1

Exploration de différentes pénalisations sur la fonction coût utilsée pour optimiser les niveaux de gris.

1.1 Régularisation de Moreau-Yosida

1.1.1 Présentation de la régularisation et propriétés.

Definition 1.1.1. Soit $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La transformée (ou régularisée) de Moreau-Yosida de J est définie à l'aide d'un paramètre $c > 0$ par

$$J_c(u) := \min_{v \in \mathbb{R}^n} \left(J(v) + \frac{1}{2c} \|v - u\|^2 \right). \tag{1.1}$$

En prenant $v = u$ dans le minimum, on obtiens que :

Propriété 1.1.2. $\forall c > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad J_c(u) \leqslant J(u).$

Si J est une fonction à minimiser, alors la propriété suivante est utile :

Propriété 1.1.3. Soit a le minimum de J. Soit u l'un des antécédants de a. Alors u minimise aussi J_c et on a $J_c(u) = J(u) = a$ quelque soit $c > 0$.

Démonstration. Notons $f_u(v) := J(v) + \frac{1}{2c}\|v - u\|^2$.

$\Rightarrow$) Soit u_0, un point en lequel J atteint son minimum.

On a alors $f_{u_0}(u_0) = J(u_0) \leqslant J(u) \leqslant J(u) + \frac{1}{2c}\|u - u_0\|^2 = f_{u_0}(u), \ \forall u,$
d'où $J_c(u_0) = \min_u f_{u_0}(u) = J(u_0)$. On a donc égalité des fonctions J et J_c en u_0. Reste à montrer que u_0 est bien un point de minimum pour J_c.
Comme u_0 minimise J, on a $J(u_0) \leqslant J(v), \ \forall v.$
d'où $J(u_0) + \frac{1}{2c}\|v - u\|^2 \leqslant J(v) + \frac{1}{2c}\|v - u\|^2, \ \forall u, \forall v.$
Ainsi $\min_v(J(u_0) + \frac{1}{2c}\|v - u\|^2) \leqslant \min_v(J(v) + \frac{1}{2c}\|v - u\|^2) = J_c(u) \ \forall u.$
Or $\min_v(J(u_0) + \frac{1}{2c}\|v - u\|^2) = J(u_0)$ et $J(u_0) = J_c(u_0)$
donc $J_c(u_0) \leqslant J(u), \ \forall u.$ et ainsi u_0 minimise J_c.

$\Leftarrow$) Supposons que u_0 minimise J_c. On a alors

$$J_c(u_0) \leqslant J_c(u) = \min_v f_u(v) \leqslant f_u(u) = J(u) \quad \forall u.$$

Mais $J_c(u_0) = J(u_0)$. Ainsi $J(u_0) \leqslant J(u),\ \forall u$ et donc u_0 minimise J.

□

Ainsi minimiser la fonction J est équivalent à minimiser la fonction J_c. L'avantage de la fonction J_c, c'est qu'elle est construite de sorte à être différentiable aux abords du point de minimum même si J ne l'est pas (J peut même être discontinue). Le principal désavantage, c'est que le problème $\min_u J_c(u)$ est infiniment plus complexe à résoudre que le problème $\min_u J(u)$ puisque la fonction J_c nécessite le calcul d'un minimum à chaque évaluation. Qu'à cela ne tienne. Dans notre cas, nous connaissons explicitement J. La transformée de Moreau-Yosida n'est appliquée que pour gagner en régularité. Ainsi, on peut calculer explicitement J_c. Avant de fournir un exemple, remarquons que

Propriété 1.1.4. Si la fonction J est paire, alors sa régularisée J_c l'est aussi.

Démonstration.

$$\begin{aligned} J_c(-u) &= \min_{v\in\mathbb{R}} \left(J(v) + \frac{1}{2c}\|v+u\|^2 \right) \\ &= \min_{s\in\mathbb{R}} \left(J(-s) + \frac{1}{2c}\|-s+u\|^2 \right) \qquad \text{en posant } s=-v \\ &= \min_{s\in\mathbb{R}} \left(J(s) + \frac{1}{2c}\|s-u\|^2 \right) = J_c(u) \qquad (\text{ car } J \text{ et } \|.\|^2 \text{ sont paires }). \end{aligned}$$

□

Ceci va nous permettre d'alléger les calculs. Regardons en exemple, le calcul de la régularisée d'une fonction créneau.

