

Schéma mixte volumes finis/éléments finis pour résoudre l'équation de Poisson

ON propose ici une méthode mixte volumes finis/éléments finis pour résoudre l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k \nabla \Pi(\mathbf{x})) = F(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ \Pi(\mathbf{x}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $F(\mathbf{x})$ est une fonction source connue. Pour des raisons pratiques, dans l'ensemble de cette annexe nous noterons $\Pi_i^j := \Pi(x_i, y_j)$ (pas de confusion possible avec un exposant traduisant un indice temporel, ici il n'y a pas de variations temporelles). Les ordonnées seront de la même manière notées en exposant pour toutes les quantités attachées à une maille \mathcal{M}_i^j .

1.1 Description de la méthode

Plaçons nous dans un volume de contrôle V_c , maille du maillage dual. La formulation volume fini donne alors :

$$\int_{V_c} -\nabla \cdot (k \nabla \Pi(x, y)) \, dx \, dy = \int_{V_c} F(x, y) \, dx \, dy. \quad (1.2)$$

Notons $\Gamma = \bigcup_{i=1,2,3,4} \Gamma_i$ le bord du volume de contrôle V_c , comme montré sur la Figure 1.1. La formule de Stokes nous permet alors d'écrire :

$$\int_{\Gamma_1} k \partial_y \Pi \, dx - \int_{\Gamma_2} k \partial_x \Pi \, dy - \int_{\Gamma_3} k \partial_y \Pi \, dx + \int_{\Gamma_4} k \partial_x \Pi \, dy = \int_{V_c} F \, dx \, dy. \quad (1.3)$$

Le point (x_i, y_j) étant le centre du volume de contrôle, le membre de droite est approximé de la manière suivante :

$$\int_{V_c} F \, dx \, dy = \Delta x \Delta y F_i^j \quad \text{dans chaque volume de contrôle } V_c. \quad (1.4)$$

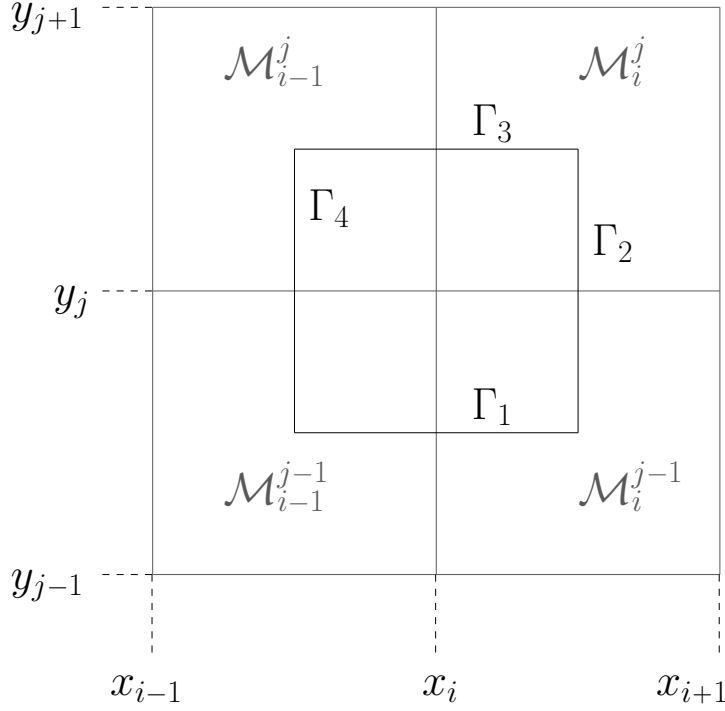


FIGURE 1.1 – Méthode mixte éléments finis/volumes finis.

Pour ce qui est du membre de gauche, dans chaque maille \mathcal{M}_i^j on approxime Π par $\tilde{\Pi}$ de manière Q1 *i.e.* :

$$\tilde{\Pi}_i^j(x, y) = \delta_i^j + \gamma_i^j x + \beta_i^j y + 2\alpha_i^j xy \quad \forall (x, y) \in \mathcal{M}_i^j. \quad (1.5)$$

