Chapitre 5

Primitives et équations différentielles

1 Équations différentielles et primitives d'une fonction

Définition : Équation différentielle

- Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.
- **Résoudre une équation différentielle** sur un intervalle I, c'est trouver toutes les fonctions, dérivable sur I, qui sont solutions de cette équation.

Exemples

- La fonction f définie sur R par e^{-x} est solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$.
  En effet, pour tout $x \in$ R, $f'(x) = -e^{-x}$ et $f(x) + f'(x) = e^{-x} - e^{-x} = 0$.
- La fonction f définie sur R par e^{-x} est solution de l'équation différentielle $y" - y = 0$.
  En effet, pour tout $x \in$ R, $f'(x) = -e^{-x}$ et $f''(x) = e^{-x}$, donc $f''(x) - f(x) = e^{-x} - e^{-x} = 0$.
- La fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $x \mapsto lnx$ est solution de l'équation différentielle $y'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Définition : Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I toute fonction solution de l'équation différentielle $F' = f$ sur I.

Ainsi, une fonction F est une primitive de f sur I lorsque, pour tout $x \in I$, $\quad F'(x) = f(x)$.

Exemples

- La fonction $x \mapsto x^2$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2x$.
  Donc, la fonction $F : x \mapsto x^2$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$.
- La fonction $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation différentielle $y' = e^x$.
  Donc, la fonction $G_1 : x \mapsto e^x$ est une primitive de $g : x \mapsto e^x$.
- La fonction $x \mapsto e^x + 2$ est également solution de l'équation différentielle $y' = e^x$.
  Donc, la fonction $G_2 : x \mapsto e^x + 2$ est une primitive de $g : x \mapsto e^x$.

Propriété : Primitives de fonctions usuelles

Fonction f définie par :	Intervalle de définition	Primitive F définie par :
$f(x) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$, avec k un réel
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = x^n$, avec n entier, $n < -1$	$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]x\ ;\ +\infty[$	$F(x) = \ln x$

2 Existence et calcul de primitives

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si F est une primitive de f sur I, alors, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto F(x)+k$ est également une primitive de f sur I.
- Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + C$.

Preuve

- Soit $C \in \mathbb{R}$.
  Soient F une primitive de f sur I et $G : x \mapsto F(x) + C$.
  Alors, pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$.
  Donc, G est une primitive de f sur I.
- Soit F et G deux primitives de f sur I.
  Alors, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
  Donc, pour tout $x \in I$, $F'(x) = G'(x)$.
  Soit $H : x \mapsto F(x) - G(x)$.
  Alors, pour tout $x \in I$, $H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$.
  Donc, H est une fonction constante. Il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $H(x) = C$.
  Donc, pour tout $x \in I$, $F(x) - G(x) = k$ et $F(x) = G(x) + C$.

Remarque

On dit que deux primitive d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Propriété

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel.
Il existe **une unique primitive** G de f sur l'intervalle I telle que $G(x_0) = y_0$.

Preuve

Avec les notations précédentes, $G(x_0) = y_0$ s'écrit $F(x_0) + C = y_0$, soit $C = y_0 - F(x_0)$.
Donc, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$.
Toutes les primitives de f sont de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} + C$, avec C un réel.
La primitive de f qui prend la valeur 0 en en 1 est G définie par $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ avec C tel que $G(1) = 0$.
Donc, $G(1) = \frac{1}{2}e^{2} + C = 0$, soit $C = -\frac{1}{2}e^{2}$.
Donc, la primitive de f qui prend la valeur 0 en 1 est $G : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2}$.

3 Calcul de primitives

Toutes les propriétés suivantes se déduisent de la définition d'une primitive et des opérations sur les fonctions dérivables.

Propriété

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et F et G deux primitives respectives de f et g sur I.

- La fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Pour tout réel λ, la fonction λF est une primitive de λf sur I.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x} + x^2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} + x^2$.
Donc une primitive F de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$ est définie par $F(x) = 2\ln x + \frac{1}{3}x^3$.