Exemple : Considérons la fonction créneau :

$$J(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in [-a;a], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $f_u(v) = J(v) + \|v-u\|^2/2c$. On a $f_u'(v) = (v-u)/c,\ \forall u \in \mathbb{R}\backslash\{-a,a\}$. En $\pm a$, la dérivée n'est pas définie. Puisque J est paire, nous pouvons limiter l'étude de sa régularisée aux u positifs. La fonction étant dicontinue en a, il faut distinguer 2 cas :

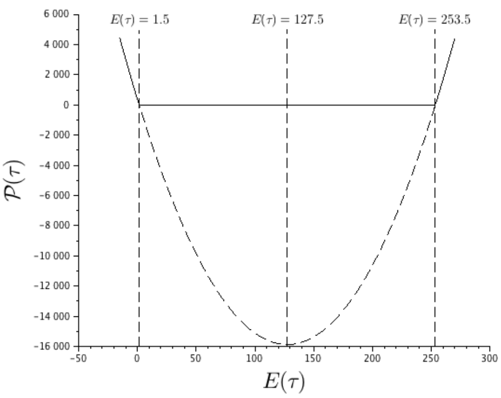

Figure 1.1 – Régularisation de Moreau-Yosida d'une fonction créneau.

Mettre la bonne figure

- Cas 1 : $a < u$

v	0		a		u		$+\infty$
$f'_u(v)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f_u(v)$	$u^2/2c$	$\searrow$	$(a-u)^2/2c \;\|\; 1+(a-u)^2/2c$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ici, $u \leqslant a \Rightarrow \min_v f_u(v) = \min\left(1, (a-u)^2/2c\right)$. Ainsi J_c vaut 1 si $(a-u)^2/2c \geqslant 1$, *i.e.* si $u \leqslant a + \sqrt{2c}$; si $u > a + \sqrt{2c}$ alors $J_c(u) = (a-u)^2/2c$.
- Cas 2 : $a \geqslant u$. Ici tout les points u tel que $0 \leqslant u \leqslant a$ minimise J. Donc $J_c(u) = J(u) = 0$ sur cet intervalle. On peut s'en rassurer avec le tableau de variation suivant :

v	0		u		a		$+\infty$
$f'_u(v)$		$-$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f_u(v)$	$u^2/2c$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$(a-u)^2/2c \;\|\; 1+(a-u)^2/2c$	$\nearrow$	$+\infty$

qui nous donne bien $J_c(u) = \min_v f_u(v) = 0$.

Bilan : On a une expression explicite de la régularisée (que l'on complète par parité de la fonction) :

$$J_c(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in]-\infty; -a-\sqrt{2c}] \cup [a+\sqrt{2c}; +\infty[\\ (a-u)^2/2c & \text{si } u \in]-a-\sqrt{2c}; -a[\cup]a; a+\sqrt{2c}[\\ 0 & \text{si } u \in [-a; a] \end{cases}$$

L'allure de la fonction créneau J et de sa régularisée J_c, sont présentées Figure 1.1.

Notons que la fonction n'est régulière qu'aux abords des minimums. La valeur 0 est raccordé de manière dérivable, mais pas de dérivabilité pour le raccord en 1.

Remarquons également que plus le paramètre c est grand, plus l'intervalle sur lequel agit la régularisation est large.

On pourrait aller beaucoup plus loin dans l'étude des propriétés de cette régularisation. De nombreuses publications ont été faite notament dans des cas où l'on ne connait pas analytiquement la fonction J et où l'on s'intéresse notamment au problème adjoint... Nous ne nous étalerons pas plus sur ce vaste sujet : là n'est pas l'objet de ce manuscrit.

1.1.2 Régularisation de Moreau-Yosida appliquée à une parabole tronquée.

On considère dans cette section, la parabole tronquée suivante

$$J(u) = [u^2 - a^2]^+ \tag{1.2}$$

où a^2 est le minimum de la parabole d'origine, et où $[x]^+ = \max(x, 0)$. De la même manière que dans l'exemple de la section précédente, nous allons construire explicitement la régularisée de cette fonction. On a ici :

$$f_u(v) = [v^2 - a^2]^+ + \frac{1}{2c}\|v - u\|^2. \tag{1.3}$$

De plus, comme la fonction J est paire, on restreint l'étude à l'ensemble $\mathbb{R}_+$. Ainsi la dérivée est caractérisée sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f'_u(v) = \begin{cases} \dfrac{v-u}{c} & \text{si } v < a, \\ \text{non définie} & \text{si } v = a, \\ 2v + \dfrac{v-u}{c} & \text{si } v > a. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ainsi

$$f'_u(v) = 0 \iff \begin{cases} v = u & \text{si } v < a, \\ v = \dfrac{u}{2c+1} & \text{si } v > a. \end{cases} \tag{1.5}$$

