

## Schéma mixte volumes finis/éléments finis pour résoudre l'équation de Poisson

ON propose ici une méthode mixte volumes finis/éléments finis, inspirée de [?], pour résoudre l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k \nabla \Pi(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ \Pi(\mathbf{x}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $F(\mathbf{x})$  est une fonction source connue et où  $k$  est une fonction continue. Pour des raisons pratiques, dans l'ensemble de cette annexe nous noterons  $\Pi_i^j := \Pi(x_i, y_j)$  (pas de confusion possible avec un exposant traduisant un indice temporel, ici il n'y a pas de variations temporelles). Les ordonnées seront de la même manière notées en exposant pour toutes les quantités attachées à une maille  $\mathcal{M}_i^j$ .

### 1.1 Description de la méthode

Le principe de cette méthode mixte est le suivant. Sur chaque maille  $\mathcal{M}_i^j$ , une approximation par un polynôme Q1 est réalisée à partir des valeurs aux quatre coins de la maille. Le flux au travers du volume de contrôle est alors calculé comme l'intégrale sur le bord de ce volume, de la dérivée du polynôme.

Décrivons à présent plus en détail la méthode. Plaçons nous dans un volume de contrôle  $V_c$ , maille du maillage dual. La formulation volume fini donne alors :

$$\int_{V_c} -\nabla \cdot (k \nabla \Pi(x, y)) \, dx \, dy = \int_{V_c} F(x, y) \, dx \, dy. \quad (1.2)$$

Notons  $\Gamma = \bigcup_{i=1,2,3,4} \Gamma_i$  le bord du volume de contrôle  $V_c$ , comme montré sur la Figure 1.1. La formule de Stokes nous permet alors d'écrire :

$$\int_{\Gamma_1} k \partial_y \Pi \, dx - \int_{\Gamma_2} k \partial_x \Pi \, dy - \int_{\Gamma_3} k \partial_y \Pi \, dx + \int_{\Gamma_4} k \partial_x \Pi \, dy = \int_{V_c} F \, dx \, dy. \quad (1.3)$$

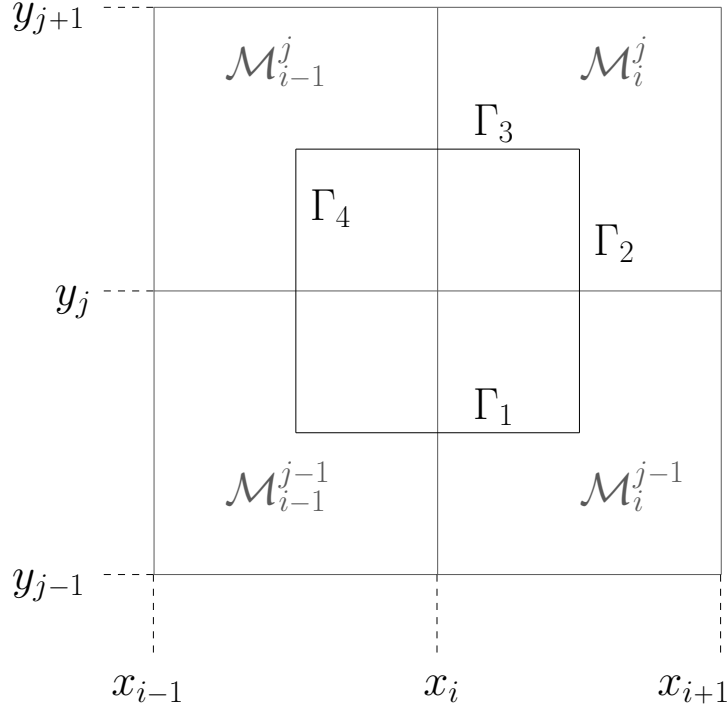


FIGURE 1.1 – Méthode mixte éléments finis/volumes finis.