1.2 Calcul des coefficients du polynôme Q1 : inversion de matrice

L'approximation polynomiale $\tilde{\Pi}$ est telle qu'elle soit exacte en chacun des sommets des mailles. Les coefficients α, β, γ et δ sont ainsi solution du système suivant :

$$A_i^j \begin{pmatrix} \delta_i^j \\ \gamma_i^j \\ \beta_i^j \\ \alpha_i^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_i^j \\ \Pi_{i+1}^j \\ \Pi_i^{j+1} \\ \Pi_{i+1}^{j+1} \end{pmatrix} \quad \text{dans chacune des mailles } \mathcal{M}_i^j \quad (1.6)$$

où

$$A_i^j = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_j & 2x_i y_j \\ 1 & x_{i+1} & y_j & 2x_{i+1} y_j \\ 1 & x_i & y_{j+1} & 2x_i y_{j+1} \\ 1 & x_{i+1} & y_{j+1} & 2x_{i+1} y_{j+1} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Il s'agit donc maintenant d'inverser la matrice A . Appliquons l'algorithme d'élimination de Gauss-Jordan pour en trouver l'inverse :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & x_i & y_j & 2x_i y_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_{i+1} & y_j & 2x_{i+1} y_j & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_i & y_{j+1} & 2x_i y_{j+1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x_{i+1} & y_{j+1} & 2x_{i+1} y_{j+1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & x_i & y_j & 2x_i y_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta x & 0 & 2y_j \Delta x & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y & 2x_i \Delta y & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Delta x \Delta y & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 - L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & x_i & y_j & 2x_i y_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2y_j & -1/\Delta x & 1/\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x_i & -1/\Delta y & 0 & 1/\Delta y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{p} & \frac{-1}{p} & \frac{-1}{p} & \frac{1}{p} \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2/\Delta x \\ L_3 \leftarrow L_3/\Delta y \\ L_4 \leftarrow L_4/p \end{array}$$

avec $p = \Delta x \Delta y$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{x_i}{\Delta x} + \frac{y_j}{\Delta y} + \frac{x_i y_j}{p} & \frac{-x_i}{\Delta x} - \frac{x_i y_j}{p} & \frac{-y_j}{\Delta y} - \frac{x_i y_j}{p} & \frac{x_i y_j}{p} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\Delta x} - \frac{y_j}{p} & \frac{1}{\Delta x} + \frac{y_j}{p} & \frac{y_j}{p} & \frac{-y_j}{p} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\Delta y} - \frac{x_i}{p} & \frac{x_i}{p} & \frac{1}{\Delta y} + \frac{x_i}{p} & \frac{-x_i}{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2p} & \frac{-1}{2p} & \frac{-1}{2p} & \frac{1}{2p} \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - x_i L_2 \\ \quad - y_j L_3 + x_i y_j L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - y_j L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - x_i L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4/2 \end{array}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta y} + \frac{x_i}{p} &= \frac{1}{p}(\Delta x + x_i) = \frac{x_{i+1}}{p}, \\ \frac{1}{\Delta x} + \frac{y_j}{p} &= \frac{1}{p}(\Delta y + y_j) = \frac{y_{j+1}}{p}, \\ 1 + \frac{x_i}{\Delta x} + \frac{y_j}{\Delta y} + \frac{x_i y_j}{p} &= \frac{1}{p}(\Delta x \Delta y + \Delta y x_i + \Delta x y_j + x_i y_j) = \frac{1}{p} x_{i+1} y_{j+1}, \end{aligned}$$

on a ainsi :

$$A^{-1} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} x_{i+1} y_{j+1} & -x_i y_{j+1} & -x_{i+1} y_j & x_i y_j \\ -y_{j+1} & y_{j+1} & y_j & -y_j \\ -x_{i+1} & x_i & x_{i+1} & -x_i \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

1.3 Ecriture de la méthode comme un schéma à 9 points.

Chacune des intégrales de bord du problème variationnel (1.5) est approximée avec :

$$\begin{aligned}\int \partial_x \tilde{\Pi}_i^j dy &= \int (2\alpha_i^j y + \gamma_i^j) dy = [\alpha_i^j y^2 + \gamma_i^j y] = \alpha_i^j [y^2] + \gamma_i^j [y]. \\ \int \partial_y \tilde{\Pi}_i^j dx &= \int (2\alpha_i^j x + \beta_i^j) dx = [\alpha_i^j x^2 + \beta_i^j x] = \alpha_i^j [x^2] + \beta_i^j [x].\end{aligned}$$

