

## Critères quantifiant l'hétérogénéité.

**D**ANS tout ce chapitre, on considère l'approximation en un mélange de deux gaussiennes d'un histogramme de niveau gris. Ce mélange gaussien est entièrement décrit par les paramètres suivants :

- $c_1, c_2$  : Centre des gaussiennes.
- $\sigma_1, \sigma_2$  : Ecart-type de chacune des gaussiennes
- $w_1, w_2$  : Poids associées aux gaussiennes dans le mélange ( $w_1 + w_2 = 1$ )

On peut ainsi définir plusieurs quantités caractéristiques :

- $h_1, h_2$  : Hauteur des gaussiennes. Elles sont données par  $h_i = \frac{w_i}{\sigma_i \sqrt{2\pi}}$

Notons  $\Delta$  l'opérateur de différence défini par :

$$\Delta : u \longmapsto \Delta u := u_2 - u_1. \quad (1.1)$$

Ainsi les quantités suivantes pourront s'avérer intéressantes à étudier :  $\Delta c$ ,  $\Delta \sigma$ ,  $\Delta \sigma^2$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta w$  représentant respectivement l'écart entre les centres, la différence d'écart-type, la différence des variances, la différence des hauteurs et la différences des poids. On pourra aussi regarder le ratio des quantités :

$$Q : u \longmapsto Qu := \frac{\min(u_2, u_1)}{\max(u_2, u_1)}. \quad (1.2)$$

### 1.1 Définition d'une fonction objectif à reproduire

Afin de correctement traduire l'hétérogénéité, il est nécessaire de fournir une fonction objectif que notre critère devra reproduire au mieux. Ainsi, j'ai décidé de catégoriser l'ensemble des scanners de nos patients. Le partage des scanners est ainsi fait en 5 catégories, en associant à chaque catégorie une valeur de l'hétérogénéité  $\mathcal{H}$  :

- $\mathcal{H} = 0.9$  : très hétérogène
- $\mathcal{H} = 0.7$  : plutôt hétérogène

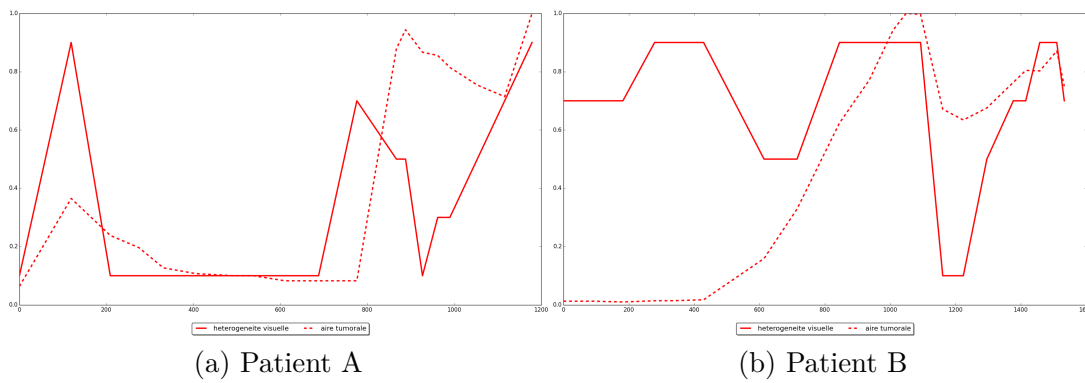


FIGURE 1.1 – Fonction objectif de l'hétérogénéité

- $\mathcal{H} = 0.5$  : cas intermédiaire ou difficile à caractériser
- $\mathcal{H} = 0.3$  : plutôt homogène
- $\mathcal{H} = 0.1$  : très homogène

Après appréciation visuelle<sup>1</sup>, voici ce que donne les fonctions objectifs pour  $\mathcal{H}$  (cf. Figure 1.1).

Notons que Patient A est encore ici un cas très représentatif de ce que l'on cherche à étudier *i.e.* corrélation entre hétérogénéité et rechute imminente. En effet, ici l'hétérogénéité croît avant même que le volume tumorale ne réaugmente, signe de la reprise d'activité cellulaire sur le pourtour de la métastase. Le coeur reste nécrosé et donc l'hétérogénéité est accrue. Lorsque le volume tumorale fini par augmenter, le tissu proliférant à, en grande partie (si le centre de la tumeur est suffisamment vascularisé), recoloniser la zone nécrosée. La croissance de la métastase est alors synonyme d'homogénéisation, puisque l'ensemble de la surface tumorale tend à être proliférante. Une homogénéisation a également lieu lorsque le traitement est efficace. Dans ce cas-ci, l'ensemble de la tumeur tend à être nécrosée.

Bien que nous ayons 2 patients à notre disposition, je m'efforcerais de construire un critère qui reproduira convenablement la fonction objectif pour Patient A uniquement. Le second patient, Patient B, sera gardé pour valider le ou les critère(s) retenu(s) et non pour le ou les construire. L'idéal serait bien sûr d'avoir à notre disposition une plus large cohorte de patient...

