Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Робототехники и комплексной автоматизации

КАФЕДРА Системы автоматизированного проектирования (РК-6)

<u>ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ</u>

Студент Никифорова Ирина Андреевна

Группа РК6-61б

Тип задания лабораторная работа

Тема лабораторной работы Многошаговые методы численного решения задачи Коши.

Студент ____________________ **<u>Никифорова И. А.</u>**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель ____________________ **<u>Соколов А. П.</u>**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель ____________________ **<u>Першин А. Ю.</u>**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Оценка ______________________________________

Москва, 2019 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу

Дано нестационарное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x,\ y), \tag{1}$$

где $T = T(x, y, t)$ - температура в точке (x, y), $f(x, y) = 1$ - функция тепловых источников, описывающая в данном случае равномерный нагрев. Рассматривается пространство $(x, y) \in [0; 1] \times [0; 1]$, а также однородные (т.е. нулевые) граничные условия: $T(x, 0, t) = T(0, y, t) = T(x, 1, t) = T(1, y, t) = 0$.

Требуется:

1. Используя результаты лабораторной работы №3 (вариант 2), провести дискретизацию пространства с $N = 18$ узлами вдоль каждого направления и дискретизацию по времени с шагом Δt, используя метод Адамса–Башфорта 4-го порядка и метод Рунге–Кутты 4-го порядка. Например, для метода Адамса–Башфорта 4-го по-рядка результатом дискретизации должен быть итерационный метод вида:

$$T_{n+1} = T_n + \Delta t \sum_{k=1}^{3} (a_k (AT_{n-k+1} + f)), \tag{2}$$

где A и f были выведены в лабораторной работе №3 (вариант 2).

2. Написать функцию *ab4()*, которая проводит одну итерацию метода Адамса–Башфорта 4-го порядка, используя решения системы ОДУ на трех предыдущих итерациях. Аргументы функции следует определить самостоятельно.
3. Написать функцию *rk4()*, которая проводит одну итерацию метода Рунге–Кутты, используя решение системы ОДУ на предыдущей итерации. Аргументы функции следует определить самостоятельно.

4. Написать функцию *ode_solve(f, t_final, delta_t)*, которая находит решение ОДУ с правой частью, выраженной функцией *f*, до момента времени *t_final* с шагом по времени *delta_t*, используя метод Рунге–Кутты 4-го порядка для инициализации первых четырех шагов и метод Адамса–Башфорта 4-го порядка для дальнейших итераций.

5. Проведя несколько вычислительных экспериментов с помощью функции *ode_solve()*, определить с точностью до порядка максимальное значение Δt, обозначаемое Δt_{max}, при котором решение заданного дифференциального уравнения является неустойчивым. Требуется продемонстрировать неустойчивость решения с помощью графика зависимости температуры, усредненной по области [0; 1]×[0; 1], от времени.

6. Используя Δt на порядок меньшее, чем Δt_{max}, построить:

- линии уровня функции $T(x, y, t)$ для нескольких моментов времени, демонстрирующих сходимость решения;
- график зависимости температуры, усредненной по области [0; 1]×[0; 1], от времени.

7. Сравнить решение, к которому сходится численное решение заданного дифференциального уравнения, с решением, полученным в лабораторной работе №3 (вариант 2). Сравнив их дополнительно с решением, полученным при шаге Δt_{max}, сделать вывод об устойчивости решения и устойчивости метода.

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – реализовать алгоритмы многошагового и одношагового методов численного решения задачи Коши, провести дискретизацию ОДУ по времени, установить устойчивость метода и решения, сравнить результаты с результатами предыдущей работы.

Задачи, выполненные в процессе реализации лабораторной работы

1. Многошаговые методы численного решения задачи Коши.

Многошаговые методы численного решения задачи Коши

Для уравнения (1) с использованием полученной в лабораторной №3 формулы была записана дискретизация по пространству в матричной форме:

$$AT^{(mod)} = f(x,y), \tag{3}$$

где A - матрица коэффициентов, $T^{(mod)}$ - модифицированный вектор температур в узлах, $f(x, y) = 1$ - функция тепловых источников .

