# Méthodes numériques

Thomas MILCENT

## Systèmes Linéaires

### Enoncé du problème

On se propose de résoudre un système linéaire $\boxed{Ax = b}$

- $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice (carrée) du système
- $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur second membre
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des $n$ inconnues

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

### Théorème de Cramer

Il existe une unique solution $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

## Systèmes Linéaires

### Algorithme de résolution numérique

Fournit la solution du système linéaire en un nombre **fini** d'opérations élémentaires (*,/,+,-)

- **Stabilité** : sensibilité de l'algorithme aux perturbations numériques
- **Complexité** : nombre (ordre de grandeur) d'opérations élémentaires (*,/,+,-)

### 2 types d'algorithmes

**Méthodes directes : LU, Choleski**

- Donnent une solution en un nombre fini d'opérations
- Pas très stables
- Utilisées pour les "petits" systèmes linéaires

**Méthodes itératives : Jacobi, Gauss-Seidel**

- Ne convergent pas toujours
- Meilleure stabilité
- Utilisées pour les "grands" systèmes linéaires

# Equations non-linéaires

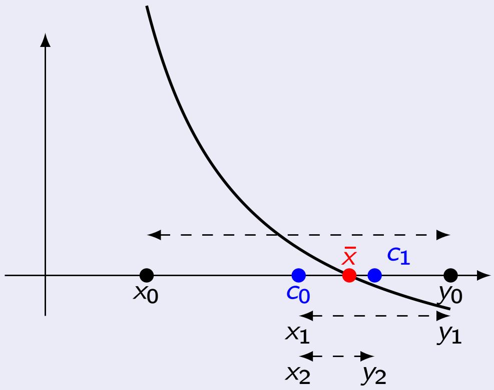
## Equations non-linéaires

**But** : Résoudre $f(x) = 0$ où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non linéaire.

- On peut avoir 0, 1, ... n ou une infinité de solutions ...
- Les algorithmes généraux sont itératifs : on construit une suite de réels $(x_n)$ qui converge vers *une* solution $\bar{x}$ de $f(x) = 0$
$$\lim_{n\to\infty} |\bar{x} - x_n| = 0$$
- On appelle **ordre** de la convergence le nombre $p > 0$ tel que :
$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c|x_n - \bar{x}|^p$$
- Exemple d'algorithmes généraux :
  - méthode par dichotomie
  - méthode de Newton
  - méthode de la sécante
- Pour utiliser les algorithmes généraux itératifs, il faut au préalable localiser un intervalle $[a, b]$ contenant une solution $\bar{x}$. De plus ces algorithmes convergent lorsque la condition initiale est assez proche de $\bar{x}$

# Equations non-linéaires

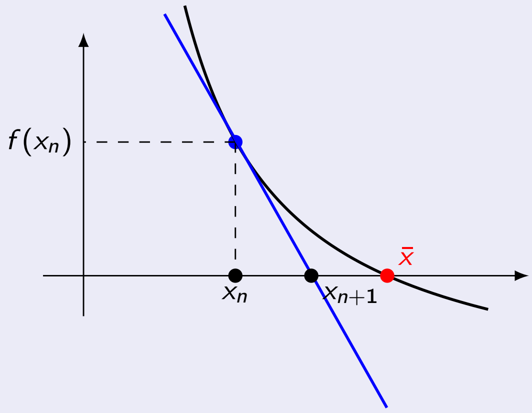
## Méthode par dichotomie




- Soit $f$ continue et monotone sur $[a, b]$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ avec $\bar{x} \in ]a, b[$ et $f(a)f(b) < 0$
- Construction itérative :
  - initialisation : $(x_0, y_0) = (a, b)$
  - on pose $c_0 = (x_0 + y_0)/2$ :
  - si $f(x_0)f(c_0) < 0$ : $x_1 = x_0$ et $y_1 = c_0$
  - si $f(c_0)f(y_0) < 0$ : $x_1 = c_0$ et $y_1 = y_0$
  - on itère le processus, $c_1 = (x_1 + y_1)/2$ ....
- La convergence est **d'ordre** 1 (linéaire)

# Equations non-linéaires

## Méthode de Newton



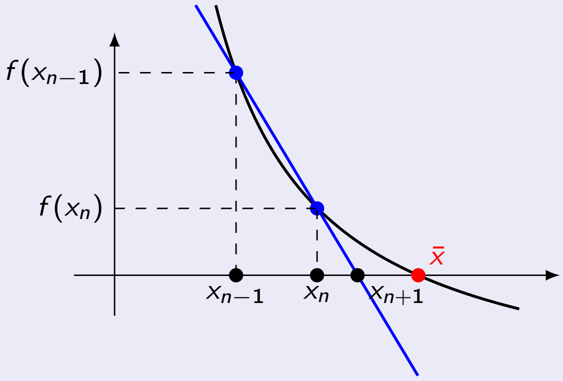

- $x_{n+1}$ est le point d'intersection entre la tangente au point $(x_n, f(x_n))$ et l'axe $x$ :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

- La convergence est **d'ordre** 2 (quadratique)

