Теорема о существовании и единственности минимума

Теорема:

Пусть A — положительно определённый оператор в H , и пусть $f \in H$. Тогда функционал энергии:

$$J(u) = [u, u]_A - 2(f, u)$$

имеет единственный минимум на H_A , который достигается в точке u_0 , удовлетворяющей:

$$[u_0, v]_A = (f, v) \quad \forall v \in H_A$$

Доказательство:

Функционал J является сильно выпуклым:

$$J(u) = [u, u]_A - 2(f, u) = [u - u_0, u - u_0]_A - [u_0, u_0]_A + 2(f, u_0) - 2(f, u_0)$$

Для любого $v \in H_A$:

$$J(u_0 + v) = J(u_0) + 2[u_0, v]_A - 2(f, v) + [v, v]_A = J(u_0) + [v, v]_A \geq J(u_0)$$

с равенством только при $v = 0$.

Взаимосвязь между вариационной и операторной формулировками

Вариационная задача:

$$J(u) = [u, u]_A - 2(f, u) \rightarrow \min$$

эквивалентна вариационному уравнению:

$$[u, v]_A = (f, v) \quad \forall v \in H_A$$

которое в свою очередь эквивалентно операторному уравнению (в обобщённом смысле):

$$Au = f$$

Примеры энергетических пространств

Пример 1: задача Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля

$$Au = -\frac{d}{dx}(p(x)u') + q(x)u, \quad u(a) = u(b) = 0$$

Энергетическое пространство:

$$H_A = {}_0W_2^1(a, b) = \{u \in W_2^1(a, b) : u(a) = u(b) = 0\}$$

с нормой $|u|_A = \sqrt{\int_a^b [p(u')^2 + qu^2] dx}$.

Пример 2: задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$Au = -\Delta u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

Энергетическое пространство:

$$H_A = {}_0W_2^1(\Omega)$$

с нормой $|u|_A = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega}$.

Дополнительные пояснения

В.: Почему энергетическое пространство называется так?

О.: Потому что в физических приложениях $[u, u]_A$ часто представляет потенциальную энергию системы. Минимизация функционала энергии соответствует принципу минимума энергии.

В.: Как связаны пространства H , H_A и D_A ?

О.: D_A — наиболее узкое пространство (содержит только функции, к которым применим оператор в классическом смысле). H_A — среднее пространство (пополнение D_A по энергетической норме). H — самое широкое пространство.

В.: Почему важно пополнение до H_A ?

О.: Потому что в D_A может быть недостаточно «функций», чтобы достичь минимума. Например, для задачи с граничными условиями Дирихле минимум может достигаться на менее гладкой функции, которая лежит в H_A , но не в D_A .

Билет 5. Теорема о сходимости минимизирующей последовательности для функционала энергии

Определение минимизирующей последовательности

Последовательность $\{u_n\} \subset H_A$ называется **минимизирующей** для функционала энергии $J(u) = [u, u]_A - 2(f, u)$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{u \in H_A} J(u) = m$$

Вспомогательное неравенство

Для любых $u, v \in H_A$ и минимизирующей последовательности имеем:

$$J(u_n) = [u_n, u_n]_A - 2(f, u_n)$$

Пусть u_* — точка минимума (существует по теореме Банаха). Тогда:

$$[u_* - u_n, u_* - u_n]_A = [u_*, u_*]_A - 2[u_*, u_n]_A + [u_n, u_n]_A$$

Теорема о сходимости

Теорема:

Пусть A — положительно определённый оператор в гильбертовом пространстве H , и пусть $\{u_n\}$ — минимизирующая последовательность для функционала энергии:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{u \in H_A} J(u)$$

Тогда существует единственный элемент $u_* \in H_A$ такой, что последовательность $\{u_n\}$ сходится к u_* в энергетической норме:

$$|u_n - u_*|_A \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

и u_* минимизирует функционал:

$$J(u_*) = \inf_{u \in H_A} J(u)$$

Доказательство

Шаг 1: равномерная ограниченность

Так как последовательность $J(u_n)$ сходится, она ограничена. Пусть $M = \sup_n J(u_n) + 1$. Тогда:

$$[u_n, u_n]_A = J(u_n) + 2(f, u_n)$$

По неравенству Коши-Буняковского:

$$|(f, u_n)| \leq |f|_{A^{-1}} |u_n|_A$$

где $|f|_{A^{-1}}$ — норма в двойственном пространстве. Следовательно:

$$[u_n, u_n]_A \leq M + 2|f|_{A^{-1}} |u_n|_A$$

Так как $[u_n, u_n]_A = |u_n|_A^2$, получаем оценку:

$$|u_n|_A^2 - 2|f|_{A^{-1}} |u_n|_A - M \leq 0$$

откуда $\sup_n |u_n|_A < \infty$.

Шаг 2: слабая компактность

В гильбертовом пространстве из ограниченности последовательности следует наличие слабо сходящейся подпоследовательности:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_* \quad \text{в } H_A$$

Шаг 3: сильная выпуклость

Для любых $u, v \in H_A$ верно (параллелограмм):

$$|u - v|_A^2 = 2|u|_A^2 + 2|v|_A^2 - |u + v|_A^2$$

Функционал J является сильно выпуклым с константой $\gamma^2 > 0$ (из положительной определённости A).

Шаг 4: единственность и сильная сходимость

Из сильной выпуклости следует, что если последовательность слабо сходится и её образы под J сходятся к инфимуму, то последовательность сильно сходится.

Именно, если $u_{n_k} \rightharpoonup u_*$ и $J(u_{n_k}) \rightarrow m$, то:

$$J(u_*) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_{n_k}) = m$$

но с другой стороны, $J(u_*) = m$ (так как минимум единственен), откуда:

$$|u_{n_k} - u_*|_A^2 = [u_{n_k}, u_{n_k}]_A - 2[u_{n_k}, u_*]_A + [u_*, u_*]_A \rightarrow 0$$

Приложения к численным методам

Следствие для метода Ритца:

Если построить последовательность конечномерных подпространств $H_n \subset H_A$ таких, что $H_n \rightarrow H_A$ (в смысле Хаусдорфа), то приближённые решения $u_n = \operatorname{argmin}_{v \in H_n} J(v)$ образуют минимизирующую последовательность и сходятся к точному решению.

Оценка скорости сходимости

Пусть решение $u_* \in H_A$ достаточно гладко. Тогда скорость сходимости зависит от аппроксимационных свойств подпространства H_n :

$$|u_n - u_*|_A \leq C \inf_{v \in H_n} |u_* - v|_A$$

Дополнительные пояснения

В.: Всегда ли минимизирующая последовательность сходится?

О.: В полном гильбертовом пространстве со сильно выпуклым функционалом — да. Сильная выпуклость обеспечивается положительной определённой оператором A .

В.: Почему важна единственность минимума?

О.: Единственность гарантирует, что сходится вся последовательность, а не только подпоследовательность. Это критично для численных методов.

В.: Как эта теорема применяется на практике?

О.: Она обосновывает метод Ритца и его варианты: строим конечномерное подпространство и решаем задачу минимизации в этом подпространстве. Решение автоматически сходится к точному решению при уменьшении параметра дискретизации.

Билет 6. Процесс Ритца построения минимизирующей последовательности энергетического функционала

Основная идея метода Ритца

Метод Ритца состоит в замене исходной вариационной задачи на бесконечномерном пространстве H_A приближительной задачей на конечномерном подпространстве.

Вместо поиска $u \in H_A$ такого, что $[u, v]_A = (f, v)$ для всех $v \in H_A$, ищем $u_n \in H_n$, где H_n — конечномерное подпространство H_A .

Выбор базисных функций

Выбираем полную в H_A последовательность линейно независимых функций $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$:

1. каждая φ_k удовлетворяет однородным граничным условиям;
2. $\varphi_k \in H_A$ (или $\varphi_k \in D_A$);
3. система полна: линейные комбинации $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ всюду плотны в H_A при $n \rightarrow \infty$.

Конечномерное подпространство

Определяем подпространство размерности n :

$$H_n = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

Приближённое решение ищем в виде:

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

Вариационная формулировка на подпространстве

На подпространстве H_n ищем u_n такой, что:

$$[u_n, \varphi_j]_A = (f, \varphi_j) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Подставляя $u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$:

$$\sum_{k=1}^n a_k [\varphi_k, \varphi_j]_A = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n$$

Система линейных уравнений

Получаем систему алгебраических уравнений:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n A_{jk} a_k = b_j, \quad j = 1, \dots, n}$$

где матрица Грама энергетического скалярного произведения:

$$A_{jk} = [\varphi_k, \varphi_j]_A = (A\varphi_k, \varphi_j)$$

и правая часть:

$$b_j = (f, \varphi_j)$$

Свойства матрицы системы

Матрица $\hat{A} = (A_{jk})$ обладает следующими свойствами:

1. **Симметричность:** $A_{jk} = A_{kj}$ (следует из симметричности оператора A)
2. **Положительная определённость:** Матрица положительно определена, так как

$$\sum_{j,k} A_{jk} c_j c_k = \left[\sum_j c_j \varphi_j, \sum_k c_k \varphi_k \right]_A = \left| \sum_j c_j \varphi_j \right|_A^2 > 0$$

для любого ненулевого вектора (c_1, \dots, c_n) .

3. **Хорошая обусловленность:** При выборе ортогональных (в энергетической норме) базисных функций матрица становится диагональной.

Построение минимизирующей последовательности

Для последовательности $n = 1, 2, 3, \dots$:

1. Выбираем первые n базисных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$
2. Составляем систему размера $n \times n$
3. Решаем систему и находим коэффициенты $a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$
4. Строим приближённое решение $u_n = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi_k$

Таким образом получается последовательность приближённых решений $\{u_n\}$.

Примеры базисных функций

Пример 1: степенные функции

Для задачи на отрезке $[0, L]$ с нулевыми условиями Дирихле:

$$\varphi_k(x) = x^k(L-x)^m, \quad k = 1, 2, \dots$$

Такие функции удовлетворяют граничным условиям и составляют полную систему.

Пример 2: тригонометрические функции

Для периодических условий:

$$\varphi_k(x) = \sin(k\pi x/L), \quad k = 1, 2, \dots$$

Эти функции ортогональны в энергетической норме для некоторых операторов.

Пример 3: кусочно-линейные функции

На сетке с узлами $x_0 < x_1 < \dots < x_n$:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i} & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}} & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Дополнительные пояснения

В.: Почему матрица системы положительно определена?

О.: Потому что $(A\varphi, \varphi) \geq \gamma^2 \|\varphi\|^2 > 0$ для любого ненулевого φ (положительная определённость оператора). Это гарантирует положительную определённость матрицы Грама.

В.: Как выбрать базисные функции?

О.: Нужно выбрать так, чтобы: (1) удовлетворяли граничным условиям; (2) были линейно независимы; (3) их линейные комбинации хорошо аппроксимировали точное решение. На практике часто используют полиномы или кусочно-полиномиальные функции.

В.: Почему нужна полнота системы?

О.: Полнота гарантирует, что при $n \rightarrow \infty$ подпространства H_n исчерпывают всё пространство H_A . Это обеспечивает сходимость метода Ритца.

Билет 7. Теорема о сходимости метода Ритца

Формулировка метода Ритца

Пусть $\{H_n\}$ — последовательность конечномерных подпространств, где $H_n = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ с полной системой $\{\varphi_k\}$ в H_A .

Приближённое решение $u_n \in H_n$ определяется из системы:

$$[u_n, v]_A = (f, v) \quad \forall v \in H_n$$

Основная теорема о сходимости

Теорема:

Пусть A — положительно определённый оператор в гильбертовом пространстве H , и пусть $\{\varphi_k\}$ — полная система в H_A . Тогда для последовательности приближённых решений $\{u_n\}$, полученных методом Ритца, выполняется:

$$\|u_n - u_*\|_A \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

где $u_* \in H_A$ — точное решение вариационной задачи $[u, v]_A = (f, v)$ для всех $v \in H_A$.