Le point  $(x_i, y_j)$  étant le centre du volume de contrôle, le membre de droite est approximé de la manière suivante :

$$\int_{V_c} F \, dx \, dy = \Delta x \Delta y F_i^j \quad \text{dans chaque volume de contrôle } V_c. \quad (1.4)$$

Pour ce qui est du membre de gauche, dans chaque maille  $\mathcal{M}_i^j$  on approxime  $\Pi$  par  $\tilde{\Pi}$  de manière Q1 *i.e.* :

$$\tilde{\Pi}_i^j(x, y) = \delta_i^j + \gamma_i^j x + \beta_i^j y + 2\alpha_i^j xy \quad \forall (x, y) \in \mathcal{M}_i^j. \quad (1.5)$$

## 1.2 Calcul des coefficients du polynôme Q1 : inversion de matrice

L'approximation polynomiale  $\tilde{\Pi}$  est telle qu'elle soit exacte en chacun des sommets des mailles. Les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont ainsi solution du système suivant :

$$A_i^j \begin{pmatrix} \delta_i^j \\ \gamma_i^j \\ \beta_i^j \\ \alpha_i^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_i^j \\ \Pi_{i+1}^j \\ \Pi_i^{j+1} \\ \Pi_{i+1}^{j+1} \end{pmatrix} \quad \text{dans chacune des mailles } \mathcal{M}_i^j \quad (1.6)$$

où

$$A_i^j = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_j & 2x_i y_j \\ 1 & x_{i+1} & y_j & 2x_{i+1} y_j \\ 1 & x_i & y_{j+1} & 2x_i y_{j+1} \\ 1 & x_{i+1} & y_{j+1} & 2x_{i+1} y_{j+1} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Il s'agit donc maintenant d'inverser la matrice  $A$ . Appliquons l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan pour en trouver l'inverse :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & y_j & 2x_i y_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_{i+1} & y_j & 2x_{i+1} y_j & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_i & y_{j+1} & 2x_i y_{j+1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x_{i+1} & y_{j+1} & 2x_{i+1} y_{j+1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & y_j & 2x_i y_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x & 0 & 2y_j \Delta x & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y & 2x_i \Delta y & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Delta x \Delta y & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 - L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & y_j & 2x_i y_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2y_j & -1/\Delta x & 1/\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x_i & -1/\Delta y & 0 & 1/\Delta y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{p} & \frac{-1}{p} & \frac{-1}{p} & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2/\Delta x \\ L_3 \leftarrow L_3/\Delta y \\ L_4 \leftarrow L_4/p \end{matrix}$$

avec  $p = \Delta x \Delta y$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{x_i}{\Delta x} + \frac{y_j}{\Delta y} + \frac{x_i y_j}{p} & \frac{-x_i}{\Delta x} - \frac{x_i y_j}{p} & \frac{-y_j}{\Delta y} - \frac{x_i y_j}{p} & \frac{x_i y_j}{p} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\Delta x} - \frac{y_j}{p} & \frac{1}{\Delta x} + \frac{y_j}{p} & \frac{y_j}{p} & \frac{-y_j}{p} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\Delta y} - \frac{x_i}{p} & \frac{x_i}{p} & \frac{1}{\Delta y} + \frac{x_i}{p} & \frac{-x_i}{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2p} & \frac{-1}{2p} & \frac{-1}{2p} & \frac{1}{2p} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - x_i L_2 \\ -y_j L_3 + x_i y_j L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - y_j L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - x_i L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4/2 \end{matrix}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta y} + \frac{x_i}{p} &= \frac{1}{p}(\Delta x + x_i) = \frac{x_{i+1}}{p}, \\ \frac{1}{\Delta x} + \frac{y_j}{p} &= \frac{1}{p}(\Delta y + y_j) = \frac{y_{j+1}}{p}, \\ 1 + \frac{x_i}{\Delta x} + \frac{y_j}{\Delta y} + \frac{x_i y_j}{p} &= \frac{1}{p}(\Delta x \Delta y + \Delta y x_i + \Delta x y_j + x_i y_j) = \frac{1}{p} x_{i+1} y_{j+1}, \end{aligned}$$

on a ainsi :

$$A^{-1} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} x_{i+1} y_{j+1} & -x_i y_{j+1} & -x_{i+1} y_j & x_i y_j \\ -y_{j+1} & y_{j+1} & y_j & -y_j \\ -x_{i+1} & x_i & x_{i+1} & -x_i \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