Propriété : D'autres primitives

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Primitive de f sur I	Condition sur u
$2uu'$	$u^2 + C$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$	$u > 0$ pour tout $x \in I$
$u'e^u$	$e^u + C$	

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{4+x^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = 4 + x^2$. On a : $u'(x) = 2x$.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2u'(x)}{u(x)}$.

Donc, une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par $F(x) = \ln(4 + x^2)$.

4 Résolution des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$

Propriété : Équations différentielles de la forme $y' = ay$

Soit a un nombre réel non nul.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{ax}$, avec k un réel.

Preuve

- Montrons que les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$, avec k un réel, sont solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.
  Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{ax}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a \times ae^{ax} = af(x)$.
  Donc, f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

- Montrons que toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme $x \mapsto ke^{ax}$, avec k un réel.
  Soit g une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
  Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x)$.
  Soit h définie par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.

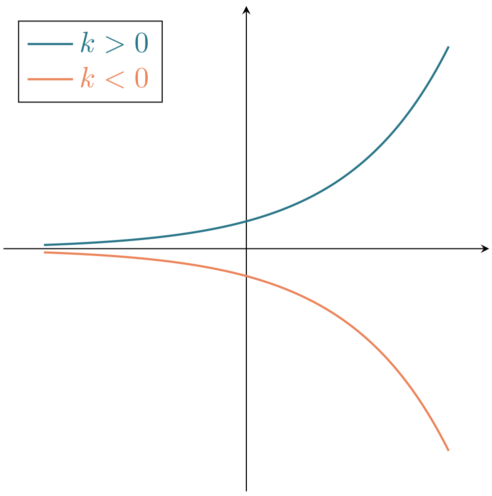
  Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} \\ &= ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} \end{aligned}$$

$$= 0$$

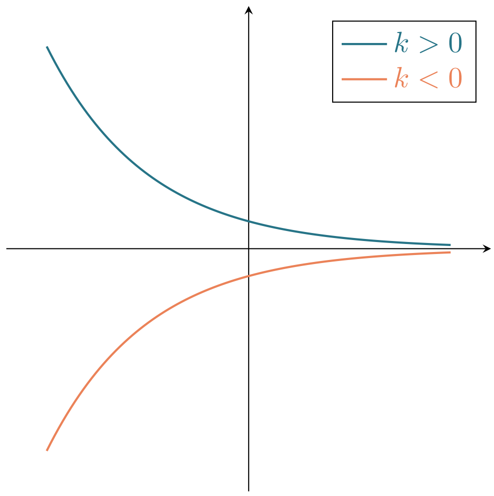
Donc, h est une fonction constante. Il existe donc un réel k tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = k$.
Donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x)e^{-ax} = k$, soit $g(x) = ke^{ax}$.

Allure des courbes des fonctions solution selon le signe de a et de k :

Cas $a > 0$:



Cas $a < 0$:



Exemple

L'équation différentielle (E) : $y' = 3y$ admet pour solutions sur $\mathbf{R}$ les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{3x}$, avec k un réel.
L'unique solution de (E) telle que $f(0) = 2$ est la fonction f définie par $f(x) = 2e^{3x}$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle $y' = ay$

(E) est l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$.

1. **Résoudre (E) sur $\mathbf{R}$.**
2. **Déterminer la solution f de (E) telle que $f(4) = 1$.**

1. On commence par se ramener à une équation différentielle de la forme $y' = ay$.

   L'équation différentielle $2y' + 3y = 0$ est équivalente à $y' = -\dfrac{3}{2}y$.

   Les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{3}{2}y$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbf{R}$ par $f_k(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$, avec k un réel.

