Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

ВАРИАЦИОННО-ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Содержание

Лекция 1

1.1 Принцип Дирихле

Дана область $\Omega \in \mathbb{R}^2$

$$M = \{u : \ u = u_0(x, y), \ (x, y) \in \partial\Omega\}$$

Среди всех функций $u \in M$, та функция, которая доставляет минимум «интегралу Дирихле» (1.1) наименьшее значение, является гармонической.

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \tag{1.1}$$

1.2 Контрпример Вейерштрасса

Наименьшее значение может и не достигаться

$$M = \{y : \ y(x) \in C'[-1; 1], \quad y(-1) = -1, y(1) = 1\}$$

$$J(y) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 (y')^2 dx, \quad J(y) \geq 0, \ \exists \inf J(y)$$

Докажем, что нижняя граница равна нулю

$$y_\varepsilon(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x/\varepsilon)}{\operatorname{arctg}(1/\varepsilon)}$$

$$y'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1/\varepsilon)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{arctg}(1/\varepsilon)} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 + x^2}$$

$$J(y_\varepsilon) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 (y'_\varepsilon)^2 dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2 \varepsilon^2}{\operatorname{arctg}^2(1/\varepsilon)} \cdot \frac{1}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} dx < \frac{2\varepsilon}{\operatorname{arctg}(1/\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

$$J(\tilde{y}) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 (y')^2 dx = 0 \ \Rightarrow \ y' = 0 \ \Rightarrow y = \text{const}$$

Противоречие: $y(-1) = -1, \quad y(1) = 1$

1.3 Контрпример Адамара

Гармоническая функция может обращать интеграл Дирихле в бесконечность

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{2^{2n}}}{2^n} \cos(2^n \theta); \quad x = \rho \cos\theta, \ y = \rho \sin\theta$$

Ряд сходится в круге $\rho \leq 1$, его сумма непрерывна и гармонична внутри этого круга. Однако интеграл Дирихле этой функции, взятый по кругу $\rho \leq r \leq 1$ равен

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} r^{2^{2n+1}} \xrightarrow{r \to 1} \infty$$

1.4 Метод Ритца

Рассмотрим функционал:

$$J(w) = \int_a^b f(x, w, w', \dots, w^{(k)})\, dx \to \inf$$

при условии:

$$w \in M \text{ — класс допустимых функций.}$$

Используются координатные функции:

$$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots$$

обладающие следующими свойствами:

1. Для любого n и любых $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, функция
$$w_n = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_n\psi_n \in M.$$
2. Для любого $w \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое что
$$\|w - \psi_0 - a_1\psi_1 - a_2\psi_2 - \ldots - a_n\psi_n\| < \varepsilon.$$

Рассматриваем функционал

$$J(w_n) = F(a_1, \dots, a_n) \to \inf,$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial J(w_n)}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J(w_n)}{\partial a_n} = 0. \tag{1.2}$$

Это дает систему уравнений для определения коэффициентов $a_1, \dots, a_n$.

Пример (задача об упругой пластине)

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $S = \partial\Omega$. Изгиб $w(x, y)$ удовлетворяет уравнению Софи Жермен:

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega,$$

где D — жесткость пластины, $q(x, y)$ — интенсивность давления.
Краевые условия:

$$w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = 0 \quad \text{(производная по нормали к } S\text{).}$$

Данную задачу можно привести к следующей вариационной:

$$J(w) = \iint_\Omega \left[\frac{1}{2}(\Delta w)^2 - fw\right] d\Omega \to \inf \tag{1.3}$$

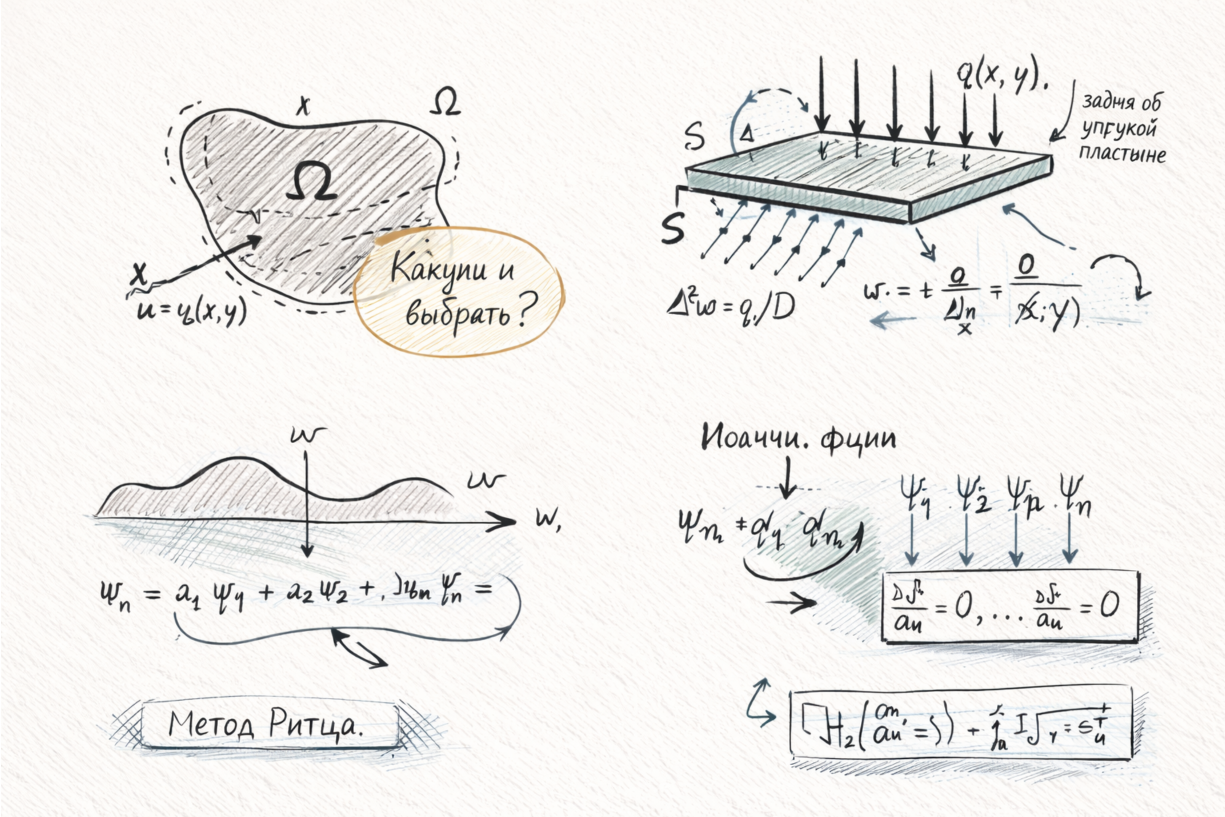

Рис. 1: Визуальизация задачи об упругой пластине

где $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Положим в (1.3) $w = w_1 + w_2$, где

$$w_1 = -\frac{1}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} r^2 \ln(r) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

и r — расстояние между точками (x, y) и $(\xi, \eta) \in \Omega$.
Функционал приводится к виду

$$J(w) = J_0 + \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} (\Delta w_2)^2\, dx\, dy \geq J_0.$$

Таким образом, функционал $J(w)$ ограничен снизу, а следовательно имеет точную нижнюю границу

Введем координатные функции $\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \ldots, \psi_n(x, y), \ldots$, удовлетворяющие:

1. $\psi_n(x, y)$ и их производные вида $\frac{\partial^{k+l} \varphi_n}{\partial x^k \partial y^l}$ до порядка $k, l \leq 3$ принадлежат $C(\overline{\Omega})$
2. $\psi_n(x, y)$ удовлетворяют краевым условиям
3. Для любой функции $\zeta(x, y) \in C^1(\Omega)$ найдется такое m, что выполняется:

$$|\zeta(x, y) - \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i(x, y)| < \varepsilon,$$

а также для производных:

$$\left| \frac{\partial^{k+l}\zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial^{k+l}\psi_i(x,y)}{\partial x^k \partial y^l} \right| < \varepsilon, \quad k \leq 3, l \leq 3$$

Ищем приближенное решение в виде:

$$w_n = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_n\psi_n$$

Определяем коэффициенты a_i так, чтобы $J(w_n)$ был минимальным:

$$J_n = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(\Delta w_n)^2 - f w_n \right] dx\, dy$$

Уравнения (1.2) в данном случае имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k = B_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.4}$$

где

$$A_{ik} = \iint\limits_{\Omega} \Delta\psi_i \Delta\psi_k \, dx\, dy, \quad B_i = \iint\limits_{\Omega} f\psi_i \, dx\, dy$$

Эта система имеет единственное решение $a_1, \ldots, a_n$, определяющее приближенное решение.

Рассмотрим для произвольных $b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$\zeta_n = b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + \ldots + b_n\psi_n$$

Умножив уравнение (1.4) на b_i и просуммируем по всем i:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k b_i = \sum_{i=1}^{n} B_i b_i$$

Используя явный вид коэффициентов придем к:

$$\iint\limits_{\Omega} (\Delta w_n \zeta_n - f\zeta_n)\, dx\, dy = 0 \tag{1.5}$$

Решение уравнений (1.4) при подстановке в J_n доставляет ему минимальное значение (обозначим его $J_n^{(0)}$). Можно показать, что оно равно

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} (\Delta w_n)^2 \, dx\, dy$$

С возрастанием n величина $J_n^{(0)}$ не возрастает; в то же время она ограничена снизу. По теореме о монотонной переменной у нее есть предел. На основании критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m: \quad 0 \leq J_n^{(0)} - J_{n+m}^{(0)} \leq \frac{1}{2}\varepsilon \tag{1.6}$$

Обозначим

$$\frac{\omega_{m+n} - \omega_n}{\sqrt{\varepsilon}} = \varphi(x, y)$$

Используя (1.5) и (1.6) с помощью некоторых преобразований можно прийти к

$$\iint\limits_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 dxdy < 1$$

К функции $\varphi(x, y)$ применим формулу

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \left(\varphi \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dS + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} \Delta\varphi \ln r \; d\xi d\eta$$

Поскольку $\varphi(x, y)$ является линейной комбинацией координатных функций, она удовлетворяет граничным условиям. Получим

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} \Delta\varphi \ln r \; d\xi d\eta$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к интегралу, получим

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left(\iint\limits_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 d\xi d\eta\right)^{1/2}}_{\leq 1} \underbrace{\left(\iint\limits_{\Omega} \ln^2 r \; d\xi d\eta\right)^{1/2}}_{\leq C}$$

$$|\varphi(x, y)| \leq C_1$$

$$|\omega_{n+m} - \omega_n| \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}$$

$$\omega_n \underset{\Omega}{\rightrightarrows} w_n(x, y) \in C(\Omega)$$

Лекция 2

2.1 Метод Бубнова – Галеркина

Рассмотрим приближенное решение в виде:

$$w_n = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n + \ldots$$

где L и M — дифференциальные операторы, задающие задачу:

$$Lw - \lambda Mw = 0$$

Приходим к системе уравнений вида:

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{ik} - \lambda B_{ik})\alpha_k = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

Чтобы решение было ненулевым, необходимо и достаточно, чтобы определитель равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & \ldots & A_{1n} - \lambda B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} - \lambda B_{n1} & \ldots & A_{nn} - \lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$N(x, y) = Lw_n - \lambda Mw_n \text{ — невязка}$$

$$N(x, y) \perp \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}$$

2.2 Повторение

1. $f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow \int\limits_{\Omega} f(x)dx = 0$
2. $\int\limits_{\Omega} f(x)dx = 0,\ f(x) \geq 0 \ \Rightarrow\ f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$
3. $|f(x)| < \varphi(x), \varphi$ — суммируема по Лебегу $\Rightarrow f(x)$ — суммируема по Лебегу
4. $\{\varphi_n(x)\}$ — суммируемы с квадратами по Лебегу

$$\lim_{n,k\to\infty} \int\limits_{\Omega} |\varphi_k(x) - \varphi_n(x)|^2 dx = 0$$

Обозначим V – линейное пространство

(φ, ψ) – скалярное произведение: $\quad (\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$

1. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$
2. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$
3. $(\varphi, \varphi) \geq 0$
4. $(\varphi, \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathbf{0}$

$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$

- Неравенство Коши-Буняковского
  $|(\varphi,\psi)| \le \|\varphi\|\|\psi\|$
- Неравенство треугольника
  $\|\varphi+\psi\| \le \|\varphi\| + \|\psi\|$

$$L_2(\Omega): \quad (\varphi,\psi) = \int\limits_\Omega \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

$$L_2(\Omega,\sigma): \quad (\varphi,\psi) = \int\limits_\Omega \varphi(x)\overline{\psi(x)}\sigma(x)dx$$

$$L_2(\Omega^m): \quad (\varphi,\varphi) = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^m \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(x)}dx$$

Критерий линейной зависимости системы функций

$$\varphi_1, ..., \varphi_n \text{ линейно зависима (ЛЗ) в } H$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{vmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & \dots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_1) & \dots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix} = 0$$

Опр. M — плотно в H, если $\forall p \in H$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi_n \in M: \|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$.

$C_0^{(\infty)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$$\begin{array}{lll} & \uparrow & \\ \forall\varepsilon > 0: & \forall \varphi \in H & \exists \varphi_n^1 \in C_0^{(\infty)}(\Omega): \quad \|\varphi_n^1 - \varphi\| < \varepsilon/2 \\ & & \exists \varphi_n^2 \in C_0^{\infty}(\Omega): \quad \|\varphi_n^2 - \varphi_n^1\| < \varepsilon/2 \\ & & ... \end{array}$$

$C_0^{(k)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система (ОНС)
$(\varphi_n,\varphi_m) = \delta_{nm}$
$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + ... + \|\varphi_n\|^2 + ...$

$\{\varphi_n\}$ полная в H, если из $(\varphi,\varphi_k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathbf{0}$
$\forall \varphi \in H: \quad a_k = (\varphi,\varphi_k) -$ коэффициенты Фурье

Теор. H — гильбертово, $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система (ПОНС)

$\Rightarrow \|\varphi\|^2 = \sum\limits_{k=1}^\infty |a_k|^2 = \sum\limits_{k=1}^\infty |(\varphi,\varphi_k)|^2$ — равенство Парсеваля

Теор. $\exists a_k: \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$ сходится, $\{\varphi_n\}$ — ПОНС в H, тогда:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k$ сходится по $\|\cdot\|$ к $\varphi\in H$, при этом $\|\varphi\|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$.

Опр. H сепарабельно если $\exists M-$ счетное мн-во плотное в H.

Теор. H сепарабельно $\Leftrightarrow\exists$ ПОНС (счетная или конечная) в H.

$\{u:\int\limits_{\Omega}udx=0\}$ — пример подпространства в $L_2(\Omega)$.

