

## Optimisation de la reconstruction d'image scanner

eqref

**M**AINTEANT que nous avons un modèle EDP qui reproduit bien les aspects constatés en clinique, interrogeons nous sur la manière de reconstruire une image en niveau de gris (image scanner) à partir des résultats numériques *i.e.* de l'évolution des densités  $N(t, x)$ ,  $P(t, x)$  et  $S(t, x)$  (toutes comprises entre 0 et 1). On tentera, dans ce chapitre, d'optimiser les niveaux de gris  $\tau_N, \tau_P$  et  $\tau_S$  de l'interpolation EQREF afin de rapprocher au maximum la visualisation des résultats numériques de la visualisation des scanners médicaux.

### 1.1 Présentation de l'approche

Pour un patient donné, on considère  $n$  instants auxquels on possède des scanners (aux temps  $t_i, i \in \{1, \dots, n\}$ ). Sur ces  $n$  images, on propose d'optimiser les coefficients (niveaux de gris) de l'interpolation  $\tau_N N + \tau_P P + \tau_S S$  où  $N, P$  et  $S$  sont les populations définies dans le modèle présenté précédemment. Sur l'ensemble de ces images, on fait correspondre le niveau de gris moyen des images numériques à celui moyen des scanners, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{A}(Z_1(t_i))} \left( \tau_N \int_{Z_1(t_i)} N(t_i, x) \, dx + \tau_P \int_{Z_1(t_i)} P(t_i, x) \, dx + \tau_S \int_{Z_1(t_i)} S(t_i, x) \, dx \right) \\ = \frac{1}{\mathcal{A}(Z_2(t_i))} \int_{Z_2(t_i)} s(t_i, x, z_0) \, dx \quad i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1.1) \quad \text{eq:optim_grey_int}$$

où :

- $\mathcal{A}(Z)$  est l'aire de la zone  $Z$ .
- $Z_1(t_i)$  est la zone correspondant à la tumeur dans les simulations numériques au temps  $t_i$ . Elle est définie par un seuillage sur  $S$ .

specifier le seuillage ?

- $Z_2(t_i)$  est la zone tumorale sur le scanner réalisé au temps  $t_i$ . Cette zone a été définie par contourage manuel à l'aide du logiciel OsiriX.
- $z_0$  est la coupe que l'on choisie d'étudier dans les scanners. Cette coupe est approximativement la même au cours du temps.
- $s(t_i, x, z_0)$  est la valeur du niveaux de gris du pixel en position  $x$  sur la coupe  $z_0$  du scanner effectué au temps  $t_i$ .

En utilisant la discrétisation, aussi bien sur les simulations numériques que sur les scanners, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{N}(Z_1(t_i))} \left( \tau_N \sum_{x \in Z_1(t_i)} N(t_i, x) + \tau_P \sum_{x \in Z_1(t_i)} P(t_i, x) + \tau_S \sum_{x \in Z_1(t_i)} S(t_i, x) \right) \\ = \frac{1}{\mathcal{N}(Z_2(t_i))} \sum_{x \in Z_2(t_i)} s(t_i, x, z_0) \quad i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1.2) \quad \text{eq:optim_grey_eq_}$$

où  $\mathcal{N}(Z)$  désigne le nombre de pixel contenu dans la zone  $Z$ . On a donc un système linéaire de 3 inconnues à  $n$  équations que l'on peut réécrire :

$$A\tau = B, \quad (1.3) \quad \text{eq:Atau_egal_B}$$

avec  $\tau = {}^t(\tau_N, \tau_P, \tau_S)$ ,  $A$  matrice de taille  $n \times 3$  et  $B$  vecteur colonne de taille  $n$ .

Pour ne pas se limiter au cas  $n = 3$  qui clos le système, on le résoud par la minimisation suivante :

$$\min_{\tau} J(\tau) \quad \text{avec} \quad J(\tau) = \frac{\|A\tau - B\|_{\ell^2}^2}{\|B\|_{\ell^2}^2} + \mathcal{P}(\tau), \quad (1.4) \quad \text{eq:min_optim_grey}$$

où  $\mathcal{P}$  pénalise la fonction coût  $J$  lorsque l'une des composante de  $\tau$  est en dehors de l'intervalle  $[0; 255]$ . Une pénalisation en créneau sera considérée ici

$$\mathcal{P}(\tau) = 1e7 \times (\tau \notin [0; 255]^3). \quad (1.5) \quad \text{eq:penalisation_c}$$

## 1.2 Optimisation sur 3 paramètres

La résolution de l'équation (1.4) fournit le  $\tau$  optimal. Il y a cependant plusieurs manières de calculer cet optimum. On peut faire varier :

- le nombre d'images considérées
- les moments considérés
- l'algorithme d'optimisation lui-même

Dans tous les cas, on ne considèrera pas le premier scanner (numéro 0) car la condition initiale numérique EQREF n'est pas prise de sorte à respecter la répartition des niveaux de gris du scanner. Evitons donc d'inclure dans l'optimisation une erreur de base qui serait incompressible. On regardera des