Les cas suivants sont donc à considérer (remarquer que comme $c > 0$ et $u > 0$ on a toujours $\frac{u}{2c+1} < u$) :

- Cas 1 : $0 < \frac{u}{2c+1} < u \leqslant a$
  Dans ce cas là u minimise J. Donc $J_c(u) = J(u) = 0,\ \forall u \leqslant a$.
- Cas 2 : $0 < \frac{u}{2c+1} < a < u$

v	0	$\frac{u}{2c+1}$	a	u	$+\infty$
$f'_u(v)$	$-$	$-$	$\Vert$	$+$	$+$
$f_u(v)$	$\searrow$			$\nearrow$	

  Ici, $\min_v f_u(v) = f(a) = \frac{1}{2c}\|a - u\|^2,\ \forall u \in]a, a(2c+1)[$.
- Cas 2 : $0 < a < \frac{u}{2c+1} < u$

v	0	a	$\frac{u}{2c+1}$	u	$+\infty$
$f'_u(v)$	$-$	$\Vert$ $-$	0	$+$	$+$
$f_u(v)$	$\searrow$			$\nearrow$	

$$\begin{aligned} \text{Ici}, \min_v f_u(v) &= f\left(\frac{u}{2c+1}\right) = \left[\left(\frac{u}{2c+1}\right)^2 - a^2\right]^+ + \frac{1}{2c}\left\|\frac{u}{2c+1} - u\right\|^2 \\ &= \left(\frac{u}{2c+1}\right)^2 - a^2 + \frac{1}{2c}\left(\frac{-2cu}{2c+1}\right)^2 \\ &= \frac{u^2}{2c+1} - a^2, \quad \forall u \in]a(2c+1), +\infty[. \end{aligned}$$

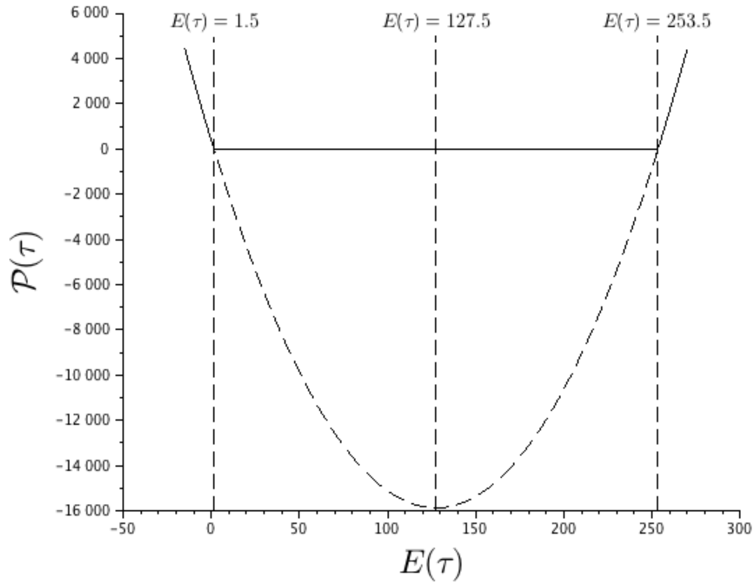

FIGURE 1.2 – Régularisation de Moreau-Yosida d'une parabole tronquée.

Ainsi l'expression de la régularisée de la parabole tronquée 1.2 est donnée par

Mettre la bonne figure

$$J_c(u) = \begin{cases} \dfrac{u^2}{1+2c} - a^2 & \text{si } u \in]-\infty; -a(2c+1)] \cup [a(2c+1); +\infty[\\ \dfrac{1}{2c}\|a-u\|^2 & \text{si } u \in]-a(2c+1); -a[\cup]a; a(2c+1)[\\ 0 & \text{si } u \in [-a; a], \end{cases} \tag{1.6}$$

et son allure est présentée sur la Figure 1.2.

1.2 Optimisation des niveaux de gris : essais de diverses pénalisations sur la fonction coût