Пусть H_1 — подпространство в H
$\forall\varphi\in H\quad\exists!\varphi_1\in H_1:\|\varphi-\varphi_1\|=\min\limits_{\psi\in H_1}\|\varphi-\psi\|$ — проекция φ на H_1
$\varphi=\varphi_1+\varphi_2,\qquad H_2=\varphi\perp H_1$ — ортогональное дополнение

l — линейный функционал : $\quad M\subset H\to\mathbb{R}/\mathbb{C}$
$|l_\varphi|\leq\|l\|\cdot\|\varphi\|_H$
$\lim\limits_{\psi\to\varphi}l_\psi=l_\varphi\qquad\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta:\|\psi-\varphi\|<\delta:\quad|l_\psi-l_\varphi|<\varepsilon$

Теор. (Рисса) $\forall l$ — непрерывного линейного функционала в H $\exists!\psi\in H:l_\varphi=(\varphi,\psi)$

Пусть M — плотно в $H,\quad\Phi:M\times M\to\mathbb{C}(\mathbb{R})$
$\Phi(\varphi,\psi):\Phi(\varphi,\psi)=\overline{\Phi(\psi,\varphi)}$
$\Phi(\varphi,\varphi)$ — квадратичная форма

$H:D_A\subset H$ — область определения некоторого оператора A
Линейный оператор A ограничен $\Leftrightarrow A$ непрерывен
$\varphi\in D_A,\quad A\varphi\in R_A$ — область значений оператора A
$\varphi\in D_A\to!\ A\varphi\in R_A$

Лекция 3

$$\left.\begin{array}{l} Au = f \\ u, f \in H \end{array}\right| \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad H = L_2(\Omega)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & f \in C(\overline{\Omega}) \\ u|_s = 0 \end{cases}$$

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ \ u|_s = 0\}$$

$$A = -\Delta u$$

Формула Остроградского

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega = \int\limits_{S} \Big(\varphi \cos(\overline{n} \cdot x) + \psi \cos(\overline{n} \cdot y) + \omega \cos(\overline{n} \cdot z) \Big) dS$$

$$W = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \omega \end{pmatrix} \qquad\qquad \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} W d\Omega = \int\limits_{S} W_n dS$$

Пусть $\varphi = uv,\ \psi = \omega = 0$

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = -\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int\limits_{S} uv \cos(\overline{n} \cdot x) dS$$

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = -\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int\limits_{S} uv cos(\overline{n} \cdot x_i) dS \qquad \text{в } \mathbb{R}^m \tag{3.0}$$

3.1 Формулы Грина

$$Lu = -\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik}(P) \frac{\partial u(P)}{\partial x_k} \right) + C(P)u(P)$$

$$D_L = \{u \in C^2(\overline{\Omega})\}, \quad P \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad C(P) \in C(\overline{\Omega})$$

$$A_{ik}(P) \in C(\overline{\Omega}), \quad A_{ik}(P) = A_{ki}(P)\ \ \forall P, \quad i,k = \overline{1,n}$$

$$\int\limits_{\Omega} vLud\Omega = -\sum_{i,k=1}^{m} \int\limits_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) d\Omega + \int\limits_{\Omega} Cuvd\Omega$$

в (**??**) подставим $u \to v, v \to A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}$

$$\int_\Omega vLud\Omega = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^m A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i}d\Omega + \int_\Omega Cuvd\Omega - \int_S v\sum_{i,k=1}^m A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i)dS \tag{3.1}$$

$$\int_\Omega uLud\Omega = \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^m A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right]d\Omega - \int_S u\sum_{i,k=1}^m A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i)dS \tag{3.2}$$

из (**??**) вычитаем ее же, но поменяв местами u и v: (**??**) $-$ (**??**)$_{u\rightleftarrows v}$

$$\int_\Omega (vLu - uLv)d\Omega = \int_\Omega 0\left[\sum_{i,k=1}^m A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i,k=1}^m A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right]d\Omega -$$
$$- \int_S \left[v\sum_{i,k=1}^m A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i) - u\sum_{i,k=1}^m A_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_k)\right]dS$$

$$Nu := \sum_{i,k=1}^m A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}cos(\overline{n}\cdot x_i)$$

$$\int_\Omega (vLu - uLv)\,d\Omega = \int_S (uNv - vNu)\,dS \tag{3.3}$$

Частный случай формул Грина, это оператор Лапласа:

$$Lu = -\Delta u;\ A_{ii} = 1;\ A_{ik} = 0,\ i \neq k;\ C = 0$$

$$-\int_\Omega v\Delta ud\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}d\Omega - \int_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS \tag{3.4}$$

$$-\int_\Omega u\Delta ud\Omega = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \int_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS \tag{3.5}$$

$$-\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)d\Omega = \int_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS \tag{3.6}$$

3.2 Положительные операторы

Пусть оператор A симметричен в H

Опр. Оператор называется положительным, если $\forall u \in D_A \subset H, \qquad (Au, u) \geq 0 \Leftrightarrow u = 0$

Пр. 1

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u \qquad \text{в } L_2(0,1); \qquad D_B = \{u \in C_0^2(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}$$

$$(Bu, v) = -\int_0^1 v\frac{d^2u}{dx^2}dx = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx - v\left.\frac{du}{dx}\right|_0^1 = -\int_0^1 u\frac{d^2v}{dx^2} = (u, Bv) \quad \forall u, v \in D_B$$

$$(Bu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = 0$$

$$(Bu, u) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = const, u(0) = 0 \Rightarrow u = 0$$

Пр. 2

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \qquad D_C = \left\{u \in C^2(0,1), \begin{cases} u'(0) + \alpha u(0) = 0 \\ u'(1) + \beta u(1) = 0 \end{cases} \alpha, \beta = const\right\}$$

$$(Cu, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1) = (u, Cv)$$

$\alpha > 0, \beta \geq 0$

$$(Cu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \alpha u^2(0) + \beta u^2(1) \geq 0$$

$\alpha = \beta = 0, \quad u \equiv 1 \Rightarrow (Cu, u) = 0 \Rightarrow C$ не является положительным

Пр. 3

$$Au = -\Delta u, \qquad D_A = \{u \in C^2(\Omega) : \quad u|_s = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, S = \partial\Omega, H = L_2(\Omega)\}$$

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = -\int_\Omega u\Delta u d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - 0\int_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = const, \ u|_s = 0 \Rightarrow u = 0$$

Рассмотрим мембрану

Ω в плоскости (x,y), $u(x,y)$ — изгиб мембраны

$$-\Delta u = \frac{q}{T}$$

q — поперечная нагрузка на единицу площади

T — натяжение мембраны

$u|_S = 0$ — мембрана закреплена на краях

$$(Au,u) = (-\Delta u, u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy$$

3.3 Положительно определенные операторы

Опр. Симметричный оператор A называется положительно определенным, если

$$\exists \gamma > 0 : (Au,u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \tag{1}$$

Пр. 1 (продолжение)

$$B : u(0) = 0, u \in D_B$$

$$u(x) = \int\limits_0^x u'(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

$$u^2(x) \leq \int\limits_0^x 1^2 dt \cdot \int\limits_0^x (u'(t))^2 dt = x \int\limits_0^x (u'(t))^2 dt \leq x \int\limits_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\int\limits_0^1 u^2(x)dx \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\gamma^2 \|u\|^2 \leq (Bu,u), \quad \gamma = \sqrt{2} \quad \Rightarrow B \text{ является положительно определенным}$$

Пр. 4

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(x^3 \frac{du}{dx}\right) \quad \text{в } L_2(0,1)$$

$$D_L = \{u \in C^2[0,1],\ u(1) = 0\}$$

$$(Lu,v) - (u,Lv) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dx}\left[x^3\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right] dx = \left[x^3\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]\Bigg|_0^1 = 0$$

$$(Lu,u) = \int\limits_0^1 x^3 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq 0 \quad \Rightarrow L \text{ является положительно определенным}$$

$$\frac{(Lu,u)}{\|u\|^2} \geq \gamma^2, \qquad u_\delta(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \leq x \leq \delta \\ 0, & \delta \leq x \leq 1 \end{cases}, \qquad u_\delta \in \mathcal{D}_L$$

$$\frac{(Lu_\delta, u_\delta)}{\|u_\delta\|^2} = \frac{\int_0^1 x^3 (\frac{du_\delta}{dx})^2 dx}{\int_0^\delta (\delta - x)^3 dx} = \frac{9\int_0^1 x^3 (\delta - x)^4 dx}{\int_0^\delta (\delta - x)^6 dx} = \frac{9}{40}\delta \quad \Rightarrow L \text{ не явл. положительно опр.}$$

3.4 Энергетическая норма

Пусть A — положительно определен в H (гильберт.)
На D_A : $\quad [u,v]_A = (Au,v)_H$
Можно показать что выполняются все аксиомы скалярного произведения

1. $[u,v]_A = \overline{[v,u]}_A$
   $(Au,v) = (u,Av) = \overline{(Av,u)} = \overline{[v,u]}$
2. $[a_1u + a_2u, v] = a_1[u,v] + a_2[u,v]$
3. $(Au,u) = [u,u] \geq \gamma\|u\|^2 \geq 0$
4. $[u,u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$|u| = [u,u]$ — энергетическая норма
D_A предгильбертово, дополним его по $|\cdot|_A \;\Rightarrow\;$ гильбертово пр-во H_A

$$u \in H_A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u \in D_A \\ \exists u : \; \{u_n\} \in D_A : \; |u_n - u| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{array}\right.$$

Лекция 4

4.1 Энергетическое пространство

Пусть A — положительно определен в H (гильберт.)

На D_A : $\begin{array}{l}[u,v]_A = (Au,v)_H \\ \|u\|_A = [u,u]_A\end{array}$

H_A — энергетическое пространство

$$\|u\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|u\|_A \tag{4.0}$$

$$u \in H_A \begin{array}{l}\nearrow u \in D_A \\ \searrow \exists\{u_n\} \in D_A : \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_A = 0\end{array}$$

Теор. $\forall u \in H_A \to$ только один элемент из H, причем различные $u_1, u_2 \in H_A$ отвечают различным элементам из H

Док-во.

1. $u_n : \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_A = 0$
   $\|u_n - u_m\|_A \le \|u_n - u\|_A + \|u_m - u\|_A \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$
   $\Rightarrow \|u_n - u_m\|_H \to 0$ при $n, m \to \infty$
   $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_H = 0$

2. $u_{1,n} \underset{\|\cdot\|_A}{\to} u_1, \quad u_{2,n} \underset{\|\cdot\|_A}{\to} u_2$
   u_1 и $u_2 \to u \in H, \qquad u = u_1 - u_2$
   $\exists\{u_n\} \in H_A \qquad \|u_n - u\|_A \to 0$
   $\forall f \in H \qquad |(f, u_n)| \overset{\text{КБ}}{\le} \|f\| \cdot \|u_n\| \le \|f\|_A \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \|u_n\|_A \to 0$
   $\forall \varphi \in D_A \qquad A\varphi = f \in H$
   Тогда $(A\varphi, u_n) \to 0$
   $[\varphi, u_n]_A = (A\varphi, u_n) \to 0$
   Переходя к пределу: $[\varphi, u]_A = 0 \ \forall\varphi \qquad \Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ □

Неравенство (**??**) выполняется не только в D_A, но и во всем пространстве H_A. Пусть $u \notin D_A$, тогда:

$$\exists\{u_n\} \in D_A \qquad \|u_n - u\|_A \to 0, \text{ при этом } \|u_n - u\|_H \to 0$$

Отсюда вытекает, что

$$\|u_n\|_A \to \|u\|_A \qquad \|u_n\|_H \to \|u\|_H$$

Так как, $u_n \in M$, то для u_n справедливо $\|u_n\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|u_n\|_A$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ получим

$$\|u\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|u\|_A$$

Пример 1

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \qquad D_B = \{u \in C^2[0,1],\ u(0) = u(1) = 0\}$$

$$H = L_2(0,1),\ u \in H_B$$

$$u \in H_B, \quad \exists\{u_n\} \in D_B \quad \|u_n - u\|_B \to 0$$

$$\|u_n - u_k\|_B \leq \|u_n - u\|_B + \|u_k - u\|_B \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

$$\|u_n - u_k\|_B^2 = \int\limits_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

$\Rightarrow \left\{\dfrac{du_n}{dx}\right\}$ фундаментальна в $L_2(0,1) \Rightarrow \exists v(x) \in H$

$$u_n(x) = u_n(0) + \int\limits_0^x u_n^{'}(t)dt, \quad u_n \in D_B, \qquad \text{при } x = 0:\ u_n(0) = 0$$

Переходя к пределу: $\quad u(x) = \int\limits_0^x v(t)dt \quad$ и $\quad u(0) = 0$

$$u(1) = \int\limits_0^1 v(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 u_n^{'}(t)dt = \lim_{n\to\infty} (u_n(1) - u_n(0)) = 0$$

Следовательно, u абсолютно непрерывная на$[0,1]$, удовлетворяет граничным условиям

$u' \in L_2(0,1)$

Пример 2

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u(x); \qquad u'(0) + \alpha u(0) = 0,\ u'(1) + \beta u(1) = 0$$

$$\exists\{u_n\} \in D_C, \quad \alpha > 0,\ \beta \geq 0$$

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

$$|u_n(0) - u_k(0)| \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

$$u_n(x) = u_n(0) + \int\limits_0^x u_n'(t)dt$$

$$u(x) = c_0 + \int\limits_0^x v(t)dt$$

Теор. Пусть оператор A положительный, но не положительно определенный. Тогда

$$u \in H_A: \quad u \in H \Leftrightarrow \exists\{u_n\} \in D_A$$

$$\|u = u_n\|_A \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{и} \quad \|u_k - u_n\|_H \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

Пример 3

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{du}{dx}\right), \qquad u(1)=0$$

$$D_L = \{u \in C^2[0,1],\ u(1)=0\}$$

$$H_L = \left\{ u \text{ абсолютно непрерывна на } [0,1], \quad u(1)=0, \quad \int\limits_0^1 x^3 u'^2 dx = 0 \right\}$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{x} - 1$$

4.2 Энергетический метод

(для положительно определенных операторов)

$$Au = f, \qquad A:\ D(A) \subset H \to H \tag{4.1}$$

Теор. A положителен в H, тогда уравнение (**??**) имеет не более одного решения.
Док-во.

$$\text{Пусть } u_1, u_2 \text{ — решения (??)}, \quad \tilde{u} = u_1 - u_2, \quad Au_1 = f, \quad Au_2 = f$$

$$A\tilde{u} = 0$$

$$(A\tilde{u}, \tilde{u}) = [\tilde{u}, \tilde{u}]_A = \|\tilde{u}\|_A^2 = 0$$

□

Теор. (о функционале энергии) Если A — является положительным в H; u — решение уравнения (**??**) $\Leftrightarrow$ u доставляет минимум функционалу

$$F(u) = (Au, u)_H - (f, u)_H - (u, f)_H \tag{4.2}$$

Док-во.
Заметим, что $D_A = D_F$ (вытекает из выражения (**??**)). Также $F(u) = (Au, u) - 2\,\mathrm{Re}(u, f)$, и так как A положительный оператор, то $F(u)$ принимает только вещественные значения.