Так как обе части уравнения (3) не зависят от времени t уравнение (3) было подставлено в уравнение (1) на нужное место без изменений:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + AT^{(mod)} = f(x,y)\,. \tag{4}$$

Для уравнения (4) была произведена дискретизация по времени путем замены частной производной ее формулой численного дифференцирования. [2] Части, совпадающие с формулой (3) были записаны для нужного момента времени:

$$\begin{gathered}\frac{T(x_i, y_j, t_{n+1}) - T(x_i, y_j, t_n)}{\Delta t} = -N^2(-T(x_{i-1}, y_j, t_n) - T(x_{i+1}, y_j, t_n) - \\ - T(x_i, y_{j-1}, t_n) - T(x_i, y_{j+1}, t_n) + 4T(x_i, y_j, t_n)) + 1\,.\end{gathered} \tag{5}$$

Метод Адамса-Башфорта четвертого порядка, имеет вид (2), использует коэффициенты a_k , рассчитываемые следующим образом: [1]

$$a_m = \int_0^1 \prod_{k \neq m,\, k=1}^{4} \frac{s+k-1}{k-m} ds, \tag{6}$$

где m - номер коэффициента, $m = 1, \ldots, 4$ (т.к. метод четвертого порядка), s - специальная переменная, связанная с t соотношением $t = t_i + s\Delta t$, где Δt - шаг сетки по времени. Переменная s была получена в ходе вывода метода Адамса-Башфорта при замене переменной в интеграле после интерполяции с помощью полиномов Лагранжа.

Каждый из коэффициентов был рассчитан посредством аналитического интегрирования выражения (6) с подстановкой различных $m = 1, \ldots, 4$. Например, для $m = 1$ ход вычисления был следующим:

$$a_1 = \int_0^1 \prod_{k=2}^{4} \frac{s+k-1}{k-1} ds = \int_0^1 \frac{1+s}{1} \cdot \frac{2+s}{2} \cdot \frac{3+s}{3} ds = \frac{1}{6} \int_0^1 (s^3 + 6s^2 + 11s + 6) ds =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{s^4}{4} + \frac{6s^3}{3} + \frac{11s^2}{2} + \frac{6s}{1}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} + \frac{11}{2} + 8\right) = \frac{55}{24}. \quad (7)$$

Аналогично (7) были получены остальные коэффициенты:

$$a_2 = -\frac{59}{24}, \ a_3 = \frac{37}{24}, \ a_4 = -\frac{9}{24}. \quad (8)$$

Метод Рунге-Кутты основывается на обобщении разложения функции $y(t)$ в точке t_i в ряд Тейлора, а также на методе неопределенных коэффициентов. Для метода четвертой степени, вычисление производится по формулам: [1]

$$w_0 = \alpha, \quad (9)$$

$$k_1 = hf_{odu}(t_i, w_i), \quad (10)$$

$$k_2 = hf_{odu}(t_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{1}{2}k_1), \quad (11)$$

$$k_3 = hf_{odu}(t_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{1}{2}k_2), \quad (12)$$

$$k_4 = hf_{odu}(t_i + h, w_i + k_3), \quad (13)$$

$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (14)$$

где k_j, j = 1,...,4 - дополнительные коэффициенты для удобства счета, w_i - решение, равное y_i , h - шаг по сетке для переменной t, α - значение $y_0 = y(a)$, где a - начальная точках сетки по переменной t.

Данный метод решает задачу нахождения решения ОДУ, вида:

$$\frac{dy}{dt} = f_{odu}(t, y)\,. \tag{15}$$

Выражения (9) - (14) были адаптированы под текущую задачу. При этом использовались следующие подстановки:

$$w_i = T^{(mod)}(t_i)\,, \tag{16}$$

$$h = \Delta t\,, \tag{17}$$

$$f_{odu}(t_i,\ w_i) = -AT^{(mod)}(t_i) + f(x, y)\ . \tag{18}$$

После подстановки выражений (16) - (18) в формулы (10) - (14) метод Рунге-Кутты принял вид, необходимый для решения исходной задачи:

$$k_1 = \Delta t\,(-AT^{(mod)}(t_i) + f(x, y))\,, \tag{10}$$

$$k_2 = \Delta t\,(-A(T^{(mod)}(t_i + \tfrac{h}{2}) + \tfrac{1}{2}k_1) + f(x, y))\,, \tag{11}$$

$$k_3 = \Delta t\,(-A(T^{(mod)}(t_i + \tfrac{h}{2}) + \tfrac{1}{2}k_2) + f(x, y))\,, \tag{12}$$

$$k_4 = \Delta t\,(-A(T^{(mod)}(t_i + h) + k_3) + f(x, y))\,, \tag{13}$$

$$T^{(mod)}_{i+1} = T^{(mod)}_i + \tfrac{1}{6}(\,k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,. \tag{14}$$

Далее была написана функция *ab4()*, которая проводит одну итерацию метода Адамса–Башфорта 4-го порядка, используя решения системы ОДУ на трех предыдущих итерациях. Функция была построена на основании выражений (2), (6), (7) и (8).