---

1. Cette appréciation visuelle reste ma perception personnelle même si je me suis efforcé de rester le plus objectif possible. Mettre à contribution les membres de l'équipe de recherche par exemple, pour leur demander une catégorisation aurait pu permettre de confronter l'évolution de l'hétérogénéité au cours du temps que je perçois à celle que perçoivent les autres. La fonction objectif finale pourrait ainsi être la moyenne de celles que chacun obtient. On aurait donc un peu plus de nuances : des valeurs intermédiaires aux 5 paliers notamment ainsi que des barres d'erreur pour chaque valeur

## 1.2 Premiers essais de critères

Examinons à présent, les informations que fournissent les quantités suivantes (qui pourraient être des quantificateurs de l'hétérogénéité) :

$$\mathcal{H}_1 = \frac{|\Delta c|}{256}, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{H}'_1 = 1 - Qc, \quad (1.4)$$

$$\mathcal{H}'_2 = \left| \frac{\Delta c/256}{\Delta h} \right|, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{H}_3 = Qw, \quad (1.6)$$

$$\mathcal{H}'_3 = |\Delta w|, \quad (1.7)$$

$$\mathcal{H}_8 = |\Delta h|, \quad (1.8)$$

$$\mathcal{H}'_8 = Qh. \quad (1.9)$$

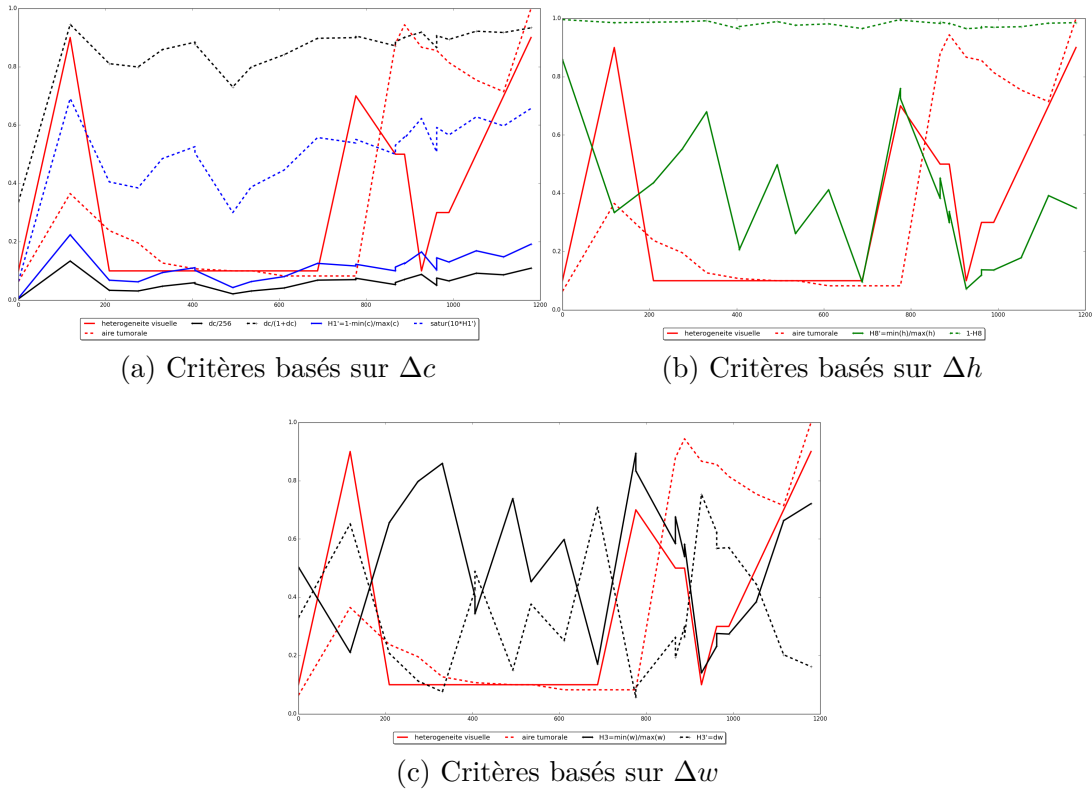
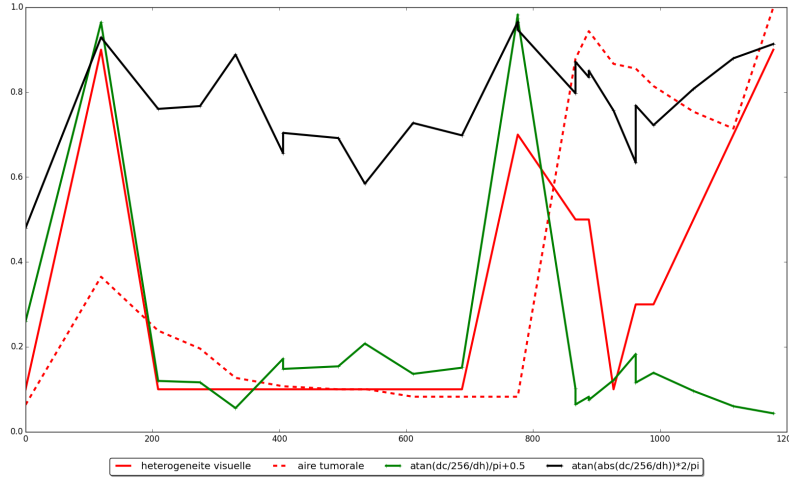