$\Rightarrow$

$$u_0 :\ Au_0 - f = 0$$

$$\forall v \in D_A = D_F, \quad v = u_0 + \eta$$

$$\begin{aligned} F(v) &= (A(u_0+\eta), u_0 = \eta) - (u_0+\eta, f) - (f, u_0+\eta) \overset{\text{симм.}A}{=} \\ &= F(u_0) + (Au_0 - f, \eta) + (\eta, Au_0 - f) + (A\eta, \eta) \overset{Au_0 - f = 0}{=} \\ &= F(u_0) + A(\eta, \eta) \geq F(u_0) \Rightarrow u_0 = \underset{D_F}{\mathrm{argmin}} F \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$u_0 = \underset{D_F}{\mathrm{argmin}} F$$

$$\forall \eta \in D_A :\ v = u_0 + \lambda\eta \in D_A = D_F, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$F(v) \geq F(u_0)$$

Используя симметричность A приведем к виду

$$2\lambda \operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] + \lambda^2 (A\eta, \eta) \geq 0$$

Это возможно только тогда, когда

$$\operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] = 0$$

Заменив η на $i\eta$, получим

$$\operatorname{Im}[(Au_0 - f, \eta)] = 0$$

Получаем

$$(Au_0 - f, \eta) = 0 \quad \forall u \in D_A \Rightarrow Au_0 - f = 0 \qquad \square$$

Замеч. Если пространство вещественное, получим $F(u) = A(u,u) - 2(u,f)$

Пример 4

$$A\omega = \Delta^2 \omega = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \omega}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}$$

$$D_A = \left\{ \omega \in C^4(\overline{\Omega}); \quad \omega\big|_S = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}\bigg|_S = 0 \right\}$$

$$A\omega = \frac{q(x,y)}{\mathcal{D}}$$

4.3 Обобщение решения задачи о min для функционала

A — положительно определенный в H, $\quad Au = f$ (**??**), $\ f \in H$

фикс. $f \in H \quad \forall u \in H_A \quad (u,f)_H :$ ф-ла $H_A \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$

$$|(u,f)_H| \overset{\text{КБ}}{\leq} \|f\|_H \|u\|_H \leq \|f\|_H \frac{1}{\gamma} \|u\|_A; \qquad \gamma,\ \|f\|_H - const \qquad \Rightarrow \text{ ограничен}$$

огр. $(f,u) \Rightarrow$ по теор. Рисса $\exists\, u_0 \in H_A :\ (f,u)_H = [u, u_0]_A$

$$F(u) = [u,u]_A - [u,u_0]_A - [u_0,u]_A \tag{4.*}$$

$\pm\ [u_0, u_0]_A \qquad$ в (**??**)

$$F(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

$\underset{u \in H_A}{\operatorname{argmin}} F(u) = u_0$ — обобщенное решение $Au = f$

H — сепарабельно $\Rightarrow H_A\ \exists\{\omega_n\}$ ПОНС

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n]\ \omega_n$$

$$u = \omega_n, \qquad [u_0, \omega_n]_A = (f, \omega_n)_H$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)_H\ \omega_n$$

Лекция 5

Пример (задача о кручении стержня)

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 2G\Theta \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

G — модуль сдвига
Θ — угол закручивания

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \end{cases}$$

$$Au = -\Delta u$$

$$D_A = \left\{ u \in C^2(\Omega), \ \ u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$[u, v]_A = \int\limits_0^a \int\limits_0^b -\Delta v(x, y) u(x, y) dx dy$$

$$\|u\|_A^2 = -\int\limits_0^a \int\limits_0^b \Delta u(x, y) u(x, y) dx dy$$

$$\psi_{m,n} = \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \in D_A$$

$$\Delta\psi_{m,n} = -\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \psi(x, y)$$

$$\|u\|_A^2 = \frac{\pi^2(b^2m^2 + a^2n^2)}{4ab}$$

$$w_{m,n} = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2m^2 + a^2n^2}} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)$$

$$(2G\Theta, w_{m,n}) = \frac{16abG\Theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2m^2 + a^2n^2}}$$

$$\psi(x, y) = \frac{32G\Theta a^2 b^2}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{mn(b^2m^2 + a^2n^2)}$$

5.1 Минимизация последовательностей

$\Phi(u)$ ограничен снизу на M, $\quad \exists d = \inf\limits_{u \in M} \Phi(u)$

u_n — минимизирующая, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \Phi(u_n) = d$

Пусть u_0 — обобщенное решение $Au = f$

$F(u) = \|u - u_0\|_A - \|u_0\|_A$

$\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n) = F(u_0) = -\|u_0\|_A$

Теор. Если A положительно определенный оператор в H, то для $\forall$ минимизирующей $\{u_n\}$ для $F(u)$:

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A = 0 \qquad \Rightarrow \|u_n - u_0\|_A \to 0$$

$$F(u_n) = \|u_n - u_0\|_A - \|u_0\|_A \to -\|u_0\|_A$$

Если $u_0 \in H_A$, то теорема верна и для положительного A

5.2 Расширение положительно определенного оператора

$[u, f]_H = [u, u_0]_A \qquad \forall f \in H \to \exists!\ u_0 \in H_A$

$\Rightarrow$ определен линейный оператор $G : D_G = H \to H_A \supset R_A \qquad u_0 = Gf$

$\exists\ G^{-1}$ — расширение A

1. Ограниченность

$$\forall u \in H_A : \ \ |[u, Gf]_A| \le |(u, f)_H| \le \|f\|_H \cdot \|u\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|f\|_H \cdot \|u\|_A$$

Пусть $u = Gf$

$\|Gf\|_A^2 \le \dfrac{1}{\gamma}\|f\|_H \cdot \|Gf\|_A$

$\|Gf\|_A \le \dfrac{1}{\gamma}\|f\|_H$

$\|Gf\|_H \le \dfrac{1}{\gamma}\|Gf\|_A$

$\|Gf\|_H \le \dfrac{1}{\gamma^2}\|f\|_H$

2. Положительность

$$(Gf, h)_H = [Gf, Gf]_A = \|Gf\|_A^2 \ge 0$$ □

$G : \ H_A \to H_A \ \ \forall f \in H_A$

$[Gf, f]_A = [f, GF]_A = \overline{(f, f)_H} = \|f\|_H \ge 0$

Пусть $Gf = 0 \Rightarrow (u, f)_H = [u, Gf]_A = 0 \ \ \forall u \in H_A \quad \Rightarrow \quad f = 0$

$\Rightarrow G^{-1}$ — расширение A

$\forall \tilde{u} \in D_A : \ G^{-1}\tilde{u} \qquad A\tilde{u}$

$A\tilde{u} = f \ \ \Rightarrow \ \ \tilde{u}$ — доставляет $\min F(u)$

$\tilde{u} = Gf, \qquad A\tilde{u} = f = G^{-1}\tilde{u} \Rightarrow G^{-1}$ — расширение A

Если A положительно определенный, то и G^{-1} положительно определенный

5.3 Некоторые методы построения мин. последовательности

1. Процесс Ритца

H — вещественное гильбертово пространство, A — положительно определенный

$$Au = f$$

$$\min_{u \in H_A} F(u) = [u, u]_A - 2(u, f)_H$$

Введем координатные функции $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$

- $\varphi_i \in H_A$

- $\forall n\ \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — линейно независимые
- $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ полно в H_A

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k, \qquad a_k \in \mathbb{R}$$

$$F(u_n) = \left[\sum_{j=1}^n a_j\varphi_j, \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k\right] - 2\left(\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k, f\right) = \sum_{j,k=1}^n a_j a_k[\varphi_j, \varphi_k] - 2\sum_{k=1}^n a_k(\varphi_k, f)$$

Необходимое условие: $\min \frac{\partial F(u_n)}{\partial a_j} = 0,\ j = \overline{1,n}$. Для положительного A является и достаточным условием

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_j} = 2\sum_{k=1}^n [\varphi_j, \varphi_k]_A a_k - 2(f, \varphi_j) = 0, \qquad j = \overline{1,n}$$

Получим СЛАУ относительно $a_1, ..., a_n$

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_j, \varphi_k]_A a_k = (f, \varphi_j) \to a_1, ..., a_n \text{ — решение}$$

$$\left([\varphi_k, \varphi_j]_A\right)_{k,j=\overline{1,n}} \text{ — определитель Грама}$$

$\exists!$ решение $u_n = \sum\limits_{k=1}^n a_k\varphi_k$

$$\{\varphi_n\} \to \{w_n\} \qquad \text{ПОНС в норме } \|\cdot\|_A$$

$$[w_k, w_j]_A = \delta_{kj} \quad \Rightarrow \quad a_k = (f, w_k)_H = c_k$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k$$

$$\|u_n\|_A^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2(u_n, f) = \sum_{k=1}^n c_k^2$$

$$F(u_n) = \|u_n\|_A^2 - 2(u_n, f)_H = -\sum_{k=1}^n c_k^2 = -\|u_n\|_A^2$$

$$\|u_n\|_A^2 \le \|u_0\|_A^2, \qquad \|u_n\|_A^2 \underset{n\to\infty}{\to} \|u_0\|_A^2$$

$$\text{Пусть } n > k: \ \|u_n - u_k\|_A^2 = \left\|\sum_{i=k+1}^n c_i w_i\right\|_A^2 = \sum_{i=k+1}^n c_i^2 = \|u_0\|_A^2 - \|u_k\|_A^2$$

$$\forall u \in H_A, \qquad w_1 = \frac{u}{\|u\|_A}$$

$$n = 1, \qquad u_1 = c_1 w_1, \quad c_1 = (f, w_1)_H$$

$$\|u_0\|_A^2 \ge \|u_1\|_A^2 = c_1^2 = \left((f, w_1)_H\right)^2 = \left((f, u_1)_H\right)^2 \cdot \frac{1}{\|u_1\|_A^2}$$

$$\|u_0\|_A^2 \ge \frac{\left((f, u)_H\right)^2}{\|u\|_A^2} \quad \forall u \in H_A$$

2. Метод Куранта

$$Au = f, \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^m + \text{ граничные условия } \partial\Omega$$

$$\Phi(u) = F(u) + \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=j} \left\| \frac{\partial^j (Au - f)}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial {x_n}^{\alpha_n}} \right\|_H^2}_{\geq 0}, \qquad f \in C^k(\Omega)$$

$$\Phi(u) \geq F(u)$$

$$u_0 = \underset{H_A}{\operatorname{argmin}}\ F(u)$$

$$\{u_n\} \text{ — минимизирует } \Phi(u)$$

Пример

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Положим $k = 0$

$$\Phi(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H + \|\Delta u + f\|_H^2$$

$$\Phi(u) = \int\limits_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2uf + (\Delta u + f)^2 \right\} d\Omega$$

$$\{u_n\} \text{ — минимизирующая для } \Phi, \qquad \int\limits_\Omega (\Delta u_n + f)^2 d\Omega \to 0$$

$$u_n(x, y) - u(x, y) = -\int\limits_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(\Delta u_n + f) d\Omega$$

$$|u_n(x, y) - u(x, y)| \leq \sqrt{\int\limits_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta} \sqrt{\int\limits_\Omega (\Delta u + f)^2 d\Omega}$$

$$|u_n(x, y) - u(x, y)| \leq C \sqrt{\int\limits_\Omega (\Delta u + f)^2 d\Omega}$$

$$\{u_n\} \overset{\Omega}{\rightrightarrows} u(x, y)$$

3. Метод наискорейшего спуска

$$Au = f$$

$$m\|u\|_H^2 \leq (Au, u)_H \leq M\|u\|_H^2$$

$$F(u) = (Au, u)_H - 2(u, f)_H$$

① $\forall u_1: \qquad v_1 = Au_1 - f, \qquad u_2 = u_1 - a_1 v_1$

$$F(u_1 - a_1 v_1) = F(u_1) - 2a_1 \Big[(Au_1, v_1)_H - (f, v_1)_H \Big] + a_1^2 (Av_1, v_1)_H$$

$$a_1 (Av_1, v_1)_H - \Big[(Au_1, v_1)_H - (f, v_1)_H \Big] = 0$$

$$(Au_1, v_1)_H - (f, v_1)_H = (Au_1 - f, v_1)_H = (v_1, v_1)_H = \|v_1\|_H^2$$

$$a_1 = \frac{\|v_1\|_H^2}{(Av_1, v_1)_H}$$

② $\forall u_2: \qquad v_2 = Au_2 - f_1, \qquad u_3 = u_2 - a_2 v_2$

...

ⓝ $\|u_{n+1} - u_0\|_A \leq \|u_1 - u_0\|_A \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n$

5.4 Краевые задачи для ОДУ

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(\Phi(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u'(x)$$

$$Lu = f(x), \qquad x_1 < x \leq x_2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(x_1) + \beta_1 u(x_1) = 0 \\ \alpha_2 u'(x_2) + \beta_2 u(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$D_L = \{C^2[x_1, x_2] + \text{ граничные условия}\}$$

Пусть

- $p(x) \geq 0,\ \ q(x) \geq 0, \quad x \in [x_1, x_2]$
  (p может обращаться в 0 в некоторых точках) $p(x) \geq p_0 > 0$
- $p \in C^1[x_1, x_2], q \in C[x_1, x_2]$
- $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{p(x)}$ сходится на $[x_1, x_2]$
- $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, \quad i = 1, 2$

$$(Lu, v) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + q(x)u(x)v(x)\right] dx + \frac{\beta_1}{\alpha_1}p(x_1)u(x_1)v(x_1) + \frac{\beta_2}{\alpha_2}p(x_2)u(x_2)v(x_2)$$

$$(Lu, u) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2(x)\right] dx + \frac{\beta_1}{\alpha_1}p(x_1)u^2(x_1) + \frac{\beta_2}{\alpha_2}p(x_2)u^2(x_2)$$

▶ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$(Lu, u) \geq p_0 \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right] dx = p_0\|u'\|_H^2 \geq \gamma^2\|u\|_H^2, \qquad \gamma = \frac{\sqrt{2p_0}}{x_2 - x_1}$$

$$u(x_1) = 0 \ \rightarrow\ u(x) = \int\limits_{x_1}^{x} u'(t)dt$$

$$u^2(x) \leq (x_2 - x_1)\|u'\|_H^2$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (...) \ dx \quad \Rightarrow \quad \|u\|_H^2 \leq \frac{x_2 - x_1}{2}\|u'\|_H^2$$

▶ $\beta_1 > 0$

$$(Lu,u) \geq \frac{B}{C}\|u\|_H^2$$

$$C = \max\left\{2A(x_2-x_1), 2(x_2-x_1)\right\}, \quad B = \min\left\{\frac{\beta_1}{\alpha_1}p(x_1), 1\right\}$$

$$F(u) = (Lu,u)_H - 2(u,f)_H = \frac{\beta_1}{\alpha_1}p(x_1)u^2(x_1) + \frac{\beta_2}{\alpha_2}p(x_2)u^2(x_2) + \\ + \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[p(x)u'(x)^2 + q(x)u^2(x) - 2f(x)u(x)\right]dx$$

$$u_n(x) \underset{\|\cdot\|_A}{\to} u_0(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u_0\|_A = 0, \qquad \|u_n - u_m\|_A^2 \to 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}[u_n(x) - u_m(x)] = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\limits_{x_1}^{x_2}[u'_n(x) - u'_m(x)]^2 dx = 0$$

$$u_n(x) - u_m(x) = u_n(x_1) - u_m(x_1) - \int\limits_{x_1}^{x_2}[u'_n(t) - u'_m(t)]^2 dt$$