### 1.3 Ecriture de la méthode comme un schéma à 9 points.

Chacune des intégrales de bord du problème variationnel (1.5) est approximée avec :

$$\begin{aligned}\int \partial_x \tilde{\Pi}_i^j dy &= \int (2\alpha_i^j y + \gamma_i^j) dy = [\alpha_i^j y^2 + \gamma_i^j y] = \alpha_i^j [y^2] + \gamma_i^j [y]. \\ \int \partial_y \tilde{\Pi}_i^j dx &= \int (2\alpha_i^j x + \beta_i^j) dx = [\alpha_i^j x^2 + \beta_i^j x] = \alpha_i^j [x^2] + \beta_i^j [x].\end{aligned}$$

On découpe alors chacun des bords  $\Gamma_i$  sur les deux mailles qu'il traverse :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2 \cap \mathcal{M}_i^j} k \partial_x \tilde{\Pi} dy &= k_{i+\frac{1}{2}}^j (\alpha_i^j (y_{j+\frac{1}{2}}^2 - y_j^2) + \gamma_i^j (y_{j+\frac{1}{2}} - y_j)) \\ &= \frac{\Delta y}{2} k_{i+\frac{1}{2}}^j (\alpha_i^j (2y_j + \Delta y/2) + \gamma_i^j)\end{aligned}\tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2 \cap \mathcal{M}_i^{j-1}} k \partial_x \tilde{\Pi} dy &= k_{i+\frac{1}{2}}^j (\alpha_i^{j-1} (y_j^2 - y_{j-\frac{1}{2}}^2) + \gamma_i^{j-1} (y_j - y_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{\Delta y}{2} k_{i+\frac{1}{2}}^j (\alpha_i^{j-1} (2y_j - \Delta y/2) + \gamma_i^{j-1})\end{aligned}\tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_4 \cap \mathcal{M}_{i-1}^j} k \partial_x \tilde{\Pi} dy &= k_{i-\frac{1}{2}}^j (\alpha_{i-1}^j (y_{j+\frac{1}{2}}^2 - y_j^2) + \gamma_{i-1}^j (y_{j+\frac{1}{2}} - y_j)) \\ &= \frac{\Delta y}{2} k_{i-\frac{1}{2}}^j (\alpha_{i-1}^j (2y_j + \Delta y/2) + \gamma_{i-1}^j)\end{aligned}\tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_4 \cap \mathcal{M}_{i-1}^{j-1}} k \partial_x \tilde{\Pi} dy &= k_{i-\frac{1}{2}}^j (\alpha_{i-1}^{j-1} (y_j^2 - y_{j-\frac{1}{2}}^2) + \gamma_{i-1}^{j-1} (y_j - y_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{\Delta y}{2} k_{i-\frac{1}{2}}^j (\alpha_{i-1}^{j-1} (2y_j - \Delta y/2) + \gamma_{i-1}^{j-1})\end{aligned}\tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1 \cap \mathcal{M}_i^{j-1}} k \partial_y \tilde{\Pi} dx &= k_i^{j-\frac{1}{2}} (\alpha_i^{j-1} (x_{i+\frac{1}{2}}^2 - x_i^2) + \beta_i^{j-1} (x_{i+\frac{1}{2}} - x_i)) \\ &= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j-\frac{1}{2}} (\alpha_i^{j-1} (2x_i + \Delta x/2) + \beta_i^{j-1})\end{aligned}\tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1 \cap \mathcal{M}_{i-1}^{j-1}} k \partial_y \tilde{\Pi} dx &= k_i^{j-\frac{1}{2}} (\alpha_{i-1}^{j-1} (x_i^2 - x_{i-\frac{1}{2}}^2) + \beta_{i-1}^{j-1} (x_i - x_{i-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j-\frac{1}{2}} (\alpha_{i-1}^{j-1} (2x_i - \Delta x/2) + \beta_{i-1}^{j-1})\end{aligned}\tag{1.14}$$

$$\int_{\Gamma_3 \cap \mathcal{M}_i^j} k \partial_y \tilde{\Pi} dx = k_i^{j+\frac{1}{2}} (\alpha_i^j (x_{i+\frac{1}{2}}^2 - x_i^2) + \beta_i^j (x_{i+\frac{1}{2}} - x_i))$$