On découpe alors chacun des bords Γ_i sur les deux mailles qu'il traverse :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2 \cap \mathcal{M}_i^j} k \partial_x \tilde{\Pi} dy &= k_{i+\frac{1}{2}}^j (\alpha_i^j (y_{j+\frac{1}{2}}^2 - y_j^2) + \gamma_i^j (y_{j+\frac{1}{2}} - y_j)) \\ &= \frac{\Delta y}{2} k_{i+\frac{1}{2}}^j (\alpha_i^j (2y_j + \Delta y/2) + \gamma_i^j)\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2 \cap \mathcal{M}_i^{j-1}} k \partial_x \tilde{\Pi} dy &= k_{i+\frac{1}{2}}^j (\alpha_i^{j-1} (y_j^2 - y_{j-\frac{1}{2}}^2) + \gamma_i^{j-1} (y_j - y_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{\Delta y}{2} k_{i+\frac{1}{2}}^j (\alpha_i^{j-1} (2y_j - \Delta y/2) + \gamma_i^{j-1})\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_4 \cap \mathcal{M}_{i-1}^j} k \partial_x \tilde{\Pi} dy &= k_{i-\frac{1}{2}}^j (\alpha_{i-1}^j (y_{j+\frac{1}{2}}^2 - y_j^2) + \gamma_{i-1}^j (y_{j+\frac{1}{2}} - y_j)) \\ &= \frac{\Delta y}{2} k_{i-\frac{1}{2}}^j (\alpha_{i-1}^j (2y_j + \Delta y/2) + \gamma_{i-1}^j)\end{aligned}\quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_4 \cap \mathcal{M}_{i-1}^{j-1}} k \partial_x \tilde{\Pi} dy &= k_{i-\frac{1}{2}}^j (\alpha_{i-1}^{j-1} (y_j^2 - y_{j-\frac{1}{2}}^2) + \gamma_{i-1}^{j-1} (y_j - y_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{\Delta y}{2} k_{i-\frac{1}{2}}^j (\alpha_{i-1}^{j-1} (2y_j - \Delta y/2) + \gamma_{i-1}^{j-1})\end{aligned}\quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1 \cap \mathcal{M}_i^{j-1}} k \partial_y \tilde{\Pi} dx &= k_i^{j-\frac{1}{2}} (\alpha_i^{j-1} (x_{i+\frac{1}{2}}^2 - x_i^2) + \beta_i^{j-1} (x_{i+\frac{1}{2}} - x_i)) \\ &= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j-\frac{1}{2}} (\alpha_i^{j-1} (2x_i + \Delta x/2) + \beta_i^{j-1})\end{aligned}\quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1 \cap \mathcal{M}_{i-1}^{j-1}} k \partial_y \tilde{\Pi} dx &= k_i^{j-\frac{1}{2}} (\alpha_{i-1}^{j-1} (x_i^2 - x_{i-\frac{1}{2}}^2) + \beta_{i-1}^{j-1} (x_i - x_{i-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j-\frac{1}{2}} (\alpha_{i-1}^{j-1} (2x_i - \Delta x/2) + \beta_{i-1}^{j-1})\end{aligned}\quad (1.14)$$

$$\int_{\Gamma_3 \cap \mathcal{M}_i^j} k \partial_y \tilde{\Pi} dx = k_i^{j+\frac{1}{2}} (\alpha_i^j (x_{i+\frac{1}{2}}^2 - x_i^2) + \beta_i^j (x_{i+\frac{1}{2}} - x_i))$$

$$= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j+\frac{1}{2}} (\alpha_i^j (2x_i + \Delta x/2) + \beta_i^j) \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3 \cap \mathcal{M}_{i-1}^j} k \partial_y \tilde{\Pi} \, dx &= k_i^{j+\frac{1}{2}} (\alpha_{i-1}^j (x_i^2 - x_{i-\frac{1}{2}}^2) + \beta_{i-1}^j (x_i - x_{i-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{\Delta x}{2} k_i^{j+\frac{1}{2}} (\alpha_{i-1}^j (2x_i - \Delta x/2) + \beta_{i-1}^j) \end{aligned} \quad (1.16)$$