Présenter  
les algo

EQREF

Scanners choisis pour l'optimisation	Algorithme d'optimisation											
	SLSQP			GC			Neldear-Mead			BFGS		
	$T_N$	$T_P$	$T_S$	$T_N$	$T_P$	$T_S$	$T_N$	$T_P$	$T_S$	$T_N$	$T_P$	$T_S$
[1, 2]	39.08, 145.73, 195.76 Err : 7.0e-07	39.08, 145.73, 195.76 Err <sup>2</sup> : 2.7e-11	39.08, 145.73, 195.76 Err <sup>2</sup> : 2.7e-11	39.08, 145.73, 195.76 Err <sup>2</sup> : 2.7e-11	37.34, 145.08, 200.62 Err : 5.5e-09	37.34, 145.08, 200.62 Err : 5.5e-09	37.34, 145.08, 200.62 Err : 5.5e-09	37.34, 145.08, 200.62 Err : 5.5e-09	37.34, 145.08, 200.62 Err : 5.5e-09	39.08, 145.73, 195.76 Err <sup>2</sup> : 2.6e-10	39.08, 145.73, 195.76 Err <sup>2</sup> : 2.6e-10	39.08, 145.73, 195.76 Err <sup>2</sup> : 2.6e-10
[1, 2, 3]	29.87, 148.26, 192.23 Err : 1.2e-02	29.87, 148.26, 192.23 Err : 1.2e-02	29.87, 148.26, 192.23 Err : 1.2e-02	29.87, 148.26, 192.23 Err : 1.2e-02	54.09, 151.32, 153.71 Err <sup>2</sup> : 1.2e-09	54.09, 151.32, 153.71 Err <sup>2</sup> : 1.2e-09	54.09, 151.32, 153.71 Err : 2.6e-08	54.09, 151.32, 153.71 Err : 2.6e-08	54.09, 151.32, 153.71 Err : 2.6e-08	54.09, 151.32, 153.71 Err <sup>2</sup> : 8.5e-11	54.09, 151.32, 153.71 Err <sup>2</sup> : 8.5e-11	54.09, 151.32, 153.71 Err <sup>2</sup> : 8.5e-11
[1, 2, 3, 4]	28.29, 147.54, 190.53 Err : 2.0e-02	28.29, 147.54, 190.53 Err : 2.0e-02	28.29, 147.54, 190.53 Err : 2.0e-02	28.29, 147.54, 190.53 Err : 2.0e-02	61.29, 153.52, 136.77 Err : 4.0e-03	61.29, 153.52, 136.77 Err : 4.0e-03	61.58, 153.57, 136.3 Err : 4.0e-03	61.58, 153.57, 136.3 Err : 4.0e-03	61.58, 153.57, 136.3 Err : 4.0e-03	61.58, 153.57, 136.3 Err : 4.0e-03	61.58, 153.57, 136.3 Err : 4.0e-03	61.58, 153.57, 136.3 Err : 4.0e-03
[1, 2, 3, 4, 5]	27.06, 146.73, 188.18 Err : 2.7e-02	27.06, 146.73, 188.18 Err : 2.7e-02	27.06, 146.73, 188.18 Err : 2.7e-02	27.06, 146.73, 188.18 Err : 2.7e-02	56.18, 152.31, 146.43 Err : 5.2e-03	56.18, 152.31, 146.43 Err : 5.2e-03	56.35, 152.32, 146.23 Err : 5.2e-03	56.35, 152.32, 146.23 Err : 5.2e-03	56.35, 152.32, 146.23 Err : 5.2e-03	56.35, 152.32, 146.23 Err : 5.2e-03	56.35, 152.32, 146.23 Err : 5.2e-03	56.35, 152.32, 146.23 Err : 5.2e-03
[1, 3]	30.72, 146.69, 192.06 Err : 1.0e-06	30.72, 146.69, 192.06 Err : 1.0e-06	30.72, 146.69, 192.06 Err : 1.0e-06	30.72, 146.69, 192.06 Err : 1.0e-06	30.74, 145.7, 191.96 Err <sup>2</sup> : 5.0e-03	30.74, 145.7, 191.96 Err <sup>2</sup> : 5.0e-03	35.66, 147.67, 183.96 Err : 2.2e-09	35.66, 147.67, 183.96 Err : 2.2e-09	35.66, 147.67, 183.96 Err : 2.2e-09	30.72, 146.69, 192.06 Err <sup>2</sup> : 7.5e-11	30.72, 146.69, 192.06 Err <sup>2</sup> : 7.5e-11	30.72, 146.69, 192.06 Err <sup>2</sup> : 7.5e-11
[1, 5]	19.74, 149.77, 175.09 Err : 5.4e-07	19.74, 149.77, 175.09 Err : 5.4e-07	19.74, 149.77, 175.09 Err : 5.4e-07	19.74, 149.77, 175.09 Err : 5.4e-07	19.74, 149.77, 175.09 Err <sup>2</sup> : 3.6e-11	19.74, 149.77, 175.09 Err <sup>2</sup> : 3.6e-11	41.34, 151.14, 159.03 Err : 2.9e-08	41.34, 151.14, 159.03 Err : 2.9e-08	41.34, 151.14, 159.03 Err : 2.9e-08	19.74, 149.77, 175.09 Err <sup>2</sup> : 4.4e-11	19.74, 149.77, 175.09 Err <sup>2</sup> : 4.4e-11	19.74, 149.77, 175.09 Err <sup>2</sup> : 4.4e-11
[1, 3, 5]	28.36, 145.23, 188.1 Err : 2.5e-02	28.36, 145.23, 188.1 Err : 2.5e-02	28.36, 145.23, 188.1 Err : 2.5e-02	28.36, 145.23, 188.1 Err : 2.5e-02	58.7, 152.23, 146.13 Err <sup>2</sup> : 5.2e-11	58.7, 152.23, 146.13 Err : 2.9e-08	58.7, 152.23, 146.13 Err : 2.9e-08	58.7, 152.23, 146.13 Err : 2.9e-08	58.7, 152.23, 146.13 Err : 2.9e-08	58.7, 152.23, 146.13 Err <sup>2</sup> : 2.4e-11	58.7, 152.23, 146.13 Err <sup>2</sup> : 2.4e-11	58.7, 152.23, 146.13 Err <sup>2</sup> : 2.4e-11
[1, 3, 7]	21.25, 156.88, 151.94 Err : 3.9e-02	21.25, 156.88, 151.94 Err : 3.9e-02	21.25, 156.88, 151.94 Err : 3.9e-02	21.25, 156.88, 151.94 Err : 3.9e-02	71.43, 154.76, 125.23 Err <sup>2</sup> : 1.1e-10	71.43, 154.76, 125.23 Err : 5.4e-08	71.43, 154.76, 125.23 Err : 5.4e-08	71.43, 154.76, 125.23 Err : 5.4e-08	71.43, 154.76, 125.23 Err : 5.4e-08	71.43, 154.76, 125.23 Err <sup>2</sup> : 3.5e-11	71.43, 154.76, 125.23 Err <sup>2</sup> : 3.5e-11	71.43, 154.76, 125.23 Err <sup>2</sup> : 3.5e-11