Доказательство

Шаг 1: Ортогональность ошибки

Из определения u_n :

$$[u_n, \varphi_j]_A = (f, \varphi_j) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

и определения u_* :

$$[u_*, \varphi_j]_A = (f, \varphi_j) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

получаем:

$$[u_n - u_*, \varphi_j]_A = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Шаг 2: Оптимальность приближения

Ошибка $u_n - u_*$ ортогональна всем базисным функциям, а значит, и всему подпространству H_n :

$$[u_n - u_*, v]_A = 0 \quad \forall v \in H_n$$

Это означает, что u_n является H_A -проекцией u_* на подпространство H_n :

$$|u_n - u_*|_A = \inf_{v \in H_n} |u_* - v|_A$$

Шаг 3: Полнота системы

Так как система $\{\varphi_k\}$ полна в H_A , для любого $\varepsilon > 0$ и для $u_* \in H_A$ существует N и коэффициенты c_1, \dots, c_N такие, что:

$$\left| u_* - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right|_A < \varepsilon$$

Шаг 4: Сходимость

Из оптимальности приближения и полноты системы:

$$|u_n - u_*|_A = \inf_{v \in H_n} |u_* - v|_A \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

Оценка скорости сходимости

Скорость сходимости зависит от аппроксимационных свойств подпространства H_n :

Оценка:

$$|u_n - u_*|_A \leq C_1 \inf_{v \in H_n} |u_* - v|_A$$

Если решение $u_* \in H_A$ имеет достаточную гладкость, например $u_* \in W_2^k(\Omega)$, то при использовании кусочно-полиномиальных базисных функций степени $m - 1$ на сетке с шагом h :

$$\inf_{v \in H_n} |u_* - v|_A \leq Ch^{\min(m, k-1)}$$

Сходимость в исходной норме H

Помимо сходимости в энергетической норме $|\cdot|_A$, часто требуется сходимость в исходной норме пространства $H = L_2(\Omega)$.

Теорема (дуальность):

Если оператор A имеет хорошие свойства регулярности (например, если решение $Au = v$ для $v \in H$ принадлежит W_2^2), то из сходимости в энергетической норме следует более быстрая сходимость в L_2 :

$$\|u_n - u_*\|_H \leq C |u_n - u_*|_A \cdot |u_n - u_*|_A$$

что может дать сходимость порядка $O(h^2)$ вместо $O(h)$.

Практическое значение

Теорема о сходимости метода Рунге обосновывает его применение к различным классам задач:

1. Подтверждает корректность метода: приближённые решения стремятся к точному
2. Даёт оценки скорости сходимости, которые определяют требуемое число неизвестных
3. Позволяет выбирать базисные функции для достижения требуемой точности
4. Работает не только для классических, но и для обобщённых решений

Дополнительные пояснения

В.: Как объяснить ортогональность ошибки простыми словами?

О.: Если приближённое решение u_n удовлетворяет вариационному уравнению на подпространстве H_n , то его ошибка в смысле энергетического скалярного произведения перпендикулярна всему этому подпространству. Это означает, что u_n — наилучшее приближение u_* в подпространстве.

В.: Почему полнота системы критична?

О.: Если система не полна, то существует элемент, который нельзя приблизить никакой конечной линейной комбинацией базисных функций. Тогда метод не сходится.

В.: Можно ли использовать неполные системы?

О.: В специальных случаях да, но тогда метод может сходиться только к приближённому решению. На практике всегда требуется полнота для гарантии сходимости.

Билет 8. Построение обобщённого решения краевой задачи Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля

Постановка задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу на отрезке $[a, b]$:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), & x \in (a, b) \\ u(a) = 0, & u(b) = 0 \end{cases}$$

где:

- $p(x) \geq p_0 > 0$ — коэффициент при производной
- $q(x) \geq 0$ — потенциал
- $f \in L_2(a, b)$ — правая часть

Вариационная формулировка

Умножим уравнение на пробную функцию $v \in \circ W_2^1(a, b)$ (со своторыми нулевыми на границе) и проинтегрируем:

$$-\int_a^b v \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) dx + \int_a^b q(x) uv dx = \int_a^b f v dx$$

Применяя интегрирование по частям к первому слагаемому:

$$\int_a^b p(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_a^b q(x) uv dx = \int_a^b f v dx$$

(граничные члены исчезают благодаря нулевым условиям на v).

Энергетическое пространство и скалярное произведение

Определим энергетическое скалярное произведение:

$$[u, v]_A := \int_a^b [p(x) u'(x) v'(x) + q(x) u(x) v(x)] dx$$

Энергетическая норма:

$$|u|_A := \sqrt{[u, u]_A}$$

Энергетическое пространство:

$$H_A = \circ W_2^1(a, b) := \{u \in W_2^1(a, b) : u(a) = u(b) = 0\}$$

Обобщённая формулировка

Определение: Обобщённым решением задачи Дирихле называется функция $u \in H_A$ такая, что:

$$\boxed{[u, v]_A = (f, v)_{L_2} \quad \forall v \in H_A}$$

где $(f, v)_{L_2} = \int_a^b f(x) v(x) dx$.

Положительная определённость оператора

Теорема:

Оператор Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле положительно определён.

Доказательство:

$$[u, u]_A = \int_a^b p(x) (u')^2 dx + \int_a^b q(x) u^2 dx \geq p_0 \int_a^b (u')^2 dx$$

По неравенству Фридрихса для функций с нулевыми граничными условиями:

$$\|u\|_{L_2}^2 \leq C \|u'\|_{L_2}^2$$

Объединяя:

$$[u, u]_A \geq p_0 \|u'\|_{L_2}^2 \geq \frac{p_0}{C} \|u\|_{L_2}^2 =: \gamma^2 \|u\|_{L_2}^2$$

Существование и единственность решения

Теорема:

Для любой правой части $f \in L_2(a, b)$ существует единственное обобщённое решение $u \in H_A$ краевой задачи Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля.

Доказательство:

По теореме Рисса об ограниченных функционалах в гильбертовом пространстве, функционал (f, v) ограничен в H_A :

$$|(f, v)| \leq \|f\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2} C \|v\|_A$$

Таким образом, существует единственный $u \in H_A$ такой, что:

$$[u, v]_A = (f, v) \quad \forall v \in H_A$$

Связь с классическим решением

Если обобщённое решение $u \in H_A$ достаточно гладкое, скажем $u \in C^2[a, b]$, то оно удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению в классическом смысле.

Замечание: Обобщённое решение может быть менее гладким, чем C^2 , но всё равно содержит физически значимую информацию.

Эквивалентная минимизационная задача

Обобщённое решение равносильно минимизации функционала энергии:

$$J(u) = [u, u]_A - 2(f, u)_{L_2} \rightarrow \min$$

Дополнительные пояснения

В.: Что такое обобщённое решение и когда оно нужно?

О.: Обобщённое решение определяется через интегральное тождество, а не через дифференциальное уравнение. Оно нужно, когда классическое решение не существует или недостаточно гладкое.

В.: Почему граничные условия автоматически учитываются?

О.: Потому что пространство H_A содержит только функции, обращающиеся в нуль на границе. Таким образом, условия Дирихле встроены в само определение пространства.

В.: Как проверить, что решение достаточно гладко?

О.: Если $f \in W_2^k$, то по теории регулярности эллиптических уравнений $u \in W_2^{k+2}$. При $k = 0$ (т.е. $f \in L_2$) получаем $u \in W_2^2$.

Билет 9. Основные свойства обобщённого решения задачи Дирихле

Принадлежность пространству H^1

Теорема:

Обобщённое решение u краевой задачи Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля принадлежит пространству Соболева $W_2^1(a, b)$:

$$u \in W_2^1(a, b) = H^1(a, b)$$

Доказательство:

Из вариационного уравнения:

$$[u, v]_A = (f, v)_{L_2} \quad \forall v \in H_A$$

следует:

$$\int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

Из этого уравнения видно, что:

$$\int_a^b p(x)(u')^2dx + \int_a^b q(x)u^2dx = [u, u]_A < \infty$$

следовательно $u' \in L_2(a, b)$. Поскольку u также интегрируемо с квадратом (из энергетической нормы), получаем $u \in W_2^1(a, b)$.

Обобщённая производная

Определение: Функция $v \in L_2(\Omega)$ называется **обобщённой производной** функции $u \in L_2(\Omega)$ (в смысле распределений), если:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v \psi dx \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

где $C_0^\infty(\Omega)$ — гладкие функции с компактным носителем.

Свойства:

1. Обобщённая производная (если существует) единственна (почти всюду)
2. Обобщённая производная совпадает с классической, если классическая существует
3. Для решения $u \in H^1(a, b)$ обобщённая производная u' принадлежит $L_2(a, b)$

Граничные следы

Важное свойство функций из $W_2^1(\Omega)$ — существование **следа** на границе.

Теорема о следе:

Для функции $u \in W_2^1(\Omega)$ существует функция $\gamma_0(u) \in L_2(\partial\Omega)$ (граничный след) такая, что:

$$\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \quad \text{для } u \in C(\bar{\Omega})$$

Пространство $\circ W_2^1(\Omega)$

Пространство функций с нулевыми граничными условиями определяется как:

$$\circ W_2^1(\Omega) = \{u \in W_2^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Это замкнутое подпространство $W_2^1(\Omega)$.

Нормы в пространстве W_2^1

Существуют три эквивалентные нормы:

1. Обычная норма:

$$\|u\|_{W_2^1} = \sqrt{\|u\|_{L_2}^2 + \|u'\|_{L_2}^2}$$

2. Энергетическая норма:

$$|u|_A = \sqrt{\int_a^b [p(x)(u')^2 + q(x)u^2] dx}$$

3. Неравенство Фридрихса: Для $u \in \circ W_2^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L_2} \leq C \|u'\|_{L_2}$$

так что норма может быть определена как $\|u\| = \|u'\|_{L_2}$.

Регулярность решения

Теорема о регулярности:

Если правая часть $f \in L_2(a, b)$, то обобщённое решение u задачи Штурма-Лиувилля принадлежит $W_2^2(a, b)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению почти всюду:

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x) \quad \text{п.в.}$$

Примеры

Пример 1: Уравнение теплопроводности в стационарном виде

$$-u''(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

Обобщённое решение лежит в $H^1(0, 1)$ и удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in \circ H^1(0, 1)$$

Пример 2: Уравнение с переменными коэффициентами

$$-\frac{d}{dx} \left(e^x \frac{du}{dx} \right) = \sin(\pi x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

Энергетическое скалярное произведение:

$$[u, v]_A = \int_0^1 e^x u'(x)v'(x)dx$$

Дополнительные пояснения

В.: Как формально определяется обобщённая производная?

О.: Через интегральное тождество (выше). Интуитивно: это предельное поведение разностных частных при стремлении приращения к нулю.

В.: Почему важна обобщённая производная?

О.: Потому что при работе с обобщёнными решениями функции могут быть недифференцируемы в классическом смысле, но иметь обобщённую производную. Это позволяет распространить методы анализа на более широкий класс функций.

В.: Как проверить, что функция из W_2^1 ?

О.: Нужно показать, что функция и её производная (в смысле распределений) интегрируемы с квадратом. Практически это часто следует из интегральных неравенств (Фридрихса, Соболева и т.д.).

В.: Верно ли, что любая функция из C^1 принадлежит W_2^1 ?

О.: Да, но обратное неверно. W_2^1 содержит функции, которые не непрерывны в классическом смысле.

Билет 10. Третья краевая задача для уравнения Штурма-Лиувилля

Постановка третьей краевой задачи

Третья краевая задача (граничные условия Робена) имеет вид:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), & x \in (a, b) \\ u'(a) + \alpha u(a) = \varphi_a, \\ u'(b) + \beta u(b) = \varphi_b \end{cases}$$

где $\alpha, \beta > 0$ — коэффициенты, описывающие теплообмен или акустическое поглощение на границах.