FIGURE 1.2 – Premiers critères

La Figure 1.2 montre l'évolution de ces différentes quantités (ou de quantités qui en découle) au cours du temps. Les ratios  $Qc$ ,  $Qh$  et  $Qw$  sont par

FIGURE 1.3 – Critères basés sur la pente  $\Delta c/\Delta h$ 

définition entre 0 et 1. Notez que  $\Delta h$  et  $\Delta w$  sont nécessairement compris entre 0 et 1, puisqu'ils sont la différence de 2 éléments compris entre ces mêmes bornes. En ce qui concerne  $\Delta c$  on le divisera par 256, pour également le ramener dans cet intervalle. Pour garantir l'appartenance à l'intervalle  $[0, 1]$ , on pourra également saturer les quantités :

$$\mathcal{S} : x \mapsto \frac{x}{1+x}. \quad (1.10)$$

On remarque qu'aucune de ces quantités n'est pertinente pour décrire l'hétérogénéité. Outre cela, on peut également remarquer les équivalences suivantes :

$$\frac{\Delta c}{256} \simeq 1 - Qc \quad \text{et} \quad \Delta w \simeq 1 - Qw. \quad (1.11)$$

Pour  $\Delta h$  et  $1 - Qh$ , on a visiblement pas d'équivalence stricte mais les variations du ratio semble être une dilatation de celles de la différence. On peut noter également que  $Qh$  et  $Qw$  sont très similaires et reproduisent assez bien la partie sur laquelle le patient est sous antiangiogénique. De plus, bien que  $|\Delta c|/256$  soit relativement bas, ses variations, si elles étaient dilatées, pourrait s'approcher d'une description grossière de l'hétérogénéité sur la partie avec imatinib.

Les prochains critères que nous allons étudier sont basés sur l'angle de la pente décrite entre le sommet des deux gaussiennes :

$$\mathcal{H}_4 = \frac{1}{\pi} \left| \text{atan} \left( \frac{\Delta c}{\Delta h} \right) \right| + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{10} = \frac{2}{\pi} \text{atan} \left( \left| \frac{\Delta c}{\Delta h} \right| \right). \quad (1.12)$$

Notons que l'arctangente, n'est ni plus ni moins qu'une autre manière de saturer une quantité. En effet, comme le montre la Figure 1.4, l'arctangente est proche de la saturation  $\mathcal{S}$  définie par (1.10).

Il s'agit  
de l'in-  
verse de la  
pente

l'arctangente ?

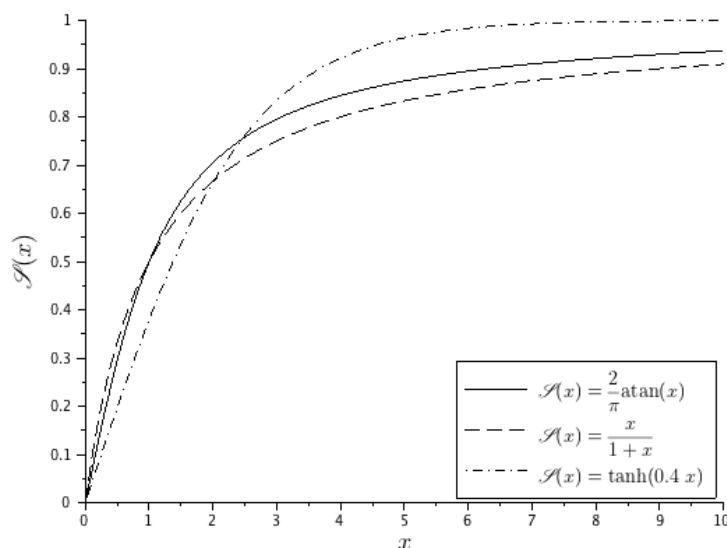


FIGURE 1.4 – Comparaison de différentes saturations

Que la pente soit négative ou positive, à priori si les 2 composantes sont semblables, alors l'hétérogénéité est la même. Sur la Figure 1.3 est également tracé le critère qui dépend du signe de la pente, pour voir si ce signe pourrait apporter de l'information supplémentaire. Chose que nous pouvons espérer car :

