Suites arithmétiques et géométriques 1ère spe

Exercice 1 Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique avec une formule de récurrence

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? géométriques ? Si oui, en donner la raison.

1. (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & u_n - 7 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 & = & 14 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{v_n}{7} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

3. (w_n) définie par : $\begin{cases} w_0 & = & 14 \\ w_{n+1} & = & w_n + n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4. (z_n) définie par $\begin{cases} z_0 & = & 2 \\ z_{n+1} & = & z_n \times 2^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

5. (t_n) définie par $\begin{cases} t_0 & = & 1 \\ t_{n+1} & = & 2t_n + 7 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice 2 Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique avec une formule explicite

Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? géométriques ? Si oui, en donner la raison.

1. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 6 - n$.
2. (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 6 + 3n$.
3. (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = 6n$.
4. (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $z_n = \dfrac{6}{n}$.
5. (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_n = 3 \times 6^n$.
6. (s_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $s_n = \dfrac{6}{3^n}$.

Exercice 3 Calculer un terme d'une suite arithmétique ou géométrique

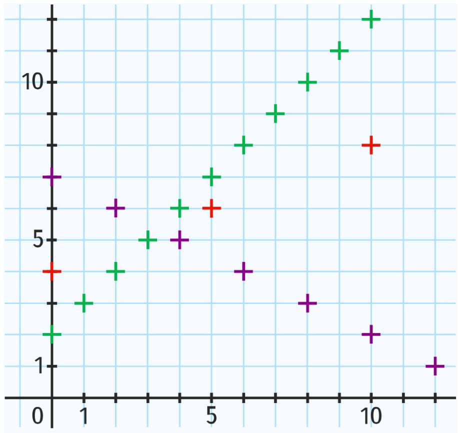
Pour chacune des suites suivantes, calculer u_{20}.

1. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme 10 et de raison -3.
2. (u_n) est une suite géométrique de premier terme -1 et de raison 2.
3. La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 2048 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
4. La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 30 \\ u_{n+1} & = & u_n - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice 4

Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté quelques termes de trois suites arithmétiques (u_n), (v_n) et (w_n). Pour chacune d'elles, donner :

1. Son premier terme et sa raison ;
2. Une formule explicite permettant de la définir ;
3. Les termes de rang 3 et de rang 6.



Modéliser à l'aide d'une suite arithmétique ou géométrique

Exercice 5

Une famille décide de d'épargner afin de s'offrir un voyage.
En 2022, elle a économisé 500 €. Chaque mois à partir du 1er janvier 2023, elle augmente la somme épargnée de 100 €.
Pour chaque entier n, on note s_n la somme épargnée après n mois.

1. Déterminer s_0, s_1 et s_2
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.
3. En déduire l'expression de s_n en fonction de l'entier n.
4. Le voyage que prépare la famille coûte 4200 €. Déterminer à partir de quelle date la famille pourra partir en voyage.

Exercice 6 En médecine

Afin de greffer 10 cm^2 de peau à une personne brûlée, on lui en prélève 20 mm^2. La culture permet d'augmenter de 15 % la surface de peau chaque jour.
On cherche à déterminer au bout de combien de jour la greffe sera possible.

1. Calculer la surface de peau après un jour et deux jours de culture.
2. Pour tout entier naturel n, v_n modélise la surface de peau après n jours de culture. Écrire une relation entre v_{n+1} et v_n.
3. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
4. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
5. Répondre au problème posé.

Sens de variation

Exercice 7 Sens de variation d'une suite arithmétique

Déterminer les variations des suites définies ci-dessous :

1. $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & u_n + \pi - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 & = & 12 \\ v_{n+1} & = & v_n + 1 - \sqrt{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice 8 Sens de variation d'une suite géométrique

Donner les variations des suites géométriques définies ci-dessous :

1. (u_n) de premier terme 2 et de raison 0,3.
2. (v_n) de premier terme 3 et de raison -5.
3. (w_n) de premier terme -6 et de raison 14.
4. (z_n) de premier terme 3 et de raison $\sqrt{2}$.
5. (t_n) de premier terme -5 et de raison $\sqrt{\dfrac{10}{\pi^2}}$.
6. (r_n) de premier terme 0 et de raison 12.

Somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique

Exercice 9

Soit u la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 + 4n$.

1. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{40}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} u_k$.
3. Calculer de deux manières $u_{21} + u_{22} + \ldots + u_{40}$.

Exercice 10

Un étudiant loue une chambre pendant 2 ans. Le loyer initial est de 200 euros par mois mais tous les mois il augmente de 2%.

1. Exprimer les loyers à l'aide d'une suite géométrique.
2. En déduire la somme totale que l'étudiant aura à payer sur deux ans.
3. Quel est le loyer moyen payé par l'étudiant sur deux ans ?

Exercice 11

Le film *Avatar* est sorti aux États-Unis le 18 décembre 2009. La recette lors de la première semaine s'est élevée à 77 millions de dollars. Cette recette a ensuite diminué en moyenne de 15% chaque semaine. Le réalisateur James Cameron a investi 500 millions de dollars pour la réalisation du film. Pour les calculs, l'unité est le million de dollars.

1. Soit R_0 la recette obtenue la première semaine. Calculer R_1 et R_2 (ne pas justifier).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer R_{n+1} en fonction de R_n en justifiant.
3. Exprimer R_n en fonction de n et de R_0.
4. Quel est le sens de variation de la suite (R_n) ? Justifier.
5. Quelle est la recette pour la vingtième semaine (arrondir au centième) ?
6. Exprimer en fonction de n le total T_n des recettes engrangées de la première semaine à la (n+1)-ième de la manière la plus simple possible.
7. Quand n devient très grand, de quelle valeur limite T_n se rapproche-t-il ?
8. On considère l'algorithme ci contre :
   Que fait cet algorithme ?
9. On l'exécute et l'algorithme affiche 22.
   Interpréter ce résultat.

Python

```python
n = 0
r = 77
t = 77
while t < 500 :
    n = n + 1
    r = 0.85 * r
    t = t + r
print(n)
```

Pour approfondir

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 4}{n+1}$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = nu_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. En déduire l'expression du terme général de (v_n).
4. En déduire l'expression du terme général de (u_n).

Exercice 13

n est un entier naturel. À l'aide de suites arithmétiques :

1. Calculer $0 + 1 + \dots + (2n-1) + 2n$, somme des entiers de 0 à $2n$.
2. Calculer $0 + 2 + 4 + \dots (2n-2) + 2n$, somme des entiers pairs de 0 à $2n$.
3. En déduire $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1)$, somme des entiers impairs compris entre 0 et $2n$.

Exercice 14

n est un entier naturel. Calculer $2 \times 2^2 \times 2^3 \dots \times 2^n$.