1

Schéma mixte volumes finis/éléments finis pour résoudre l'équation de Poisson

On propose ici une méthode mixte volumes finis/éléments finis pour résoudre l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k\nabla\Pi(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ \Pi(\mathbf{x}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $F(\mathbf{x})$ est une fonction source connue. Pour des raisons pratiques, dans l'ensemble de cette annexe nous noterons $\Pi_i^j := \Pi(x_i, y_j)$ (pas de confusion possible avec un exposant traduisant un indice temporel, ici il n'y a pas de variations temporelles). Les ordonnées seront de la même manière notées en exposant pour toutes les quantités attachées à une maille $\mathcal{M}_i^j$.

1.1 Description de la méthode

Plaçons nous dans un volume de contrôle V_c, maille du maillage dual. La formulation volume fini donne alors :

$$\int_{V_c} -\nabla \cdot (k\nabla\Pi(x,y)) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{V_c} F(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y. \tag{1.2}$$

Notons $\Gamma = \bigcup_{i=1,2,3,4} \Gamma_i$ le bord du volume de contrôle V_c, comme montré sur la Figure 1.1. La formule de Stockes nous permet alors d'écrire :

$$\int_{\Gamma_1} k\partial_y\Pi \,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_2} k\partial_x\Pi \,\mathrm{d}y - \int_{\Gamma_3} k\partial_y\Pi \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_4} k\partial_x\Pi \,\mathrm{d}y = \int_{V_c} F \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y. \tag{1.3}$$

Le point (x_i, y_j) étant le centre du volume de contrôle, le membre de droite est approximer de la manière suivante :

$$\int_{V_c} F \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \Delta x \Delta y F_i^j \quad \text{dans chaque volume de contrôle } V_c. \tag{1.4}$$

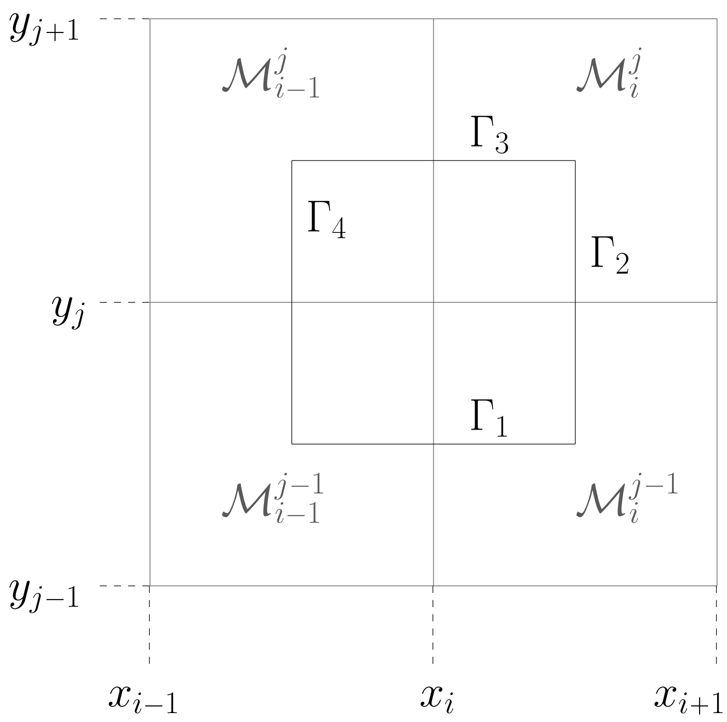

FIGURE 1.1 – Méthode mixte éléments finis/volumes finis.

Pour ce qui est du membre de gauche, dans chaque maille $\mathcal{M}_i^j$ on approxime Π par $\tilde{\Pi}$ de manière $\mathbb{Q}1$ *i.e.* :

$$\tilde{\Pi}_i^j(x,y) = \delta_i^j + \gamma_i^j x + \beta_i^j y + 2\alpha_i^j xy \qquad \forall (x,y) \in \mathcal{M}_i^j. \tag{1.5}$$