Вариационная формулировка

Умножим уравнение на пробную функцию v и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx + \alpha u(a)v(a) + \beta u(b)v(b) \\ &= \int_a^b f(x)v(x)dx + \varphi_a v(a) + \varphi_b v(b) \end{aligned}$$

Здесь граничные члены из интегрирования по частям переходят в граничные члены вариационного уравнения.

Энергетическое пространство

Для третьей краевой задачи энергетическое пространство:

$$H_A = W_2^1(a, b)$$

то есть без условия равенства нулю на границе (в отличие от задачи Дирихле).

Энергетическое скалярное произведение:

$$[u, v]_A = \int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx + \alpha u(a)v(a) + \beta u(b)v(b)$$

Обобщённая формулировка

Определение: Обобщённым решением третьей краевой задачи называется функция $u \in W_2^1(a, b)$ такая, что:

$$[u, v]_A = (f, v)_{L_2} + \varphi_a v(a) + \varphi_b v(b) \quad \forall v \in W_2^1(a, b)$$

Положительная определённость оператора

Теорема:

Оператор третьей краевой задачи положительно определён:

$$[u, u]_A \geq \gamma^2 \|u\|_{W_2^1}^2 \quad \text{для некоторого } \gamma > 0$$

Доказательство:

$$[u, u]_A = \int_a^b p(x)(u')^2 dx + \int_a^b q(x)u^2 dx + \alpha u^2(a) + \beta u^2(b)$$

Все слагаемые неотрицательны, и если хотя бы $p_0 > 0$ и $\alpha, \beta > 0$, то оператор положительно определён.

Естественные краевые условия

При выводе вариационной формулировки граничные условия третьего рода появляются **естественным образом** из интегрирования по частям и входят в определение энергетического скалярного произведения.

Граничные условия, которые появляются естественно при вариационной формулировке (а не требуются априори для функций из подпространства), называются **естественными граничными условиями**.

Контраст:

- **Существенные (главные) условия** (как Дирихле) требуют функции из пространства допустимых (задаются на уровне пространства)

- **Естественные условия** (как Робена) возникают из вариационной формулировки (следуют из интегрирования по частям)

Построение минимизирующей последовательности

Метод Ритца для третьей краевой задачи:

1. Выбираем полную систему $\{\varphi_k\}$ в $W_2^1(a, b)$ (без требования нулевых граничных условий)
2. Ищем приближённое решение:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

3. Из условия:

$$[u_n, \varphi_j]_A = (f, \varphi_j) + \varphi_a \varphi_j(a) + \varphi_b \varphi_j(b)$$

получаем систему для a_k

4. Минимизируем энергетический функционал:

$$J(u) = [u, u]_A - 2(f, u)_{L_2} - 2[\varphi_a u(a) + \varphi_b u(b)]$$

Примеры естественных условий в физике

Пример 1: Задача теплопроводности

На границе задана температура окружающей среды и коэффициент теплопередачи:

$$-k \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = \alpha(u(L) - u_{\text{ext}})$$

что эквивалентно:

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x=L} + \frac{\alpha}{k} u(L) = \frac{\alpha}{k} u_{\text{ext}}$$

Пример 2: Акустическая задача

На границе задано условие импеданса (связь давления и скорости на границе с поглощающим материалом):

$$\frac{\partial p}{\partial n} + Zp = 0$$

где Z — коэффициент импеданса.

Дополнительные пояснения

В.: Почему граничные условия третьего рода называют естественными?

О.: Потому что они не требуют отбора функций на этапе выбора пространства. Они автоматически возникают как часть энергетического функционала при интегрировании по частям.

В.: Как выбрать базисные функции для третьей краевой задачи?

О.: Можно выбрать любые функции из W_2^1 без требования обращаться в нуль на границе. Например, степенные функции: $\varphi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

В.: В чём преимущество естественных условий?

О.: Естественные условия упрощают численные схемы: не нужно явно включать граничные условия в пространство допустимых функций, они автоматически учитываются в энергетическом функционале.

В.: Как связаны третья краевая задача и задачи Дирихле-Неймана?

О.: Задача Дирихле — частный случай при $\alpha \rightarrow \infty$ (жёсткое закрепление). Задача Неймана — при $\alpha \rightarrow 0$ (свободная граница).

Билет 11. Краевая задача для ОДУ чётного порядка. Краевая задача для системы ОДУ

Задача для ОДУ чётного порядка

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения 4-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^4 u}{dx^4} = f(x), & x \in (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0, & \frac{d^2 u}{dx^2}(a) = \frac{d^2 u}{dx^2}(b) = 0 \end{cases}$$

Это типичная задача о прогибе балки под нагрузкой (защемлённые края).

Вариационная формулировка для задачи 4-го порядка

Умножим на пробную функцию v (с соответствующими нулевыми граничными условиями) и проинтегрируем дважды по частям:

$$\int_a^b \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int_a^b f(x) v(x) dx$$

Энергетическое скалярное произведение:

$$[u, v]_A = \int_a^b \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

Энергетическое пространство:

$$H_A = \{u \in W_2^2(a, b) : u(a) = u(b) = 0, u''(a) = u''(b) = 0\}$$

или в обозначении со стёртикулосом:

$$H_A = \circ W_2^2(a, b)$$

Система ОДУ первого порядка

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = A(x)u + f(x), & x \in (a, b) \\ u(a) = u_0 \quad (\text{начальное условие}) \end{cases}$$

где $u(x) \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных функций, $A(x)$ — матрица коэффициентов.

Это система с начальными условиями, а не краевая задача. Решение существует по теореме Пикара.

Система ОДУ второго порядка с краевыми условиями

Более типична система краевых задач:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{du}{dx} \right) + Q(x)u = f(x), & x \in (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

где: - $u(x) \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных - $P(x)$ — матрица размера $n \times n$ (положительно определена) - $Q(x)$ — матрица размера $n \times n$ (положительно полуопределена) - $f(x) \in \mathbb{R}^n$ — вектор правых частей

Энергетическая пространство для систем

Энергетическое скалярное произведение в пространстве вектор-функций:

$$[u, v]_A = \int_a^b \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^T P(x) \frac{dv}{dx} + u^T(x) Q(x) v(x) \right] dx$$

Энергетическое пространство:

$$H_A = \{u \in W_2^1(a, b; \mathbb{R}^n) : u(a) = u(b) = 0\}$$

Вариационная формулировка для системы

Обобщённым решением системы называется $u \in H_A$ такой, что:

$$[u, v]_A = \int_a^b f^T(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_A$$

Положительная определённость

Система положительно определена, если:

$$[u, u]_A = \int_a^b \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^T P(x) \frac{du}{dx} + u^T Q(x) u \right] dx \geq \gamma \|u\|_{L_2}^2$$

что гарантируется, если: - $P(x) \geq p_0 I$ (равномерно положительно определена) - $Q(x) \geq 0$ (неотрицательна)

Метод Ритца для систем

Приближённое решение:

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

где φ_k — матрицы-функции со значениями в \mathbb{R}^m (где m — размерность системы).

Система уравнений:

$$\sum_{k=1}^n A_{jk} a_k = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

где коэффициенты матрицы:

$$A_{jk} = [\varphi_k, \varphi_j]_A, \quad b_j = (\varphi_j, f)_{L_2}$$

Пример: система для эластичности

Уравнения плоской теории упругости:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \dots = f_x$$

где u, v — компоненты вектора смещения, λ, μ — параметры Ламе.

Дополнительные пояснения

В.: Почему для уравнений 4-го порядка нужны два граничных условия на каждом конце?

О.: Потому что уравнение содержит производные до 4-го порядка. По теории ОДУ, для единственности решения нужно 4 условия, которые естественно разделяются (по 2 на каждом конце).

В.: Как система ОДУ отличается от одного ОДУ?

О.: Основное отличие в размерности неизвестных. Теория вариационных методов распространяется на системы практически без изменений благодаря линейности операторов.

В.: Зачем нужна матрица $P(x)$?

О.: Она описывает анизотропию материала. Если материал анизотропный, коэффициенты при разных направлениях разные, что отражается в матричной форме оператора.

В.: Может ли система быть несимметричной?

О.: Да, в общем случае. Но для применения энергетического метода и метода Рунге нужна симметричность, иначе не имеет смысла энергетическая норма.

Билет 12. Построение обобщённого решения для уравнения Пуассона с условиями Дирихле

Постановка задачи

Задача Дирихле для уравнения Пуассона на области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{на границе} \end{cases}$$

где $\Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа.

Вариационная формулировка

Умножим уравнение на пробную функцию $v \in \circ W_2^1(\Omega)$ и проинтегрируем по области:

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Применяя формулу Грина и используя граничные условия $v|_{\partial\Omega} = 0$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Энергетическое пространство и скалярное произведение

Энергетическое скалярное произведение:

$$[u, v]_A = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\Omega$$

Энергетическая норма:

$$|u|_A = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega}$$

Энергетическое пространство:

$$H_A = \circ W_2^1(\Omega) := \{u \in W_2^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Обобщённая формулировка

Определение: Обобщённым решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона называется функция $u \in \circ W_2^1(\Omega)$ такая, что:

$$[u, v]_A = (f, v)_{L_2} \quad \forall v \in \circ W_2^1(\Omega)$$

Положительная определённость оператора

Теорема:

Оператор Лапласа с условиями Дирихле положительно определён в пространстве $\circ W_2^1(\Omega)$.

Доказательство:

$$[u, u]_A = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega$$

По неравенству Фридрихса для функций с нулевыми граничными условиями:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_F^2 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

где C_F — постоянная Фридрихса. Следовательно:

$$[u, u]_A = \|\nabla u\|_{L_2}^2 \geq \frac{1}{C_F^2} \|u\|_{L_2}^2 =: \gamma^2 \|u\|_{L_2}^2$$

Неравенство Фридрихса

Теорема (неравенство Фридрихса):

Для функции $u \in \circ W_2^1(\Omega)$ (с нулевыми граничными условиями) выполняется:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_F \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$$

где константа Фридрихса C_F зависит от размера и формы области Ω .

Для прямоугольника $(0, a) \times (0, b)$: $C_F = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\pi}$

Для отрезка $(0, L)$: $C_F = \frac{L}{\pi}$

Существование и единственность

Теорема:

Для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщённое решение $u \in \circ W_2^1(\Omega)$ задачи Дирихле.

Доказательство:

По теореме Рисса об ограниченных функционалах. Функционал $(f, v)_{L_2}$ ограничен в H_A :

$$|(f, v)_{L_2}| \leq \|f\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2} C_F \|v\|_A$$

Следовательно, существует единственный $u \in H_A$ такой, что $[u, v]_A = (f, v)$ для всех $v \in H_A$.

Эквивалентная минимизационная задача

Обобщённое решение минимизирует функционал:

$$J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega - 2 \int_{\Omega} f u d\Omega \rightarrow \min$$

на $\circ W_2^1(\Omega)$.

Регулярность решения

Теорема о регулярности:

Если Ω — выпуклая область с гладкой границей и $f \in L_2(\Omega)$, то обобщённое решение u принадлежит $W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению почти всюду:

$$-\Delta u = f \quad \text{п.в. в } \Omega$$

Метод Ритца

Приближённое решение строится в виде:

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

где φ_k — полная система в $W_2^1(\Omega)$ (например, собственные функции оператора Лапласа). Система алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n A_{jk} a_k = b_j$$

где $A_{jk} = [\varphi_k, \varphi_j]_A = \int_{\Omega} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j d\Omega$

Дополнительные пояснения

В.: Почему неравенство Фридрихса настолько важно?

О.: Потому что оно устанавливает эквивалентность нормы $|\nabla u|_{L_2}$ и нормы $\|u\|_{L_2}$ в пространстве функций с нулевыми граничными условиями. Это гарантирует положительную определённость оператора.

В.: Как неравенство Фридрихса зависит от области?