Используя неравенство Буняковского и $a + b^2 \leq a^2 + b^2$

$$|u_n(x) - u_m(x)|^2 \leq 2(u_n(x_1) - u_m(x_1))^2 + 2(x_2 - x_1)\int\limits_{x_1}^{x_2}[u'_n(t) - u'_m(t)]^2 dt$$

$$u_n(x) \rightrightarrows u(x)$$

$$u'_n \overset{\text{ср}}{\to} u'(x)$$

Лекция 6

6.1 Применение энергетического метода для краевых задач

Пример 1

$$Lu = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}\right], \qquad Lu = f$$

$$\begin{cases} u(x_1) = u'(x_1) = ... = u^{(m-1)}(x_1) = 0 \\ u(x_2) = u'(x_2) = ... = u^{(m-1)}(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$p_k(x) \geq 0, \quad x \in [x_1, x_2], \qquad f \in L_2(x_1, x_2)$$

$$D_L = \left\{u \in C^{2m}[x_1, x_2] + \text{ граничные условия}\right\}$$

$$(Lu, u)_H = \sum_{k=0}^{m} \int\limits_{x_1}^{x_2} p_k(x)\left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^2 dx \geq \int\limits_{x_1}^{x_2} p_m(x)\left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)^2 dx \geq p_0 \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)^2 dx = p_0\|u^{(m)}\|_H^2$$

Так как выполняется $u(x_1) = u'(x_1) = ... = u^{(m-1)}(x_1) = 0$, то

$$\|u\|_H^2 \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{2}\|u'\|_H^2$$

$$\|u\|_H \leq \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}\|u'\|_H, \quad ..., \quad \|u^{(l-1)}\|_H \leq \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}\|u^{(l)}\|_H, \qquad l = \overline{1, m}$$

$$\|u^{(m)}\|_H^2 \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1}\right)^m \|u\|_H^2$$

$$(Lu_m) \geq \gamma^2\|u\|_H^2, \quad \gamma = \sqrt{p_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1}\right)^m \qquad \Rightarrow \qquad L \text{ — положительно определенный}$$

$$\|u\|_A \leq \sqrt{p_0}\ \|u^{(m)}\|_H, \quad \exists\ \{u_n(x)\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u_0\| = 0, \quad u_0 \text{ — точное решение}$$

$$\|u_n - u_k\|_A \leq \|u_n - u_0\|_A + \|u_k - u_0\|_A \to 0$$

$$u_n^{(l)}(x_1) = u_k^{(l)}(x_1) = 0, \quad l = \overline{0, m-1}$$

$$u_n^{(m-1)}(x) - u_k^{(m-1)}(x) = \int\limits_{x_1}^{x} \left(u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t)\right)\ dt$$

$$\left|u_n^{(m-1)}(x) - u_k^{(m-1)}(x)\right| \overset{\text{КБ}}{\leq} (x - x_1)\int\limits_{x_1}^{x} \left(u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t)\right)^2\ dt \leq$$

$$\leq (x_2 - x_1)\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t)\right)^2\ dt \leq (x_2 - x_1)\left\|u_n^{(m)} - u_k^{(m)}\right\|_H^2$$

Пример 2 (задача об изгибе балки)

$$L\omega = \frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2}\right] + K\omega = q(x)$$

ω — прогиб балки
E — модуль Юнга
$I(x)$ — момент инерции сечения
$q(x)$ — интенсивность нагрузки на балку
K — коэффициент податливости основания

$$\omega(0) = \omega(l) = 0$$

$$\omega'(0) = \omega'(l) = 0$$

Из предыдущей задачи известно, что L положительно определен

$$F(\omega) = \int\limits_0^l \Big(EI(x)\omega''^2 + K\omega^2 - 2q(x)\omega\Big)\,dx = (L\omega, \omega) - 2(\omega, q)$$

Воспользуемся методом Ритца

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \varphi_n(x) = (x-l)^2 x^{n+1}, \quad \text{полная система в } H_A$$

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) = (x-l)^2\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k A_{ik} = b_{ij}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$b_j = (q, \varphi_j)_H = \int\limits_0^l q(x)(x-l)^2 x^{j+1} dx$$

$$A_{ik} = (L\varphi_i, \varphi_k)_H = \int\limits_0^l \left(EI(x)\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\frac{d^2\varphi_k}{dx^2} + k\varphi_i\varphi_k\right) dx$$

$$\omega_n(x) \underset{[0;l]}{\rightrightarrows} w_0(x), \qquad {\omega'}_n(x) \underset{[0;l]}{\rightrightarrows} {w'}_0(x), \qquad {\omega''}_n(x) \overset{\text{ср}}{\rightrightarrows} {w''}_0(x),$$

$$\omega(0) = 0, \qquad \omega''(l) = 0, \qquad \omega'(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} = 0$$

Пример 3 (краевая задача для систем ОДУ)

$$-\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{d}{dx}\left(p_{jk}(x)\frac{du_k(x)}{dx}\right) - q_{jk}(x)u_k(x)\right] = f_j(x)$$

$$u_j(x_1) = u_j(x_2) = 0$$

$$u(x) = \big(u_1(x), ..., u_j(x)\big)^T, \qquad f(x) = \big(f_1(x), ..., f_j(x)\big)^T$$

$$\big(p_{jk}(x)\big)_{j,k=1} \subset P(x), \qquad \big(q_{jk}(x)\big)_{j,k=1} \subset Q(x)$$

$$-\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du}{dx}\right]+Q(x)u(x)=f(x)$$

$$u(x_1)=u(x_2)=0$$

$$p_{jk}(x),\ q_{jk}(x),\ {p'}_{jk}(x)\in C[x_1,x_2]$$

$$(u,v)_{H=L_2(x_1,x_2)}=\int\limits_{x_1}^{x_2}u(x)v(x)dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{k=1}^{s}u_k(x)v_k(x)dx$$

$$D_A=\Big\{u=\big(u_1,...,u_j\big)^T,\ u_i(x)\in C[x_1,x_2],\ u_i(x_1)=u_i(x_2)=0\Big\}$$

Теор. $P(x),Q(x)$ симметричны на $x\in[x_1,x_2]$ $\quad\Rightarrow\quad$ A симметричный

Док-во.

$$(Au,v)_H=-\int\limits_{x_1}^{x_2}v(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du}{dx}\right]dx\ +\int\limits_{x_1}^{x_2}v(x)Q(x)u(x)dx=$$

$$=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[P\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+v(x)Q(x)u(x)\right]dx=(u,Av)_H\quad\Rightarrow\quad\text{симметр.}$$

$$Quv=\sum_{j,k=1}^{s}q_{jk}u_kv_j=\sum_{i,j=1}^{s}q_{kj}v_ju_k$$

□

Теор. $P(x),Q(x)$ симметричны на $[x_1,x_2]$, $P(x)$ — полож. опр., $Q(x)$ неотр. на $[x_1,x_2]\Rightarrow A$ положительно определен

Док-во.

$$P(x)\ \text{пол. опр}\ \forall x\Rightarrow\ \text{пусть}\ \lambda_1(x)>0$$

$$\exists\ \tilde\lambda>0=const,\quad\lambda_1(x)>\tilde\lambda>0,\quad x\in[x_1,x_2]$$

$$\forall\ t=\big(t_1,...,t_s\big)^T$$

$$P(x)t\cdot t=\sum_{j,k=1}^{s}P_{jk}(x)t_jt_k\geq\lambda_1(x)\sum_{k=1}^{s}t_k^2\geq\tilde\lambda\sum_{k=1}^{s}t_k^2$$

$$Q(x)t\cdot t=\sum_{j,k=1}^{s}q_{jk}t_jt_k\geq 0$$

$$(Au,u)_H=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(P\frac{du}{dx}\cdot\frac{du}{dx}+Qu\cdot u\right)dx\geq\tilde\lambda\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{du_k}{dx}\right)^2dx$$

$$(Au,u)_H\geq\frac{2\tilde\lambda}{(x_2-x_1)^2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{k=1}^{s}u_k^2\right)dx=\frac{2\tilde\lambda}{(x_2-x_1)^2}\|u\|_H^2$$

$$(Au,u)_H\geq\gamma^2\|u\|_H^2$$

□

$$\begin{array}{l}u'(x_1)-M_1u(x_1)=0\\ u'(x_2)-M_2u(x_2)=0\end{array}\quad\Rightarrow\quad A\ \text{— полож. опр.,}\quad M_1,M_2\ \text{— ?? неотриц.}$$

6.2 Основные краевые задачи для ур-я Пуассона

$$-\Delta u = f(p) \qquad \text{в} \;\; \Omega \subset \mathbb{R}^m \tag{6.1}$$

▶ <u>задача Дирихле</u>

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{6.2}$$

$$Au = -\Delta u = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_k}^2}$$

$$D_A = \left\{u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right), \quad u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

$$H = L_2(\Omega)$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - 0\int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n} dS = \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega \geq 0 \tag{6.3}$$

$$(Au, u)_H = 0 \Leftrightarrow u = const = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A \text{ — положительный}$$

$$\Leftrightarrow \min F(u)$$

$$F(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H \tag{6.4}$$

$$F(u) = \int\limits_\Omega \left((\operatorname{grad} u)^2 - 2uf\right)\, d\Omega \tag{6.5}$$

▶ <u>задача Робена</u>

$$\left.\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(P) u\right]\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{6.6}$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma u^2 dS \geq 0, \qquad \sigma(P) \not\equiv 0,\; \sigma(P) \geq 0$$

$$(-\Delta u, u)_H = 0 \Leftrightarrow u = const = c, \qquad \int\limits_{\partial\Omega} \sigma c^2 dS = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$F(u) = \int\limits_\Omega \left((\operatorname{grad} u)^2 - 2uf\right) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma u^2 dS \tag{6.7}$$

▶ <u>задача Неймана</u>

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{6.8}$$

Аналогично (**??**)

$$(-\Delta u, u)_H = -0\int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n} dS + \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega \geq 0$$

Но, этого недостаточно, например:

$$u \equiv 1, \quad (-\Delta u, u)_H = 0$$

Интегрируем $\int\limits_{\Omega}(...)d\Omega$ уравнение (**??**):

$$-\int\limits_{\Omega} \Delta u d\Omega = \int\limits_{\Omega} f d\Omega$$

(**??**) при $v = 1$

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u \, d\Omega = \int\limits_{\partial\overline{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

$$\int\limits_{\Omega} f \, d\Omega = 0 \quad \text{— условие разрешимости}$$

$$\int\limits_{\Omega} u(P) \, d\Omega = 0 \tag{6.9}$$

$$D_A = \left\{ u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right), \quad u : (\mathbf{??}), (\mathbf{??}) \right\}$$

С учетом условия (**??**)

$$(-\Delta u, u)_H = 0 \Leftrightarrow \operatorname{grad} u = 0 \Rightarrow u = c \overset{(\mathbf{??})}{\Rightarrow} u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A \text{ — положительный}$$

$$\Leftrightarrow \min F(u)$$

$$F(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H$$

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \left((\operatorname{grad} u)^2 - 2uf\right) \, d\Omega$$

Лекция 7

① <u>задача Дирихле</u>

$$(-\Delta u, u)_H = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega$$

При $n = 2$

$$(-\Delta u, u)_H = \int\limits_\Omega \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) d\Omega$$

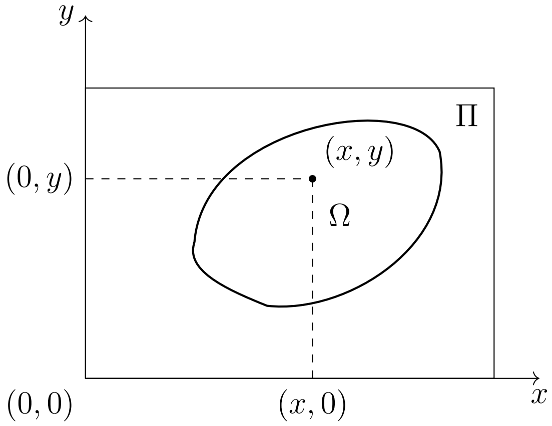

Рис. 2

Заключим Ω внутрь некоторого прямоугольника П (Рис. ??). Продолжим $u(x, y)$ на весь прямоугольник, полагая ее равной нулю вне Ω

$$\forall\ A(x_1, y_1) \in \Pi :$$

$$\int\limits_{x_{min}}^{x_1} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} dx = u(x_1, y_1) - u(x_{min}, y_1)$$

$$u^2(x_1, y_1) \overset{\text{КБ}}{\leq} (x_1 - x_{min}) \int\limits_{x_{min}}^{x_1} \left[\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 dx \leq a \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} \left[\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 dx \tag{7.1}$$

Проинтегрируем это неравенство

$$\int\limits_\Pi u^2(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \leq a^2 \int\limits_\Pi \left[\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 dx dy_1 \leq \int\limits_\Pi \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) d\Omega$$

$$\int\limits_\Pi u^2(x, y) d\Omega \leq \int\limits_\Pi \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) d\Omega$$

$$(Au, u)_H \geq \gamma^2 \|u\|_H^2$$

Получаем, что A положительно определен на D_A

Неравенство Фридрихса в общем виде:

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega \geq \gamma^2 \int\limits_{\Omega} u^2 dx, \qquad u|_S = 0$$

② задача Робена

$$\begin{cases} -\Delta u = f \qquad \text{в } \Omega \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma(P)u(P)\right]\Bigg|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma(P) \geq \sigma_0 = const > 0$$

$$\int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega \leq C \left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS \right\}$$

$$u = f \cdot v$$

$$\left(\frac{\partial (fv)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial (fv)}{\partial y}\right)^2 = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] - \\ - v^2 f \Delta f + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{(*)} \tag{7.2}$$

Преобразуем правую и левую части:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}v + \frac{\partial v}{\partial x}f\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial y}f\right)^2 = v^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right) + f^2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right) + \\ + 2v\frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} f \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(*) = 2v\frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2v\frac{\partial v}{\partial y} f \frac{\partial f}{\partial y} + v^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Получим

$$v^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right) = -v^2 f \Delta f + v^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial f}{\partial x}\right) + v^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

что при дальнейшем упрощении очевидно оказывается верным равенством. Отбрасывая первое слагаемое справа в (**??**):

$$\left(\frac{\partial (fv)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial (fv)}{\partial y}\right)^2 \geq -v^2 f \Delta f + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Проинтегрируем получившееся $\int\limits_{\Omega}(...)d\Omega$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial(fv)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(fv)}{\partial y}\right)^2\right)d\Omega \geq -\int\limits_{\Omega} v^2 f\Delta f\, d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} v^2 f\frac{\partial f}{\partial n}dS$$

$$-\int\limits_{\Omega} vf\Delta f d\Omega \leq \int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)d\Omega + \left|\int\limits_{\partial\Omega} v^2 f\frac{\partial f}{\partial n}dS\right|$$

$$f=\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\Delta f = -\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)f$$

$$-\int\limits_{\Omega} v^2 f\Delta f d\Omega = -\int\limits_{\Omega} -v^2 f\Delta u^2(\cdot)d\Omega = \int\limits_{\Omega} u^2\pi^2(\cdot)d\Omega$$

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega} v^2 f\frac{\partial f}{\partial n}dS\right| \leq \int\limits_{\partial\Omega} v^2 f\left|\frac{\partial f}{\partial n}\right|dS \leq c_1\int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)d\Omega + c_1\int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$c=\min\left\{\frac{c_1}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}, \frac{1}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\right\}$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2 d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}dS \overset{(??)}{\geq} \int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + \sigma_0\int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS \geq$$

$$\geq \sigma_1\left\{\int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS\right\}$$

$$\sigma_1=\min\{\sigma_0, 1\}$$

$$\frac{\sigma_1}{c}\|u\|_H^2 \leq \int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\gamma=\sqrt{\frac{\sigma_1}{c}}$$

$$-(\Delta u, u)_H \geq \frac{\sigma_1}{c}\|u\|_H$$

Лекция 8

② <u>задача Робена</u>

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

8.1 Неравенство Пуанкаре

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega$

$$\int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega \le A \int\limits_{\Omega} \left[(\operatorname{grad} u)^2\right] d\Omega + B \left(\int\limits_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