1.2 Calcul des coefficients du polynôme $\mathbb{Q}1$: inversion de matrice

L'approximation polynomiale $\tilde{\Pi}$ est telle qu'elle soit exacte en chacun des sommets des mailles. Les coefficients α, β, γ et δ sont ainsi solution du système suivant :

$$A_i^j \begin{pmatrix} \delta_i^j \\ \gamma_i^j \\ \beta_i^j \\ \alpha_i^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_i^j \\ \Pi_{i+1}^j \\ \Pi_i^{j+1} \\ \Pi_{i+1}^{j+1} \end{pmatrix} \qquad \text{dans chacune des mailles } \mathcal{M}_i^j \tag{1.6}$$

où

$$A_i^j = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_j & 2x_i y_j \\ 1 & x_{i+1} & y_j & 2x_{i+1} y_j \\ 1 & x_i & y_{j+1} & 2x_i y_{j+1} \\ 1 & x_{i+1} & y_{j+1} & 2x_{i+1} y_{j+1} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Il s'agit donc maintenant d'inverser la matrice A. Appliquons l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan pour en trouver l'inverse :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & x_i & y_j & 2x_iy_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_{i+1} & y_j & 2x_{i+1}y_j & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_i & y_{j+1} & 2x_iy_{j+1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x_{i+1} & y_{j+1} & 2x_{i+1}y_{j+1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & x_i & y_j & 2x_iy_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x & 0 & 2y_j\Delta x & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y & 2x_i\Delta y & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Delta x\Delta y & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 - L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & x_i & y_j & 2x_iy_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2y_j & -1/\Delta x & 1/\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x_i & -1/\Delta y & 0 & 1/\Delta y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{p} & \frac{-1}{p} & \frac{-1}{p} & \frac{1}{p} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2/\Delta x \\ L_3 \leftarrow L_3/\Delta y \\ L_4 \leftarrow L_4/p \end{array}$$

avec $p = \Delta x \Delta y$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{x_i}{\Delta x} + \frac{y_j}{\Delta y} + \frac{x_iy_j}{p} & \frac{-x_i}{\Delta x} - \frac{x_iy_j}{p} & \frac{-y_j}{\Delta y} - \frac{x_iy_j}{p} & \frac{x_iy_j}{p} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\Delta x} - \frac{y_j}{p} & \frac{1}{\Delta x} + \frac{y_j}{p} & \frac{y_j}{p} & \frac{-y_j}{p} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\Delta y} - \frac{x_i}{p} & \frac{x_i}{p} & \frac{1}{\Delta y} + \frac{x_i}{p} & -\frac{x_i}{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2p} & \frac{-1}{2p} & \frac{-1}{2p} & \frac{1}{2p} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - x_iL_2 \\ \quad -y_jL_3 + x_iy_jL_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - y_jL_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - x_iL_4 \\ L_4 \leftarrow L_4/2 \end{array}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta y} + \frac{x_i}{p} &= \frac{1}{p}(\Delta x + x_i) = \frac{x_{i+1}}{p}, \\ \frac{1}{\Delta x} + \frac{y_j}{p} &= \frac{1}{p}(\Delta y + y_j) = \frac{y_{j+1}}{p}, \\ 1 + \frac{x_i}{\Delta x} + \frac{y_j}{\Delta y} + \frac{x_iy_j}{p} &= \frac{1}{p}(\Delta x\Delta y + \Delta y x_i + \Delta x y_j + x_iy_j) = \frac{1}{p}x_{i+1}y_{j+1}, \end{aligned}$$

on a ainsi :

$$A^{-1} = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} x_{i+1}y_{j+1} & -x_iy_{j+1} & -x_{i+1}y_j & x_iy_j \\ -y_{j+1} & y_{j+1} & y_j & -y_j \\ -x_{i+1} & x_i & x_{i+1} & -x_i \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

1.3 Ecriture de la méthode comme un schéma à 9 points.

Chacune des intégrales de bord du problème variationnel 1.5 est approximée avec :

$$\int \partial_x \tilde{\Pi}_i^j \, \mathrm{d}y = \int (2\alpha_i^j y + \gamma_i^j) \, \mathrm{d}y = [\alpha_i^j y^2 + \gamma_i^j y] = \alpha_i^j [y^2] + \gamma_i^j [y].$$

$$\int \partial_y \tilde{\Pi}_i^j \, \mathrm{d}x = \int (2\alpha_i^j x + \beta_i^j) \, \mathrm{d}x = [\alpha_i^j x^2 + \beta_i^j x] = \alpha_i^j [x^2] + \beta_i^j [x].$$