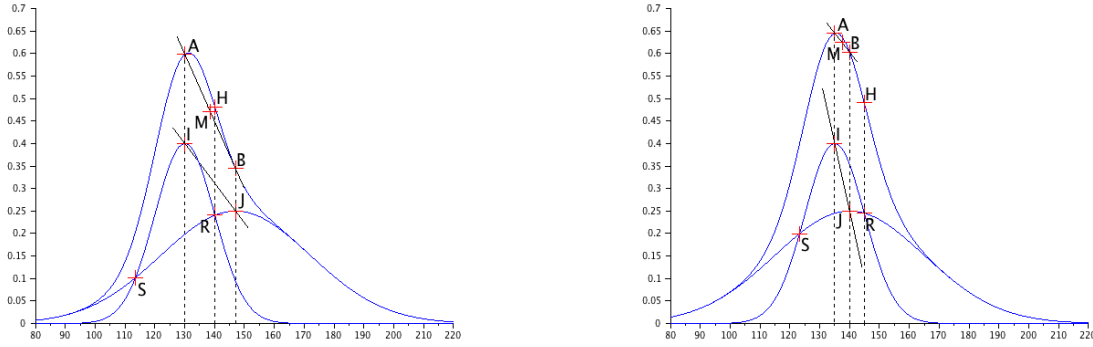
- une pente positive va traduire qu'on a une majorité de proliférantes,
- une pente négative va traduire qu'on a une majorité de tissu nécrosé.

Les résultats présentés sur la Figure 1.3 ne sont pas encore très convaincant en ce qui concerne la description de l'hétérogénéité... D'autres critères doivent encore être explorés.

### 1.3 Critères basés sur la manière dont s'intersecte les gaussiennes

Plutôt que de considérer seulement 2 points (le sommet de chaque gaussienne), élargissons notre éventail de points caractéristiques. La Figure 1.5 présente l'ensemble des points utilisés dans les critères d'évaluation de l'hétérogénéité de cette section.

On regardera notamment ce que peut fournir l'étude des angles  $\widehat{ARB}$ ,  $\widehat{AHB}$ ,  $\widehat{AGB}$  et  $\widehat{MRB}$ . Avant d'aller plus loin notons que la Figure 1.5 présente le cas de gaussiennes dont l'abscisse de l'un des points d'intersection est situé entre les centres des deux gaussiennes ( $R_x \in [c_1, c_2]$ ). Avant de regarder quel critère qu'il soit, étudions l'ensemble des configurations possibles entre 2



(a) Cas où l'une des intersection se situe entre les centres des gaussiennes.

(b) Cas où les 2 intersections sont à l'extérieure.

FIGURE 1.5 – Points caractéristiques de l'intersections de 2 gaussiennes.

gaussiennes.

### 1.3.1 Ensemble des configurations d'un mélange bi-gaussien.

Comme le montre la Figure 1.6, deux gaussiennes ne s'intersectent pas nécessairement. De plus, il n'est pas obligatoire d'avoir un point d'intersection dont l'abscisse est situé entre  $c_1$  et  $c_2$ . Pour cela, résolvons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 g_1(x) = g_2(x) &\Leftrightarrow h_1 \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{x - c_1}{\sigma_1}\right)^2\right) = h_2 \exp\left(\frac{-1}{2} \left(\frac{x - c_2}{\sigma_2}\right)^2\right), \\
 &\Leftrightarrow \ln h_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x - c_1}{\sigma_1}\right)^2 = \ln h_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x - c_2}{\sigma_2}\right)^2, \\
 &\Leftrightarrow 0 = \sigma_2^2(x - c_1)^2 - \sigma_1^2(x - c_2)^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 \ln(h_2/h_1),
 \end{aligned}$$

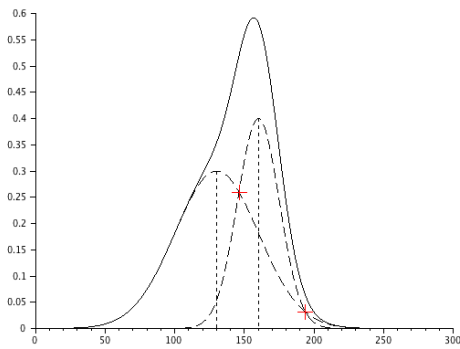
qui amène à la résolution d'un polynôme du second degré en  $x$  :

$$\begin{aligned}
 g_1(x) = g_2(x) &\Leftrightarrow Ax^2 + 2B'x + C = 0 \\
 \text{avec : } A &= \sigma_2^2 - \sigma_1^2, \\
 B' &= c_2\sigma_1^2 - c_1\sigma_2^2, \\
 C &= c_1^2\sigma_2^2 - c_2^2\sigma_1^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 \ln(h_2/h_1).
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