Также была написана функция *rk4(),* реализующая одну итерацию метода Рунге-Кутты. Она была построена на основе выражений (10) - (14).

После этого была написана еще одна функция - *ode_solve(f, t_final, delta_t).* Данная функция, получая на вход матрицу свободных членов, конечное время интегрирования и шаг по времени, решает ОДУ (1) с использованием написанных алгоритмов методов Адамса-Башфорта для первых четырех итераций и Рунге-Кутты - для остальных.

Для проверки сходимости решения при различных значениях шага по времени был проведен вычислительный эксперимент, где в функцию *ode_solve* при остальных равных параметрах подавались различные *delta_t* $\in$ {0.00001... 0.1} . В результате было выяснено, что для *delta_t* = 10^{-4}, и менее, решение является устойчивым, а начиная с *delta_t_max* = 10^{-3} решение перестает быть устойчивым. Это можно проследить по графикам на рисунках 1 и 2.

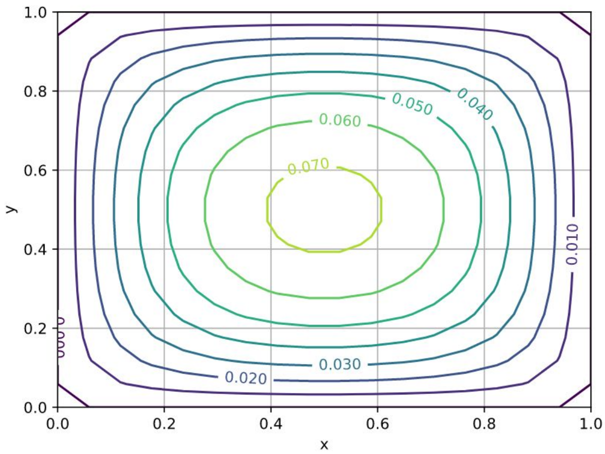

Рис. 1. Линии уровня последнего решения при Δt = 0.0001 и *t_final* = 0.3

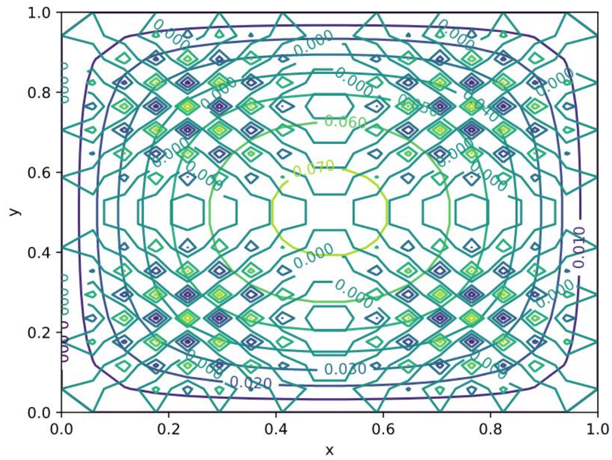

Рис. 2. Линии уровня последнего решения при Δt = 0.001 и *t_final* = 0.3

Также, для подтверждения неустойчивости решения для *delta_t_max* = 10^{-3} был построен график зависимости средней температуры от времени (рис. 3).