где A и B — константы, зависящие от формы области Ω.

$$\begin{aligned}
&u^2(x_2, y_2) + u^2(x_1, y_1) - 2u(x_2, y_2)\, u(x_1, y_1) = \\
&= \left(\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) dx \right)^2 + \left(\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) dy \right)^2 + 2 \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) dx \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) dy \le \\
&\le 2 \left(\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) dx \right)^2 + 2 \left(\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) dy \right)^2 \le \\
&\qquad \le 2 \left\{ |x_2 - x_1| \int\limits_{0}^{a} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) \right)^2 dx + |y_2 - y_1| \int\limits_{0}^{b} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) \right)^2 dy \right\}
\end{aligned}$$

Проинтегрируем $\iiiint (...) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$:

$$\iiiint u^2(x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = ab \int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega$$

$$\iiiint u(x_2, y_2) u(x_1, y_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \left(\int\limits_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

После интегрирования получаем:

$$2ab \int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega - 2 \left(\int\limits_{\Omega} u d\Omega \right)^2 \le ab \left\{ a^2 \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\Omega + b^2 \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 d\Omega \right\}$$

Полагая $A = \max\{a^2, b^2\}$ и $B = \frac{1}{ab}$, приходим к неравенству Пуанкаре:

$$\int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega \leq A \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) d\Omega + B \left(\int\limits_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

Для задачи Робена с условием нулевого среднего значения:

$$D_N = D(A_N) = \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int\limits_{\Omega} u d\Omega = 0 \right\}$$

$$\|u\|_H^2 \leq A \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega = \widetilde{A} \ (A_N u, u)_H$$

что означает положительную определённость оператора:

$$(A_N u, u) \geq \gamma^2 \|u\|_H^2, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{A}}}$$

Далее обозначим через A оператор A_N или A_D и определим энергетическое скалярное произведение:

$$[u, v]_A = \int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \ d\Omega$$

$$\|u\|_A = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega$$

Определение. Пусть $u, v \in L_2(\Omega)$ и $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ — гладкая функция с компактным носителем.

Если для всех таких ψ справедливо тождество

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} d\Omega = - \int\limits_{\Omega} v_j \psi \, d\Omega$$

то функция $v_j \in L_2(\Omega)$ называется **обобщённой частной производной** функции u и обозначается $v_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ в смысле распределений.

Пусть $u \in H_{A_D}$ — элемент пространства энергетических функций. Тогда существует последовательность $\{u_n\} \subset D_{A_D}$ такая, что:

$$\|u_n - u\|_H \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\|u_n - u\|_A \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u_n - \operatorname{grad} u_l)^2 d\Omega = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega \to 0$$

Следовательно, существуют пределы компонент градиента:

$$\exists\, v_k \in L_2(\Omega): \qquad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - v_k \right\|_H \to 0$$

Утверждение. $v_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ в смысле обобщённых производных.
Доказательство: Пусть $\psi(P) \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ и $\{u_n\} \subset C^2(\overline{\Omega})$.
По формуле интегрирования по частям:

$$\int\limits_\Omega u_n \frac{\partial \psi}{\partial x_k} d\Omega = -\int\limits_\Omega \psi \frac{\partial u_n}{\partial x_k} d\Omega$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$:

$$\left(u_n, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right)_H = -\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k}, \psi\right)_H \qquad \to \qquad \left(u, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right)_H = -(\psi, v_k)_H$$

что и означает, что v_k — обобщённая производная функции u. □

8.2 Неоднородные краевые условия

Рассмотрим краевую задачу:

$$\Delta u = 0 \tag{8.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{8.2}$$

Идея решения: Преобразуем задачу к однородным граничным условиям, используя вспомогательную функцию.

Предположим, что существует функция $\psi(P)$ со следующими свойствами:

- $\psi \in C(\overline{\Omega})$
- $\psi(P)|_{\partial\Omega} = \varphi(P)$
- $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_k} \in C(\Omega),\ k = \overline{1, m}$

Такая функция ψ продолжает граничные данные φ в область Ω.
Рассмотрим функционал энергии (энергетический функционал):

$$\Phi(u) = \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega \tag{8.3}$$

определённый на пространстве допустимых функций:

$$D_\Phi = \{u : u|_{\partial\Omega} = \varphi(P)\}$$

Решение $u_0(P)$ исходной задачи доставляет минимум этому функционалу.

Вариационный принцип: Пусть функция $u_0(P)$ реализует $\min \Phi(u)$. Рассмотрим вариации:

$$u_0 + t\eta \in D_\Phi, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

где η — произвольная функция, обращающаяся в нуль на границе:

$$\eta|_{\partial\Omega} = 0$$

Так как $\Phi(u_0 + t\eta)$ достигает минимума при $t = 0$, то:

$$\left[\frac{d}{dt}\Phi(u_0+t\eta)\right]\bigg|_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial(u_0+t\eta)}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega\right]\Bigg|_{t=0} =$$
$$= \left[\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\right)^2 + 2\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\cdot t\frac{\partial \eta}{\partial x_k} + t^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\right)^2\right) d\Omega\right]\Bigg|_{t=0} =$$
$$= 2\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^m \frac{\partial u_0}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_k} d\Omega = 2\int\limits_\Omega \operatorname{grad} u_0 \cdot \operatorname{grad} \eta \, d\Omega = 0$$

Применяя формулу Грина и используя граничное условие $\eta|_{\partial\Omega} = 0$:

$$\int\limits_\Omega \eta\, \Delta u_0 \, d\Omega = 0$$

Так как множество функций η с указанным свойством плотно в $L_2(\Omega)$, то:

$$\Delta u_0 = 0 \text{ п.в. в } \Omega$$

Переход к однородным условиям: Положим $u = \psi + v$, где $v|_{\partial\Omega} = 0$.
Тогда исходный функционал принимает вид:

$$\Phi(u) = \Phi(\psi+v) = \int\limits_\Omega (\operatorname{grad}(\psi+v))^2 d\Omega =$$
$$= \int\limits_\Omega (\operatorname{grad}\psi)^2 d\Omega + 2\int\limits_\Omega \operatorname{grad}\psi \cdot \operatorname{grad} v d\Omega + \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} v)^2 d\Omega$$

Переписывая через новый функционал:

$$F(v) = \|v\|^2_{A_D} - 2\int\limits_\Omega \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad}\psi \; d\Omega, \qquad v \in H_D = H_{A_D}$$

где H_D — энергетическое пространство Дирихле (функции, обращающиеся в нуль на границе).

Рассмотрим линейный функционал:

$$lv = \int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \psi \; d\Omega$$

По неравенству Коши–Буняковского:

$$|lv| \leq \sqrt{\int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} \psi)^2 d\Omega} \cdot \sqrt{\int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} v)^2 d\Omega} = c \, \|v\|_{A_D}$$

Следовательно, l — ограниченный линейный функционал.

По теореме Рисса об ограниченных функционалах в гильбертовых пространствах, существует единственное решение вариационной задачи, что гарантирует существование и единственность обобщённого решения исходной краевой задачи.

Вывод: Для каждой функции $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ существует единственное обобщённое решение задачи Дирихле

$$u \in H_D(\Omega)$$

8.3 Уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим общую краевую задачу для эллиптического оператора с переменными коэффициентами:

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{jk}(P) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + C(P)u = f, \quad \Omega \in \mathbb{R}^m \tag{8.5}$$

Краевые условия одного из трёх типов:

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{(Дирихле)} \tag{8.6}$$

$$[N(u) + \sigma(P)u]|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{(Робен)} \tag{8.7}$$

$$N(u)|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{(Неймана)} \tag{8.8}$$

где $N(u) = \sum\limits_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\mathbf{n}, x_j)$ — нормальная производная.

Формула Грина:

$$\int\limits_{\Omega} (vLu - uLv) \, d\Omega = -\int\limits_{\partial\Omega} (vN(u) - uN(v)) \, dS \tag{8.9}$$

Проверка симметричности оператора:

При условиях (**??**) (Дирихле) и (**??**) (Неймана) поверхностный интеграл в (**??**) обращается в нуль, поэтому оператор симметричен.

При условии (**??**) (Робен): $N(u) + \sigma u = 0$ и $N(v) + \sigma v = 0$ на границе, откуда:

$$vN(u) + v\sigma u - uN(v) - u\sigma v = 0$$

$$[vN(u) - uN(v)]\big|_{\partial\Omega} = 0$$

Следовательно, при любых граничных условиях (**??**)–(**??**) правая часть (**??**) обращается в нуль, откуда:

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

Определение эллиптичности: Оператор L называется **эллиптическим** в $\overline{\Omega}$, если существует константа $\mu_0 > 0$ такая, что для всех $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ и всех $P \in \overline{\Omega}$:

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(P) t_j t_k \geq \mu_0 \sum_{j=1}^{m} t_j^2 \tag{2}$$

Это условие означает **равномерную положительную определённость** матрицы коэффициентов.

Пример (оператор Трикоми): Важный пример смешанного типа:

$$Lu = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$A_{11} = y, \quad A_{21} = A_{12} = 0, \quad A_{22} = 1$$

Для области, целиком лежащей в полуплоскости $y > 0$:

$$yt_1^2 + t_2^2 \geq 0 \text{ при всех } t_1, t_2$$

Следовательно, оператор Трикоми эллиптичен в такой области.

Положительная определённость: Если коэффициент $C(P)$ ограничен снизу положительным числом $c_0 > 0$, то оператор L является положительно определённым.

По формуле Грина:

$$(Lu, u)_H = \int\limits_{\Omega} uLu\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right] d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} uN(u) dS$$

При краевых условиях (**??**), (**??**) (Дирихле и Неймана):

$$\int\limits_{\partial\Omega} uN(u)\,dS = 0$$

Поэтому:

$$(Lu, u)_H \geq c_0 \int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega = \gamma^2 \|u\|_H^2, \quad \gamma = \sqrt{c_0}$$

При условии Робена (**??**) с $\sigma(P) \geq \sigma_0 > 0$:

$$N(u) = -\sigma u \text{ на } \partial\Omega$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} uN(u)dS = -\sigma_0 \int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS \leq 0$$

откуда также следует положительная определённость оператора.

Лекция 9

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{jk}(P)\frac{\partial n}{\partial x_k} + c(P)u = f(P))$$

1. з Дирихле

$$(Lu,u) = \mu\sum_{j=1}^{m}\int_{\Sigma}(\frac{\partial n}{\partial x_j})^2 d\Omega \geq \Sigma^2\|u\|_H^2; \sigma = \sqrt{ae\mu_0}$$

2. з Робэна

$$(Lu,u) \geq (\alpha(\int_{\Sigma}\sum_{j=1})^{n}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2)d\Omega + \int_{\partial\Omega} n^2 dS); \Rightarrow (Lu,u) \geq \alpha\|u\|^2$$

3. з Неймана

$$C(P) = 0$$

$$Lu = -\sum_{j,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{jk}\frac{\partial n}{\partial x_k}l) = f(P)$$

$$\int_{\Omega}(\cdot)d\Omega + \text{ ф-ла Остроградского}$$

$$-\int_S\sum_{j,k=1}^{m}A_j\frac{\partial n}{\partial x_k}cos(\overline{n},x)dS = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f(P)d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} ud\Omega = 0$$

$$D_{L_N} = \{u \in C^2(\overline{\Omega}), N(u)|_{\partial\Omega} = 0, \int_{\Omega} ud\Omega = 0\}$$

$$(L_N u, n) = -\int_{\Omega} u\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{jk}\frac{\partial n}{\partial x})d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{m}A_{jk}\frac{\partial n}{\partial x_j}\frac{\partial n}{\partial x_n}d\Omega \geq \mu_0\int_{k=1}^{m}(\frac{\partial n}{\partial x_k})^2 d\Omega$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq A\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial n}{\partial x_0}dS + B(\int_{\Omega} u\Omega)^2)$$

9.1 Энергетический метод для положительных операторов

$Au = f, u, f \in H, A$ положительный

Все еще работает теорема о функциональной энергии

$$F(u) = (Au, u)_H - 2(u, f)_H$$

Энергетическое пространство порожденное оператором H_A, вообще говоря его элементам нельзя сопоставить элементы из Гильбертова.

$$H_A - \text{ Энергетическое пр-во}$$

$$(u, f) \text{ на } D_A - \text{ плотно в H и в } H_A$$

$$(u, f) = lu \text{ Функционал } \rightarrow \text{ может быть ограничен или не ограницен}$$

Если ограничен в H_A продолжим на H_A
в H_A по теореме Рисса $\exists u_0 \in H_A (u, f) = [u, u_0]A$

$$[u - u_0, u - u_0] = \|u\|_A^2 + \|u_0\|_A^2 - 2[u, u_0]_A$$

$$F(u) = \|u\|_A^2 - 2[u, u_0]_A = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

Минимум достигается на элементе $F(u) = u_0$. Но u_0 может не лежать в энергетическом про-ве. Обобщенное решение с конечной энергией.