## Equations non-linéaires

### Méthode de la sécante




- $x_{n+1}$ est le point d'intersection de la droite reliant $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe $x$ :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

- La convergence est **d'ordre** $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

# Equations non-linéaires

## Méthode de Newton en dimension supérieure

Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On cherche $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(x) = 0$

- On construit la suite $(x_n)$ avec la relation de récurrence :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - [Df(x_n)]^{-1} f(x_n)}$$

  où $[Df]$ est la matrice jacobienne de $f$

$$[Df] = \begin{bmatrix} & & \\ & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \\ & & \end{bmatrix}$$

- Il faut inverser une matrice à chaque itération
- La convergence est **d'ordre** 2

## Exemple d'équation différentielle avec conditions initiales

Equation différentielle régissant l'angle d'un pendule

$$\begin{cases} \theta''(t) + \alpha\, \theta'(t) + (\omega_0)^2 \sin(\theta(t)) = f(t) \\ \theta(\mathbf{0}) = \theta_\mathbf{0} \\ \theta'(\mathbf{0}) = \mathbf{v_0} \end{cases}$$

- $\theta(t)$ : angle avec la verticale du pendule
- $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ : pulsation
- $f(t)$ : terme de forçage
- $\alpha$ : terme d'amortissement
- $\theta_0$ : angle initial
- $v_0$ : vitesse initiale

Propriétés de cette EDO (Equation Différentielle Ordinaire)

- Ordre 2 $\longrightarrow \theta''$
- Non linéaire $\longrightarrow \sin(\theta)$
- **Conditions initiales** sur l'angle et la vitesse

## Equations différentielles

### Exemple d'équation différentielle avec conditions limites

Equation différentielle du moment fléchissant d'une poutre

$$\begin{cases} -y''(x) + \frac{F}{\mathcal{I}(x)E} y(x) = f(x) \\ \mathbf{y(0) = 0} \\ \mathbf{y(L) = 0} \end{cases}$$

- $y(x)$ : moment fléchissant
- $L$ : longueur de la poutre
- $F$ : force suivant l'axe (Ox)
- $E$ : module d'Young
- $\mathcal{I}(x)$ : moment principal d'inertie
- $f(x)$ : terme de forçage
- Encastrement de la poutre aux bords

Propriétés de cette EDO (Equation Différentielle Ordinaire)

- Ordre 2 $\longrightarrow y''$
- Linéaire $\longrightarrow$ même si $\mathcal{I}(x)$ est non linéaire
- **Conditions limites** sur $y$

## Equations différentielles

### Quelles sont les équations que l'on sait résoudre

**Equation différentielle linéaire d'ordre 1**

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

Equation homogène + variation de la constante $\longrightarrow$ expression analytique avec des intégrales

**Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$$

Equation homogène ($r^2 + ar + b = 0$) + solution particulière

Lorsque $a$ et $b$ sont des fonctions de $x$, il n'y a pas de solution analytique

$\Longrightarrow$ **Besoin de méthodes numériques pour résoudre les équations différentielles**

## Equations différentielles avec conditions initiales

### Cadre théorique

Equation différentielle non linéaire d'ordre 1

$$\left\{\begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ \mathbf{y(0) = y_0} \end{array}\right.$$

On impose une condition initiale $\Longrightarrow$ Problème de Cauchy

Dans le cas général $y(t) \in \mathbb{R}^p$ $\Longrightarrow$ Système différentiel d'ordre 1

**Propriété** :
Toute équation différentielle d'ordre $p$ se ramène à un système différentiel d'ordre 1

### Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si $f$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable alors le problème de Cauchy admet une unique solution

Pas toujours unicité dans le cas général

$$\left\{\begin{array}{l} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

$t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^2/4$ sont deux solutions

# Equations différentielles avec conditions initiales

## Idée générale de la discrétisation

On cherche une solution $y$ sur l'intervalle $[0, T]$ de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ \mathbf{y(0) = y_0} \end{cases}$$

On découpe l'intervalle de temps $[0, T]$ en $N$ intervalles de taille $\Delta t$

$$\Delta t = \frac{T}{N} \qquad t_n = n\Delta t$$

On cherche une approximation de $y(t_n)$ que l'on note $y_n$ pour $n = 1, .., N$

Comment calculer les $y_n$ à partir de l'équation et de la condition initiale ?

**Méthode d'Euler explicite**

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t\ f(t_n, \mathbf{y_n})$$

Très simple à implémenter car $y_{n+1} = g(y_n)$

**Méthode d'Euler implicite**

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t\ f(t_{n+1}, \mathbf{y_{n+1}})$$

si $f$ non linéaire $\longrightarrow$ résolution à chaque pas de temps d'un système non linéaire
si $f$ linéaire $\longrightarrow$ résolution à chaque pas de temps d'un système linéaire

# Equations différentielles avec conditions initiales

## Problème test pour la stabilité

On cherche une solution de ($\lambda > 0$)

$$y'(t) = -\lambda y(t) \quad \text{avec} \quad y(0) = y_0$$

La solution générale est donnée par $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$

