

Chapitre 9

Produit scalaire

Dans tout le cours, on se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 Norme d'un vecteur

Définition

Soient \vec{u} un vecteur et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle **norme** de \vec{u} le réel positif ou nul noté $\|\vec{u}\|$, défini par $\|\vec{u}\| = AB$.

Propriété

Soient λ un réel et \vec{u} un vecteur.

On a $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

Propriété

Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple

Soient $A(-1 ; 2)$ et $B(3 ; -1)$.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ -1 - 2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$
 $= \sqrt{16 + 9}$
 $= \sqrt{25}$
 $= 5$

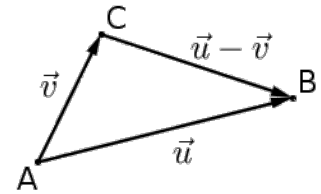
2 Produit scalaire de deux vecteurs

Dans cette partie, on considère trois points A , B et C et \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Définition - Avec des normes seulement (1)

Le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)$$



Propriété - Avec des normes seulement (2)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