Если H сепарабельно $\Rightarrow H_A$ сепарабельно $\Rightarrow \{\phi_n\}$ в H_A

$$u_o = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \phi]_A \phi$$

$$[\phi_n, u_0] = l\phi_n$$

$$\text{Если } \{\phi\} \in D_A \Rightarrow l\phi_n - (f, \phi_n) \Rightarrow u_o = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n)\phi_n$$

$$u_k \sum_{n=1}^{k} (f, \phi_n) \|u_k - u_0\|_A \rightarrow_{k\rightarrow\infty} 0$$

$$\text{Если } \{\phi\} \in D_A \Rightarrow l\phi_n - (f, \phi_n) \Rightarrow u_o = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n)\phi_n \Rightarrow = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n)\phi_n$$

9.2 Эллиптические уравнения в бесконечной области

Пусть Ω — бесконечная область

$$-\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(P)$$

при краевом условии задачи Дирихле

$$u|_{\partial\Omega}=0$$

Допустим, что коэффициенты A_{jk} ограничены

$$D_A=\{u\in C^2(\overline{\Omega}),u|_{\partial\Omega}=0,b(P=0),|P|>>1\}$$

Оператор A является лишь положительным
Задача (**??**), (**??**) имеет решение с конечной энергией тогда, когда

$$\exists\, g(P):\quad f(P)=\operatorname{div} g(P),\quad \int\limits_{\Omega}|g(P)|^2d\Omega<\infty$$

$\operatorname{div} g$ понимается в смысле "обобщенной дивергенции"

$$\|u_0\|_A^2\le C\int\limits_{\Omega}|g(P)|^2d\Omega$$

Можно указать более простое достаточное условие:

$$m\ge 3:\qquad \int\limits_{\Omega}|P|^2f^2(P)d\Omega<\infty\quad\Rightarrow\quad \|u_0\|_A^2\le C^2\int\limits_{\Omega}|P|^2f(P)d\Omega$$

$$m\ge 2:\qquad \int\limits_{\Omega}f^2(P)d\Omega<\infty$$

Перейдем к задаче Неймана:

$$H_{A_D}=\{u\in H'(\Omega)\text{ и }u|_{\partial\Omega}=0\}$$

$$H_{A_H}=\{\exists 0\delta\frac{\partial u}{\partial x}\in L_2(\Omega)\}$$

$$F(u)=\int\limits_{k,j=1}^{m}A_{jk}\frac{\partial n}{\partial x_j}\frac{\partial n}{\partial x_k}d\Omega-2lu$$

В случае задачи Неймана lu определяется формулой:

$$l_Nu=-\int\limits_{\Omega}\operatorname{grad} u\cdot g\ d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega}ug_ndS$$

В случае задачи Дирихле:

$$l_D u = -\int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot g \; d\Omega$$

Если сходится интеграл (**??**), то:

$$lu = \int\limits_{\Omega} u(P) f(P) d\Omega$$

TODO

$$Au = f$$

$$B_j u = 0; j = 1, q$$

$$H > D_A$$

знак принадлежит в обратную сторону

$$H_A$$

При условии $u \in D_A$, но не обязательно $u \in H_A$ естественные
$B_j : u \in H_A$ главные гр условия для A.

$$-\Delta u = f$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \partial u = 0, \sigma > 0$$

$$(-\Delta u, v)_H = -\int v \Delta u d\Omega$$

$$\int grudgradvd\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$F(u, u) = \|u\|_A^2 - 2(f, u) = \int\limits_{\Omega} (grud^2 u - 2u) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \partial u^2 dS$$

$$u_0 = \operatorname{argmin} F;$$

$$\frac{d}{dt}(F(u_0 + t\eta))|_{t=0}' = 0$$

$$-\int\limits_{\Omega} \eta(\Delta u_0 + f) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \eta(\frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \partial u_0) dS = 0$$

Лекция 10

10.1 Метод Бубнова-Галеркина

Пусть линейный оператор L (не обязательно положительный) определен на множестве, плотном в H (гильбертовом)

$$Lu = f \tag{10.1}$$

Выбираем последовательность элементов $\{\varphi_n\}, \quad \varphi_n \in D_A$, которые назовем координатными функциями. Все они удовлетворяют некоторым однородным краевым условиям задачи (??)

Будем считать, что как и (??), так и все краевые условия линейные. Тогда и функция

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_n \varphi_k(P) \tag{10.2}$$

будет удовлетворять всем краевым условиям задачи (??)

a_k выбирается таким образом, чтобы после подстановки $(Au_n - f) \perp \varphi_1, .., \varphi_n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_j (L\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \qquad j = \overline{1, n} \tag{10.3}$$

10.2 Применение метода Б-Г к интегральному уравнению Фредгольма

$$u(P) - \int\limits_{\Omega} K(P,Q)\, u(Q)\, d\Omega = f(P) \tag{10.4}$$

Предполагаем следующее

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(P,Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q < \infty, \qquad \int f^2(P) d\Omega < \infty \tag{10.5}$$

а также единственность решения (??) в $H = L_2(\Omega)$

Возьмем систему $\{\varphi_n\}$ полную и ортонормированную (ПОНС)

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} \tag{10.6}$$

Положим

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P)$$

Подставляя в (??) и требуя ортогональности, а также учитывая (??) получим СЛАУ

$$a_m - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} a_k = (f, \varphi_m) \tag{10.7}$$

$$\gamma_{mk} = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K(P,Q) \varphi_m(P) \varphi_k(Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q$$

Введем обозначения:

$$K_n(P,Q) = \sum_{k,m=1}^{n} \gamma_{mk}\, \varphi_m(P)\, \varphi_k(Q)$$

$$f_n(P) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k(P)$$

Система $\{\varphi_n\}$ — ПОНС, поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega \left[K_n(P,Q) - K(P,Q)\right]^2 d\Omega_P\, d\Omega_Q = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left[f_n(P) - f(P)\right]^2 d\Omega = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$v_n(P) - \int_\Omega K_n(P,Q) v_n(Q) d\Omega = f_n(P) \tag{10.9}$$

Из теории интегральных уравнений из (**??**) следует, что при достаточно большом n уравнение (**??**) разрешимо и имеет единственное решение

$$\|v_n - v\|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Интегральное уравнение (**??**) можно решить. Заменяя $K_n(P,Q)$ и $f_n(P)$ их значениями, получим

$$v_n(P) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_K(P)$$

$$A_m = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} \int_\Omega v_n(Q)\, \varphi_k(Q)\, d\Omega + (f, \varphi_m)$$

$$A_m - \sum_{l=1}^{n} \gamma_{mk} A_k = (f, \varphi_m), \qquad m = \overline{1,n}$$

10.3 Элементы теории приближения

TODO

$H_A \supset H_N$ - конечномерное

$\exists$ норм про-во X: $\exists$ элемент наилучшего приближения

$\forall u \in X : \rho(u, H_N) = inf_{v \in H_N} \rho(u,v) X = C[a,b]$

$1, x, x^2, ..., x^N, ...$

$|C[a,b] \to P_{N-1}(x)$

$$L_N(x) = \sum_{n=1}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

$\{l_k(x)\}-$ система фундаментальных многочленов

$$l_k(x)=\frac{(x-x^1)...(x-x_N)}{(x_k-x_1)...(x_k-x_N)}=\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_K)}$$

$l_k(x_m)=\delta_{km};\omega(x)={}^{m}_{k=1}(x=x_k)$

$\|f-L_N(x)\|_C\leq(1+\|P\|)\rho_N(f,H_N)$

$\|P\|=max_{x\in[a,b]}\sum\limits_{k=1}^{n}|l_k(x)|=\Lambda_N-$ построение Лебега

Λ_N- неограниченно возрастает при $n\to\infty$ для всего $C[a,b]$и сущ зависит от выбора сетки $x_1,...,x_N$

$$x_k=\frac{a+b}{2}+\frac{2}{b-a}t_k;t_K=-cos\{\frac{\pi}{2N}(2k-1)\}$$

$$\Lambda_N\approx\frac{2}{\pi}lnN+1-q_N,0<<q_N<\frac{1}{4}$$

$$Lu=-\frac{d}{dx}(p(x\frac{du}{dx})+q(x)u)$$

$Lu=f+$ гр у $u(a)=u(b)+0$

$$u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_kl_k(x);a_k=u_N(x_k)$$

$$\sum_{p=1}^{n}a_p(Ll_p,l_K)=(f,l_k)=\int\limits_a^b f(x)ln(x)dx=f_K$$

$l_k(x_m)=\delta_{km},\omega(x)={}^{m}_{k=1}(x-x_k)$ СЛАУ с mуравнений

$$a_{kl}=(Ll_k,l_p)=\int\limits_a^b p(x)\frac{dl_n(x)}{dx}\frac{dlp(x)}{dx}+\int\limits_a^b a(x)q(x)l_k(x)f(x)dx$$

$x_1=a;x_N=b\Rightarrow$

$l_1(x_1)=0;l_N(X_N)=0$

$$u_n(x)=\sum_{k=2}^{N-1}u(x_K)l_N(x)$$

$$\sum_{p=1}^{N-1}u_ka_{Kp}=f_k$$

$p=w$

Пример

$p\equiv1,a\equiv0$

$f(x)=\{1,x\geq0;-1,x<0\}$

$$N=5;x_1=-1,x_2=-\frac{1}{2},x_2=-\frac{1}{2},x_3=0,x_4=\frac{1}{2},x_5=1$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})-1-\frac{3}{2}}$$

$$l_3(x) = (x+1(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}))$$

$$l_4(x) = \frac{(x+1(x+\frac{1}{2})x(x-1))}{\frac{3}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}}$$

$$u_N - u_2 l_2(x) + u_3 l_3(x) + u_4 l_4(x)$$

$$a_{kp} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dl_k}{dx}\frac{dl_P}{dx}dx$$

период гр у

$$[a,b] = [0,2\pi]$$

$$u_N = \frac{a}{2} + \sum_{k=1} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

$$x_k = \frac{2\pi}{x}(k-1) a_0, a_k, b_k \text{ Упр.}$$

$$dim H_N - 2N - 1$$

$$a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

$$\Lambda_N \frac{1}{\pi} ln N + \delta(2-\frac{2}{\pi}), 0<\delta<1$$

10.4 Введение в теорию степенных сплайнов

$$[a,b] a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b, h_K = s_k - x_{k-1} k = \overline{0, N-1}\, h_k = x+1-x_k$$

Определение
Сплайн степени n, дефекта ν:

$$S_{n\nu} = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_p^(k)(x-x_k)^P = \sum_{p=0}^{n} b'_P (x_{k+1}-x)^P$$

$$(x-x_K)_t^P = \{(x-x_k)^P, x \geq x_k; 0, x \leq x_k\}$$

Лекция 11

11.1 Кусочно постоянные сплайны

Рассмотрим случай одной переменной

$$\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Введем на $[a, b]$ сетку

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad h = \max_{i=1,N} h_i$$

Зададим на каждом отрезке (x_{i-1}, x_i) функцию

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

Линейную оболочку таких функций обозначим H_N

1. Система линейно независима
2. $(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \;\; (i \neq j), \qquad (\varphi_i, \varphi_i) = h_i$

Теор. Для любой функции $u(x) \in W_p^1(\Omega) \quad \exists v(x) \in H_N$:

$$\|u - v\|_{L_2(a,b)} \leq ch\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

где $c = const$ не зависит от h, u, а норма в W_p^1 задается выражением

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L_p(\Omega)}$$

<u>Док-во</u>

$$v = \int_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x), \qquad u_i = \frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u(\xi) d\xi$$

Тогда при $p < \infty$

$$\|u - v\|_{L_p(a,b)}^p = \int_a^b |u - v|^p dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| u(x) - \frac{1}{h_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(\xi) d\xi \right|^p dx =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(u(x) - u(\xi)\big) d\xi \right|^p dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{\xi}^{x} \frac{du}{d\eta} d\eta \right|^p dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left|\frac{du}{d\eta}\right| d\eta \right|^p dx = \sum_{i=1}^N h_i \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left|\frac{du}{d\eta}\right| d\eta \right)^p$$

Используя неравенство Гельдера:

$$\left| \int_\Omega u(x) v(x) dx \right| \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

получим

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} 1\cdot\left|\frac{du}{d\eta}\right|d\eta \le \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} 1^q d\eta\right)^{1/q}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta\right)^{1/p}$$

$$\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|d\eta\right)^p \le h_i^{p/q}\int\limits_{x_i-1}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta$$

$$\|u-v\|_{L_p}^p \le \sum_{i=1}^N h_i^{1+p/q}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta \le h^{1+p/q}\int\limits_a^b\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta = h^p\int\limits_a^b\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta \le h^p\|u\|_{W_p^1}^p$$

Для L_∞ рассмотрим

$$|u-v| = \left|u(x)-\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u(\xi)d\xi\right| = \left|\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\big(u(x)-u(\xi)\big)d\xi\right| = \left|\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}d\xi\int\limits_\xi^x\frac{du}{d\eta}d\eta\right| \le$$

$$\le h_i \sup_{x\in(x_{i-1},x_i)}\left|\frac{du}{d\eta}\right| \le h\|u\|_{W_\infty^1(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|u-v\|_{L_\infty(\Omega)} \le h\|u\|_{W_\infty^1(\Omega)}$$

$\square$

Для устойчивости нам необходимо, чтобы собственные значения матрицы Грама $\widehat{M} = \big(M_{ij} = (\varphi_i,\varphi_j)\big)$ были ограничены сверху и снизу положительными числами $a_1 < \lambda < a_2$, не зависящими от N

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h_i}}\begin{cases}1, & x\in(x_{i-1},x_i)\\ 0, & x\notin(x_{i-1},x_i)\end{cases}$$

$$\Omega\subset\mathcal{R}^m, \Omega = \cup_{i=1}^N\Omega_i$$

$$max_{i=\overline{1,N}} sup_{x_{ij}\le\Omega_i}|x-y| \le h$$

11.2 Кусочно линейные базисные функции

Введем на $[a,b]$ сетку

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad h = \max_{i=1,N} h_i$$

Зададим на каждом отрезке (x_{i-1},x_i) функцию

$$\varphi_i(x) = \begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x\in(x_{i-1},x_i)\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}, & x\in(x_i,x_{i+1})\\ 0, & x\notin(x_{i-1},x_{i+1})\end{cases} \qquad i=\overline{1,N-1}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_1}, & x \in (x_0, x_1) \\ 0, & x \notin (x_0, x_1) \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{h_N}, & x \in (x_{N-1}, x_N) \\ 0, & x \notin (x_{N-1}, x_N) \end{cases}$$

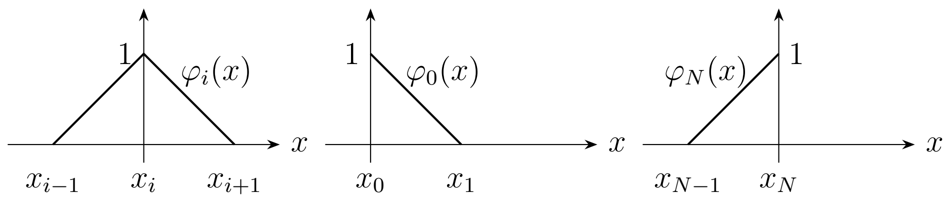

Рис. 3: Базисные функции

$$(\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} = \begin{cases} 0, & |i-j| > 1 \\ 1, & |i-j| \le 1 \end{cases}$$

$$v_N = \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi_i(x) \quad \in H_N$$

Теор. Для любой функции $u(x) \in W_2^2(\Omega) \quad \exists v(x) \in H_N = W_2^{1,h}(\Omega)$:

$$\|u - v\|_{L_2(\Omega)} \le c_1 h^2 \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

$$\|u - v\|_{W_2^1(\Omega)} \le c_2 h \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

где $c_1, c_2 = const$ не зависят от h, u

Док-во

$$v(x) = \sum_{i=0}^{N} u(x_i) \varphi_i(x)$$

Оценим разность $u - v$ в произвольной точке $x \in (x_{i-1}, x_i)$. С учетом того, что функция $v(x)$ кусочно-линейная и $dv(x)/dx = (u(x_i) - u(x_{i-1}))/h_i$

$$u(x) - v(x) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \frac{d}{d\xi}(u - v) d\xi = \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \left[\frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i} \right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x} d\xi \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{du(\eta)}{d\eta} \right] d\eta = \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x} d\xi \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} d\eta \int\limits_{\eta}^{\xi} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} dt$$

Применяя к (**??**) неравенство КБ и расширяя пределы интегрирования

$$|u(x) - v(x)|^2 \le h_i^3 \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u}{dt^2} \right|^2 dt$$

Суммируя по $i = 1, ..., N$ получим (**??**). Если же сначала продифференцировать, а затем провести те же самые рассуждения и оценки, то получим (**??**).

$$\sum_{i=1}^{N} (\cdot) \|u - v\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 h^2 \|u\|_{W_2^2}(\Omega)$$

TODO: добавить переходов

Лекция 12

Теор. Если $u(x) \in W^2_\infty(\Omega)$, то $\exists v \in H_N$:

$$\|u - v\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_3 h^2 \|u\|_{W^2_\infty(\Omega)}$$

$$\|u - v\|_{W^1_\infty} \leq c_4 h \|u\|_{W^2_\infty(\Omega)}$$

Если $u \in C^2(\Omega)$, то

$$\|u - v\|_{C(\Omega)} \leq c_5 h^2 \|u\|_{C^2(\Omega)}$$

Упр. Доказать теорему.