[2, 3]	26.59, 152.64, 191.17 Err : 1.1e-02	26.59, 152.64, 191.17 Err : 1.1e-02	26.59, 152.64, 191.17 Err : 1.1e-02	26.59, 152.64, 191.17 Err : 1.1e-02	35.77, 163.3, 152.67 Err <sup>2</sup> : 7.4e-11	35.77, 163.3, 152.67 Err : 3.4e-09	42.91, 158.63, 153.07 Err : 3.4e-09	42.91, 158.63, 153.07 Err : 3.4e-09	42.91, 158.63, 153.07 Err : 3.4e-09	35.77, 163.3, 152.67 Err <sup>2</sup> : 3.1e-10	35.77, 163.3, 152.67 Err <sup>2</sup> : 3.1e-10	35.77, 163.3, 152.67 Err <sup>2</sup> : 3.1e-10
[2, 3, 4]	25.3, 150.49, 188.98 Err : 2.4e-02	25.3, 150.49, 188.98 Err : 2.4e-02	25.3, 150.49, 188.98 Err : 2.4e-02	25.3, 150.49, 188.98 Err : 2.4e-02	39.24, 168.0, 135.44 Err : 4.9e-03	39.24, 168.0, 135.44 Err : 4.9e-03	0.0, 193.74, 133.11 Err : 4.8e-03	0.0, 193.74, 133.11 Err : 4.8e-03	0.0, 193.74, 133.11 Err : 4.8e-03	39.45, 168.0, 135.16 Err : 4.9e-03	39.45, 168.0, 135.16 Err : 4.9e-03	39.45, 168.0, 135.16 Err : 4.9e-03
[2, 3, 5]	24.95, 150.0, 186.75 Err : 3.3e-02	24.95, 150.0, 186.75 Err : 3.3e-02	24.95, 150.0, 186.75 Err : 3.3e-02	24.95, 150.0, 186.75 Err : 3.3e-02	35.25, 165.75, 147.57 Err : 1.2e-03	35.25, 165.75, 147.57 Err : 1.2e-03	0.0, 188.15, 147.14 Err : 8.3e-04	0.0, 188.15, 147.14 Err : 8.3e-04	0.0, 188.15, 147.14 Err : 8.3e-04	35.35, 165.69, 147.56 Err : 1.2e-03	35.35, 165.69, 147.56 Err : 1.2e-03	35.35, 165.69, 147.56 Err : 1.2e-03
[2, 3, 4, 5]	24.39, 149.04, 186.18 Err : 3.0e-02	24.39, 149.04, 186.18 Err : 3.0e-02	24.39, 149.04, 186.18 Err : 3.0e-02	24.39, 149.04, 186.18 Err : 3.0e-02	36.07, 165.1, 146.11 Err : 6.3e-03	36.07, 165.1, 146.11 Err : 6.3e-03	255.0, 26.08, 149.25 Err : 4.6e-03	255.0, 26.08, 149.25 Err : 4.6e-03	255.0, 26.08, 149.25 Err : 4.6e-03	35.59, 165.48, 145.97 Err : 6.3e-03	35.59, 165.48, 145.97 Err : 6.3e-03	35.59, 165.48, 145.97 Err : 6.3e-03
[1, 2, 5]	28.84, 146.19, 189.06 Err : 3.2e-02	28.84, 146.19, 189.06 Err : 3.2e-02	28.84, 146.19, 189.06 Err : 3.2e-02	28.84, 146.19, 189.06 Err : 3.2e-02	56.1, 152.07, 148.06 Err <sup>2</sup> : 3.9e-11	56.1, 152.07, 148.06 Err : 4.4e-08	56.1, 152.07, 148.06 Err : 4.4e-08	56.1, 152.07, 148.06 Err : 4.4e-08	56.1, 152.07, 148.06 Err : 4.4e-08	56.1, 152.07, 148.06 Err <sup>2</sup> : 3.5e-11	56.1, 152.07, 148.06 Err <sup>2</sup> : 3.5e-11	56.1, 152.07, 148.06 Err <sup>2</sup> : 3.5e-11
[1, 2, 7]	24.16, 158.41, 147.01 Err : 3.7e-02	24.16, 158.41, 147.01 Err : 3.7e-02	24.16, 158.41, 147.01 Err : 3.7e-02	24.16, 158.41, 147.01 Err : 3.7e-02	62.98, 154.63, 128.79 Err <sup>2</sup> : 4.2e-11	62.98, 154.63, 128.79 Err : 3.8e-08	62.98, 154.63, 128.79 Err : 3.8e-08	62.98, 154.63, 128.79 Err : 3.8e-08	62.98, 154.63, 128.79 Err : 3.8e-08	62.98, 154.63, 128.79 Err <sup>2</sup> : 3.2e-11	62.98, 154.63, 128.79 Err <sup>2</sup> : 3.2e-11	62.98, 154.63, 128.79 Err <sup>2</sup> : 3.2e-11
[1, 2, 3, 5]	28.07, 147.06, 189.07 Err : 2.8e-02	28.07, 147.06, 189.07 Err : 2.8e-02	28.07, 147.06, 189.07 Err : 2.8e-02	28.07, 147.06, 189.07 Err : 2.8e-02	56.73, 152.07, 147.85 Err : 1.2e-03	56.73, 152.07, 147.85 Err : 1.2e-03	66.06, 154.62, 127.92 Err : 5.1e-03	66.06, 154.62, 127.92 Err : 5.1e-03	66.06, 154.62, 127.92 Err : 5.1e-03	56.76, 152.08, 147.82 Err : 1.2e-03	56.76, 152.08, 147.82 Err : 1.2e-03	56.76, 152.08, 147.82 Err : 1.2e-03
[1, 2, 3, 7]	66.03, 154.63, 127.93 Err : 5.1e-03	66.03, 154.63, 127.93 Err : 5.1e-03	66.03, 154.63, 127.93 Err : 5.1e-03	66.03, 154.63, 127.93 Err : 5.1e-03	65.99, 154.63, 127.97 Err : 5.1e-03	65.99, 154.63, 127.97 Err : 5.1e-03	66.06, 154.62, 127.92 Err : 5.1e-03	66.06, 154.62, 127.92 Err : 5.1e-03	66.06, 154.62, 127.92 Err : 5.1e-03	66.07, 154.62, 127.91 Err : 5.1e-03	66.07, 154.62, 127.91 Err : 5.1e-03	66.07, 154.62, 127.91 Err : 5.1e-03