2. Parmi toutes les solutions de (E), on cherche l'unique solution qui vérifie $f(4) = 1$.

   On résout l'équation $f_k(4) = 1$, d'inconnue k.

$$\begin{aligned} f(4) = 1 &\iff ke^{-\frac{3}{2}\times 4} = 1 \\ &\iff ke^{-6} = 1 \\ &\iff k = e^{6} \end{aligned}$$

Donc, la solution de (E) telle que $f(4) = 1$ est la fonction f définie sur **R** par

$$\begin{aligned} f(x) &= e^6 e^{-\frac{3}{2}x} \\ &= e^{6-\frac{3}{2}x} \end{aligned}$$

Propriété : Équations différentielles de la forme $y' = ay + b$

Soit a et b deux nombres réels non nuls.
Les solutions sur **R** de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur **R** par $x \mapsto ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec k un réel.

Preuve

- On détermine d'abord une fonction constante $g : x \mapsto c$, $c \in$ **R**, solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$.
  Pour tout $x \in$ **R**, $g'(x) = 0$.

  $$\begin{aligned} \text{Ainsi, } g \text{ est solution de } y' = ay + b &\iff \text{Pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad g'(x) = ag(x) + b \\ &\iff 0 = ac + b \\ &\iff c = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

  Donc la fonction constante $g : x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

- On montre ensuite que les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec k un réel, sont solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

- Soit f une fonction définie et dérivable sur **R**.

  $$\begin{aligned} f \text{ est solution de } y' = ay + b &\iff \text{Pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = af(x) + b \\ &\quad\ \text{Or pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad g'(x) - ag(x) = b \\ &\iff \text{Pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) - g'(x) = af(x) + b - (ag(x) + b) \\ &\iff \text{Pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad (f-g)'(x) = a(f-g)(x) \\ &\iff (f-g) \text{ est solution de } y' = ay \\ &\iff \text{il existe un réel } k, \text{tel que pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad (f-g)(x) = ke^{ax} \\ &\iff \text{il existe un réel } k, \text{tel que pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad f(x) - g(x) = ke^{ax} \\ &\iff \text{il existe un réel } k, \text{tel que pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = ke^{ax} + g(x) \\ &\iff \text{il existe un réel } k, \text{tel que pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Méthode : Résoudre une équation différentielle $y' = ay + b$

(E) est l'équation différentielle $y' = 4y - 5$.

1. Déterminer la fonction constante g solution particulière de (E).

2. Résoudre (E) sur R.

3. **Déterminer la solution f de (E) telle que $f(2) = \frac{1}{4}$.**

1. **On commence par déterminer une solution particulière de (E) :**

   Soit g la fonction constante solution de l'équation différentielle $y' = 4y - 5$.
   On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $g'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E) &\iff \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 4g(x) - 5 \\ &\iff 0 = 4c - 5 \\ &\iff c = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

   Donc, la fonction constante g solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est définie par $g(x) = \frac{5}{4}$.

2. **On résout ensuite l'équation différentielle homogène (H) : $y' = 4y$:**

   Les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions h_k définies sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x) = ke^{4x}$, avec k un réel.

   On en déduit par addition les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$:

   Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = ke^{4x} + \frac{5}{4}$, avec k un réel.

3. **On détermine enfin la solution de (E) qui vérifie la condition initiale :**

   Soit f_k une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.
   On a donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = ke^{4x} + \frac{5}{4}$.
   On résout l'équation $f_k(2) = \frac{1}{4}$, d'inconnue k.

$$\begin{aligned} f_k(2) = \frac{1}{4} &\iff ke^{4\times 2} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \\ &\iff ke^{8} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \\ &\iff ke^{8} = -1 \\ &\iff k = -\frac{1}{e^{8}} \\ &\iff k = -e^{-8} \end{aligned}$$

   Donc, la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $f(2) = \frac{1}{4}$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= -e^{-8}e^{4x} + \frac{5}{4} \\ &= -e^{4x-8} + \frac{5}{4} \end{aligned}$$