L'intégrale sur chacun des bords vaut donc :

$$\int_{\Gamma_1} k \partial_y \tilde{\Pi} \, dx = \frac{\Delta x}{2} k_i^{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta x}{2} (\alpha_i^{j-1} - \alpha_{i-1}^{j-1}) + 2x_i (\alpha_i^{j-1} + \alpha_{i-1}^{j-1}) + \beta_i^{j-1} + \beta_{i-1}^{j-1} \right) \quad (1.17)$$

$$\int_{\Gamma_3} k \partial_y \tilde{\Pi} \, dx = \frac{\Delta x}{2} k_i^{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta x}{2} (\alpha_i^j - \alpha_{i-1}^j) + 2x_i (\alpha_i^j + \alpha_{i-1}^j) + \beta_i^j + \beta_{i-1}^j \right) \quad (1.18)$$

$$\int_{\Gamma_2} k \partial_x \tilde{\Pi} \, dy = \frac{\Delta y}{2} k_{i+\frac{1}{2}}^j \left(\frac{\Delta y}{2} (\alpha_i^j - \alpha_i^{j-1}) + 2y_j (\alpha_i^j + \alpha_i^{j-1}) + \gamma_i^j + \gamma_i^{j-1} \right) \quad (1.19)$$

$$\int_{\Gamma_4} k \partial_x \tilde{\Pi} \, dy = \frac{\Delta y}{2} k_{i-\frac{1}{2}}^j \left(\frac{\Delta y}{2} (\alpha_{i-1}^j - \alpha_{i-1}^{j-1}) + 2y_j (\alpha_{i-1}^j + \alpha_{i-1}^{j-1}) + \gamma_{i-1}^j + \gamma_{i-1}^{j-1} \right) \quad (1.20)$$

Or le calcul de l'inverse de A nous fournit les coefficients α, β, γ et δ en fonction de Π . On peut ainsi les substituer dans les équations (1.17)-(1.20).

Pour faciliter la compréhension des calculs, présentons-les dans des tableaux. Les lignes décrivant seulement α, β ou γ ne sont que des réécritures des lignes de A^{-1} . Les autres lignes sont des combinaisons des précédentes. La première colonne indique la combinaison effectuée.

	Bord Γ_2	Π_i^{j-1}	Π_{i+1}^{j-1}	Π_i^j	Π_{i+1}^j	Π_i^{j+1}	Π_{i+1}^{j+1}
	α_i^j			$1/2p$	$-1/2p$	$-1/2p$	$1/2p$
	α_i^{j-1}	$1/2p$	$-1/2p$	$-1/2p$	$1/2p$		
(a)	$\alpha_i^j + \alpha_i^{j-1}$	$1/2p$	$-1/2p$			$-1/2p$	$1/2p$
(b)	$\alpha_i^j - \alpha_i^{j-1}$	$1/2p$	$-1/2p$	$1/p$	$-1/p$	$-1/2p$	$1/2p$
	γ_i^j			$-y_{j+1}/p$	y_{j+1}/p	y_j/p	$-y_j/p$
	γ_i^{j-1}	$-y_j/p$	y_j/p	y_{j-1}/p	$-y_{j-1}/p$		
(c)	$\gamma_i^j + \gamma_i^{j-1}$	$-y_j/p$	y_j/p	$-2\Delta y/p$	$2\Delta y/p$	y_j/p	$-y_j/p$
	$2y_j(a) + (c)$			$-2\Delta y/p$	$2\Delta y/p$		
	$\frac{\Delta y}{2}(b) + 2y_j(a) + (c)$	$-\frac{\Delta y}{4p}$	$\frac{\Delta y}{4p}$	$-\frac{3}{2} \frac{\Delta y}{p}$	$\frac{3}{2} \frac{\Delta y}{p}$	$-\frac{\Delta y}{4p}$	$\frac{\Delta y}{4p}$

Ainsi :

$$\int_{\Gamma_2} k \partial_x \tilde{\Pi} \, dy = \frac{\Delta y^2}{8p} k_{i+\frac{1}{2}}^j \left(-\Pi_i^{j-1} + \Pi_{i+1}^{j-1} - 6\Pi_i^j + 6\Pi_{i+1}^j - \Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \right) \quad (1.21)$$

De la même manière (juste en décalant l'indice i d'un cran) on a :

$$\int_{\Gamma_4} k \partial_x \tilde{\Pi} \, dy = \frac{\Delta y^2}{8p} k_{i-\frac{1}{2}}^j \left(-\Pi_{i-1}^{j-1} + \Pi_i^{j-1} - 6\Pi_{i-1}^j + 6\Pi_i^j - \Pi_{i-1}^{j+1} + \Pi_i^{j+1} \right) \quad (1.22)$$