О.: Константа Фридрихса тем меньше, чем «тоньше» область. Для очень вытянутой области константа велика, что означает слабую связь между u и ∇u .

В.: Почему граничные условия называют существенными?

О.: Потому что они требуют выбора пространства W_2^1 , функции из которого обращаются в нуль на границе. Это в отличие от естественных условий, которые возникают из вариационной формулировки.

В.: Можно ли применить метод Ритца прямо в классе гладких функций?

О.: Да, можно, если базисные функции достаточно гладки. Но определение энергетического пространства и обобщённого решения позволяет работать с менее гладкими функциями и обосновывает сходимость метода.

Билет 13. Третья краевая задача для уравнения Пуассона. Неравенство Фридрихса-Стеклова

Постановка третьей краевой задачи

Третья краевая задача для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{в } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = g & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

где $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ — коэффициент граничного условия, g — граничные данные.

Вариационная формулировка

Умножаем на пробную функцию v и интегрируем:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma uv dS = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v dS$$

Здесь граничное условие третьего рода естественно входит в вариационное уравнение.

Энергетическое пространство

Так как граничное условие естественно:

$$H_A = W_2^1(\Omega)$$

без требования нулевых граничных значений.

Энергетическое скалярное произведение:

$$[u, v]_A = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma uv \, dS$$

Обобщённая формулировка

Обобщённым решением называется $u \in W_2^1(\Omega)$ такой, что:

$$[u, v]_A = (f, v)_{L_2(\Omega)} + (g, v)_{L_2(\partial\Omega)} \quad \forall v \in W_2^1(\Omega)$$

Положительная определённость

Оператор положительно определён благодаря положительности граничного члена:

$$[u, u]_A = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma u^2 dS \geq \sigma_0 \int_{\partial\Omega} u^2 dS$$

Неравенство Фридрихса-Стеклова

Теорема (неравенство Фридрихса-Стеклова):

Для функции $u \in W_2^1(\Omega)$ выполняется:

$$\int_{\partial\Omega} u^2 dS \leq C_{FS} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega + \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)$$

или в нормированной форме:

$$\|u\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C_{FS} \|u\|_{W_2^1(\Omega)}$$

Идея доказательства:

Используя теорему о следе функций из $W_2^1(\Omega)$ и свойства граничных операторов, показывается, что граничные значения функции контролируются её нормой в W_2^1 .

Следствие неравенства Фридрихса-Стеклова

Из неравенства Фридрихса-Стеклова следует положительная определённость оператора третьей краевой задачи:

$$[u, u]_A = \|\nabla u\|_{L_2}^2 + \sigma_0 \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \geq \sigma_0 C_{FS}^{-2} \|u\|_{W_2^1}^2$$

Сравнение неравенств

Различие между основными неравенствами:

Неравенство	Условия	Формулировка
Фридрихса	$u _{\partial\Omega} = 0$	$\ u\ _{L_2} \leq C_F \ \nabla u\ _{L_2}$
Пуанкаре	средн. значение = 0	$\ u\ _{L_2} \leq C_P \ \nabla u\ _{L_2}$
Фридрихса-Стеклова	общее случай	$\ u\ _{L_2(\partial\Omega)} \leq C_{FS} \ u\ _{W_2^1}$

Метод Ритца для третьей краевой задачи

1. Выбираем полную систему $\{\varphi_k\}$ в $W_2^1(\Omega)$ (без граничных условий)
2. Ищем приближение:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$$

3. Из условия:

$$[u_n, \varphi_j]_A = (f, \varphi_j) + (g, \varphi_j)_{\partial\Omega}$$

получаем систему уравнений для коэффициентов

4. Минимизируем энергетический функционал:

$$J(u) = [u, u]_A - 2(f, u) - 2(g, u)_{\partial\Omega}$$

Примеры физических приложений

Пример 1: Теплопроводность

Уравнение Фурье с конвективным теплообменом на границе:

$$-k\Delta T = Q, \quad -k \frac{\partial T}{\partial n} + h(T - T_\infty) = 0$$

приводит к условию третьего рода $\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{h}{k}T = \frac{hT_\infty}{k}$.

Пример 2: Электростатика

В области с диэлектриком и проводящей границей с сопротивлением:

$$-\Delta\phi = \rho/\varepsilon, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} + \frac{1}{R}\phi = V_0$$

Дополнительные пояснения

В.: Чем неравенство Фридрихса-Стеклова отличается от Фридрихса?

О.: Фридрихса контролирует объёмную норму через градиент для функций с нулевыми граничными значениями. Фридрихса-Стеклова контролирует граничную норму через градиент и объёмную норму для функций без условий на границе.

В.: Почему коэффициент σ должен быть положительным?

О.: Для обеспечения положительной определённости оператора. При $\sigma = 0$ получается задача Неймана, которая имеет ядро (константные функции).

В.: Как в практике выбирают коэффициент σ ?

О.: В физических приложениях σ зависит от свойств граничного материала (например, коэффициент теплоотдачи в теплопроводности). Его выбирают на основе физических данных.

В.: Какова роль неравенства Фридрихса-Стеклова в численных методах?

О.: Оно гарантирует, что энергетическая норма эквивалентна норме W_2^1 , что необходимо для обоснования метода Ритца и анализа сходимости конечно-элементных схем.

Билет 14. Задача Неймана для уравнения Пуассона. Неравенство Пуанкаре

Постановка задачи Неймана

Задача Неймана для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{в } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

где g — заданная нормальная производная на границе.

Условие совместности

В отличие от задачи Дирихле, задача Неймана имеет решение не для всякой правой части.

Теорема (условие совместности):

Для существования решения необходимо выполнение условия:

$$\int_{\Omega} f(x) d\Omega + \int_{\partial\Omega} g(x) dS = 0$$

Доказательство: Применяя формулу Грина к уравнению и условию Неймана:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

откуда $\int_{\Omega} f d\Omega = \int_{\partial\Omega} g dS$. \square

Решение с точностью до константы

Множество решений задачи Неймана образует аффинное подпространство размерности 1: если u — одно решение, то всякое решение имеет вид $u + c$ для некоторой константы c .

Это отражает физическую интерпретацию: для многих задач (диффузия, электростатика) потенциал определён с точностью до произвольной постоянной.

Нормализованная задача Неймана

Обычно задачу Неймана нормализуют, добавляя условие:

$$\int_{\Omega} u d\Omega = 0 \quad \text{или} \quad u(x_0) = 0 \text{ в точке } x_0$$

После нормализации решение становится единственным.

Вариационная формулировка

Умножаем на пробную функцию и интегрируем:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v dS$$

Здесь граничное условие естественно входит в правую часть.

Энергетическое пространство

$$H_A = W_2^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

то есть пространство функций из $W_2^1(\Omega)$ с условием нормировки $\int_{\Omega} u \, d\Omega = 0$.
Энергетическое скалярное произведение:

$$[u, v]_A = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega$$

Неравенство Пуанкаре

Теорема (неравенство Пуанкаре):

Для функции $u \in W_2^1(\Omega)$ с условием нулевого среднего значения:

$$\int_{\Omega} u \, d\Omega = 0$$

выполняется:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$$

где константа Пуанкаре C_P зависит от диаметра области Ω .

Для шара радиуса R : $C_P = \frac{R}{\sqrt{\lambda_1}}$, где λ_1 — первое собственное значение оператора Лапласа.

Доказательство неравенства Пуанкаре

Идея: Если u имеет нулевое среднее, то функция не может быть константой, и её значения существенно варьируются по области. Интуитивно, градиент должен быть больше.

Формально, разложим u в ряд по собственным функциям оператора Лапласа:

$$u = \sum_{k=2}^{\infty} c_k \varphi_k$$

(первое слагаемое соответствует константе). Тогда:

$$\|u\|_{L_2}^2 = \sum_{k=2}^{\infty} c_k^2$$

$$\|\nabla u\|_{L_2}^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \geq \lambda_2 \|u\|_{L_2}^2$$

откуда $\|u\|_{L_2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \|\nabla u\|_{L_2}$.

Положительная определённость оператора Неймана

При нормировке $\int_{\Omega} u \, d\Omega = 0$, оператор становится положительно определённым:

$$[u, u]_A = \|\nabla u\|_{L_2}^2 \geq \lambda_2 \|u\|_{L_2}^2$$

где λ_2 — второе собственное значение оператора Лапласа.

Метод Ритца для задачи Неймана

1. Выбираем базисные функции $\{\varphi_k\}$ с условием нулевого среднего:

$$\int_{\Omega} \varphi_k d\Omega = 0$$

2. Ищем приближение $u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$

3. Система уравнений:

$$\sum_{k=1}^n A_{jk} a_k = b_j$$

где $A_{jk} = [\varphi_k, \varphi_j]_A$, $b_j = (f, \varphi_j) + (g, \varphi_j)_{\partial\Omega}$

4. Минимизируем функционал:

$$J(u) = \|\nabla u\|_{L_2}^2 - 2(f, u) - 2(g, u)_{\partial\Omega} \rightarrow \min$$

на подпространстве с нулевым средним.

Примеры приложений

Пример 1: Течение несжимаемой жидкости

Уравнение для давления:

$$-\Delta p = \nabla \cdot f$$

с условием Неймана на твёрдой границе (нормальная компонента скорости равна нулю, что даёт $\partial p / \partial n = 0$ на части границы).

Пример 2: Диффузия с замкнутой системой

Концентрация вещества в замкнутой системе:

$$-D\Delta c = r$$

с условием Неймана на границе (поток = 0): $\partial c / \partial n = 0$.

Дополнительные пояснения

В.: Почему нужно условие совместности для задачи Неймана?

О.: Потому что функция с нулевым нормальным потоком на замкнутой границе может измениться только в результате источников внутри. Если источников нет ($f = 0$) и потока нет ($g = 0$), то функция константа.

В.: Как практически обеспечить нулевое среднее?

О.: Либо выбирать базисные функции с нулевым средним, либо добавить множитель Лагранжа (способ штрафа) в функционал.

В.: В чём отличие констант в неравенствах Фридрихса и Пуанкаре?

О.: Фридрихса: константа связана с линейным размером области. Пуанкаре: константа связана с первым ненулевым собственным значением. Последнее часто меньше, что означает более сильное неравенство.

В.: Почему неравенство Пуанкаре сильнее для функций с нулевым средним?

О.: Потому что условие нулевого среднего исключает константную функцию, которая является критической для оценок норм.

Билет 15. Постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Обобщённое решение

Постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Задача Дирихле на области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g & \text{на границе} \end{cases}$$

где $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — заданная граничная функция.

Физическая интерпретация

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ описывает стационарное состояние в системах без источников: - Распределение температуры в проводнике без источников тепла - Электростатический потенциал в области без зарядов - Давление в установившемся потоке вязкой жидкости

Принцип максимума

Теорема (принцип максимума):

Гармоническая функция (решение $\Delta u = 0$) достигает своего максимума и минимума на границе области.

Следствие: если $g \geq 0$ на $\partial\Omega$, то $u \geq 0$ в Ω .

Единственность классического решения

Теорема:

Если граничные данные g непрерывны, существует единственное классическое решение $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Доказательство: Если u_1 и u_2 — два решения, то $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет:

$$\Delta w = 0, \quad w|_{\partial\Omega} = 0$$

По принципу максимума, $w = 0$. \square

Вариационная формулировка

При формулировке в виде задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u = 0$ (то есть $f = 0$):

Умножим на пробную функцию $v \in W_2^1(\Omega)$ (с нулевыми значениями на границе):

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = 0$$

Энергетическое пространство

Определение: Обобщённым решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа называется функция u такая, что:

$$u|_{\partial\Omega} = g \quad (\text{в смысле следа})$$

и для вспомогательной функции $w = u - \Phi$ (где Φ — гладкое продолжение граничных данных):

$$[w, v]_A = 0 \quad \forall v \in \circ W_2^1(\Omega)$$

Обобщённое решение:

$u \in W_2^1(\Omega)$ такой, что:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = 0 \quad \forall v \in \circ W_2^1(\Omega)$$

и $u - g \in \circ W_2^1(\Omega)$.