[1, 2, 9]	66.95, 156.11, 117.68 Err : 3.6e-06	66.95, 156.11, 117.68 Err : 3.6e-06	66.95, 156.11, 117.68 Err : 3.6e-06	66.95, 156.11, 117.68 Err : 3.6e-06	66.95, 156.11, 117.68 Err <sup>2</sup> : 3.1e-11	66.95, 156.11, 117.68 Err : 5.7e-08	66.95, 156.11, 117.68 Err : 5.7e-08	66.95, 156.11, 117.68 Err : 5.7e-08	66.95, 156.11, 117.68 Err : 5.7e-08	66.95, 156.11, 117.68 Err <sup>2</sup> : 3.5e-11	66.95, 156.11, 117.68 Err <sup>2</sup> : 3.5e-11	66.95, 156.11, 117.68 Err <sup>2</sup> : 3.5e-11
[1, 7, 11]	15.19, 153.63, 148.95 Err : 1.7e-03	15.19, 153.63, 148.95 Err : 1.7e-03	15.19, 153.63, 148.95 Err : 1.7e-03	15.19, 153.63, 148.95 Err : 1.7e-03	28.18, 154.12, 143.44 Err <sup>2</sup> : 1.4e-10	28.18, 154.12, 143.44 Err : 7.6e-09	28.18, 154.12, 143.44 Err : 7.6e-09	28.18, 154.12, 143.44 Err : 7.6e-09	28.18, 154.12, 143.44 Err : 7.6e-09	28.18, 154.12, 143.44 Err <sup>2</sup> : 3.7e-11	28.18, 154.12, 143.44 Err <sup>2</sup> : 3.7e-11	28.18, 154.12, 143.44 Err <sup>2</sup> : 3.7e-11
[1, 9, 11]	28.31, 159.08, 120.72 Err : 8.7e-03	28.31, 159.08, 120.72 Err : 8.7e-03	28.31, 159.08, 120.72 Err : 8.7e-03	28.31, 159.08, 120.72 Err : 8.7e-03	28.33, 159.08, 120.75 Err : 8.7e-03	28.33, 159.08, 120.75 Err : 8.7e-03	255.0, 150.81, 101.75 Err : 8.5e-03	255.0, 150.81, 101.75 Err : 8.5e-03	255.0, 150.81, 101.75 Err : 8.5e-03	28.31, 159.09, 120.73 Err : 8.7e-03	28.31, 159.09, 120.73 Err : 8.7e-03	28.31, 159.09, 120.73 Err : 8.7e-03
[1, 2, 7, 11]	24.8, 156.45, 147.25 Err : 3.2e-02	24.8, 156.45, 147.25 Err : 3.2e-02	24.8, 156.45, 147.25 Err : 3.2e-02	24.8, 156.45, 147.25 Err : 3.2e-02	60.86, 155.38, 129.69 Err : 3.9e-03	60.86, 155.38, 129.69 Err : 3.9e-03	60.92, 155.38, 129.66 Err : 3.9e-03	60.92, 155.38, 129.66 Err : 3.9e-03	60.92, 155.38, 129.66 Err : 3.9e-03	60.91, 155.38, 129.66 Err : 3.9e-03	60.91, 155.38, 129.66 Err : 3.9e-03	60.91, 155.38, 129.66 Err : 3.9e-03
[1, 2, 9, 11]	64.29, 157.79, 117.69 Err : 7.8e-03	64.29, 157.79, 117.69 Err : 7.8e-03	64.29, 157.79, 117.69 Err : 7.8e-03	64.29, 157.79, 117.69 Err : 7.8e-03	64.21, 157.8, 117.7 Err : 7.8e-03	64.21, 157.8, 117.7 Err : 7.8e-03	64.29, 157.79, 117.7 Err : 7.8e-03	64.29, 157.79, 117.7 Err : 7.8e-03	64.29, 157.79, 117.7 Err : 7.8e-03	64.27, 157.79, 117.7 Err : 7.8e-03	64.27, 157.79, 117.7 Err : 7.8e-03	64.27, 157.79, 117.7 Err : 7.8e-03
[1, 3, 7, 11]	21.61, 154.79, 152.72 Err : 3.4e-02	21.61, 154.79, 152.72 Err : 3.4e-02	21.61, 154.79, 152.72 Err : 3.4e-02	21.61, 154.79, 152.72 Err : 3.4e-02	68.12, 155.64, 126.72 Err : 4.7e-03	68.12, 155.64, 126.72 Err : 4.7e-03	68.24, 155.65, 126.65 Err : 4.7e-03	68.24, 155.65, 126.65 Err : 4.7e-03	68.24, 155.65, 126.65 Err : 4.7e-03	68.24, 155.65, 126.65 Err : 4.7e-03	68.24, 155.65, 126.65 Err : 4.7e-03	68.24, 155.65, 126.65 Err : 4.7e-03
[1, 3, 9, 11]	34.7, 161.68, 121.59 Err : 3.5e-02	34.7, 161.68, 121.59 Err : 3.5e-02	34.7, 161.68, 121.59 Err : 3.5e-02	34.7, 161.68, 121.59 Err : 3.5e-02	73.74, 157.46, 116.9 Err : 7.7e-03	73.74, 157.46, 116.9 Err : 7.7e-03	73.84, 157.45, 116.89 Err : 7.7e-03	73.84, 157.45, 116.89 Err : 7.7e-03	73.84, 157.45, 116.89 Err : 7.7e-03	73.75, 157.46, 116.89 Err : 7.7e-03	73.75, 157.46, 116.89 Err : 7.7e-03	73.75, 157.46, 116.89 Err : 7.7e-03
[3, 9, 11]	70.32, 160.4, 115.39 Err : 1.1e-06	70.32, 160.4, 115.39 Err : 1.1e-06	70.32, 160.4, 115.39 Err : 1.1e-06	70.32, 160.4, 115.39 Err : 1.1e-06	70.32, 160.4, 115.39 Err <sup>2</sup> : 1.9e-11	70.32, 160.4, 115.39 Err : 4.3e-08	70.32, 160.4, 115.39 Err : 4.3e-08	70.32, 160.4, 115.39 Err : 4.3e-08	70.32, 160.4, 115.39 Err : 4.3e-08	70.32, 160.4, 115.39 Err <sup>2</sup> : 3.6e-12	70.32, 160.4, 115.39 Err <sup>2</sup> : 3.6e-12	70.32, 160.4, 115.39 Err <sup>2</sup> : 3.6e-12
[3, 5, 7]	21.44, 144.29, 173.47 Err : 6.1e-02	21.44, 144.29, 173.47 Err : 6.1e-02	21.44, 144.29, 173.47 Err : 6.1e-02	21.44, 144.29, 173.47 Err : 6.1e-02	41.24, 175.3, 126.62 Err : 1.3e-02</							