	Bord Γ_3	Π_{i-1}^j	Π_i^j	Π_{i+1}^j	Π_{i-1}^{j+1}	Π_i^{j+1}	Π_{i+1}^{j+1}
	α_i^j		$1/2p$	$-1/2p$		$-1/2p$	$1/2p$
	α_{i-1}^j	$1/2p$	$-1/2p$		$-1/2p$	$1/2p$	
(a)	$\alpha_i^j + \alpha_{i-1}^j$	$1/2p$		$-1/2p$	$-1/2p$		$1/2p$
(b)	$\alpha_i^j - \alpha_{i-1}^j$	$-1/2p$	$1/p$	$-1/2p$	$1/2p$	$-1/p$	$1/2p$
	β_i^j		$-x_{i+1}/p$	x_i/p		x_{i+1}/p	$-x_i/p$
	β_{i-1}^j	$-x_i/p$	x_{i-1}/p		x_i/p	$-x_{i-1}/p$	
(c)	$\beta_i^j + \beta_{i-1}^{j-1}$	$-x_i/p$	$-2\Delta x/p$	x_i/p	x_i/p	$2\Delta x/p$	$-x_i/p$
	$2x_i(a) + (c)$		$-2\Delta x/p$			$2\Delta x/p$	
	$\frac{\Delta x}{2}(b) + 2x_i(a) + (c)$	$-\frac{\Delta x}{4p}$	$-\frac{3}{2} \frac{\Delta x}{p}$	$-\frac{\Delta x}{4p}$	$\frac{\Delta x}{4p}$	$\frac{3}{2} \frac{\Delta x}{p}$	$\frac{\Delta x}{4p}$

Ainsi :

$$\int_{\Gamma_3} k \partial_y \tilde{\Pi} \, dx = \frac{\Delta x^2}{8p} k_i^{j+\frac{1}{2}} \left(-\Pi_{i-1}^j - 6\Pi_i^j - \Pi_{i+1}^j + \Pi_{i-1}^{j+1} + 6\Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \right) \quad (1.23)$$

Et de la même manière, on a :

$$\int_{\Gamma_1} k \partial_y \tilde{\Pi} \, dx = \frac{\Delta x^2}{8p} k_i^{j-\frac{1}{2}} \left(-\Pi_{i-1}^{j-1} - 6\Pi_i^{j-1} - \Pi_{i+1}^{j-1} + \Pi_{i-1}^j + 6\Pi_i^j + \Pi_{i+1}^j \right) \quad (1.24)$$

Dans le cas particulier où $k \equiv 1$ et où $\Delta x = \Delta y := h$ alors l'opérateur de discrétisation prend une forme plus simple. La formulation variationnelle (1.5) devient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \left[\left(-\Pi_{i-1}^{j-1} - 6\Pi_i^{j-1} - \Pi_{i+1}^{j-1} + \Pi_{i-1}^j + 6\Pi_i^j + \Pi_{i+1}^j \right) \right. \\ & \quad - \left(-\Pi_i^{j-1} + \Pi_{i+1}^{j-1} - 6\Pi_i^j + 6\Pi_{i+1}^j - \Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \right) \\ & \quad - \left(-\Pi_{i-1}^j - 6\Pi_i^j - \Pi_{i+1}^j + \Pi_{i-1}^{j+1} + 6\Pi_i^{j+1} + \Pi_{i+1}^{j+1} \right) \\ & \quad \left. + \left(-\Pi_{i-1}^{j-1} + \Pi_i^{j-1} - 6\Pi_{i-1}^j + 6\Pi_i^j - \Pi_{i-1}^{j+1} + \Pi_i^{j+1} \right) \right] = h^2 F_i^j \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{4h^2} \left[-\Pi_{i-1}^{j-1} - 2\Pi_i^{j-1} - \Pi_{i+1}^{j-1} - 2\Pi_{i-1}^j + 12\Pi_i^j \right. \\ & \quad \left. - 2\Pi_{i+1}^j - \Pi_{i-1}^{j+1} - 2\Pi_i^{j+1} - \Pi_{i+1}^{j+1} \right] = F_i^j \quad (1.25) \end{aligned}$$

Le schéma présenté ici est donc équivalent à un schéma à 9 points, comme illustré sur la Figure ??.