Связь с минимизацией энергии

Решение задачи Дирихле минимизирует функционал энергии (Дирихле):

$$D(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega$$

на множестве функций с граничными значениями $u|_{\partial\Omega} = g$.

Существование обобщённого решения

Теорема:

Для любых граничных данных $g \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ существует единственное обобщённое решение $u \in W_2^1(\Omega)$ задачи Дирихле.

Доказательство: Сводится к однородным граничным условиям через вспомогательную функцию Φ . Тогда $w = u - \Phi$ ищется в $\circ W_2^1$ из вариационного уравнения $[w, v]_A = -[\Phi, v]_A$ для всех $v \in \circ W_2^1(\Omega)$.

Регулярность решения

Теорема о регулярности:

Если Ω — выпуклая область с гладкой границей и $g \in W_2^1(\partial\Omega)$ (или выше), то обобщённое решение $u \in W_2^2(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению Лапласа почти всюду:

$$\Delta u = 0 \quad \text{п.в. в } \Omega$$

Метод Ритца для уравнения Лапласа

Приближённое решение ищется в виде $u_n = \Phi_0 + w_n$, где Φ_0 — гладкое продолжение граничных данных, а $w_n \in H_N$ (конечномерное подпространство $\circ W_2^1$):

$$\int_{\Omega} \nabla w_n \cdot \nabla \varphi_k \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \varphi_k \, d\Omega$$

Дополнительные пояснения

В.: Почему уравнение Лапласа называют гармоническим?

О.: Потому что решения (гармонические функции) обладают свойством, что значение в любой точке равно среднему значению по окружающей сфере. Это следует из принципа максимума.

В.: Как определяется след функции на границе?

О.: Для функции из $W_2^1(\Omega)$ существует оператор следа $\gamma_0 : W_2^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$, который ставит в соответствие функции её граничные значения. Он определён почти всюду на границе.

В.: Почему задача Лапласа имеет единственное решение, а задача Пуассона нет (без условий совместности)?

О.: Потому что граничные условия Дирихле полностью определяют поведение функции. При $f = 0$ граничные условия уникально определяют гармоническую функцию внутри.

В.: Зачем нужна вспомогательная функция Φ_0 ?

О.: Она расширяет граничные данные g в область, чтобы можно было искать решение как сумму Φ_0 и функции с нулевыми граничными значениями.

Билет 16. Подходы к решению задачи Дирихле для эллиптического уравнения 2 порядка с неоднородными краевыми условиями

Постановка неоднородной задачи Дирихле

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u = f(x) & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g & \text{на границе} \end{cases}$$

где a_{ij} — симметричные, положительно определённые коэффициенты, $g \neq 0$ — неоднородные граничные данные.

Основные подходы

16.0.1 Подход 1: Сведение к однородным граничным условиям

Предположим, существует гладкая функция $\Phi(x)$ такая, что $\Phi|_{\partial\Omega} = g$.

Положим $u = \Phi + w$, где $w|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда:

$$-\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) + cw = \tilde{f} := f + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) - c\Phi$$

Получается задача с однородными граничными условиями для w .

Преимущество: используются стандартные методы для однородных условий

Недостаток: нужно найти подходящее продолжение Φ

16.0.2 Подход 2: Прямое решение с независящими граничными узлами

При конечно-элементной аппроксимации: - Внутренние узлы сетки: неизвестные функции -

Граничные узлы: задаём значение $u_h = g$ в узлах

Система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ A_{BI} & A_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I \\ f_B \end{pmatrix}$$

где индекс I — внутренние узлы, B — граничные узлы. Полагаем $u_B = g$, решаем:

$$A_{II}u_I = f_I - A_{IB}g$$

Преимущество: просто реализуется, не требует явного продолжения Φ

Недостаток: граничные условия удовлетворяются только в узлах сетки

16.0.3 Подход 3: Метод штрафа (Penalty method)

Модифицируем функционал, добавляя штрафной член:

$$J(u) = [u, u]_A - 2(f, u) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} (u - g)^2 dS$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр штрафа.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение исходной задачи восстанавливается приблизительно.

Преимущество: не требует выбора Φ , универсален

Недостаток: параметр ε нужно подбирать, система плохо обусловлена при малых ε

16.0.4 Подход 4: Метод Лагранжа (Lagrange multipliers)

Вводим множитель Лагранжа λ для условия $u|_{\partial\Omega} = g$:

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = [u, u]_A - 2(f, u) + 2 \int_{\partial\Omega} \lambda(u - g) dS$$

Условия оптимальности:

$$[u, v]_A + \int_{\partial\Omega} \lambda v dS = (f, v) \quad \forall v \in W_2^1$$

$$\int_{\partial\Omega} \mu(u - g) dS = 0 \quad \forall \mu \in L_2(\partial\Omega)$$

Преимущество: точно удовлетворяет граничные условия, даёт физическое значение множителя (тиск/сила на границе)

Недостаток: увеличивает размер системы

16.0.5 Подход 5: Метод поднятия (Lifting)

Явное построение функции Φ через решение вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} -\Delta\Phi = 0 & \text{в } \Omega \\ \Phi|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

(часто просто интерполяция граничных данных).

Преимущество: применимо для любых граничных данных

Недостаток: требует решения дополнительной задачи

Сравнение подходов

Подход	Реализация	Точность	Сложность
Однородные условия	+	++	++
Прямой КЭ	++	+	+
Штраф	++	+	+
Лагранж	++	++	++
Поднятие	+	++	++

Рекомендации по выбору

- Для простых областей и гладких g : сведение к однородным условиям - Для сложных областей: прямой метод КЭ или штраф - Для высокой точности: метод Лагранжа или поднятие - На практике: часто комбинируют методы

Дополнительные пояснения

В.: Почему метод штрафа работает?

О.: Штрафной член растёт как $(u - g)^2/\varepsilon$. При малом ε нарушение условия $u = g$ становится очень дорогим, вынуждая минимизатор удовлетворять условию.

В.: Как выбрать параметр штрафа?

О.: Практически: $\varepsilon \approx h^2$ (где h — шаг сетки). Малые ε дают лучшую точность, но ухудшают обусловленность системы.

В.: Почему метод Лагранжа точнее?

О.: Потому что множитель Лагранжа обеспечивает точное удовлетворение ограничения в оптимальной точке, в то время как штраф только приближительное.

В.: Какой подход лучше всего?

О.: Нет универсального ответа. Выбор зависит от структуры задачи, требуемой точности, доступного ПО и навыков разработчика.

Билет 17. Степенные сплайны нулевой степени дефекта 1. Теоремы аппроксимации

Определение степенного сплайна

На отрезке $[a, b]$ введём сетку узлов:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

Определение: Сплайн степени n дефекта ν (обозначение $S_{n,\nu}$) — функция, которая на каждом подотрезке $[x_i, x_{i+1}]$ является полиномом степени n , а во всех внутренних узлах имеет непрерывные производные до порядка $n - \nu$ включительно.

Сплайны нулевой степени дефекта 1

Сплайн нулевой степени дефекта 1 обозначается $S_{0,1}$ — это кусочно постоянная функция:

$$S_{0,1}(x) = \begin{cases} c_i & x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \dots, N \end{cases}$$

Дефект 1 означает непрерывность нулевого порядка, то есть саму функцию можно разрывать в узлах.

Полнота и линейная независимость

Пространство сплайнов $S_{0,1}$:

$$S_{0,1} = \{s(x) : s \text{ — сплайн степени } 0 \text{ дефекта } 1\}$$

имеет размерность N (число подотрезков). Базис:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0 & x \notin (x_{i-1}, x_i) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N$$

Функции $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ линейно независимы.

Ортогональность в L_2

Базисные функции ортогональны в смысле L_2 :

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} h_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$ — длина i -го подотрезка.

Теоремы аппроксимации

Теорема 1 (аппроксимация в L_p):

Для функции $u \in W_p^1(a, b)$ существует элемент $s \in \mathcal{S}_{0,1}$ такой, что:

$$\|u - s\|_{L_p(a,b)} \leq Ch \|u'\|_{L_p(a,b)}$$

где C — константа, не зависящая от h и u , и $h = \max_i h_i$.

Доказательство (идея): На каждом подотрезке выбираем $s(x) = \bar{u}_i$ (среднее значение u на подотрезке). Затем оцениваем отклонение:

$$|u(x) - \bar{u}_i| \leq \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u(x) - u(\xi)| d\xi \leq h_i \|u'\|_{L_\infty}$$

Интегрируя и применяя неравенство Гельдера, получаем оценку.

Теорема 2 (аппроксимация в $C(\Omega)$):

Для функции $u \in C^1[a, b]$ существует $s \in \mathcal{S}_{0,1}$ такой, что:

$$\|u - s\|_{C(a,b)} \leq Ch \|u'\|_{C(a,b)}$$

Оптимальность оценок

Полученные оценки $O(h)$ оптимальны для сплайнов нулевой степени. Для лучшей аппроксимации нужны сплайны более высокой степени (кусочно-линейные, квадратичные и т.д.).

Пространство сплайнов в энергетическом методе

Для применения метода Рунта с кусочно-постоянными сплайнами нужно использовать их в роли пробных функций для вариационных уравнений. Однако, поскольку сплайны нулевой степени не дифференцируемы, их прямое использование затруднено.

Более практичны следующие сплайны дефекта 0 (непрерывные) для вариационных методов.

Расширенное пространство базиса

Используя оператор масс-консистентного проектирования, можно работать с кусочно-постоянными функциями в численных схемах (например, в методе конечных объёмов).

Дополнительные пояснения

В.: Почему дефект = 1 для кусочно-постоянной функции?

О.: Потому что непрерывность нулевого порядка означает непрерывность самой функции. Дефект 1 означает, что имеем непрерывность на один порядок ниже, то есть функция может быть разрывной.

В.: Где используются кусочно-постоянные сплайны?

О.: В методе конечных объёмов, в аппроксимации разрывных функций, в методах для уравнений гиперболического типа.

В.: Почему оценка аппроксимации $O(h)$, а не лучше?

О.: Потому что сплайн степени 0 — это локально постоянная функция. Чтобы приблизить гладкую функцию с точностью $O(h^k)$, нужен сплайн степени не менее $k - 1$.

В.: Как улучшить точность аппроксимации?

О.: Использовать сплайны более высокой степени: линейные (степень 1), квадратичные (степень 2) и т.д. Кусочно-линейные сплайны дают точность $O(h^2)$ в L_2 и $O(h)$ в норме W_2^1 .

Билет 18. Степенные сплайны дефекта 1. Основные теоремы аппроксимации сплайнами первой степени

Кусочно-линейные сплайны

На сетке $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ определим кусочно-линейные функции:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_i} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Пространство кусочно-линейных сплайнов дефекта 1 (непрерывных):

$$\mathcal{S}_{1,1} = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N\}$$

размерности $N + 1$.

Базовые свойства

1. **Базис интерполяции:** $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$
2. **Носитель:** $\text{supp} \varphi_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ (содержит максимум два подотрезка)
3. **Полнота:** система $\{\varphi_k\}$ полна в $C[a, b]$
4. **Ортогональность в энергии:** Для оператора с диагональными коэффициентами функции почти ортогональны в энергетической норме.

Главная теорема аппроксимации (Теорема 1)

Теорема (аппроксимация в норме W_2^1):

Для функции $u \in W_2^2(a, b)$ существует кусочно-линейная функция $s_N(x) \in \mathcal{S}_{1,1}$ такая, что:

$$\|u - s_N\|_{L_2(a,b)} \leq C_1 h^2 \|u''\|_{L_2(a,b)}$$

$$\|u' - s'_N\|_{L_2(a,b)} \leq C_2 h \|u''\|_{L_2(a,b)}$$

где константы C_1, C_2 не зависят от h и u , и $h = \max_i h_i$.