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases} \qquad i = \overline{1, N-1}$$

$$v(x) = \sum_{i=0}^{N} \sqrt{h} u(x_i) \varphi_i(x)$$

Пример

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), & p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad f \in L_2(a,b) \\ u(a) = \dfrac{du}{dx}(b) = 0 \end{cases}$$

$$H_A: \quad \|u\|_A = \sqrt{\int_a^b \left(p\left|\frac{du}{dx}\right|^2 + q|u|^2\right) dx}$$

$$H_N = L(\varphi_0, ..., \varphi_N)$$

12.1 Билинейные базисные функции в $\mathbb{R}^2$

Пусть Ω — некоторая прямоугольная область в $\mathbb{R}^2$

$$A_0 = x_0 < x_1 < ... < x_{N_x} < A_1, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta x = \max_{i=1,N_x} \Delta x_i$$

$$B_0 = y_0 < y_1 < ... < y_{N_y} = B_1, \qquad \Delta y_1 = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta y = \max_{i=1,N_y} \Delta y_i$$

$$h = \max\,(\Delta x, \Delta y)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x_i - x_{i-1}}{\Delta x_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{\Delta x_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

$$\varphi_j(y) = \begin{cases} \dfrac{y_j - y_{j-1}}{\Delta y_j}, & y \in (y_{j-1}, y_j) \\ \dfrac{y_{j+1} - y}{\Delta y_{j+1}}, & y \in (y_j, y_{j+1}) \\ 0, & y \notin (y_{j-1}, y_{j+1}) \end{cases}$$

$$Q_{ij}(x,y) = \varphi_i(x)\varphi_j(y)$$

$$u^h(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} Q_{ij}(x,y), \qquad (x_i, y_j) \in \overline{\Omega}$$

$$L(Q_{ij}) = W_2^{1,h} \cap W_2^1$$

Теор. Если $u \in C^{(2)}(\Omega)$, то существует $u^h \in W_2^{1,h}$ такая, что

$$\|u - u^h\|_{L_2(\Omega)} \leq ch^2 \|u\|_{C^{(2)}(\Omega)}$$

$$\|u - u^h\|_{W_2^1(\Omega)} \leq ch \|u\|_{C^{(2)}(\Omega)}$$

где $c = const$ не зависит от h, u

Док-во

$$u^h(x,y) = \sum_{i,j} u(x_i, y_j) Q_{ij}(x,y)$$

$$\xi(x,y) = u(x,y) - u^h(x,y)$$

$$\xi(x,y) = (x - x_l)\frac{\partial \xi}{\partial x}(x_l, y_k) + (y - y_k)\frac{\partial \xi}{\partial y}(x_k, y_k) + \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx'' +$$
$$+ \int\limits_{y_k}^{y} dy' \int\limits_{y_k}^{y'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y''^2}(x_l, y'') dy'' + \underbrace{\int\limits_{x_l}^{x} \int\limits_{y_k}^{y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial y'}(x', y') dx' dy'}_{C}$$

$$\frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\Delta x_{l+1} \Delta y_{k+1}} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} dx' \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}(x', y')\, dy',$$

$$Ⓐ \quad (x - x_l)\frac{\partial \xi}{\partial x}(x_l, y_k) = \frac{x - x_l}{\Delta x_{l+1}} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} dx' \int\limits_{x'}^{x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k)\, dx'',$$

$$Ⓑ \quad \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx'' = \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k)\, dx'',$$

$$
© \quad \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{y_k}^{y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial y'}(x', y')\, dy' =
$$

$$
= \frac{1}{\Delta x_{l+1} \Delta y_{k+1}} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} dx'' \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} dy'' \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{y_k}^{y'} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}(x', y') - \frac{\partial^2 u}{\partial x'' \partial y''}(x'', y'') \right) dy'
$$

Следовательно выражение для $\xi(x, y)$ принимает вид

$$
\xi(x, y) = \frac{x - x_l}{\Delta x_{l+1}} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} dx' \int\limits_{x'}^{x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k)\, dx'' + \frac{y - y_k}{\Delta y_{k+1}} \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} dy' \int\limits_{y'}^{y_k} \frac{\partial^2 u}{\partial y''^2}(x_l, y'')\, dy'' +
$$

$$
+ \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k)\, dx'' + \int\limits_{y_k}^{y} dy' \int\limits_{y_k}^{y'} \frac{\partial^2 u}{\partial y''^2}(x_l, y'')\, dy'' +
$$

$$
+ \frac{1}{\Delta x_{l+1} \Delta y_{k+1}} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} dx'' \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} dy'' \int\limits_{x_l}^{x} dx' \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}(x', y') - \frac{\partial^2 u}{\partial x'' \partial y''}(x'', y'') \right) dy'
$$

Отсюда следует, что

$$
|\xi(x, y)| \le c \left({\Delta x_{l+1}}^2 + {\Delta y_{k+1}}^2 \right) \sum_{|i|=2} \left\| D^{|i|} u \right\|_{C(\Omega_{l+1,k+1})} \le c \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 \right) \sum_{i=2} \left\| D^{(i)} u \right\|_{C(\Omega)}
$$

$$
\|u - u^h\|_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left| u - u^h \right|^2 dxdy \le c \big(\Delta x^2 + \Delta y^2 \big)^2 \left(\sum_{i=2} \left\| D^{(i)} u \right\|_{C(\Omega)} \right)^2
$$

Упр. Получить вторую оценку
Упр*. Доказать более сильную оценку:

$$
\|u - u^h\|_{C(\Omega)} \le c(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sum_{i=2} \left\| D^{(i)} u \right\|_{C(\Omega)}
$$

images/12.png

Рис. 4: Область Ω

$$
\begin{cases} -\Delta u + u = f, \qquad f \in L_2(\Omega) \\ u|_{\partial \Omega} = g \end{cases}
$$

$$
F(u) = \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 - 2uf \right) dxdy
$$

$$
H_A = \circ W_2^1(\Omega)
$$

$$
\circ W_2^{1,h} = \left\{ u^h : u^h \in W_2^{1,h}, \quad u^h = \sum_{i,j} a_{ij} Q_{ij}, \quad \|u^h\|_{\circ W_2^{1,h}} = \|u^h\|_{W_2^{1,h}}, \quad (x_i, y_j) \in \Omega \right\}
$$

Теор. Для любой $u \in W_2^1(\Omega) \cap C^{(2)}(\Omega)$ существует $u^h \in W_2^{1,h}$ такая, что справедливы оценки (**??**).

12.2 Построение проекционно сеточной схемы для ОДУ 2-го порядка

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x), & f \in L_2(a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 & 0 < p_0 \le p(x) \le p_1,\ 0 \le q(x) \le q_1 \end{cases}$$

$$Au = f$$

$$H = L_2(a,b) \ \Rightarrow\ A \text{ положительно определен } \Rightarrow\ \exists A^{-1} \ \Rightarrow\ \exists! \text{ решение } (\textbf{??})$$

Пусть $u(x)$ — решение (**??**)

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \le c\,\|f\|_H$$

$$H_A = \circ W_2^1(\Omega), \qquad c_0\|u\|_{W_2^1} \le \|u\|_A \le c_1\|u\|_{W_2^1}$$

$$F(u) = [u,u] - 2(u,f) \to \min \quad \text{на } \circ W_2^1(\Omega)$$

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h}}\begin{cases} ... \end{cases}$$

$$\circ W_2^{1,h} = \left\{ v = \sum_{i=1}^{N-1} a_i\varphi_i(x) \right\} \subset \circ W_2^1 = H_A$$

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i\varphi_i(x) \text{ — минимизирует } F(v) \text{ на } \circ W_2^{1,h}$$

Находим a_j из $\dfrac{\partial F}{\partial a}(u_h) = 0, \quad i = \overline{1, N-1}$
Приходим к системе уравнений

$$\widehat{A}a = f, \qquad \hat{A} = (A_{ij})$$

$$A_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] = \int\limits_{\Omega_{ij}} \left(p\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} + q\varphi_i\varphi_j \right) dx$$

$$a = (a_1, ..., a_{N-1})^T, \qquad f = (f_1, ..., f_{N-1})^T$$

$$f_i = \int\limits_{\Omega_i} f\varphi_i dx$$

Существует единственное решение $(a_1, ..., a_{N-1})^T$, которое однозначно определяет решение $u^h \leftarrow \underset{v\in\circ W_2^{1,h}}{\operatorname{argmin}} F(v)$

Отметим, что так как $A_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$, то матрица $\widehat{A}$ оказывается трехдиагональной.

Упр. Найти A_{ij} в случае кусочно-постоянных p и q на сетке

$$p_{i-\frac{1}{2}} = p(x), \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \qquad i = \overline{1, N}$$

$$q_{i-\frac{1}{2}} = ...$$

Лекция 13

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du}{dx}\right] + q(x)u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

$$\|u - u_h\|_A \leq \inf_{v_h \in H_A^{(N)}} \|u - v_h\|_A, \quad \text{где } v_h = \sum_{i=1}^{N-1} b_i \varphi_i; \quad \forall v_h \in H_A^{(N)} = \circ W_2^{1,h}$$

$$c_0 \|u\|_{W_2^1} \leq \|u\|_A \leq c_1 \|u\|_{W_2^1}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq c\|u - v_h\|_{W_2^1}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq c \inf_{v_h \in H_A^{(N)}} \|u - v_h\|_{W_2^1}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq ch\|u\|_{W_2^2} \leq ch\|f\|_{H=L_2}$$

Следовательно (по регулярности):

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq ch\|f\|_H$$

$$\|u - u_h\|_{H=L_2} \leq c_2 h^2 \|f\|_H \qquad \text{(в силу неравенства Фридрихса)}$$

$$[u, v]_A = (f, v), \quad \forall v \in \circ W_2^1$$

$$[u_h, v_h]_A = (f, v_h), \quad \forall v_h \in \circ W_2^{1,h} = H_A^{(N)}$$

$$[u - u_h, v_h] = 0 \quad \forall v_h \in \circ W_2^{1,h}$$

Метод двойственности (Nitsche trick) для оценки L_2 нормы ошибки:
Рассмотрим вспомогательную задачу $A\Phi = F$, где $F = u - u_h$:
По свойствам оператора A (положительная определённость и регулярность) существует единственное решение Φ:

$$\|\Phi\|_{W_2^2} \leq c\|F\| = c\|u - u_h\|$$

Функция Φ удовлетворяет вариационному уравнению:

$$[\Phi, v] = (F, v) \quad \forall v \in \circ W_2^1$$

Подставляя $v = u - u_h$:

$$(F, v) = (u - u_h, u - u_h) = (A\Phi, u - u_h) = [\Phi, u - u_h] - [u - u_h, \Phi_h]$$
$$= [\Phi - \Phi_h, u - u_h] \le \|\Phi - \Phi_h\|_A \cdot \|u - u_h\|_A$$
$$\le ch\|f\| \cdot \|\Phi - \Phi_h\|_A \le \tilde{c}h\|f\| \cdot \|\Phi - \Phi_h\|_{W_2^1}$$

где Φ_h — аппроксимация Φ из пространства МКЭ, выбираемая так, чтобы:

$$\|\Phi - \Phi_h\|_{W_2^1} \le \tilde{c}h \ \|\Phi\|_{W_2^2}$$

Подставляя оценки:

$$\|u - u_h\|^2 \le ch\|f\| \cdot \|\Phi - \Phi_h\|_{W_2^1} \le ch^2\|f\| \cdot \|\Phi\|_{W_2^2} \le ch^2\|f\| \cdot \|u - u_h\|$$

Сокращая на $\|u - u_h\|$:

$$\|u - u_h\| \le ch^2\|f\|$$

13.1 Смешанные граничные условия

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x) \\ u(a) = 0, \quad \dfrac{du}{dx}(b) = 0 \end{cases}$$

При этом приближённое решение имеет вид:

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i$$

где базисные функции φ_i выбираются так, чтобы удовлетворять условию Дирихле $u_h(a) = 0$.

Упр. Проверить аналогичные оценки ошибки в норме W_2^1 для этого случая.

Упр. Найти матрицу системы $\hat{A}$ при равномерной сетке $h_i = h$, $i = \overline{1, N}$, постоянных коэффициентах $p = const$, $q = const$.

13.2 Применение вариационного метода к задаче Дирихле для уравнения Лапласа

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа на прямоугольной области:

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y) & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{на границе} \end{cases}$$

Оператор Лапласа:

$$Au = -\Delta u$$

$$D(A) = \{u \in W_2^2(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0\}, \qquad f \in L_2(\Omega)$$

Оператор A симметричен и положительно определён на пространстве $H_A = \circ W_2^1(\Omega)$.

Следовательно, для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $u \in \circ W_2^1 \cap W_2^2(\Omega)$ с оценкой:

$$\|u\|_{W_2^2} \leq c\,\|f\|_H$$

Энергетическое пространство и скалярное произведение:

$$H_A = \circ W_2^1(\Omega), \quad (u,v)_A = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega$$

Вариационная формулировка:

$$[u,v]_A = (f,v), \quad \forall v \in H_A$$

Метод конечных элементов на треугольной сетке:

Покроем область Ω треугольной сеткой. Базисные функции $\varphi_{ij}(x,y)$ определяются как кусочно-линейные функции, равные 1 в узле (x_i, y_j) и 0 во всех остальных узлах сетки.

Приближённое решение представляется в виде:

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} a_{ij}\varphi_{ij}(x,y), \qquad H_A^{(N)} = \circ W_2^{1,h} \subset H_A = \circ W_2^1$$

где суммирование ведётся только по внутренним узлам (граничные узлы имеют коэффициенты, равные нулю).

Коэффициенты a_{ij} находятся из системы линейных алгебраических уравнений:

$$[u_h, \varphi_{kl}]_A = (f, \varphi_{kl})$$

которая может быть записана в матричной форме:

$$\hat{A}\mathbf{a} = \mathbf{f}, \qquad \hat{A} = (A_{ijkl}), \qquad A_{ijkl} = [\varphi_{ij}, \varphi_{kl}]_A$$

$$\mathbf{a} = \big(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{N_x-1,1}, \ldots, a_{1,N_y-1}, \ldots, a_{N_x-1,N_y-1}\big)$$

Матрица $\hat{A}$ имеет ленточную структуру: большинство элементов равны нулю.

Упр. Вычислить элементы матрицы A_{ijkl} явно для базисных функций на треугольной сетке.

Оценки ошибки МКЭ:

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq ch\,\|u\|_{W_2^2} \leq ch\,c(f)\,\|f\|$$

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq ch^2\,\|f\|$$

Для общего оператора эллиптического типа:

$$Au = -\sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dx_k}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + q(x)u$$

Упр. Показать, что дискретная схема МКЭ даёт аппроксимацию порядка $O(h)$ в энергетической норме и $O(h^2)$ в L_2.

При произвольной триангуляции области обозначим через h максимальный размер элемента, а через θ_0 минимальный угол в треугольниках.

