

Exercice 1 : Équations avec un quotient

Pour chacune des équations suivantes, préciser les valeurs interdites éventuelles puis résoudre l'équation :

1. $\frac{-3x - 4}{-4x - 9} = 9.$

2. $\frac{64 - 4x^2}{3x + 9} = 0.$

1. Déterminer les valeurs interdites revient à déterminer les valeurs qui annulent le dénominateur du quotient, puisque la division par 0 n'existe pas.

Or $-4x - 9 = 0 \iff x = -\frac{9}{4}$. Donc l'ensemble des valeurs interdites est $\left\{-\frac{9}{4}\right\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{9}{4}\right\}$,

$$\begin{aligned}\frac{-3x - 4}{-4x - 9} = 9 &\iff -3x - 4 = 9 \times (-4x - 9) && \text{car les produits en croix sont égaux.} \\ &\iff -3x - 4 = -36x - 81 \\ &\iff 33x = -77 \\ &\iff x = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

$-\frac{7}{3}$ n'est pas une valeur interdite, donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$.

2. $3x + 9 = 0$ si et seulement si $x = -3$. Donc l'ensemble des valeurs interdites est $\{-3\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$,

$$\begin{aligned}\frac{64 - 4x^2}{3x + 9} = 0 &\iff 64 - 4x^2 = 0 && \text{car } \frac{A(x)}{B(x)} = 0 \text{ si et seulement si } A(x) = 0 \text{ et } B(x) \neq 0 \\ &\iff 4x^2 = 64 \\ &\iff x^2 = 16 \\ &\iff x = 4 \text{ ou } x = -4\end{aligned}$$

-4 et 4 ne sont pas des valeurs interdites, donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S} = \{-4; 4\}$.