On découpe alors chacun des bords Γ_i sur les deux mailles qu'il traverse :

$$\int_{\Gamma_2 \cap \mathcal{M}_i^j} k \partial_x \tilde{\Pi} \, \mathrm{d}y = k_{i+\frac{1}{2}}^j \big(\alpha_i^j (y_{j+\frac{1}{2}}^2 - y_j^2) + \gamma_i^j (y_{j+\frac{1}{2}} - y_j)\big)$$
$$= \frac{\Delta y}{2} k_{i+\frac{1}{2}}^j \big(\alpha_i^j (2y_j + \Delta y/2) + \gamma_i^j\big) \tag{1.9}$$

$$\int_{\Gamma_2 \cap \mathcal{M}_i^{j-1}} k \partial_x \tilde{\Pi} \, \mathrm{d}y = k_{i+\frac{1}{2}}^j \big(\alpha_i^{j-1} (y_j^2 - y_{j-\frac{1}{2}}^2) + \gamma_i^{j-1} (y_j - y_{j-\frac{1}{2}})\big)$$
$$= \frac{\Delta y}{2} k_{i+\frac{1}{2}}^j \big(\alpha_i^{j-1} (2y_j - \Delta y/2) + \gamma_i^{j-1}\big) \tag{1.10}$$

$$\int_{\Gamma_4 \cap \mathcal{M}_{i-1}^j} k \partial_x \tilde{\Pi} \, \mathrm{d}y = k_{i-\frac{1}{2}}^j \big(\alpha_{i-1}^j (y_{j+\frac{1}{2}}^2 - y_j^2) + \gamma_{i-1}^j (y_{j+\frac{1}{2}} - y_j)\big)$$
$$= \frac{\Delta y}{2} k_{i-\frac{1}{2}}^j \big(\alpha_{i-1}^j (2y_j + \Delta y/2) + \gamma_{i-1}^j\big) \tag{1.11}$$

$$\int_{\Gamma_4 \cap \mathcal{M}_{i-1}^{j-1}} k \partial_x \tilde{\Pi} \, \mathrm{d}y = k_{i-\frac{1}{2}}^j \big(\alpha_{i-1}^{j-1} (y_j^2 - y_{j-\frac{1}{2}}^2) + \gamma_{i-1}^{j-1} (y_j - y_{j-\frac{1}{2}})\big)$$
$$= \frac{\Delta y}{2} k_{i-\frac{1}{2}}^j \big(\alpha_{i-1}^{j-1} (2y_j - \Delta y/2) + \gamma_{i-1}^{j-1}\big) \tag{1.12}$$

$$\int_{\Gamma_1 \cap \mathcal{M}_i^{j-1}} k \partial_y \tilde{\Pi} \, \mathrm{d}x = k_i^{j-\frac{1}{2}} \big(\alpha_i^{j-1} (x_{i+\frac{1}{2}}^2 - x_i^2) + \beta_i^{j-1} (x_{i+\frac{1}{2}} - x_i)\big)$$
$$= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j-\frac{1}{2}} \big(\alpha_i^{j-1} (2x_i + \Delta x/2) + \beta_i^{j-1}\big) \tag{1.13}$$

$$\int_{\Gamma_1 \cap \mathcal{M}_{i-1}^{j-1}} k \partial_y \tilde{\Pi} \, \mathrm{d}x = k_i^{j-\frac{1}{2}} \big(\alpha_{i-1}^{j-1} (x_i^2 - x_{i-\frac{1}{2}}^2) + \beta_{i-1}^{j-1} (x_i - x_{i-\frac{1}{2}})\big)$$
$$= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j-\frac{1}{2}} \big(\alpha_{i-1}^{j-1} (2x_i - \Delta x/2) + \beta_{i-1}^{j-1}\big) \tag{1.14}$$

$$\int_{\Gamma_3 \cap \mathcal{M}_i^j} k \partial_y \tilde{\Pi} \, \mathrm{d}x = k_i^{j+\frac{1}{2}} \big(\alpha_i^j (x_{i+\frac{1}{2}}^2 - x_i^2) + \beta_i^j (x_{i+\frac{1}{2}} - x_i)\big)$$

$$= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j+\frac{1}{2}} \big(\alpha_i^j (2x_i + \Delta x/2) + \beta_i^j\big) \tag{1.15}$$

$$\int\limits_{\Gamma_3 \cap \mathcal{M}_{i-1}^j} k\partial_y \tilde{\Pi} \,\mathrm{d}x = k_i^{j+\frac{1}{2}} \big(\alpha_{i-1}^j (x_i^2 - x_{i-\frac{1}{2}}^2) + \beta_{i-1}^j (x_i - x_{i-\frac{1}{2}})\big)$$

$$= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j+\frac{1}{2}} \big(\alpha_{i-1}^j (2x_i - \Delta x/2) + \beta_{i-1}^j\big) \tag{1.16}$$