Тогда:

$$\|u - u_h\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c\,\frac{h}{\sin\theta_0}\|f\|$$

что показывает зависимость от качества триангуляции (острые углы приводят к увеличению ошибки).

Приближённое решение в общем случае:

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x, y)$$

где N — общее число узлов в области (включая граничные узлы с нулевыми коэффициентами).

13.3 Подходы к решению неоднородной краевой задачи

Рассмотрим неоднородную задачу Дирихле:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega \quad (\Omega \text{ выпуклая, } \partial\Omega \text{ гладкая}) \\ u|_{\partial\Omega} = g, & f \in L_2(\Omega),\ g \in W_2^{3/2}(\partial\Omega) \end{cases}$$

Регулярность решения определяется оценкой:

$$c_3(\|f\|_{L_2} + \|g\|_{W_2^{3/2}}) \leq \|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c_4(\|f\|_{L_2} + \|g\|_{W_2^{3/2}})$$

① **Сведение к однородным граничным условиям**
Предположим, что существует продолжение $\Phi \in D(A)$ функции g в область Ω:

$$\Phi|_{\partial\Omega} = g$$

Введём новую функцию:

$$v = u - \Phi$$

тогда она удовлетворяет однородной краевой задаче:

$$\begin{cases} -\Delta v = \tilde{f} = f + \Delta\Phi & \in L_2(\Omega) \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Решение исходной задачи:

$$u_h = v_h + \Phi$$

Преимущество: Применяем стандартный МКЭ для задачи с нулевыми граничными условиями.

Недостаток: Нужно найти подходящее продолжение Φ, гладкое в Ω.

② «Снос» граничных условий (перенос с $\partial\Omega$ на $\partial\Omega_h$)

Используем узлы сетки, расположенные на границе области, как неизвестные в системе МКЭ.

Обозначим узлы:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_N \quad \text{— внутренние узлы}$$

$$\varphi_{N+1}, \ldots, \varphi_{\widetilde{N}} \quad \text{— граничные узлы}$$

Приближённое решение:

$$u_h = \sum_{i=1}^{\widetilde{N}} a_i \varphi_i(x, y)$$

Система уравнений:

Для внутренних узлов ($i = \overline{1, N}$) применяем вариационное уравнение:

$$[u_h, \varphi_i]_A = (f, \varphi_i)$$

Для граничных узлов ($i = \overline{N+1, \widetilde{N}}$) задаём:

$$a_i = u_h(x_i, y_i) = g(x_i, y_i)$$

Преимущество: Простая реализация, не требует явного продолжения Φ.

Недостаток: Граничные условия точно удовлетворяются только в узлах на границе сетки $\partial\Omega_h$, а не на истинной границе $\partial\Omega$.

③ Метод штрафа (Penalty method)

Вместо исходной задачи рассмотрим модифицированную 3-ю краевую задачу (граничные условия Робена):

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{в} \Omega \\ u_\varepsilon + \varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = g \quad \text{на } \partial\Omega \end{cases}, \qquad \varepsilon > 0 \text{ мало}$$

где ε — параметр штрафа. При $\varepsilon \to 0$ решение u_ε приближается к решению исходной задачи.

Модифицированное энергетическое скалярное произведение с штрафным членом:

$$[u, v]_A = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{1}{\varepsilon} uv \, dS$$

Приближённое решение:

$$u_{\varepsilon,h} = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x, y)$$

где все узлы (включая граничные) являются неизвестными, и коэффициенты a_i находятся из системы:

$$[u_h, \varphi_i]_A = (f, \varphi_i) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{g}{\varepsilon} \varphi_i \, dS$$

Оценки ошибки МКЭ с методом штрафа:
В норме W_2^1:

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \frac{ch}{\sin\theta_0} \left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right) \left(\|f\|_{L_2} + \frac{1}{\varepsilon}\|g\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\right)$$

В норме L_2:

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{ch^2}{\sin^2\theta_0} \left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right)^2 \left(\|f\|_{L_2} + \frac{1}{\varepsilon}\|g\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\right)$$

Ошибка регуляризации (разница между u_ε и точным решением u):

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c\,\varepsilon \left(\|f\|_{L_2} + \frac{1}{\varepsilon}\|g\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\right)$$

Анализ метода штрафа:

- При малых ε штрафный член становится очень большим, что приводит к плохой обусловленности матрицы системы.
- Полная ошибка складывается из двух частей:
  1. Ошибка аппроксимации МКЭ порядка $O(h)$ в W_2^1 или $O(h^2)$ в L_2
  2. Ошибка регуляризации порядка $O(\varepsilon)$
- Оптимальный выбор параметра: $\varepsilon \approx h$, тогда полная ошибка имеет порядок $O(h)$.
- **Преимущество:** Не требует явного продолжения граничных данных, универсальный метод.
- **Недостаток:** Параметр штрафа нужно подбирать, при малых ε система плохо обусловлена.

Лекция 14

14.1 Вариационная постановка задачи на собственные значения для симметрично положительного оператора

Рассмотрим спектральную задачу:

$$A\varphi = \lambda\varphi, \qquad \varphi \in D(A) \subset H \tag{14.1}$$

где:

- A — симметричный оператор в гильбертовом пространстве H
- λ — собственные значения (вещественные для симметричного оператора)
- φ — собственные функции

Свойство ортогональности: Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — два различных собственных значения оператора A, то соответствующие собственные функции φ_1 и φ_2 ортогональны:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

Для собственной функции φ, удовлетворяющей $A\varphi = \lambda\varphi$, имеем:

$$(A\varphi, \varphi) = \lambda(\varphi, \varphi)$$

откуда:

$$\lambda = \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \tag{3}$$

Определение. Оператор A называется **ограниченным снизу**, если для всех $\varphi \in D(A)$ верно:

$$(A\varphi, \varphi) \geq k(\varphi, \varphi), \quad k \in \mathbb{R} \tag{14.2}$$

где k — некоторая (не обязательно положительная) константа.
Если A ограничен снизу, то существует инфимум (точная нижняя грань) отношения Рэлея:

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \geq k \quad \Rightarrow \quad \exists\, d = \inf_{\varphi \in D(A)} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \geq k$$

Функционал:

$$F(\varphi) = \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \tag{14.4}$$

называется **функционалом Рэлея** (Rayleigh quotient).
Теорема 1 (о минимальном собственном значении).

Пусть A — симметричный оператор, ограниченный снизу, и пусть

$$d = \inf_{\varphi \in D(A)} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$$

Если существует $\varphi_0 \neq 0 \in D(A)$ такой, что

$$\frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = d$$

то число d является собственным значением оператора A, то есть $d = \lambda_1 \leq$ всех других собственных значений, и φ_0 — соответствующая собственная функция:

$$A\varphi_0 = d\varphi_0$$

Доказательство:

Возьмём произвольное $\eta \in D(A)$ такое, что при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем $\varphi_0 + t\eta \in D(A)$ (например, если $D(A)$ выпукло, это верно для любого $\eta \in D(A)$).

Определим функцию одного переменного:

$$\psi(t) = F(\varphi_0 + t\eta) = \frac{(A(\varphi_0 + t\eta), \varphi_0 + t\eta)}{(\varphi_0 + t\eta, \varphi_0 + t\eta)}$$

Разложим:

$$\psi(t) = \frac{t^2(A\eta, \eta) + 2t \operatorname{Re}(A\varphi_0, \eta) + (A\varphi_0, \varphi_0)}{t^2(\eta, \eta) + 2t \operatorname{Re}(\varphi_0, \eta) + (\varphi_0, \varphi_0)}$$

Так как φ_0 доставляет минимум функционалу F, функция $\psi(t)$ достигает минимума при $t = 0$:

$$\psi'(0) = 0$$

Вычисляя производную (используя правило для производной дроби) и приравнивая к нулю, получаем:

$$\operatorname{Re}(A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in D(A)$$

Заменяя η на $i\eta$ (если $D(A)$ замкнуто относительно умножения на мнимую единицу), получаем:

$$\operatorname{Im}(A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in D(A)$$

Объединяя вещественную и мнимую части:

$$(A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in D(A)$$

Так как множество $D(A)$ плотно в H (или мы выбираем его таким образом), то:

$$A\varphi_0 - d\varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A\varphi_0 = d\varphi_0$$

Минимальность d следует из того, что для любого собственного значения λ_i оператора A:

$$\lambda_i = \frac{(A\varphi_i, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} \geq d$$

по определению d как инфимума. □

Теорема 2 (о последовательных собственных значениях).

Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ — первые n собственных значений симметричного ограниченного снизу оператора A, и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — соответствующие ортонормированные собственные функции.

Если существует функция $\varphi_{n+1} \neq 0$ такая, что

$$\varphi_{n+1} = \operatorname{argmin}_{\substack{\varphi \in D(A) \\ (\varphi, \varphi_i)=0,\, i=\overline{1,n}}} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \tag{14.6}$$

(то есть минимизирует функционал Рэлея среди всех функций, ортогональных первым n собственным функциям), то φ_{n+1} является собственной функцией A, соответствующей собственному значению:

$$\lambda_{n+1} = \frac{(A\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})}{(\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})}$$

Доказательство (идея): Процедура аналогична Теореме 1. Любая вариация $\varphi_{n+1} + t\eta$, где $(\eta, \varphi_i) = 0$ для $i = \overline{1,n}$, сохраняет ортогональность. Условие минимума $\frac{d}{dt}\psi(t)|_{t=0} = 0$ даёт ортогональность $(A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1})$ всем таким вариациям. Так как подпространство, ортогональное $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, плотно на него, мы получаем $A\varphi_{n+1} = \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}$. □

14.2 Обобщённая спектральная задача

Рассмотрим **обобщённую задачу на собственные значения**:

$$A\varphi - \lambda B\varphi = 0 \tag{4}$$

где:

- A и B — симметричные операторы
- A ограничен снизу
- B положительно определён (то есть $(B\varphi, \varphi) > 0$ для всех $\varphi \neq 0$)
- $D(A) \subset D(B) \subset H$

Собственное значение может быть выражено через отношение:

$$\lambda = \frac{(A\varphi, \varphi)}{(B\varphi, \varphi)}$$

Теорема 3 (ортогональность в обобщённой задаче).

Если $\lambda_k \neq \lambda_m$ — два различных собственных значения обобщённой задачи, соответствующие собственным функциям φ_k и φ_m, то:

$$(B\varphi_k, \varphi_m) = 0$$

Собственные функции ортогональны относительно скалярного произведения, определяемого оператором B (это называется B-ортогональностью).

Теорема 4 (о минимуме в обобщённой задаче).

Пусть

$$d = \inf_{\varphi \in D(A)} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(B\varphi, \varphi)}$$

Если существует $\varphi_0 \neq 0$ такой, что

$$\frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(B\varphi_0, \varphi_0)} = d$$

то число d является минимальным собственным значением обобщённой задачи, а φ_0 — соответствующая собственная функция.

Теорема 5 (последовательные собственные значения в обобщённой задаче).

Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ — первые n собственных значений обобщённой задачи с соответствующими B-ортонормированными собственными функциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (то есть $(B\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$).

Если существует функция φ_{n+1} такая, что

$$\lambda_{n+1} = \min_{\substack{\varphi \in D(A) \\ (B\varphi, \varphi_k) = 0,\, k = \overline{1,n}}} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(B\varphi, \varphi)}$$

то φ_{n+1} является собственной функцией, соответствующей собственному значению λ_{n+1}.

14.3 Метод Ритца для задачи на собственные значения

Идея метода Ритца: Вместо поиска минимума функционала Рэлея на всём пространстве $D(A)$, ищем минимум на конечномерном подпространстве, натянутом на выбранную систему базисных функций.

Пусть система функций $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ полна в H, то есть для каждого $u \in D(A)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют $n \in \mathbb{N}$ и коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что:

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$$

Рассмотрим приближённое решение в виде конечной линейной комбинации:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \tag{5}$$

Выбираем коэффициенты a_k так, чтобы минимизировать функционал Рэлея:

$$(Au_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (A\varphi_k, \varphi_m) a_k \overline{a_m} \to \min$$

при нормировке:

$$(u_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k \overline{a_m} = 1 \tag{14.14}$$

Применение метода множителей Лагранжа:
Составляем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = (Au_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n)$$

где λ — множитель Лагранжа (который окажется приближением к собственному значению).
Условие экстремума:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_k [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)] = 0, \quad m = \overline{1, n}$$

Это можно записать в матричной форме:

$$(G_A - \lambda G_B)\mathbf{a} = 0 \tag{14.15}$$

где:

$$(G_A)_{km} = (A\varphi_k, \varphi_m), \quad (G_B)_{km} = (\varphi_k, \varphi_m)$$

Для существования нетривиального решения $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$ необходимо и достаточно, чтобы:

$$\det(G_A - \lambda G_B) = 0 \tag{14.16}$$

Частный случай: ортонормированная система.
Если система $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ уже ортонормирована (то есть $(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}$), то матрица Грама G_B становится единичной:

$$G_B = I$$

и уравнение упрощается:

$$\det(G_A - \lambda I) = 0 \tag{14.17}$$

Это характеристическое уравнение матрицы G_A. Его решением являются собственные значения матрицы G_A.

Раскладывая определитель, получаем полиномиальное уравнение n-й степени относительно λ:

$$\det(G_A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + \text{члены меньших степеней} = 0$$

Уравнение имеет ровно n корней (считая кратности) в $\mathbb{C}$. Для симметричного оператора A матрица G_A симметрична, поэтому все корни вещественны.

Нахождение приближённых собственных функций:

Пусть λ_j ($j = 1, \ldots, n$) — один из корней уравнения. Подставляя $\lambda = \lambda_j$ в систему (**??**), находим нетривиальное решение $(a_1^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)})^T$.

Приближённая собственная функция:

$$u_n^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(j)} \varphi_k$$

После нормировки (так чтобы $(u_n^{(j)}, u_n^{(j)}) = 1$), приближённое собственное значение равно:

$$\lambda_j^{(n)} = (A u_n^{(j)}, u_n^{(j)})$$

Свойства приближений метода Ритца:

1. **Монотонность:** Приближённые собственные значения $\lambda_j^{(n)}$ сходятся к точным собственным значениям λ_j *снизу* (то есть $\lambda_j^{(n)} \geq \lambda_j$ для всех n).

2. **Сходимость:** При увеличении числа базисных функций приближения сходятся к точным значениям и функциям.

3. **Оптимальность в подпространстве:** Для фиксированного n приближение u_n оптимально в том смысле, что минимизирует функционал Рэлея среди всех функций вида $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$.

Практическое вычисление:

Алгоритм метода Ритца состоит из следующих шагов:

1. Выбрать систему n базисных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (обычно функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям).

2. Вычислить элементы матриц G_A и G_B:

$$(G_A)_{km} = (A\varphi_k, \varphi_m), \quad (G_B)_{km} = (\varphi_k, \varphi_m)$$

3. Решить задачу на собственные значения:

$$\det(G_A - \lambda G_B) = 0$$

4. Для каждого собственного значения λ_j найти соответствующий собственный вектор и вычислить приближённую собственную функцию:

$$u_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(j)} \varphi_k$$

Метод Ритца — один из фундаментальных методов вычислительной математики. На его основе построены:

- Метод конечных элементов (МКЭ) для задач на собственные значения
- Методы невязки и подпространственных итераций
- Алгоритмы нахождения нескольких собственных значений матриц