Доказательство (идея): На каждом подотрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция u аппроксимируется линейной интерполяцией $L_i(x)$. Локальная оценка погрешности:

$$|u(x) - L_i(x)| \leq \frac{h_i^2}{8} \max_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} |u''(\xi)|$$

Суммирование по всем подотрезкам и применение неравенства Коши-Буняковского дают глобальную оценку.

Теорема 2: аппроксимация в C -норме

Теорема:

Для функции $u \in C^2[a, b]$ существует $s_N \in \mathcal{S}_{1,1}$ такая, что:

$$\|u - s_N\|_{C(a,b)} \leq Ch^2 \|u''\|_{C(a,b)}$$

$$\|u' - s'_N\|_{C(a,b)} \leq Ch \|u''\|_{C(a,b)}$$

Оптимальный выбор интерполянта

Наиболее естественный выбор — интерполяция по узлам:

$$s_N(x) = \sum_{i=0}^N u(x_i) \varphi_i(x)$$

Этот выбор даёт оптимальные константы в оценках и максимальную точность.

Энергетическое скалярное произведение

Для задачи Штурма-Лиувилля энергетическое скалярное произведение между базисными функциями:

$$[\varphi_i, \varphi_j]_A = \int_a^b [p(x) \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)] dx$$

Матрица $A_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_A$ является трёхдиагональной (так как носители функций пересекаются только в соседних узлах).

Применение к методу Рунге

При использовании кусочно-линейных сплайнов в методе Рунге:

1. Приближённое решение: $u_N = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(x)$
2. Система уравнений $\hat{A}a = b$ имеет трёхдиагональную матрицу
3. Сходимость: $\|u - u_N\|_{W_2^1} \leq Ch \|f\|_{L_2}$ (скорость $O(h)$)
4. По L_2 -норме: $\|u - u_N\|_{L_2} \leq Ch^2 \|f\|_{L_2}$ (скорость $O(h^2)$)

Сравнение с полиномами

	Кусочно-линейные	Глобальные полиномы
Условие обусловленности	хорошо	плохо при $N \rightarrow \infty$
Локальность поддержки	хорошо	нет
Простота	хорошо	сложновато
Требуемые знания	стандартные	специальные

Дополнительные пояснения

В.: Почему в W_2^1 норме сходимость $O(h)$, а в L_2 норме $O(h^2)$?

О.: Потому что ошибка в производной больше, чем ошибка в самой функции. Это связано с регулярностью оператора и свойствами двойственности.

В.: Как выбрать сетку для оптимальной аппроксимации?

О.: Для гладких функций подходит равномерная сетка. Для функций с сингулярностями используют адаптивные сетки, сгущающиеся в проблемных областях.

В.: Почему матрица системы трёхдиагональна?

О.: Потому что носители соседних базисных функций перекрываются только с одним соседом слева и одним справа. Далёкие функции не коррелированы.

В.: Как это обобщается на двумерные области?

О.: На треугольной или четырёхугольной сетке используются билинейные (на прямоугольниках) или линейные (на треугольниках) базисные функции. Структура результирующей матрицы становится более сложной, но остаётся разреженной.

Билет 19. Применение сплайн-аппроксимации в методе Ритца для получения приближённых решений

Интеграция сплайнов и метода Ритца

Метод Ритца с кусочно-линейными сплайнами представляет собой практический численный метод для решения краевых задач. Это фактически приводит к методу конечных элементов в его простейшей форме.

Алгоритм

Шаг 1: Дискретизация области

На отрезке $[a, b]$ введём сетку:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Шаг 2: Выбор базиса

Используем кусочно-линейные базисные функции:

$$\varphi_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

с условием граничных условий (для задачи Дирихле $u(a) = u(b) = 0$ берём φ_0, φ_N не в базис, или используем подпространство с нулевыми значениями на границе).

Шаг 3: Построение системы

Рассмотрим вариационное уравнение:

$$[u_N, \varphi_j]_A = (f, \varphi_j) \quad \forall j$$

где $u_N = \sum_k a_k \varphi_k$.

Получается система:

$$\sum_k A_{jk} a_k = b_j$$

Шаг 4: Сборка матрицы

Элементы матрицы вычисляются как:

$$A_{jk} = [\varphi_k, \varphi_j]_A = \int_a^b [p(x) \varphi_k' \varphi_j' + q(x) \varphi_k \varphi_j] dx$$

Интегралы можно вычислять точно (для простых коэффициентов) или численно (квадратурные формулы).

Шаг 5: Вычисление правой части

$$b_j = (f, \varphi_j) = \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx$$

Шаг 6: Решение системы

Матрица A трёхдиагональна, можно решить быстрым алгоритмом прогонки ($O(N)$ операций).

Шаг 7: Интерпретация решения

Коэффициенты a_k — это приближённые значения $u_N(x_k)$ в узлах сетки.

Практический пример: задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим задачу:

$$-u'' = f, \quad u(0) = u(1) = 0$$

Энергетическое скалярное произведение:

$$[u, v]_A = \int_0^1 u' v' dx$$

Матричные элементы для равномерной сетки с шагом $h = 1/N$:

На подотрезке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i' \varphi_i' dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx = \frac{1}{h}$$

Вычисляя все интегралы, получаем классическую трёхдиагональную матрицу:

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Правая часть:

Для интегралов (f, φ_i) часто используют квадратурные формулы.

Оценки погрешности

Для решения $u \in W_2^2$ и приближения u_N :

$$\|u - u_N\|_{W_2^1} \leq Ch \|u\|_{W_2^2}$$

Умножая на константу регулярности оператора и норму источника, можно получить:

$$\|u - u_N\|_{W_2^1} \leq Ch \|f\|_{L_2}$$

Вычислительные особенности

1. **Локальность вычислений:** матрица редко заполнена, можно организовать эффективное хранение
2. **Простота сборки:** матрица собирается из локальных вкладов каждого элемента
3. **Условие совместимости размеров:** норма матрицы растёт как $O(1/h^2)$, число обусловленности как $O(1/h^2)$
4. **Сходимость:** при уменьшении h решение сходится к точному

Расширение на системы ОДУ

Для систем уравнений базисные функции принимают векторные значения, но процедура остаётся принципиально той же.

Переход к двумерным задачам

На прямоугольной или треугольной сетке используются билинейные (на прямоугольниках) или линейные (на треугольниках) базисные функции. Идея остаётся прежней, но вычисления становятся сложнее.

Дополнительные пояснения

В.: Почему этот метод называют методом конечных элементов?

О.: Потому что каждый подотрезок рассматривается как "конечный элемент" с базисными функциями, определёнными локально.

В.: Как на практике вычисляются интегралы A_{jk} и b_j ?

О.: Для полиномиальных коэффициентов часто вычисляют точно аналитически. В общем случае используют численное интегрирование (формулы Гаусса и т.д.).

В.: Какова сложность решения получившейся системы?

О.: $O(N)$ операций с методом прогонки для трёхдиагональной матрицы. Без использования специальной структуры матрицы потребовалось бы $O(N^3)$ операций.

В.: Как выбрать размер сетки?

О.: В адаптивных методах сетка уплотняется в областях большой ошибки. Для простых задач достаточно равномерной сетки и апостериорной оценки погрешности.

Билет 20. Билинейные сплайны в плоской области и их применение к построению приближённого решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Определение билинейного сплайна

На прямоугольной области $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ введём равномерную сетку:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_x} = a, \quad h_x = a/N_x$$

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{N_y} = b, \quad h_y = b/N_y$$

Базисные функции

На каждом прямоугольнике $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ функция билинейна:

$$Q_{ij}(x, y) = \varphi_i(x)\psi_j(y)$$

где φ_i и ψ_j — кусочно-линейные функции одной переменной:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_x} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_x} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и аналогично для $\psi_j(y)$.

Базис пространства билинейных сплайнов

Полное семейство базисных функций:

$$Q_{ij}(x, y) = \varphi_i(x)\psi_j(y), \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_y$$

Пространство:

$$\mathcal{S}_{1,1}^{(2)} = \text{span}\{Q_{ij} : 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y\}$$

Размерность: $(N_x + 1)(N_y + 1)$.

Свойства базисных функций

1. **Интерполяция:** $Q_{ij}(x_k, y_l) = \delta_{ik}\delta_{jl}$

2. **Локальный носитель:** $\text{supp} Q_{ij} = [x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]$ (максимум четыре соседних прямоугольника)

3. **Непрерывность:** функции непрерывны во всей области

4. **Частные производные:**

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x} = \varphi'_i(x)\psi_j(y), \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial y} = \varphi_i(x)\psi'_j(y)$$

(кусочно-постоянные в каждой переменной)

Энергетическое скалярное произведение

Для задачи Лапласа с условиями Дирихле:

$$[u, v]_A = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

Построение приближённого решения

Шаг 1: Дискретизуем граничные условия. Пусть $u|_{\partial\Omega} = g$. Берём узлы на границе и полагаем:

$$a_{ij} = g(x_i, y_j) \quad \text{для граничных узлов}$$

Шаг 2: Для внутренних узлов выписываем вариационное уравнение:

$$[u_h, Q_{kl}]_A = 0 \quad \text{для внутренних } (k, l)$$

(так как $f = 0$ для уравнения Лапласа).

Шаг 3: Подставляя $u_h = \sum_{i,j} a_{ij} Q_{ij}$, получаем систему линейных уравнений для неизвестных a_{ij} внутри области.

Явный вид системы уравнений

Для равномерной сетки и уравнения Лапласа, интегрируя по частям и учитывая граничные условия, получаем:

$$a_{k+1,l} + a_{k-1,l} + a_{k,l+1} + a_{k,l-1} - 4a_{k,l} = 0$$

(стандартное пятиточечное разностное соотношение).

Это соотношение верно для внутренних узлов; на границе полагаем известные значения.

Теоремы аппроксимации

Теорема 1:

Для функции $u \in C^2(\bar{\Omega})$ существует билинейная сплайн-функция $u_h \in \mathcal{S}_{1,1}^{(2)}$ такая, что:

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C(h_x^2 + h_y^2)\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \max(h_x, h_y)\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})}$$

Теорема 2 (сходимость для задачи Дирихле):

Если $u \in W_2^2(\Omega)$ — решение задачи Лапласа, то приближённое решение u_h удовлетворяет:

$$\|u - u_h\|_{W_2^1(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

где $h = \max(h_x, h_y)$.

Матричная структура системы

Матрица системы для внутренних узлов имеет блочную трёхдиагональную структуру (для упорядочивания узлов по строкам сетки):

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & 0 & \dots \\ -I & T & -I & \dots \\ 0 & -I & T & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

где T — трёхдиагональная матрица размера $N_x \times N_x$, I — единичная матрица.

Пример: прямоугольная область

На единичном квадрате $[0, 1]^2$ с равномерной сеткой $N \times N$ и условиями Дирихле $u|_{\partial\Omega} = 0$:

1. Количество внутренних узлов: $(N - 1)^2$
2. Размер системы: $(N - 1)^2 \times (N - 1)^2$
3. Число ненулевых элементов в матрице: $O(N^2)$ (матрица разреженная)
4. Для решения можно использовать методы для разреженных систем (ILU, CG, GMRES и т.д.)

Дополнительные пояснения

В.: Почему используются именно билинейные функции?

О.: Потому что они являются минимально необходимыми для лучшей аппроксимации (степень 1 в каждой переменной). Более высокие степени усложняют вычисления без значительного улучшения.

В.: Как изменяется система при неравномерной сетке?

О.: Коэффициенты становятся разными, но структура остаётся блочной трёхдиагональной. Вычисления усложняются, но принцип не меняется.

В.: Какова сложность решения системы?

О.: Для $(N - 1)^2$ неизвестных полная гауссова элиминация даёт $O(N^6)$ операций. Специализированные методы (блочные прогонки, многосеточные методы) снижают это до $O(N^3)$ или даже $O(N^2 \log N)$.

В.: Как обобщить на более сложные области?