L'intégrale sur chacun des bords vaut donc :

$$\int_{\Gamma_1} k\partial_y \tilde{\Pi} \,\mathrm{d}x = \frac{\Delta x}{2} k_i^{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta x}{2} (\alpha_i^{j-1} - \alpha_{i-1}^{j-1}) + 2x_i (\alpha_i^{j-1} + \alpha_{i-1}^{j-1}) + \beta_i^{j-1} + \beta_{i-1}^{j-1} \right) \tag{1.17}$$

$$\int_{\Gamma_3} k\partial_y \tilde{\Pi} \,\mathrm{d}x = \frac{\Delta x}{2} k_i^{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta x}{2} (\alpha_i^j - \alpha_{i-1}^j) + 2x_i (\alpha_i^j + \alpha_{i-1}^j) + \beta_i^j + \beta_{i-1}^j \right) \tag{1.18}$$

$$\int_{\Gamma_2} k\partial_x \tilde{\Pi} \,\mathrm{d}y = \frac{\Delta y}{2} k_{i+\frac{1}{2}}^j \left(\frac{\Delta y}{2} (\alpha_i^j - \alpha_i^{j-1}) + 2y_j (\alpha_i^j + \alpha_i^{j-1}) + \gamma_i^j + \gamma_i^{j-1} \right) \tag{1.19}$$

$$\int_{\Gamma_4} k\partial_x \tilde{\Pi} \,\mathrm{d}y = \frac{\Delta y}{2} k_{i-\frac{1}{2}}^j \left(\frac{\Delta y}{2} (\alpha_{i-1}^j - \alpha_{i-1}^{j-1}) + 2y_j (\alpha_{i-1}^j + \alpha_{i-1}^{j-1}) + \gamma_{i-1}^j + \gamma_{i-1}^{j-1} \right) \tag{1.20}$$

Or le calcul de l'inverse de A nous fournit les coefficients α, β, γ et δ en fonction de Π. On peut ainsi les substituer dans les équations (1.17)-(1.20).

Pour faciliter la compréhension des calculs, présentons-les dans des tableaux. Les lignes décrivant seulement α, β ou γ ne sont que des réécritures des lignes de A^{-1}. Les autres lignes sont des combinaisons des précédentes. La première colonne indique la combinaison effectuée.

Bord Γ_2	Π_i^{j-1}	Π_{i+1}^{j-1}	Π_i^j	Π_{i+1}^j	Π_i^{j+1}	Π_{i+1}^{j+1}
α_i^j			$1/2p$	$-1/2p$	$-1/2p$	$1/2p$
α_i^{j-1}	$1/2p$	$-1/2p$	$-1/2p$	$1/2p$		
(a) $\alpha_i^j+\alpha_i^{j-1}$	$1/2p$	$-1/2p$			$-1/2p$	$1/2p$
(b) $\alpha_i^j-\alpha_i^{j-1}$	$1/2p$	$-1/2p$	$1/p$	$-1/p$	$-1/2p$	$1/2p$
γ_i^j			$-y_{j+1}/p$	y_{j+1}/p	y_j/p	$-y_j/p$
γ_i^{j-1}	$-y_j/p$	y_j/p	y_{j-1}/p	$-y_{j-1}/p$		
(c) $\gamma_i^j+\gamma_i^{j-1}$	$-y_j/p$	y_j/p	$-2\Delta y/p$	$2\Delta y/p$	y_j/p	$-y_j/p$
$2y_j(a)+(c)$			$-2\Delta y/p$	$2\Delta y/p$		
$\frac{\Delta y}{2}(b)+2y_j(a)+(c)$	$-\frac{\Delta y}{4p}$	$\frac{\Delta y}{4p}$	$-\frac{3}{2}\frac{\Delta y}{p}$	$\frac{3}{2}\frac{\Delta y}{p}$	$-\frac{\Delta y}{4p}$	$\frac{\Delta y}{4p}$

Ainsi :

$$\int_{\Gamma_2} k\partial_x \tilde{\Pi}\ \mathrm{d}y = \frac{\Delta y^2}{8p} k^j_{i+\frac{1}{2}} \Big(-\Pi_i^{j-1} + \Pi_{i+1}^{j-1} - 6\Pi_i^j + 6\Pi_{i+1}^j - \Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \Big) \tag{1.21}$$