$$= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j+\frac{1}{2}} (\alpha_i^j (2x_i + \Delta x/2) + \beta_i^j) \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3 \cap \mathcal{M}_{i-1}^j} k \partial_y \tilde{\Pi} \, dx &= k_i^{j+\frac{1}{2}} (\alpha_{i-1}^j (x_i^2 - x_{i-\frac{1}{2}}^2) + \beta_{i-1}^j (x_i - x_{i-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j+\frac{1}{2}} (\alpha_{i-1}^j (2x_i - \Delta x/2) + \beta_{i-1}^j) \end{aligned} \quad (1.16)$$

L'intégrale sur chacun des bords vaut donc :

$$\int_{\Gamma_1} k \partial_y \tilde{\Pi} \, dx = \frac{\Delta x}{2} k_i^{j-\frac{1}{2}} \left( \frac{\Delta x}{2} (\alpha_i^{j-1} - \alpha_{i-1}^{j-1}) + 2x_i (\alpha_i^{j-1} + \alpha_{i-1}^{j-1}) + \beta_i^{j-1} + \beta_{i-1}^{j-1} \right) \quad (1.17)$$

$$\int_{\Gamma_3} k \partial_y \tilde{\Pi} \, dx = \frac{\Delta x}{2} k_i^{j+\frac{1}{2}} \left( \frac{\Delta x}{2} (\alpha_i^j - \alpha_{i-1}^j) + 2x_i (\alpha_i^j + \alpha_{i-1}^j) + \beta_i^j + \beta_{i-1}^j \right) \quad (1.18)$$

$$\int_{\Gamma_2} k \partial_x \tilde{\Pi} \, dy = \frac{\Delta y}{2} k_{i+\frac{1}{2}}^j \left( \frac{\Delta y}{2} (\alpha_i^j - \alpha_i^{j-1}) + 2y_j (\alpha_i^j + \alpha_i^{j-1}) + \gamma_i^j + \gamma_i^{j-1} \right) \quad (1.19)$$

$$\int_{\Gamma_4} k \partial_x \tilde{\Pi} \, dy = \frac{\Delta y}{2} k_{i-\frac{1}{2}}^j \left( \frac{\Delta y}{2} (\alpha_{i-1}^j - \alpha_{i-1}^{j-1}) + 2y_j (\alpha_{i-1}^j + \alpha_{i-1}^{j-1}) + \gamma_{i-1}^j + \gamma_{i-1}^{j-1} \right) \quad (1.20)$$

Or le calcul de l'inverse de  $A$  nous fournit les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  en fonction de  $\Pi$ . On peut ainsi les substituer dans les équations (1.17)-(1.20).

Pour faciliter la compréhension des calculs, présentons-les dans des tableaux. Les lignes décrivant seulement  $\alpha, \beta$  ou  $\gamma$  ne sont que des réécritures des lignes de  $A^{-1}$ . Les autres lignes sont des combinaisons des précédentes. La première colonne indique la combinaison effectuée.

Bord $\Gamma_2$	$\Pi_i^{j-1}$	$\Pi_{i+1}^{j-1}$	$\Pi_i^j$	$\Pi_{i+1}^j$	$\Pi_i^{j+1}$	$\Pi_{i+1}^{j+1}$
$\alpha_i^j$			$1/2p$	$-1/2p$	$-1/2p$	$1/2p$
$\alpha_i^{j-1}$	$1/2p$	$-1/2p$	$-1/2p$	$1/2p$		
(a) $\alpha_i^j + \alpha_i^{j-1}$	$1/2p$	$-1/2p$			$-1/2p$	$1/2p$
(b) $\alpha_i^j - \alpha_i^{j-1}$	$1/2p$	$-1/2p$	$1/p$	$-1/p$	$-1/2p$	$1/2p$
$\gamma_i^j$			$-y_{j+1}/p$	$y_{j+1}/p$	$y_j/p$	$-y_j/p$
$\gamma_i^{j-1}$	$-y_j/p$	$y_j/p$	$y_{j-1}/p$	$-y_{j-1}/p$		
(c) $\gamma_i^j + \gamma_i^{j-1}$	$-y_j/p$	$y_j/p$	$-2\Delta y/p$	$2\Delta y/p$	$y_j/p$	$-y_j/p$
$2y_j(a) + (c)$			$-2\Delta y/p$	$2\Delta y/p$		
$\frac{\Delta y}{2}(b) + 2y_j(a) + (c)$	$-\frac{\Delta y}{4p}$	$\frac{\Delta y}{4p}$	$-\frac{3}{2} \frac{\Delta y}{p}$	$\frac{3}{2} \frac{\Delta y}{p}$	$-\frac{\Delta y}{4p}$	$\frac{\Delta y}{4p}$