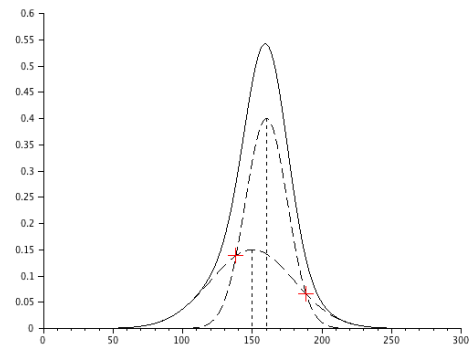
**Cas particulier.** Ecartons tout de suite le cas particulier  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Dans ce cas, l'équation (1.13) se réécrit :

$$2\Delta c x + c_1^2 - c_2^2 + 2\sigma^2 \ln((1 - w)/w) = 0 \tag{1.14}$$

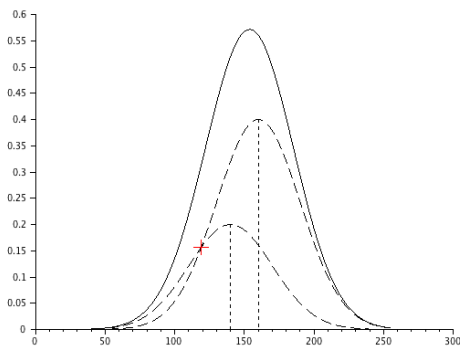
- Si de plus  $\Delta c = 0$ , alors (1.14) implique que  $h_1 = h_2$ , et donc les deux gaussiennes sont absolument identiques et superposées.



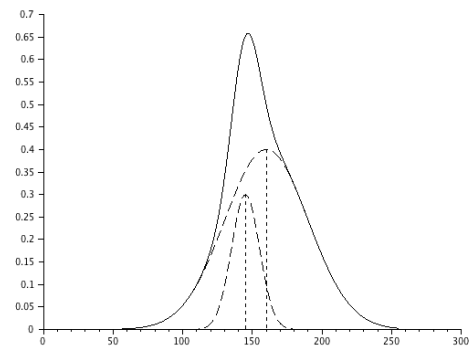
(a) Cas avec 2 intersections, l'une se situant entre les centres des gaussiennes.



(b) Cas où les 2 intersections, toutes les deux en dehors de l'intervalle défini par le centre des gaussiennes.



(c) Cas avec un seul et unique point d'intersection (ici  $\sigma_1 = \sigma_2$ ).



(d) Cas sans aucun point d'intersection.

FIGURE 1.6 – Ensemble des configurations avec 2 gaussiennes.

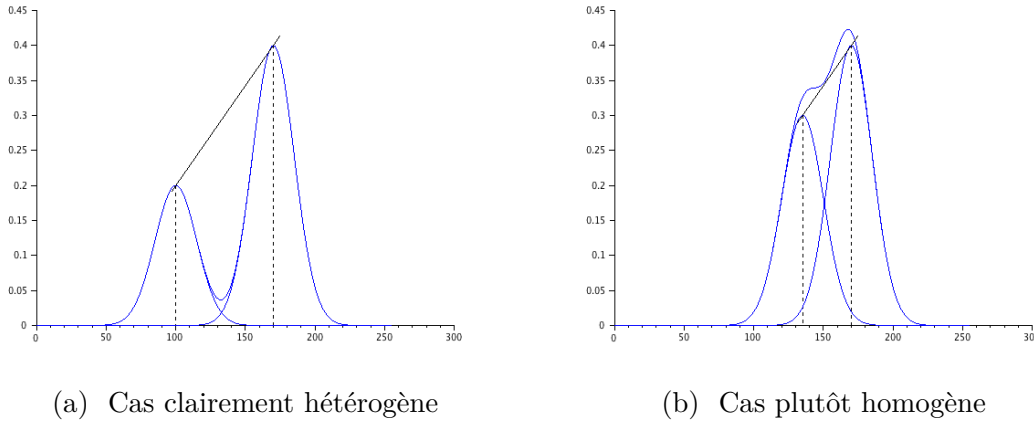


FIGURE 1.7 – Deux configurations très différentes mais fournissant la même pente entre les gaussiennes.

- Si  $\Delta c \neq 0$ , alors on a un seul et unique point de croisement, dont l'abscisse est :

$$x = \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{\sigma^2}{\Delta c} \ln \left( \frac{1-w}{w} \right). \quad (1.15)$$

**Cas général.** Il convient ici de calculer le discriminant réduit :

$$\Delta' := B'^2 - AC = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \left[ (\Delta c)^2 - 2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \ln(h_2/h_1) \right]. \quad (1.16)$$

Ce discriminant n'est pas nécessairement positif ! Donc il existe des cas où les gaussiennes ne s'intersectent pas.

analyse du signe du discriminant à compléter

### 1.3.2 Etudes de différents critères

- Basé sur intégrale commune
- Basé sur des angles
- Basé sur des positions relatives de point ...