De la même manière (juste en décalant l'indice i d'un cran) on a :

$$\int_{\Gamma_4} k\partial_x \tilde{\Pi}\ \mathrm{d}y = \frac{\Delta y^2}{8p} k^j_{i-\frac{1}{2}} \Big(-\Pi_{i-1}^{j-1} + \Pi_{i}^{j-1} - 6\Pi_{i-1}^j + 6\Pi_{i}^j - \Pi_{i-1}^{j+1} + \Pi_{i}^{j+1} \Big) \tag{1.22}$$

	Bord Γ_3	Π^j_{i-1}	Π^j_i	Π^j_{i+1}	Π^{j+1}_{i-1}	Π^{j+1}_i	Π^{j+1}_{i+1}
	α_i^j		$1/2p$	$-1/2p$		$-1/2p$	$1/2p$
	α_{i-1}^j	$1/2p$	$-1/2p$		$-1/2p$	$1/2p$	
(a)	$\alpha_i^j + \alpha_{i-1}^j$	$1/2p$		$-1/2p$	$-1/2p$		$1/2p$
(b)	$\alpha_i^j - \alpha_{i-1}^j$	$-1/2p$	$1/p$	$-1/2p$	$1/2p$	$-1/p$	$1/2p$
	β_i^j		$-x_{i+1}/p$	x_i/p		x_{i+1}/p	$-x_i/p$
	β_{i-1}^j	$-x_i/p$	x_{i-1}/p		x_i/p	$-x_{i-1}/p$	
(c)	$\beta_i^j + \beta_i^{j-1}$	$-x_i/p$	$-2\Delta x/p$	x_i/p	x_i/p	$2\Delta x/p$	$-x_i/p$
	$2x_i(a)+(c)$		$-2\Delta x/p$			$2\Delta x/p$	
	$\frac{\Delta x}{2}(b)+2x_i(a)+(c)$	$-\frac{\Delta x}{4p}$	$-\frac{3}{2}\frac{\Delta x}{p}$	$-\frac{\Delta x}{4p}$	$\frac{\Delta x}{4p}$	$\frac{3}{2}\frac{\Delta x}{p}$	$\frac{\Delta x}{4p}$

Ainsi :

$$\int_{\Gamma_3} k\partial_y \tilde{\Pi}\ \mathrm{d}x = \frac{\Delta x^2}{8p} k_i^{j+\frac{1}{2}} \Big(-\Pi_{i-1}^{j} - 6\Pi_{i}^{j} - \Pi_{i+1}^j + \Pi_{i-1}^{j+1} + 6\Pi_{i}^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \Big) \tag{1.23}$$

Et de la même manière, on a :

$$\int_{\Gamma_1} k\partial_y \tilde{\Pi}\ \mathrm{d}x = \frac{\Delta x^2}{8p} k_i^{j-\frac{1}{2}} \Big(-\Pi_{i-1}^{j-1} - 6\Pi_{i}^{j-1} - \Pi_{i+1}^{j-1} + \Pi_{i-1}^{j} + 6\Pi_{i}^{j} + \Pi_{i+1}^{j} \Big) \tag{1.24}$$

Dans le cas particulier où $k \equiv 1$ et où $\Delta x = \Delta y := h$ alors l'opérateur de discrétisation prend une forme plus simple. La formulation variationnel (1.5) devient alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\Big[\Big(-\Pi_{i-1}^{j-1} - 6\Pi_i^{j-1} - \Pi_{i+1}^{j-1} + \Pi_{i-1}^j + 6\Pi_i^j + \Pi_{i+1}^j \Big) \\
&\quad - \Big(-\Pi_i^{j-1} + \Pi_{i+1}^{j-1} - 6\Pi_i^j + 6\Pi_{i+1}^j - \Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \Big) \\
&\quad - \Big(-\Pi_{i-1}^j - 6\Pi_i^j - \Pi_{i+1}^j + \Pi_{i-1}^{j+1} + 6\Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \Big) \\
&\quad + \Big(-\Pi_{i-1}^{j-1} + \Pi_i^{j-1} - 6\Pi_{i-1}^j + 6\Pi_i^j - \Pi_{i-1}^{j+1} + \Pi_i^{j+1} \Big) \Big] = h^2 F_i^j \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{4h^2}\Big[-\Pi_{i-1}^{j-1} - 2\Pi_i^{j-1} - \Pi_{i+1}^{j-1} - 2\Pi_{i-1}^j + 12\Pi_i^j \\
&\qquad - 2\Pi_{i+1}^j - \Pi_{i-1}^{j+1} - 2\Pi_i^{j+1} - \Pi_{i+1}^{j+1} \Big] = F_i^j
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Le schéma présenté ici est donc équivalent à un schéma à 9 points, comme illustré sur la Figure **??**.