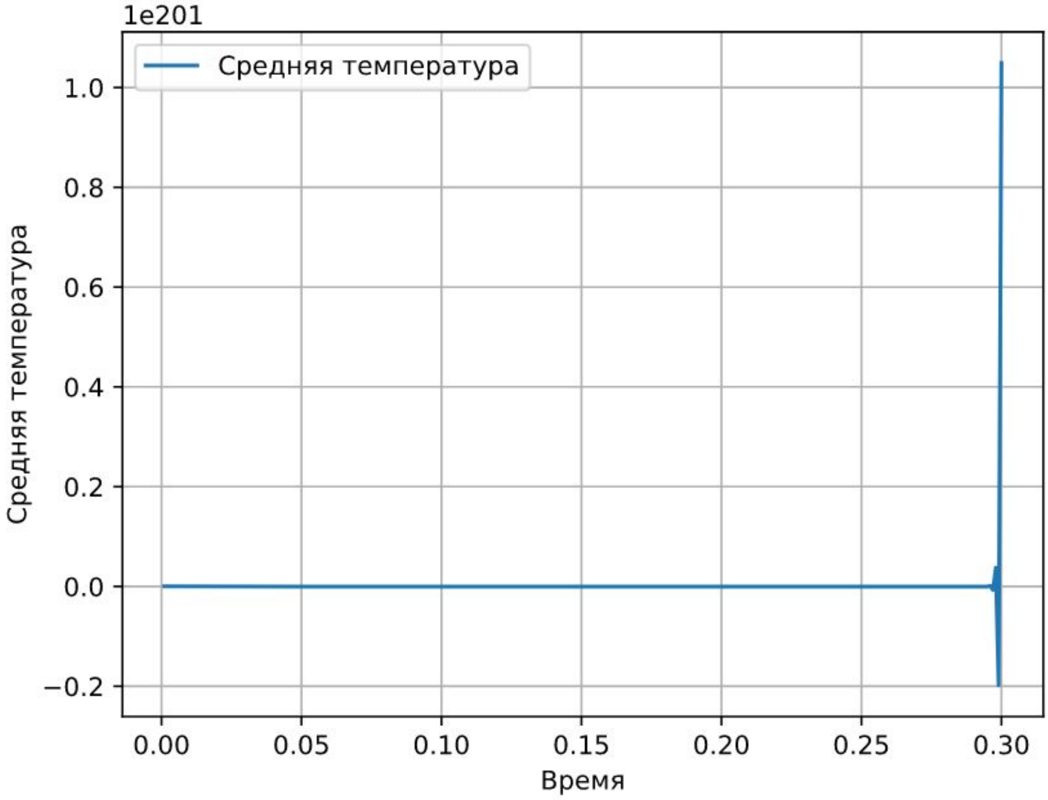

Рис. 3. Средняя температура в зависимости от времени для $\Delta t = 0.001$ и $t\_final = 0.3$

Тем не менее, решение сходится для $\Delta t < \Delta t_{max}$. Для подтверждения этого были построены графики линий уровня на нескольких этапах интегрирования (рис. 4 - 7) и график средней температуры в зависимости от времени (рис. 8) для $\Delta t = 0.0001$.