A compléter

## 1.4 Critère retenu

L'idée de ce dernier critère m'est venu de la constation suivante. En repartant du critère de la pente décrite entre le sommet des gaussiennes, sur la Figure 1.7 est présenté deux configurations très différentes, mais présentant la même pente. Pourtant la Figure 1.7a est très clairement représentative d'une



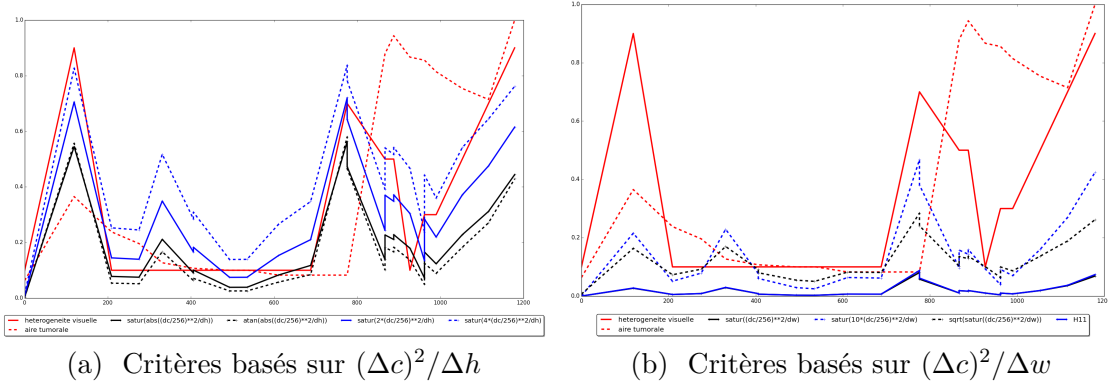
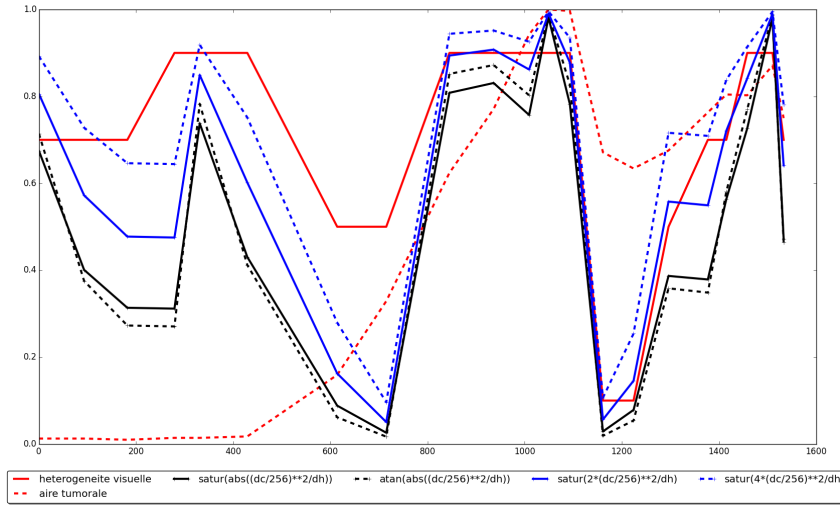
FIGURE 1.8 – Critères dans lesquels  $\Delta c$  joue un rôle prépondérant.FIGURE 1.9 – Critères basés sur  $(\Delta c)^2/\Delta h$  sur Patient B

image hétérogène alors que la Figure 1.7a serait plutôt représentative de qqch d'homogène puisque l'approximation par une seule et unique gaussienne ne serait pas des plus mauvaise. Comment différencier ces deux cas ? Cet exemple mis en exergue nous invite à dire que  $\Delta c$  doit avoir plus de poids que  $\Delta h$  dans le calcul du critère de l'hétérogénéité. Ainsi, j'ai décidé de regarder le critère suivant :

$$\mathcal{H}_{11} = \mathcal{S} \left( \left| \frac{(\Delta c/256)^2}{\Delta w} \right| \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_2 = \mathcal{S} \left( \left| \frac{(\Delta c/256)^2}{\Delta h} \right| \right) \quad (1.17)$$

## 1.5 L'hétérogénéité sur les simulations numériques

Nouveau  
chapitre ?

Titre sous-  
section ?

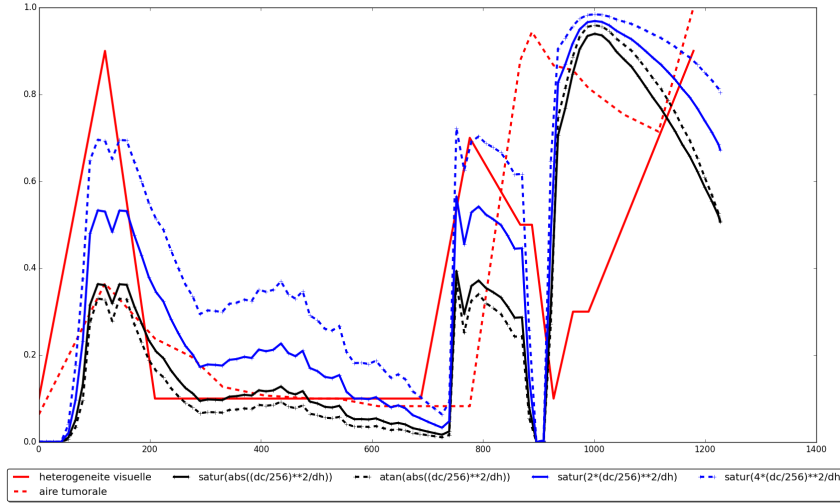


FIGURE 1.10 – Hétérogénéité numérique pour Patient A –  $\tau_N = 33$ ,  $\tau_P = 166$  et  $\tau_S = 215$ . L'hétérogénéité clinique est rappelée, à titre de comparaison, ici en rouge.