situations avec seulement 2 images (problème sous-déterminé) ou 3 images (problème fermé) ou plus (problème sur-déterminé).

En ce qui concerne les algorithmes d'optimisations utilisés, nous en choisissons quatre :

- SLSQP (Sequential Least Squares Programming) : Méthodes des moindres carrés
- GC : Gradient Conjugué
- Nelder-Mead : Algorithme basé sur une méthode du Simplex.
- BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, and Shanno) : Méthode quasi newtonienne basé également sur une approximation de la dérivée.

Ref : Piocher ref algo : <http://docs.scipy.org/doc/scipy-0.15.1/reference/generated/scipy.optimize.minimize.html>

Ces algorithmes seront initialisés avec les paramètres  $\tau_N, \tau_P$  et  $\tau_S$  de l'estimation visuelle du chapitre REF SECTION ET/OU PAGE . Lorsqu'il sont nécessaire, les gradients (voire les hessiennes) sont approximés par les algorithmes eux-même. Outre un vecteur de paramètre initial et la fonction coût à optimiser (I.4), aucune information supplémentaire n'est fournie à ces différents algorithmes.

ref section

La Table I.1 synthétise l'ensemble des résultats d'optimisation obtenus sur les différents tests qui ont été réalisés. On remarque que plus le nombre d'image considérées est grand, plus l'erreur à convergence est grande. Ce comportement est attendu et ne pose pas de problème tant que l'erreur reste acceptable (de l'ordre de quelques pourcents). Augmenter le nombre d'images considérées s'avère utile pour rendre les optima moins sensibles aux perturbations éventuelles qu'il y a sur les données (bruit, marge d'erreur de segmentation manuelle, etc ...).

Presenter  
numéro-  
tation des  
scans

On peut de plus remarquer que selon les images choisies et selon les algorithmes choisis les résultats sont assez variables. Les moyennes des optima trouvés selon l'algorithme sont présentés sur la dernière ligne de la Table I.1. Seul l'algorithme SLSQP se démarque des autres qui ont une valeur moyenne de  $\tau_P$  non seulement proche de  $\tau_S$  – ce qui ne facilite pas du tout le contraste du tissu proliférant avec le tissu sain – mais aussi supérieur à  $\tau_S$  alors qu'on s'attendrait plutôt à l'inverse... De plus, des images ont été reconstituées avec des valeurs de  $\tau_S$  aux alentours de 140 et 150. Il apparaît que la couleur du tissu sain n'est pas bonne : il est beaucoup trop foncé.

Pour expliquer l'erreur commise sur  $\tau_S$ , on aurait pu penser à une large variabilité permise sur ce paramètre due à la présence très minoritaire de tissu sain dans la tumeur. Ainsi  $\tau_S$  serait très peu influent dans le calcul de l'erreur (I.4). Cependant après avoir examiné de plus près les valeurs des intégrales de l'équation (I.1), il y a toujours au moins 10% de cellules saines. La plupart du temps, elles sont réparties sur le pourtour de la tumeur, dans la zone de transition sur laquelle il y a un mélange de tissu sain et de tissu

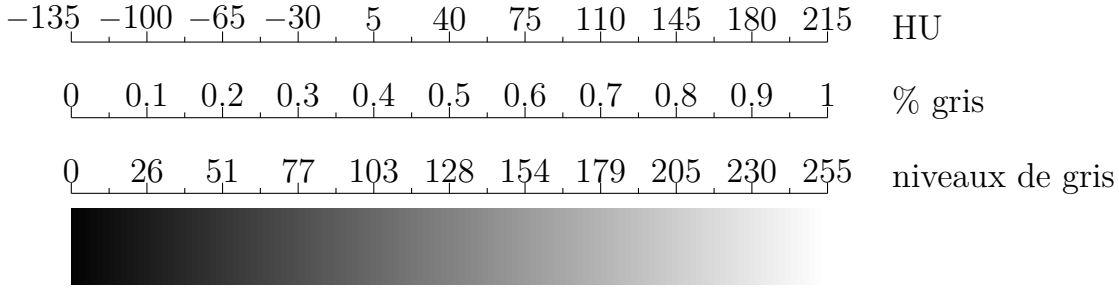


FIGURE 1.1 – Correspondance des niveaux de gris

tumoral. Ceci écarte donc l'hypothèse avancée. On pourrait alors avancer des variations dans les données (bruit dans les images, erreur sur le contourage, variation du temps d'acquisition du scanner qui impacte sur les niveaux de gris, ... ) pour justifier cela, mais les impacts sont difficiles à mesurer. Il n'en reste pas moins que le niveau de gris  $\tau_S$  est mal estimé. Pour palier à cela, nous allons le fixer dans la section suivante.