Ainsi :

$$\int_{\Gamma_2} k \partial_x \tilde{\Pi} \, dy = \frac{\Delta y^2}{8p} k_{i+\frac{1}{2}}^j \left( -\Pi_i^{j-1} + \Pi_{i+1}^{j-1} - 6\Pi_i^j + 6\Pi_{i+1}^j - \Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \right) \quad (1.21)$$

De la même manière (juste en décalant l'indice  $i$  d'un cran) on a :

$$\int_{\Gamma_4} k \partial_x \tilde{\Pi} \, dy = \frac{\Delta y^2}{8p} k_{i-\frac{1}{2}}^j \left( -\Pi_{i-1}^{j-1} + \Pi_i^{j-1} - 6\Pi_{i-1}^j + 6\Pi_i^j - \Pi_{i-1}^{j+1} + \Pi_i^{j+1} \right) \quad (1.22)$$

	Bord $\Gamma_3$	$\Pi_{i-1}^j$	$\Pi_i^j$	$\Pi_{i+1}^j$	$\Pi_{i-1}^{j+1}$	$\Pi_i^{j+1}$	$\Pi_{i+1}^{j+1}$
	$\alpha_i^j$		$1/2p$	$-1/2p$		$-1/2p$	$1/2p$
	$\alpha_{i-1}^j$	$1/2p$	$-1/2p$		$-1/2p$	$1/2p$	
(a)	$\alpha_i^j + \alpha_{i-1}^j$	$1/2p$		$-1/2p$	$-1/2p$		$1/2p$
(b)	$\alpha_i^j - \alpha_{i-1}^j$	$-1/2p$	$1/p$	$-1/2p$	$1/2p$	$-1/p$	$1/2p$
	$\beta_i^j$		$-x_{i+1}/p$	$x_i/p$		$x_{i+1}/p$	$-x_i/p$
	$\beta_{i-1}^j$	$-x_i/p$	$x_{i-1}/p$		$x_i/p$	$-x_{i-1}/p$	
(c)	$\beta_i^j + \beta_{i-1}^j$	$-x_i/p$	$-2\Delta x/p$	$x_i/p$	$x_i/p$	$2\Delta x/p$	$-x_i/p$
	$2x_i(a) + (c)$		$-2\Delta x/p$			$2\Delta x/p$	
	$\frac{\Delta x}{2}(b) + 2x_i(a) + (c)$	$-\frac{\Delta x}{4p}$	$-\frac{3}{2} \frac{\Delta x}{p}$	$-\frac{\Delta x}{4p}$	$\frac{\Delta x}{4p}$	$\frac{3}{2} \frac{\Delta x}{p}$	$\frac{\Delta x}{4p}$

Ainsi :

$$\int_{\Gamma_3} k \partial_y \tilde{\Pi} \, dx = \frac{\Delta x^2}{8p} k_i^{j+\frac{1}{2}} \left( -\Pi_{i-1}^j - 6\Pi_i^j - \Pi_{i+1}^j + \Pi_{i-1}^{j+1} + 6\Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \right) \quad (1.23)$$

Et de la même manière, on a :

$$\int_{\Gamma_1} k \partial_y \tilde{\Pi} \, dx = \frac{\Delta x^2}{8p} k_i^{j-\frac{1}{2}} \left( -\Pi_{i-1}^{j-1} - 6\Pi_i^{j-1} - \Pi_{i+1}^{j-1} + \Pi_{i-1}^j + 6\Pi_i^j + \Pi_{i+1}^j \right) \quad (1.24)$$