О.: Используется триангуляция области и линейные базисные функции на треугольниках (вместо билинейных на прямоугольниках). Это метод конечных элементов на неструктурированной сетке.

Билет 21. Построение проекционной-сеточной схемы для краевой задачи для ОДУ 2 порядка. Анализ сходимости в L_2 и W_2^1

Постановка задачи

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), & x \in (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

где $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $f \in L_2(a, b)$.

Пространство энергии

$$H_A = {}^\circ W_2^1(a, b) := \{u \in W_2^1(a, b) : u(a) = u(b) = 0\}$$

$$[u, v]_A = \int_a^b [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx$$

Вариационная формулировка

Найти $u \in H_A$ такой, что:

$$[u, v]_A = (f, v)_{L_2} \quad \forall v \in H_A$$

Проекционная-сеточная схема

Вводим сетку на $[a, b]$ с шагом $h = (b - a)/N$:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Конечномерное подпространство:

$$H_h = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}\}$$

где φ_i — кусочно-линейные функции с $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Приближённое решение ищется в виде:

$$u_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \varphi_i(x)$$

где $u_i = u_h(x_i)$ — значения в узлах.

Дискретная система

Вариационное уравнение на подпространстве:

$$[u_h, \varphi_j]_A = (f, \varphi_j) \quad \forall j = 1, \dots, N-1$$

приводит к системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N-1} A_{ji} u_i = b_j, \quad j = 1, \dots, N-1$$

где:

$$A_{ji} = [\varphi_i, \varphi_j]_A, \quad b_j = \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx$$

Матричная структура для равномерной сетки

При равномерной сетке и постоянных коэффициентах получается трёхдиагональная система:

$$A_{jj} = \frac{2p}{h} + \frac{qh}{3}, \quad A_{j,j\pm 1} = -\frac{p}{h} + \frac{qh}{6}$$

Теорема о сходимости в W_2^1

Теорема:

Пусть $u \in W_2^2(a, b)$ — точное решение, u_h — решение дискретной схемы. Тогда:

$$\|u - u_h\|_{W_2^1(a,b)} \leq Ch \|u\|_{W_2^2(a,b)} \leq Ch \|f\|_{L_2(a,b)}$$

Доказательство (идея):

1. **Оптимальность в энергии:**

$$|u - u_h|_A = \inf_{v_h \in H_h} |u - v_h|_A$$

2. **Аппроксимация линейных функций:**

$$\inf_{v_h} |u - v_h|_A \leq Ch \|u\|_{W_2^2}$$

(следует из аппроксимационных свойств кусочно-линейных функций).

3. **Эквивалентность норм:**

$$|u|_A \sim \|u\|_{W_2^1}$$

(следует из положительной определённости оператора и неравенства Фридрихса).

Объединяя эти факты, получаем требуемую оценку.

Теорема о сходимости в L_2

Теорема (двойственность):

Под дополнительным условием регулярности (если $u \in W_2^2$ для любой $f \in L_2$):

$$\|u - u_h\|_{L_2(a,b)} \leq Ch^2 \|f\|_{L_2(a,b)}$$

Доказательство (метод Nitsche):

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$-\frac{d}{dx} \left(p \frac{d\Phi}{dx} \right) + q\Phi = u - u_h$$

По регулярности: $\|\Phi\|_{W_2^2} \leq C \|u - u_h\|_{L_2}$.

Затем:

$$\|u - u_h\|_{L_2}^2 = [\Phi, u - u_h]_A = [\Phi - \Phi_h, u - u_h]_A \leq |\Phi - \Phi_h|_A \cdot |u - u_h|_A$$

Оценивая обе нормы справа и используя $|u - u_h|_A \leq Ch \|f\|_{L_2}$, получаем результат.

Практическое значение оценок

- Сходимость $O(h)$ в W_2^1 гарантирует надёжность вычисления производных - Сходимость $O(h^2)$ в L_2 означает быстрое уменьшение глобальной ошибки - Для достижения точности ε требуется $h \sim \sqrt{\varepsilon}$, то есть $N \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$

Адаптивные сетки

Для области с неоднородным решением можно использовать адаптивные сетки, сгущающиеся там, где $|u''|$ велико. Это повышает скорость сходимости и снижает общий объём вычислений.

Дополнительные пояснения

В.: Почему в L_2 норме ошибка $O(h^2)$, а в W_2^1 норме только $O(h)$?

О.: Потому что норма W_2^1 учитывает производные. Ошибка в производных больше, чем в самой функции. Это компенсируется благодаря регулярности оператора (метод двойственности).

В.: Как выбрать размер сетки для требуемой точности?

О.: Из оценки $\|u - u_h\|_{L_2} \leq Ch^2 \|f\|$. Если требуется точность 10^{-4} , и $\|f\| \approx 1$, то нужно $h^2 \leq 10^{-5}$, откуда $h \leq 0.003$, то есть примерно 300 узлов на отрезок $[0, 1]$.

В.: Какова роль условия регулярности?

О.: Регулярность (эллиптическая регулярность) гарантирует, что решение достаточно гладко ($u \in W_2^2$) при $f \in L_2$. Без этого L_2 оценка может быть хуже.

В.: Можно ли использовать этот анализ для систем ОДУ?

О.: Да, с соответствующей модификацией (матричные коэффициенты, векторные неизвестные). Основная идея остаётся прежней.

Билет 22. Построение проекционной-сеточной схемы для задачи Дирихле для эллиптического уравнения 2 порядка. Анализ сходимости в L_2 и W_2^1

Постановка задачи

На области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с гладкой границей:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u = f(x) & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

где матрица (a_{ij}) симметрична и положительно определена.

Вариационная формулировка

Энергетическое пространство:

$$H_A = {}_0W_2^1(\Omega)$$

Вариационное уравнение:

$$[u, v]_A = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in H_A$$

где:

$$[u, v]_A = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv \right] d\Omega$$

Триангуляция области

Покрываем область Ω триангуляцией \mathcal{T}_h :

$$\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

где каждый элемент T — симплекс (треугольник в \mathbb{R}^2 , тетраэдр в \mathbb{R}^3).

Параметр триангуляции: $h = \max_T \text{diam}(T)$.

Пространство конечных элементов

На каждом треугольнике T используем линейные функции:

$$v|_T(x, y) = a_T + b_T x + c_T y$$

Глобальное пространство:

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_T \text{ — линейна для всех } T \in \mathcal{T}_h, v_h|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Размерность: количество внутренних узлов триангуляции.

Базисные функции

Для каждого внутреннего узла x_i определяем базисную функцию φ_i :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \text{на каждом элементе } \varphi_i \text{ линейна}$$

Носитель: объединение всех треугольников, содержащих узел x_i .

Дискретная схема

Приближённое решение:

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i(x)$$

где N_h — количество внутренних узлов.

Система уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N_h} A_{ij} u_j = b_i, \quad i = 1, \dots, N_h$$

где:

$$A_{ij} = [\varphi_j, \varphi_i]_A, \quad b_i = (f, \varphi_i)_{L_2}$$

Вычисление матричных элементов

Матрица A собирается суммированием вкладов от каждого элемента:

$$A_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A_{ij}^T$$

где локальный вклад:

$$A_{ij}^T = \int_T \left[\sum_{k,l} a_{kl} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_l} + c \varphi_i \varphi_j \right] dT$$

На каждом элементе градиенты $\nabla \varphi_i$ и $\nabla \varphi_j$ постоянны.

Свойства матрицы системы

1. **Симметрия:** $A_{ij} = A_{ji}$
2. **Положительная определённость:** следует из положительной определённости оператора
3. **Разреженность:** $A_{ij} \neq 0$ только если φ_i и φ_j имеют пересекающиеся носители
4. **Масштабирование:** $\|A\| \sim O(1/h^2)$

Теорема о сходимости в W_2^1

Теорема:

Пусть триангуляция регулярна (все углы ограничены снизу положительной константой), и пусть $u \in W_2^2(\Omega)$. Тогда:

$$\|u - u_h\|_{W_2^1(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq Ch \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

Идея доказательства:

1. Оптимальность приближения в энергии: $|u - u_h|_A \leq \inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_A$
2. Интерполяция: берём интерполянта $I_h u \in V_h$ и оцениваем $|u - I_h u|_A \leq Ch \|u\|_{W_2^2}$
3. Эквивалентность норм: $|u|_A \approx \|u\|_{W_2^1}$

Теорема о сходимости в L_2

Теорема (Nitsche trick):

При регулярности оператора ($u \in W_2^2$ для $f \in L_2$):

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2 \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

Идея: Вводим вспомогательную задачу с правой частью $(u - u_h)$, используем регулярность и ортогональность ошибки в энергии.

Практические рекомендации

- **Качество сетки:** избегать острых углов в треугольниках (минимальный угол $> 20^\circ$)
- **Адаптивная сетка:** сгущать сетку в областях с большой ошибкой (оцениваемой через локальные невязки)
- **Система уравнений:** для больших систем использовать итеративные методы с предобусловливанием (PCG, GMRES)

Многосеточные методы

Для эффективного решения системы можно использовать многосеточные методы, которые снижают сложность с $O(N^2)$ (итеративные методы) до $O(N)$.

Дополнительные пояснения

В.: Почему требуется регулярность триангуляции?

О.: Острые углы приводят к плохой аппроксимационной способности линейных функций и плохой обусловленности матрицы системы.

В.: Как практически вычислить интегралы A_{ij} ?

О.: Обычно аналитически на каждом элементе (градиенты линейных функций постоянны), либо численно с помощью квадратурных формул.

В.: Каковы требования к размеру сетки?

О.: Из оценки $\|u - u_h\|_{L_2} \leq Ch^2\|f\|$. Для получения точности ε нужно $h \sim \sqrt{\varepsilon}$. На практике используют апостериорные оценки ошибки для адаптивного уточнения.

В.: Как эта теория распространяется на неструктурированные сетки?

О.: Основные результаты остаются верны, но константы в оценках могут зависеть от параметра регулярности триангуляции (отношения наибольшего размера к наименьшему).

Билет 23. Задача на собственные значения для симметрического полуограниченного дифференциального оператора

Постановка спектральной задачи

Рассмотрим спектральную задачу в гильбертовом пространстве H :

$$Au = \lambda u, \quad u \in D(A), \quad u \neq 0$$

где A — симметричный оператор, полуограниченный снизу (то есть $\exists k \in \mathbb{R}: (Au, u) \geq k\|u\|^2$).

Пример: задача Штурма-Лиувилля

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = \lambda \rho(x)u, \quad u(a) = u(b) = 0$$

где λ — собственное значение, u — собственная функция.

Эквивалентная вариационная постановка:

$$\int_a^b [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx = \lambda \int_a^b \rho(x)u(x)v(x) dx$$

Основные свойства собственных значений

Свойство 1: вещественность

Для симметричного оператора все собственные значения вещественны.

Доказательство: Если $Au = \lambda u$, то $(Au, u) = \lambda(u, u)$. Левая часть вещественна (симметричность), поэтому и λ вещественна.

Свойство 2: ортогональность собственных функций

Собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (u_1, u_2) = 0$$

Доказательство: Из $Au_1 = \lambda_1 u_1$ и $Au_2 = \lambda_2 u_2$:

$$\lambda_1(u_1, u_2) = (Au_1, u_2) = (u_1, Au_2) = \lambda_2(u_1, u_2)$$

откуда $(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0$, следовательно $(u_1, u_2) = 0$.