On note également que la combinaison  $[1, 9, 11]$  ne semble pas pertinente pour calculer les niveaux de gris puisque les optima tendent vers les bornes autorisées  $([0, 255])$ .

### 1.3 Optimisation sur 2 paramètres, $\tau_S$ fixé

Pour essayer de palier aux problèmes rencontrés dans la section précédente, nous allons fixer  $\tau_S$  à une valeur de 197 (sur l'échelle des niveaux de gris de 0 à 255). Cette valeur a été fixée en réalisant un contourage d'une zone de tissu sain dans OsiriX (cf. Figure 1.2). La moyenne de ce contourage est de 134.5 HU. Le niveau de gris étant échelonné linéairement entre -135 et 215, on peut ainsi faire correspondre cette quantité en HU à un niveau de gris compris entre 0 et 255 (cf. Figure 1.1). Ainsi, selon l'échelle considérée ici, 134.5 HU équivaut à un gris de 77% soit un gris de niveau 197.

Ainsi nous résolvons toujours (1.3), mais ici avec

$$A_{i,...,\tau} = \frac{1}{\mathcal{N}(Z_1(t_i))} \left( \tau_N \sum_{x \in Z_1(t_i)} N(t_i, x) + \tau_P \sum_{x \in Z_1(t_i)} P(t_i, x) \right), \quad (1.6)$$

$$B_i = \frac{1}{\mathcal{N}(Z_2(t_i))} \sum_{x \in Z_2(t_i)} s(t_i, x, z_0) - \bar{\tau}_S \sum_{x \in Z_1(t_i)} S(t_i, x) \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

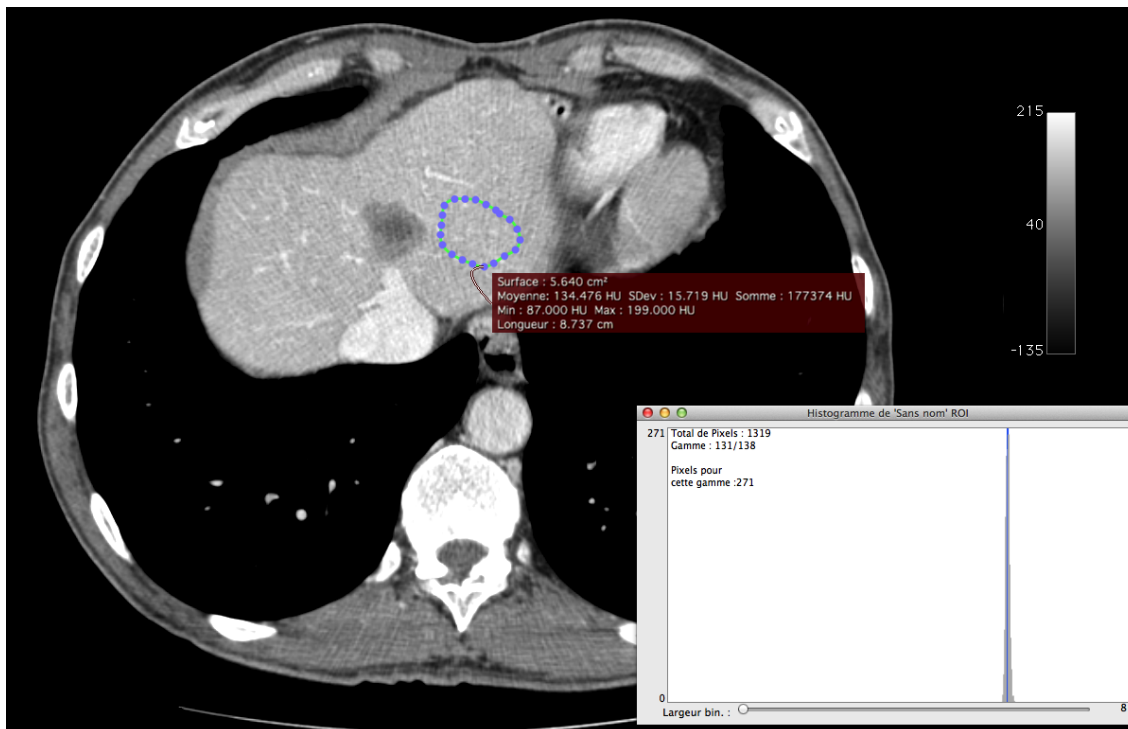
où  $A_{i,...}$  désigne la  $i$ -ème ligne de la matrice  $A$  et où  $\bar{\tau}_S$  est fixé à 197.

Les premiers essais ont été réalisés avec la même fonction coût (1.4) que pour l'optimisation sur 3 paramètres. L'ensemble des résultats d'optimisation de  $\tau_N$  et de  $\tau_P$  avec  $\tau_S$  fixé à 197 et (( avec une parabole tronquée régularisée

Titre figure 1.1 à revoir ...

eq:corresp\_A\_inte

eq:min\_optim\_grey



age\_sain

FIGURE 1.2 – Contourage d'une zone saine réalisée à l'aide du logiciel OsiriX – Moyenne de la valeur des pixels dans ce périmètre : 134.5 HU (avec une échelle HU de -135 à 215).

comme pénalisation ))est fourni dans la Table <sup>tab:optim2gris</sup> 1.2. Ici les niveaux de gris moyen fournis sont conformes aux attentes dans le sens où l'on a plus souvent  $\tau_N < \tau_P < \tau_S$ .

penalisation

a quantifier !

Cependant dans certaines configurations, les algorithmes tendent vers un jeu de paramètres optimal qui s'approche du bord 0 ou du bord 255, voire même qui est négatif (*i.e.* non convergence de l'algorithme d'optimisation).