Dans le cas particulier où  $k \equiv 1$  et où  $\Delta x = \Delta y := h$  alors l'opérateur de discrétisation prend une forme plus simple. La formulation variationnelle (1.5) devient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \left[ \left( -\Pi_{i-1}^{j-1} - 6\Pi_i^{j-1} - \Pi_{i+1}^{j-1} + \Pi_{i-1}^j + 6\Pi_i^j + \Pi_{i+1}^j \right) \right. \\ & \quad - \left( -\Pi_i^{j-1} + \Pi_{i+1}^{j-1} - 6\Pi_i^j + 6\Pi_{i+1}^j - \Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \right) \\ & \quad - \left( -\Pi_{i-1}^j - 6\Pi_i^j - \Pi_{i+1}^j + \Pi_{i-1}^{j+1} + 6\Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \right) \\ & \quad \left. + \left( -\Pi_{i-1}^{j-1} + \Pi_i^{j-1} - 6\Pi_{i-1}^j + 6\Pi_i^j - \Pi_{i-1}^{j+1} + \Pi_i^{j+1} \right) \right] = h^2 F_i^j \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{4h^2} \left[ -\Pi_{i-1}^{j-1} - 2\Pi_i^{j-1} - \Pi_{i+1}^{j-1} - 2\Pi_{i-1}^j + 12\Pi_i^j \right. \\ & \quad \left. - 2\Pi_{i+1}^j - \Pi_{i-1}^{j+1} - 2\Pi_i^{j+1} - \Pi_{i+1}^{j+1} \right] = F_i^j \quad (1.25) \end{aligned}$$

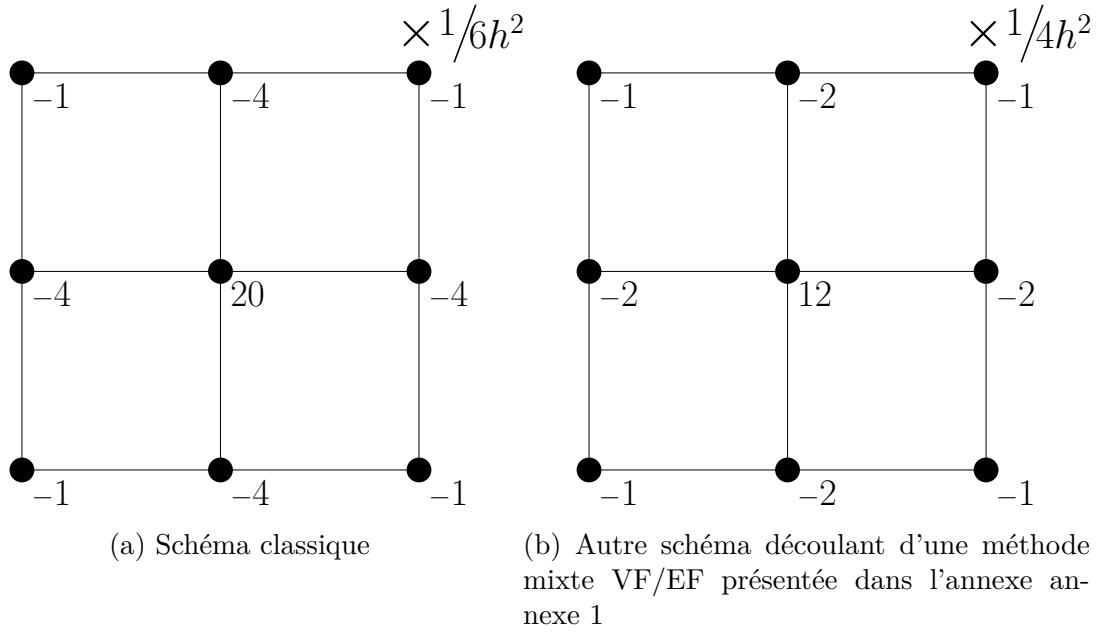


FIGURE 1.2 – Poids associés à chacun des points du stencil à 9 points de schémas discrétisant le laplacien ( $h$  étant le pas d'espace, égal dans chaque direction).

Le schéma présenté ici est donc équivalent à un schéma à 9 points, comme illustré sur la Figure ??, avec des poids différents des poids standards (comme utilisé dans ??).