Свойство 3: минимизация функционала Рэлея

Первое (минимальное) собственное значение:

$$\lambda_1 = \min_{u \neq 0} \frac{(Au, u)}{(u, u)} = \min_{u \neq 0} R(u)$$

где $R(u)$ — функционал Рэлея.

n -е собственное значение:

$$\lambda_n = \min \left\{ \frac{(Au, u)}{(u, u)} : u \perp u_1, \dots, u_{n-1} \right\}$$

Теорема о спектре положительно определённого оператора

Теорема:

Пусть A — положительно определённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Тогда:

1. Спектр A дискретен: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$
2. Существует полная ортонормированная система собственных функций:

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} : \quad Au_n = \lambda_n u_n, \quad (u_i, u_j) = \delta_{ij}$$

3. Любой элемент $u \in H$ разлагается в ряд Фурье:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n) u_n \quad (\text{сходится в норме } H)$$

Мультипликативное неравенство

Для собственных функций:

$$(Au_n, u_n) = \lambda_n (u_n, u_n)$$

Из положительной определённости:

$$\lambda_n \geq \lambda_1 > 0$$

Скорость роста собственных значений зависит от гладкости области и регулярности коэффициентов.

Приложения к краевым задачам

Пример 1: задача на отрезке

Для $-u'' = \lambda u$, $u(0) = u(1) = 0$:

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad u_n(x) = \sin(n\pi x)$$

Пример 2: задача на прямоугольнике

Для $-\Delta u = \lambda u$ на $(0, a) \times (0, b)$ с условиями Дирихле:

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Асимптотика собственных значений

По теореме Вейля для оператора Лапласа в размерности m :

$$\lambda_n \sim \left(\frac{n}{V(m)} \right)^{2/m} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

где $V(m)$ — нормированный объём области.

Полнота системы собственных функций

Ключевой вопрос: образует ли система $\{u_n\}$ полную систему в пространстве H ?

Ответ: Для положительно определённого оператора в сепарабельном пространстве — да. Это позволяет развивать теорию рядов Фурье по собственным функциям.

Дополнительные пояснения

В.: Что означает "полуограниченный снизу"?

О.: Означает, что оператор ограничен снизу константой k , но может быть не ограничен сверху. Для положительно определённого оператора $k > 0$.

В.: Почему полнота системы важна?

О.: Потому что она гарантирует, что любое решение можно представить в виде ряда по собственным функциям. Это основа спектральных методов.

В.: Как используются собственные функции в численных методах?

О.: В методе конечных элементов с собственными функциями в качестве базиса можно достичь очень высокой точности. Они образуют естественный базис для оператора.

В.: Почему скорость роста λ_n зависит от размерности?

О.: Потому что при увеличении размерности область объёма V "становится тоньше" в некотором смысле, что приводит к более быстрому росту собственных значений.

Билет 24. Вариационная постановка задачи на собственные значения симметричного положительного операторного уравнения. Приложение к основным задачам математической физики

Обобщённая спектральная задача

Рассмотрим обобщённую вариационную задачу на собственные значения:

$$Au = \lambda Bu$$

где: - A — симметричный, положительно определённый оператор - B — симметричный, положительно определённый оператор - $D(A) \subset D(B)$

Вариационная формулировка

В обозначениях энергетических норм задача эквивалентна:

$$\frac{(Au, u)}{(Bu, u)} \rightarrow \text{экстремум}$$

Первое собственное значение:

$$\lambda_1 = \min_{u \neq 0} \frac{(Au, u)}{(Bu, u)}$$

n -е собственное значение (определяется минимизацией на ортогональном дополнении к первым $n - 1$ собственным функциям в смысле скалярного произведения $(B\cdot, \cdot)$):

$$\lambda_n = \min \left\{ \frac{(Au, u)}{(Bu, u)} : (Bu, u_k) = 0, k = 1, \dots, n - 1 \right\}$$

Пример 1: Задача Штурма-Лиувилля

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = \lambda \rho(x)u$$

Здесь:

$$(Au, v) = \int_a^b [pu'v' + quv] dx, \quad (Bu, v) = \int_a^b \rho uv dx$$

Функция $\rho(x)$ — весовая функция (плотность материала, теплоёмкость и т.д.).

Вариационная постановка:

$$\lambda = \frac{\int_a^b [p(u')^2 + qu^2] dx}{\int_a^b \rho u^2 dx}$$

Пример 2: Колебания мембраны

На области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$-\Delta u = \lambda \rho(x)u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

где $\rho(x)$ — плотность мембраны.

Вариационная форма:

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega}{\int_{\Omega} \rho u^2 d\Omega}$$

Собственные значения — квадраты частот колебаний, собственные функции — формы колебаний.

Пример 3: Задача на собственные значения Штурма-Лиувилля 4-го порядка

Уравнение колебаний балки:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \lambda \rho u$$

с граничными условиями (защемление на концах).

Вариационная постановка:

$$\lambda = \frac{\int_0^L EI (u'')^2 dx}{\int_0^L \rho u^2 dx}$$

Пример 4: Волноводный уравнение

Для распространения волн в волноводе:

$$-\Delta_{\perp} u - \frac{d^2 u}{dz^2} = \lambda u$$

Разделение переменных $u(x, y, z) = U(x, y)e^{i\lambda z}$ даёт:

$$-\Delta_{\perp} U = (\lambda - \omega^2)U$$

где λ — дисперсионное соотношение.

Свойства спектра обобщённой задачи

Теорема:

Для обобщённой спектральной задачи с положительно определёнными A и B :

1. Все собственные значения положительны: $\lambda_n > 0$
2. Собственные функции образуют B -ортонормированный базис:

$$(Bu_i, u_j) = \delta_{ij}$$

3. Спектр дискретен и стремится к бесконечности:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$$

4. Любой элемент разлагается в ряд по собственным функциям (в смысле A -нормы)

Применение к физическим задачам

Задача	Оператор A	Оператор B
Продольные колебания	$pu'v'$	ρuv
Поперечные колебания	$EIu''v''$	ρuv
Волны в струне	$Tu'v'$	ρuv
Волны в среде	$\int \nabla u \cdot \nabla v$	$\int c^2 uv$

где p, ρ — коэффициенты, EI — жёсткость, T — натяжение, c — скорость волны.

Дополнительные пояснения

В.: Почему функция Рэля имеет именно такой вид?

О.: Потому что его критические точки — это в точности обобщённые собственные значения и собственные функции. Это глубокая связь между оптимизацией и спектральной теорией.

В.: Как практически вычислить несколько первых собственных значений?

О.: Методом Ритца: аппроксимировать подпространством конечной размерности и решить получившуюся конечномерную обобщённую задачу на собственные значения.

В.: Почему весовая функция ρ важна?

О.: Потому что она отражает физические свойства системы (плотность, теплоёмкость и т.д.). Различные ρ приводят к разным спектрам.

В.: Как выбрать начальное приближение для итеративного поиска собственного значения?

О.: Использовать формулу Рэля с хорошим начальным приближением к собственной функции. Метод степенных итераций сходится к доминирующему собственному значению.

Билет 25. Метод Ритца в проблеме вычисления собственных значений задачи Дирихле

Постановка задачи на собственные значения

Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

или в вариационной форме:

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega}{\int_{\Omega} u^2 d\Omega}$$

Метод Ритца для спектральной задачи

Вместо точного пространства $H_A = \circ W_2^1(\Omega)$, выбираем конечномерное подпространство:

$$H_n = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$$

Ищем приближённое решение в виде:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$$

Вариационная формулировка на подпространстве

Функционал Рэлея на подпространстве:

$$R_n(u_n) = \frac{\sum_{i,j} a_i a_j [\varphi_i, \varphi_j]_A}{\sum_{i,j} a_i a_j (\varphi_i, \varphi_j)}$$

Минимизация даёт обобщённую спектральную задачу:

$$\boxed{\widehat{A}a = \lambda \widehat{M}a}$$

где:

$$\widehat{A}_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_A = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega$$

$$\widehat{M}_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_{L_2} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega$$

Матричный вид дискретной задачи

Дискретная задача на собственные значения:

$$\widehat{A}a = \lambda \widehat{M}a$$

Здесь: - \widehat{A} — матрица жёсткости (stiffness matrix) - \widehat{M} — матрица масс (mass matrix) - λ — приближённое собственное значение - a — компоненты приближённой собственной функции

Свойства матриц

1. **Симметрия:** обе матрицы симметричны
2. **Положительная определённость:** \widehat{A} и \widehat{M} положительно определены
3. **Разреженность:** особенно для конечно-элементных базисов
4. **Обусловленность:** число обусловленности \widehat{A} и \widehat{M} растёт с уменьшением h

Решение дискретной задачи

Обобщённую спектральную задачу можно свести к стандартной:

$$\widehat{M}^{-1} \widehat{A}a = \lambda a$$

или через разложение Холецкого $\widehat{M} = LL^T$:

$$L^{-T} \widehat{A} L^{-1} b = \lambda b, \quad a = L^{-1} b$$

Для вычисления собственных значений используют: - Метод степенных итераций (для первого собственного значения) - QR-алгоритм (для нескольких собственных значений) - Методы Ланцоша или Арнольди (для больших разреженных матриц)

Теорема о сходимости приближённых собственных значений

Теорема:

Пусть $\lambda_k^{(h)}$ — k -е собственное значение дискретной задачи, полученное методом Ритца с сетку с параметром h . Тогда при $h \rightarrow 0$:

$$\lambda_k^{(h)} \rightarrow \lambda_k \quad \text{и} \quad |\lambda_k^{(h)} - \lambda_k| \leq C_k h^2$$

где λ_k — точное собственное значение, C_k — константа, зависящая от k .

Идея доказательства:

1. Фиксируем k и рассматриваем подпространство, натянутое на первые k собственных функций точной задачи
2. Функция Рэлея на этом подпространстве минимизируется на λ_k
3. При уменьшении h пространство H_n приближается к точному пространству, и минимум функции Рэлея приближается к λ_k
4. Скорость сходимости зависит от аппроксимационных свойств подпространства (обычно $O(h^2)$ в L_2 для линейных элементов)

Сходимость собственных функций

Наряду с собственными значениями, собственные функции также сходятся:

$$\|u_k - u_k^{(h)}\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2 \|u_k\|_{W_2^2(\Omega)}$$

где $u_k^{(h)}$ — приближённая собственная функция, u_k — точная.

Практическая реализация

Алгоритм метода Ритца:

1. Построить сетку на области Ω (триангуляция)
2. Выбрать пространство конечных элементов H_n (например, кусочно-линейные функции)
3. Вычислить матрицы жёсткости и масс:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega, \quad M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega$$

4. Решить обобщённую спектральную задачу $\hat{A}a = \lambda \hat{M}a$
5. Интерпретировать решение: собственные значения λ и собственные функции $u_n = \sum_k a_k \varphi_k$

Примеры приложений

1. **Нахождение частот собственных колебаний** мембраны или пластины
2. **Анализ устойчивости** в проблемах конвекции Рэлея-Бенара
3. **Вычисление критических нагрузок** при потере устойчивости конструкции
4. **Определение граничных условий** энергетических зон в квантовой механике (зонная теория)

Численные особенности

1. **Плохая обусловленность:** при уменьшении h число обусловленности матриц растёт как $O(1/h^2)$
2. **Кратные собственные значения:** численные методы могут дать близкие, но различные приближения для кратных значений
3. **Разреженность:** использование структуры разреженности критично для больших задач
4. **Адаптивность:** адаптивные сетки могут улучшить точность вычисления отдельных собственных значений

Дополнительные пояснения

В.: Почему скорость сходимости $O(h^2)$, а не $O(h)$?

О.: Это следует из того, что функционал Рэлея имеет критические точки в собственных значениях. Погрешность в функционале убывает как $O(h^2)$, что приводит к такой же скорости для собственных значений.

В.: Как выбрать размер конечно-элементной сетки?

О.: Из требуемой точности. Если нужна точность 10^{-6} для n -го собственного значения, то $h \sim 10^{-3}$ (примерно). На практике используют апостериорные оценки.

В.: Может ли метод Рунге пропустить собственное значение?

О.: Нет, при условии полноты системы базисных функций. Все собственные значения, не превышающие некоторого уровня, будут найдены, хотя и с погрешностью.

В.: Какой метод решения спектральной задачи лучше всего?

О.: Зависит от цели: метод степенных итераций для первого собственного значения, QR для нескольких, Ланцоша для много собственных значений большой разреженной матрицы.