Ce phénomène pourrait être dû notamment au fait que la pénalisation choisie (1.5) présente une discontinuité. Les algorithmes de descente fonctionnant sur une approximation du gradient peuvent ainsi être perturbé par cette discontinuité. Dans l'annexe <sup>chap:anx</sup> ??? page ??? est détaillé l'enquête menée sur les fonctions de pénalisations. Des pénalisations plus régulières ont été testées (parabole tronquée et parabole tronquée régularisée) mais n'améliorent que très peu le résultat final. Ceci nous amène à penser que ce n'est donc pas la régularité de la pénalisation qui est à mettre en cause mais les données elles-mêmes. Certaines combinaisons d'images fourniraient donc de mauvais résultats.

Même en écartant le fait que certaines configurations tendent vers le bord 0, il reste encore quelques combinaisons qui paraissent très pathologiques. Dans les cas où l'on considère les images [3, 5, 7] et [3, 7, 9] fournissent  $\tau_N \gg \tau_S$  ce qui est aberrant.

Pour une combinaison de 2 ou 3 images, on s'attend à ce que l'optimum soit

Scanners choisis pour l'optimisation	Algorithme d'optimisation			
	SLSQP	GC	Nelder-Mead	BFGS
	$\tau_N, \tau_P$	$\tau_N, \tau_P$	$\tau_N, \tau_P$	$\tau_N, \tau_P$
[1, 2]	38.64, 145.56 Err : 8.0e-07	38.64, 145.56 Err <sup>2</sup> : 2.7e-11	38.64, 145.56 Err : 8.6e-08	38.64, 145.56 Err <sup>2</sup> : 3.4e-11
[1, 2, 3]	33.65, 145.78 Err : 1.3e-02	33.6, 145.8 Err : 1.3e-02	33.63, 145.79 Err : 1.3e-02	33.67, 145.78 Err : 1.3e-02
[1, 2, 3, 4]	27.62, 145.69 Err : 3.2e-02	26.63, 146.05 Err : 3.2e-02	26.53, 146.08 Err : 3.2e-02	26.51, 146.08 Err : 3.2e-02
[1, 2, 3, 4, 5]	25.93, 144.01 Err : 5.1e-02	19.97, 146.34 Err : 4.9e-02	19.82, 146.4 Err : 4.9e-02	19.77, 146.42 Err : 4.9e-02
[1, 3]	27.72, 146.09 Err : 5.5e-07	27.42, 146.12 Err <sup>2</sup> : 5.3e-04	27.72, 146.09 Err : 1.9e-08	27.72, 146.09 Err <sup>2</sup> : 2.3e-11
[1, 3, 5]	27.55, 142.69 Err : 5.0e-02	12.47, 146.8 Err : 4.2e-02	12.35, 146.84 Err : 4.2e-02	12.34, 146.84 Err : 4.2e-02
[1, 2, 5]	28.23, 144.23 Err : 5.6e-02	20.87, 146.33 Err : 5.4e-02	20.71, 146.38 Err : 5.4e-02	20.68, 146.39 Err : 5.4e-02
[1, 2, 3, 5]	27.26, 144.83 Err : 5.0e-02	23.32, 146.22 Err : 5.0e-02	23.17, 146.27 Err : 5.0e-02	23.16, 146.27 Err : 5.0e-02
[1, 2, 3, 7]	25.65, 141.8 Err : 1.3e-01	11.26, 146.64 Err : 1.3e-01	10.86, 146.77 Err : 1.3e-01	10.78, 146.81 Err : 1.3e-01
[1, 2, 9]	28.58, 134.69 Err : 2.9e-01	34.13, 133.49 Err : 2.9e-01	35.21, 133.25 Err : 2.9e-01	35.33, 133.23 Err : 2.9e-01
[1, 3, 9, 11]	29.62, 133.93 Err : 2.5e-01	19.26, 135.52 Err : 2.5e-01	17.99, 135.72 Err : 2.5e-01	17.55, 135.83 Err : 2.5e-01
Moyenne :	29.13, 142.66	24.32, 144.08	24.24, 144.1	24.19, 144.12

TABLE 1.2 – Tableau récapitulatif des optimisations réalisées sur 2 niveaux de gris,  $\tau_S$  fixé à 197, avec un créneau comme pénalisation de l'intervalle.

la solution exacte du système linéaire, et ce indépendamment de l'algorithme choisi. Dans la mesure où ce n'est pas le cas, nous devons nous interroger si les systèmes sont bien conditionnés. S'il ne le sont pas, alors une petite perturbation des données entraîne un très grand écart sur la solution du système. Bien que nous ne résolvons pas directement le système, mais que nous effectuons une minimisation, ces problèmes de sensibilité aux données n'ont aucune raison de ne pas se reporter. La Table 1.4 présente les conditionnements associés aux différentes combinaisons d'image que nous avons examinées. Pour les cas ayant bien convergés, le conditionnement reste raisonnable (excepté peut-être pour le cas [1,2,3]). Maintenant si on examine les cas ayant mal convergés, on constate des conditionnements très élevés (supérieur à  $10^3$ ). Seul le cas [3, 7, 9] est de l'ordre de  $10^2$ . Le conditionnement semble donc expliquer la plupart des configurations non convergentes avec 2 ou 3 images. Pour les configurations où l'on considère un plus grand nombre d'images, si un sous-ensemble d'images fournit une configuration instable, alors il y a de fortes chances que l'image (ou les 2 images) supplémentaires ne parviennent pas à contrebalancer cette instabilité.