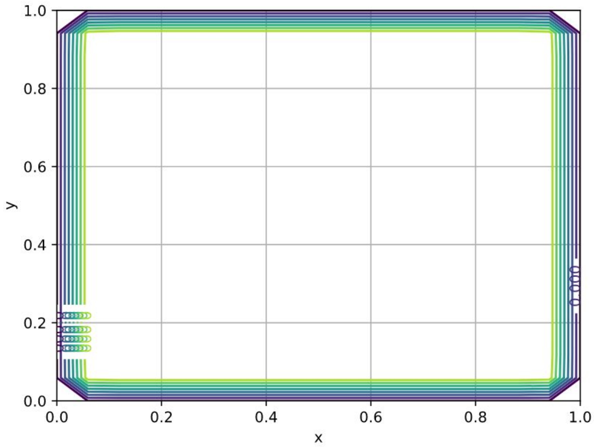

Рис. 4. Линии уровня в момент времени $t = 0.0002$, $\Delta t = 0.0001$

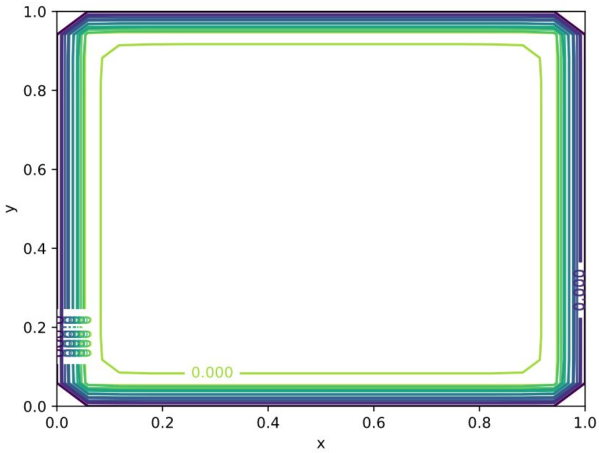

Рис. 5. Линии уровня в момент времени $t = 0.0005$, $\Delta t = 0.0001$

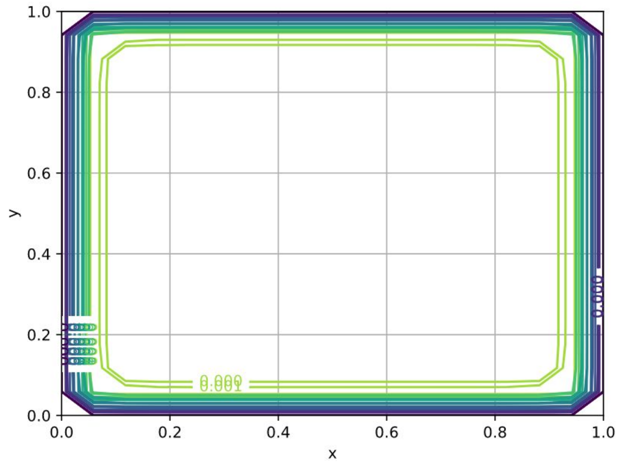

Рис. 6. Линии уровня в момент времени $t = 0.001$, $\Delta t = 0.0001$

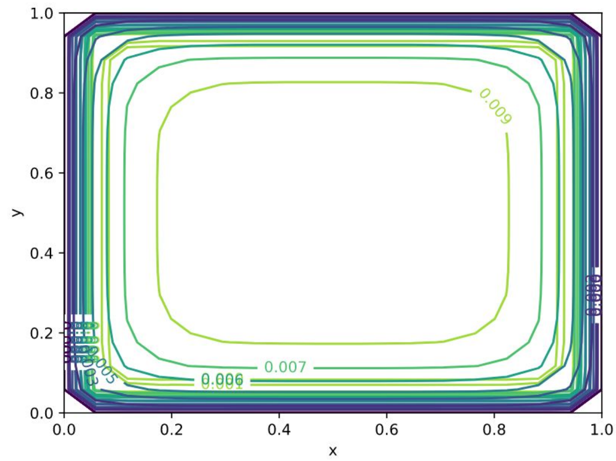

Рис. 7. Линии уровня в момент времени $t = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$

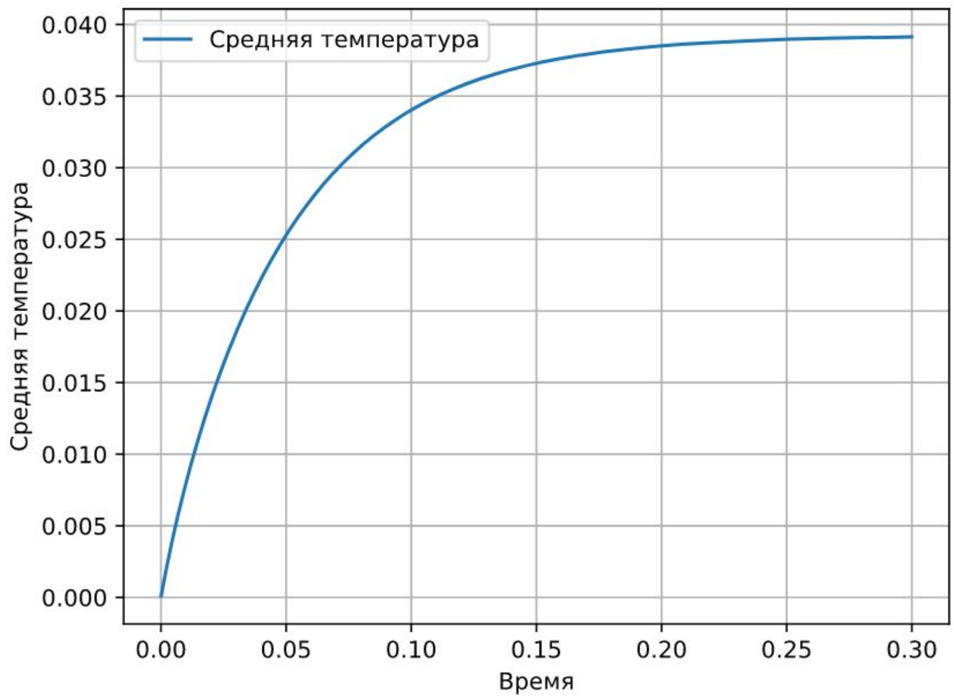

Рис. 8. Средняя температура в зависимости от времени для $\Delta t = 0.0001$

Если сравнить решение, полученное с помощью метода сопряженных градиентов (в лабораторной работе №3) и с помощью описанных в данной работе, при правильно подобранном шаге они дают близкие решения, поэтому описанное в предыдущем абзаце решение можно назвать сходящимся. Тем не менее, сами описанные в данной работе методы сходящимися не являются. Это подтверждается тем, что можно подобрать Δt_{max} такое, что метод не будет сходиться.

Заключение

Были выведены выражения для численного решения нестационарного уравнения теплопроводности. Среди них выражение для алгоритмов метода Рунге-Кутты и Адамса-Башфорта. Был проведен анализ данных методов и решений на сходимость, а также было проверено сходство с решением, полученным в лабораторной работе №3.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. *Лекции по вычислительной математике (черновик)* [Электронный ресурс] // Кафедра РК6 (Системы автоматизированного проектирования), МГТУ им. Н.Э. Баумана, 4 марта 2019 г.
2. Першин А.Ю. *Лекции по вычислительной математике. Презентации.* [Электронный ресурс]