**Schéma numérique d'Euler explicite**

$$y_{n+1} = y_n - \lambda \Delta t \; y_n \qquad y_n = (1 - \lambda \Delta t)^n y_0$$

Pour que $y_n$ converge il suffit que $|1 - \lambda \Delta t| < 1$ ce qui impose la condition

$$\boxed{\Delta t < \frac{2}{\lambda}}$$

**Schéma numérique d'Euler implicite**

$$y_{n+1} = y_n - \lambda \Delta t \; y_{n+1} \qquad y_n = \frac{y_0}{(1 + \lambda \Delta t)^n}$$

Pour que $y_n$ converge, il n'y a pas de restriction sur le pas de temps

Cette propriété est générale

- les schémas explicites sont simples mais restrictions sur le pas de temps
- les schémas implicites demandent généralement de résoudre un système non linéaire mais pas de restriction sur le pas de temps

# Equations différentielles avec conditions initiales

Les schémas d'Euler explicite et implicite sont d'ordre 1

Comment améliorer l'ordre de convergence ?

## Schéma Euler modifié

On approxime $y_{n+1/2}$ par Euler explicite puis on utilise la pente au point milieu

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}\, f(t_n, y_n)\right)$$

Ce schéma est **explicite d'ordre 2**

## Schéma de Crank-Nicholson

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

Ce schéma est **implicite d'ordre 2**

# Equations différentielles avec conditions initiales

## Schéma de Runge et Kutta

Schéma à un pas

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec

$$k_1 = f(t_n, y_n) \qquad k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}\ k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}\ k_2\right) \qquad k_4 = f\left(t_{n+1}, y_n + \Delta t\ k_3\right)$$

**Schéma explicite d'ordre 4**

$\longrightarrow$ Très utilisé dans les applications

## Autres schémas

Les schémas précédents sont à un pas $\longrightarrow$ on calcule $y_{n+1}$ à l'aide de $y_n$
Il existe de nombreux schémas à pas liés $\longrightarrow$ on calcule $y_{n+1}$ à l'aide de $y_n$, $y_{n-1}$, $y_{n-2}$, ...

- Adams-Bashforth, Adams-Moulton, Gear ...

## Equations différentielles avec conditions limites

### Développement de Taylor

Lorsque $h \longrightarrow 0$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^2)$$

On en déduit les approximations suivantes

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{décentrée à l'ordre 1}$$

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \qquad \text{centrée à l'ordre 2}$$

$$f'(a) \approx \frac{-f(a+2h)+4f(a+h)-3f(a)}{2h} \qquad \text{décentrée à l'ordre 2}$$

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} \qquad \text{centrée à l'ordre 2}$$

On fait de même pour les dérivées d'ordre plus élevés

# Equations différentielles avec conditions limites

## Méthode des différences finies sur un exemple

On cherche une solution $y$ sur l'intervalle $[0, L]$ de l'équation

$$\begin{cases} y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \\ \mathbf{y(0)} = \alpha \qquad \mathbf{y(L)} = \beta \end{cases}$$

On découpe l'intervalle d'espace $[0, L]$ en $P$ intervalles de taille $\Delta x$

$$\Delta x = \frac{L}{P} \qquad x_i = i\Delta x$$

On cherche une approximation de $y(x_i)$ que l'on note $y_i$ pour $i = 1, ..., P - 1$

Comment calculer les $y_i$ à partir de l'équation et des conditions limites ?

Approximation des dérivées avec des développement de Taylor

$$\begin{cases} y_0 = \alpha \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} + a(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + b(x_i)y_i = f(x_i) \qquad i = 1, ..., P - 1 \\ y_L = \beta \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Système linéaire à résoudre

## Equations aux dérivées partielles (EDP)

### Exemple de l'équation de la chaleur 1D

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$
$$T(x,0) = T_0(x) \qquad \longrightarrow \text{condition initiale}$$
$$T(0,t) = T_1 \quad T(L,t) = T_2 \longrightarrow \text{conditions limites}$$

On discrétise en temps et en espace $T(x_i, t_n) \approx T_i^n$

Euler explicite en temps + différences finies en espace

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - D\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0 \quad + \text{ CI et CL}$$

Euler implicite en temps + différences finies en espace

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - D\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad + \text{ CI et CL}$$

$\longrightarrow$ système linéaire à résoudre

## Equations aux dérivées partielles (EDP)

### Exemple de l'équation de la chaleur 3D sur un domaine $\Omega$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= D\Delta T \quad \text{sur } \Omega \\ T(x,0) &= T_0(x) \quad \longrightarrow \text{condition initiale} \\ T_{|\partial\Omega} &= T_b \quad \longrightarrow \text{conditions limites} \end{aligned}$$

- Discrétisation espace $\longrightarrow$ Différences finies, Eléments finis, Volumes finis...
- Discrétisation temps $\longrightarrow$ Schémas Euler explicite, implicite , Runge Kutta...

**Autres équations**

- Solides $\longrightarrow$ Elasticité non linéaire
- Fluides $\longrightarrow$ Navier Stokes
- Electromagnétisme $\longrightarrow$ Maxwell
- ...