### 1.5.1 Titre ....

Maintenant que nous avons un critère qui décrit correctement l'hétérogénéité clinique (d'une métastase à partir de l'imagerie médicale), faisons parler ce critère sur nos simulations numériques. En ce qui concerne cet aspect, les images résultantes (gouvernées par EQREF ) des simulations numériques dépendent de 3 paramètres :  $\tau_N$ ,  $\tau_P$  et  $\tau_S$  qui représentent les niveaux de gris associés à chacune de nos populations de notre modèle EDP. Ainsi, pour une simulation numérique donnée, il n'y a pas unicité de l'image produite en niveau de gris, et donc non unicité de l'histogramme. Tout dépend de ces 3 paramètres. Dans un premier temps, on examinera ce que cela donne avec les valeurs heuristiques considérées dans la première partie de ce manuscrit :  $\tau_N = 38$ ,  $\tau_P = 166$  et  $\tau_S = 204$ . Dans un second temps, on pourra faire varier ces paramètres pour examiner l'influence de ceux-ci sur l'hétérogénéité numérique. On ne montrera ici que l'hétérogénéité numérique de Patient A. Celle de Patient B n'a absolument aucune chance d'être correctement reproduite pour la simple et bonne raison que le premier scan est très hétérogène, alors que notre condition initiale dans le modèle numérique est complètement homogène. Il faudrait prendre une condition initiale plus en relation avec l'image médicale, à minima une condition initiale qui présenterait le même niveaux d'hétérogénéité pour pouvoir poursuivre l'étude avec ce patient.

Sur la Figure 1.10 est présenté l'hétérogénéité numérique de Patient A. La fonction objectif pour l'hétérogénéité clinique ainsi que l'évolution de l'aire tumorale sont ici rappelées sur ce graphique à titre comparatif. La phase avec imatinib est correctement décrite :

- Présence d'un pic d'hétérogénéité jour 119.

eqref

Et l'optim  
du niveau  
de gris  
faite entre  
temps ?

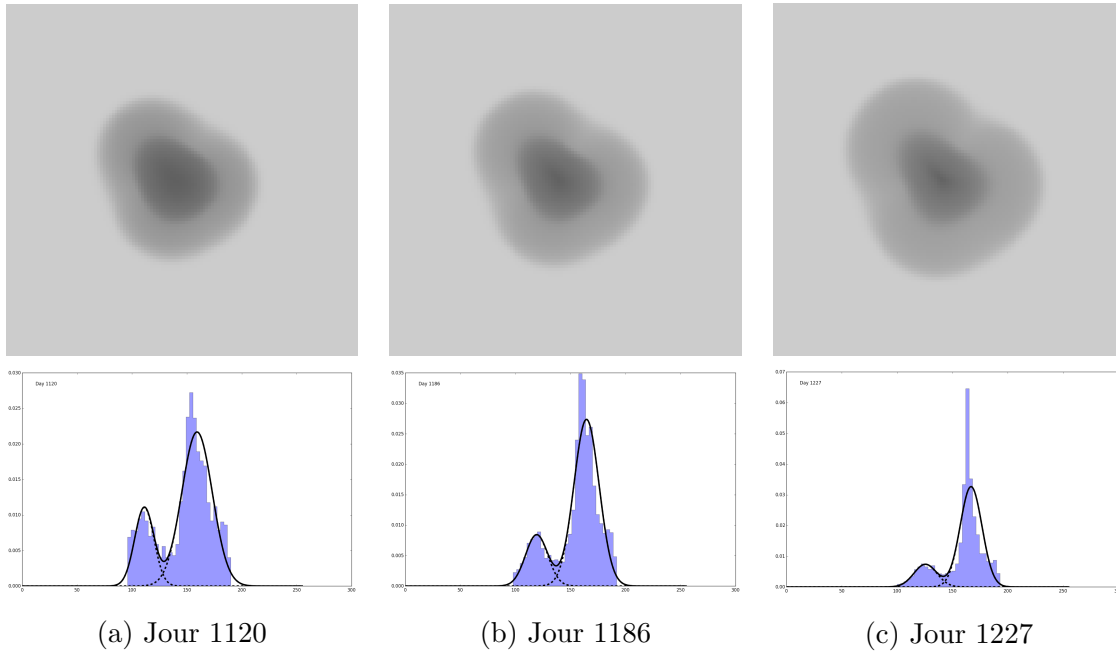


FIGURE 1.11 – Hétérogénéité numérique de Patient A.

- Décroissance de l'hétérogénéité lorsque l'imatinib agit de manière efficace.
- Saut important de l'hétérogénéité qui grandit juste avant la recroissance de l'aire tumorale.

En ce qui concerne la partie avec sunitinib, au début de l'administration du traitement l'hétérogénéité décroît. Cependant :

- La recroissance de l'hétérogénéité numérique a lieu un peu tôt par rapport à celle constatée cliniquement.
- Sur la partie finale (lors de la rechute au sunitinib, après le jour 1116), l'hétérogénéité numérique décroît alors que celle clinique continue d'augmenter.