Scanners choisis pour l'optimisation	Algorithme d'optimisation			
	SLSQP	GC	Nelder-Mead	BFGS
	$\tau_N, \tau_P$	$\tau_N, \tau_P$	$\tau_N, \tau_P$	$\tau_N, \tau_P$
[2, 3]	25.49, 150.89 Err : 1.9e-02	31.85, 146.9 Err <sup>1</sup> : 1.9e-02	255.0, 6.31 Err : 1.4e-02	226.63, 22.8 Err <sup>2</sup> : 1.6e-02
[2, 3, 4]	23.64, 147.84 Err : 4.4e-02	32.94, 142.01 Err <sup>1</sup> : 4.3e-02	255.0, 2.76 Err : 3.6e-02	220.28, 27.1 Err <sup>2</sup> : 4.0e-02
[2, 3, 5]	22.75, 146.5 Err : 6.9e-02	27.06, 143.79 Err <sup>1</sup> : 6.9e-02	255.0, 0.39 Err : 6.6e-02	223.15, 18.18 Err <sup>2</sup> : 6.7e-02
[2, 3, 4, 5]	21.9, 145.05 Err : 6.5e-02	27.6, 141.48 Err <sup>1</sup> : 6.5e-02	253.36, 0.0 Err : 6.0e-02	222.72, 21.59 Err <sup>2</sup> : 6.3e-02
[2, 5, 7]	15.96, 135.58 Err : 2.0e-01	24.3, 130.33 Err <sup>1</sup> : 2.0e-01	231.68, 0.0 Err : 2.0e-01	219.66, 12.28 Err <sup>2</sup> : 2.0e-01
[1, 7, 11]	0.0, 139.22 Err : 1.1e-01	0.3, 139.4 Err <sup>2</sup> : 1.1e-01	0.0, 139.65 Err : 1.0e-01	0.11, 131.97 Err <sup>2</sup> : 1.2e-01
[1, 9, 11]	31.17, 131.88 Err : 2.7e-01	-0.01, 134.01 Err <sup>2</sup> : 3.3e+02	0.0, 134.11 Err : 2.6e-01	2.14, 140.56 Err <sup>2</sup> : 2.7e-01
[1, 2, 7, 11]	28.41, 138.98 Err : 1.3e-01	6.75, 143.27 Err : 1.2e-01	6.3, 143.36 Err : 1.2e-01	6.13, 143.4 Err : 1.2e-01
[1, 3, 7, 11]	27.94, 137.75 Err : 1.2e-01	0.03, 142.99 Err <sup>2</sup> : 1.1e-01	0.0, 143.06 Err : 1.1e-01	0.09, 145.57 Err <sup>2</sup> : 1.1e-01
[3, 5, 7]	13.92, 132.24 Err : 1.9e-01	14.03, 132.18 Err : 1.9e-01	225.52, 0.0 Err : 1.9e-01	13.91, 132.23 Err : 1.9e-01
[1, 3, 5, 7]	23.41, 137.16 Err : 1.4e-01	-0.04, 144.54 Err <sup>2</sup> : 1.4e+04	0.0, 144.78 Err : 1.2e-01	1.2, 148.93 Err <sup>2</sup> : 1.3e-01
[2, 3, 5, 7]	18.39, 139.46 Err : 1.7e-01	23.89, 136.02 Err <sup>1</sup> : 1.7e-01	240.58, 0.0 Err : 1.7e-01	216.95, 18.63 Err <sup>2</sup> : 1.7e-01
[3, 7, 9]	206.89, 0.0 Err : 3.0e-01	207.26, 0.1 Err <sup>2</sup> : 3.0e-01	217.26, -0.0 Err : 3.0e-01	148.92, 3.07 Err <sup>2</sup> : 4.1e-01
[1, 2, 5, 7]	24.17, 138.77 Err : 1.4e-01	-0.03, 146.6 Err <sup>2</sup> : 9.2e+03	0.0, 146.65 Err : 1.3e-01	0.01, 144.07 Err <sup>2</sup> : 1.3e-01

gris\_bad TABLE 1.3 – Tableau récapitulatif des optimisations réalisées sur 2 niveaux de gris,  $\tau_S$  fixé à 197, avec un créneau comme pénalisation de l'intervalle BAD.

Pour les configuration contenant l'image 11, on peut même avancer que le modèle EDP n'est pas proche de la réalité en terme de volume tumorale. Bien qu'ici les niveaux de gris soit moyennés, il y a sûrement d'autres erreurs... Par exemple [1,2,5,7] avec [2,5,7].. ou bien [1,3,5,7] avec [3,5,7] ou [1,2,5,7] avec [2,5,7].

a reformu-  
ler



Scanners choisis pour l'optimisation	Conditionnement matrice 3x3
[2, 3]	-
[2, 3, 4]	1.5e+07
[2, 3, 5]	2.8e+05
[2, 3, 4, 5]	-
[2, 5, 7]	3.1e+06
[1, 7, 11]	1.8e+03
[1, 9, 11]	1.6e+07
[1, 2, 7, 11]	-
[1, 3, 7, 11]	-
[3, 5, 7]	4.7e+06
[1, 3, 5, 7]	-
[2, 3, 5, 7]	-
[3, 7, 9]	4.7e+02
[1, 2, 5, 7]	-

[1, 2]	-
[1, 2, 3]	6.7e+02
[1, 2, 3, 4]	-
[1, 2, 3, 4, 5]	-
[1, 3]	-
[1, 3, 5]	1.5e+02
[1, 2, 5]	6.9e+01
[1, 2, 3, 5]	-
[1, 2, 3, 7]	-
[1, 2, 9]	2.2e+01
[1, 3, 9, 11]	-

Scanners choisis pour l'optimisation	Conditionnement matrice 2x2
[2, 3]	1.2e+05
[2, 3, 4]	-
[2, 3, 5]	-
[2, 3, 4, 5]	-
[2, 5, 7]	-
[1, 7, 11]	-
[1, 9, 11]	-
[1, 2, 7, 11]	-
[1, 3, 7, 11]	-
[3, 5, 7]	-
[1, 3, 5, 7]	-
[2, 3, 5, 7]	-
[3, 7, 9]	-
[1, 2, 5, 7]	-

[1, 2]	1.6e+01
[1, 2, 3]	-
[1, 2, 3, 4]	-
[1, 2, 3, 4, 5]	-
[1, 3]	1.8e+01
[1, 3, 5]	-
[1, 2, 5]	-
[1, 2, 3, 5]	-
[1, 2, 3, 7]	-
[1, 2, 9]	-
[1, 3, 9, 11]	-

TABLE 1.4 – Conditionnement BAD.