En ce qui concerne le deuxième point, cela peut venir soit de la manière dont on calcule l'hétérogénéité, soit du modèle EDP lui même qui ne retranscrirait pas bien l'évolution de l'hétérogénéité. La Figure 1.11 tends à dire que c'est plutôt le modèle EDP puisque le jour 1120 est beaucoup plus hétérogénéité que le jour 1227. En effet, le contraste entre les deux masses dominantes (pourtour et intérieur de la tumeur) est beaucoup plus important jour 1120 que jour 1227. De plus le rapport du volume de ces dominantes est beaucoup plus proche de 1 au jour 1120 qu'au jour 1227 (si le ratio est égal à 1 alors les masses sont de volume égal). Ces impressions visuelles sont confirmées par les histogrammes également présentés sur la Figure 1.11. Tout ceci renforce donc l'idée que l'image du jour 1120 est plus hétérogénéité que celle du jour 1227.

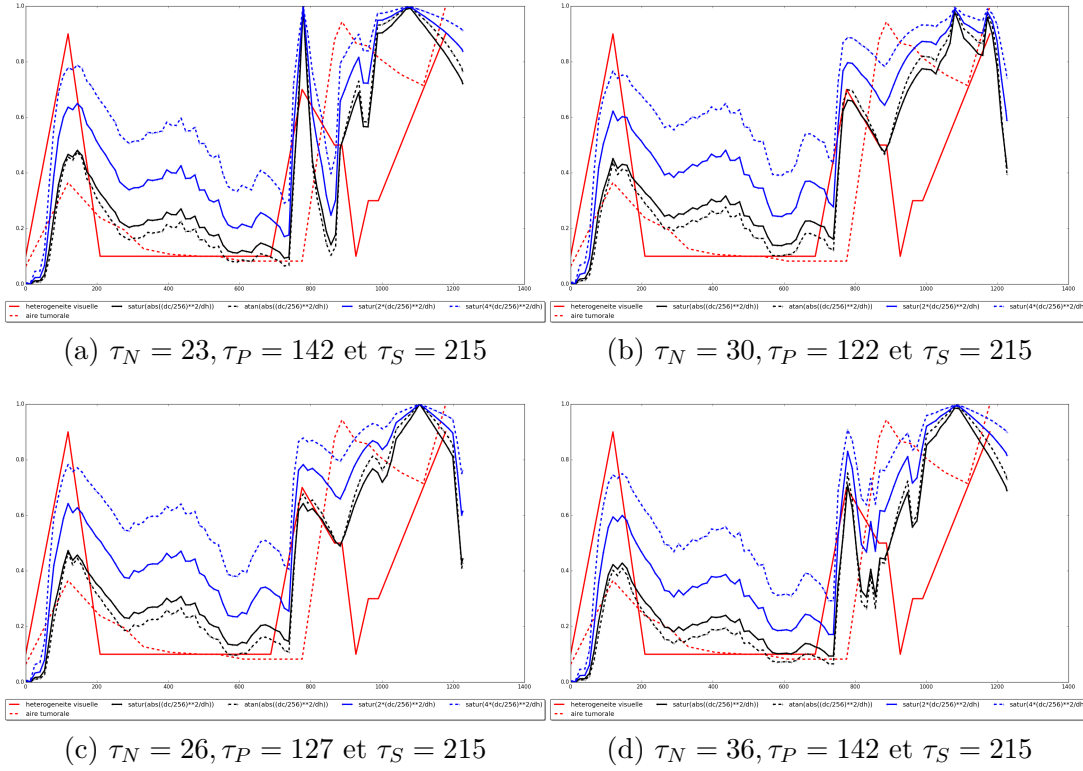


FIGURE 1.12 – Influence du choix des niveaux de gris  $\tau_N, \tau_P$  et  $\tau_S$  sur l'hétérogénéité numérique.

### 1.5.2 Influence des niveaux de gris sur l'hétérogénéité numérique

La principale conséquence du changement des niveaux de gris  $\tau_N, \tau_P$  et  $\tau_S$  est la dilatation de l'histogramme des niveaux de gris. Les variations de l'hétérogénéité ne sont donc que peu dépendante de ces paramètres, comme le montre la Figure 1.12, sur laquelle toutes les courbes sont comparables. Comme différence, on pourra relever tout de même que plus  $\tau_N$  est écarté de  $\tau_P$ , plus les variations de l'hétérogénéité numérique sont importantes. Ceci est notamment visible lors de la rechute à l'imatinib, entre les jours 776 et 888 où le pic descendant de l'hétérogénéité numérique est plus prononcé si  $\tau_P - \tau_N$  est grand. Ceci est conforme à ce que l'on pouvait attendre, puisque cette différence va impacter directement la position des gaussiennes sur l'histogramme, position relative en grande partie donnée par  $\Delta c$  qui intervient dans le calcul de notre critère de l'hétérogénéité numérique.