

Chapitre 6

Suites arithmétiques et géométriques

1 Deux exemples d'étude de suites

Exercice 1

En 2020, un village U comptait 800 habitants mais chaque année il perd 5 habitants au profit d'un village V qui comptait 580 habitants en 2020.

En quelle année, la population du village V dépassera-telle celle du village U ?

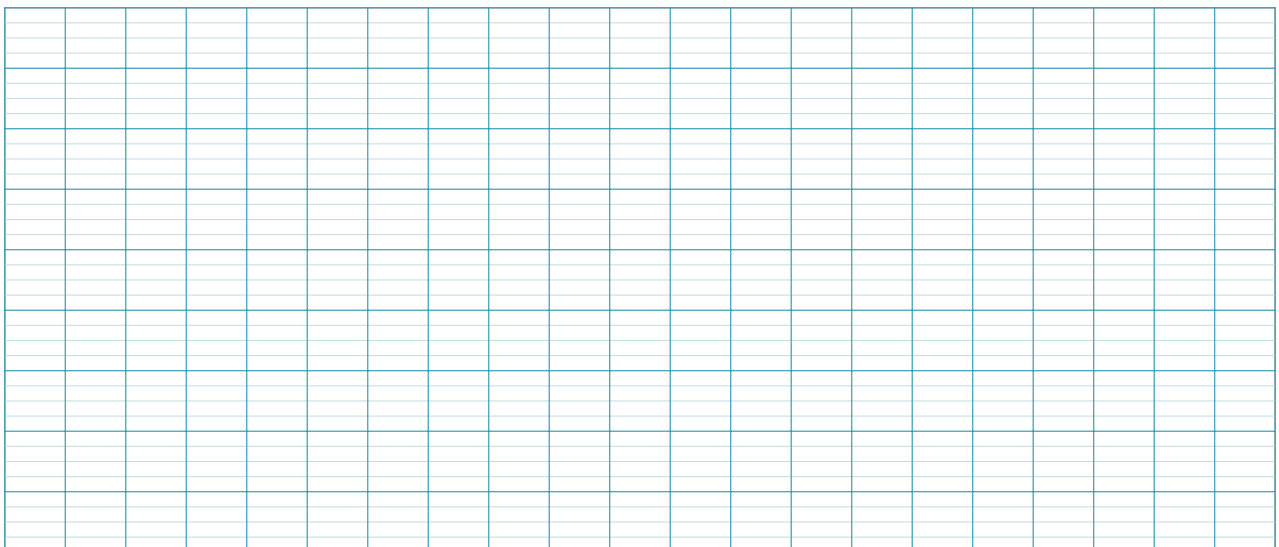
Modélisation de la situation avec des suites

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n on a $u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

Schéma général :



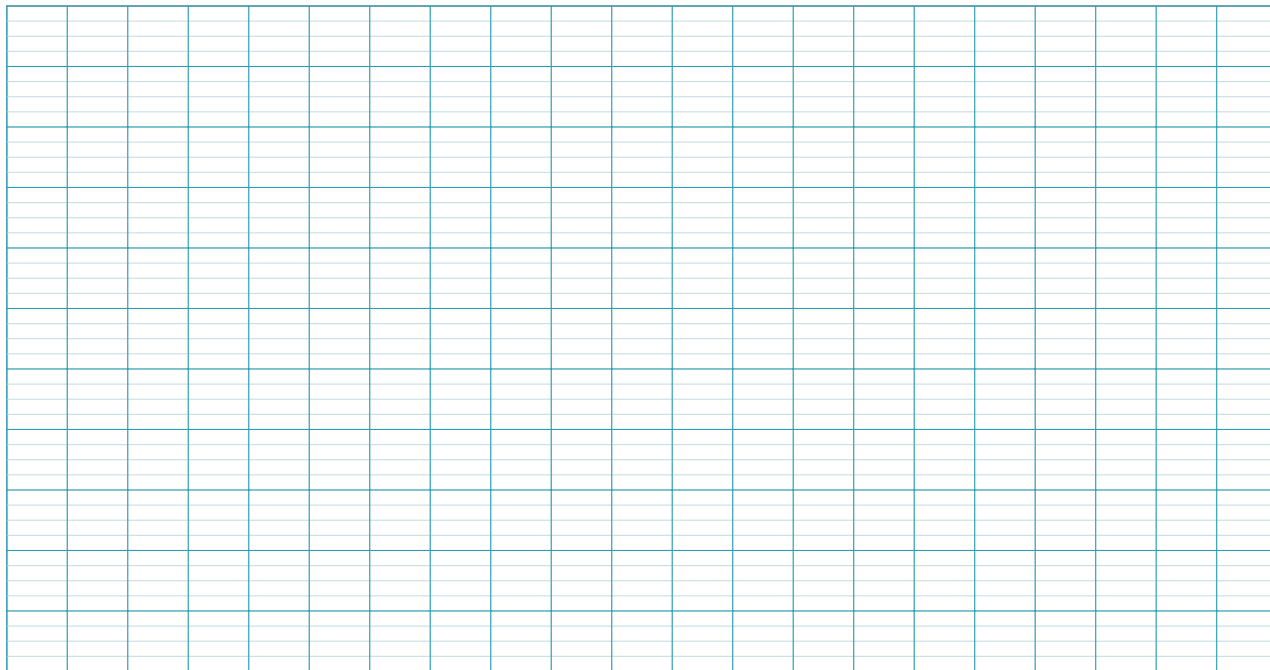
Procédure 1 : Utilisation des formes explicites des deux suites

Propriété

Si (u_n) est une suite **arithmétique** de raison r , alors pour tous entiers naturels n et m :

- $u_n = u_0 + n \times r$ (forme explicite)

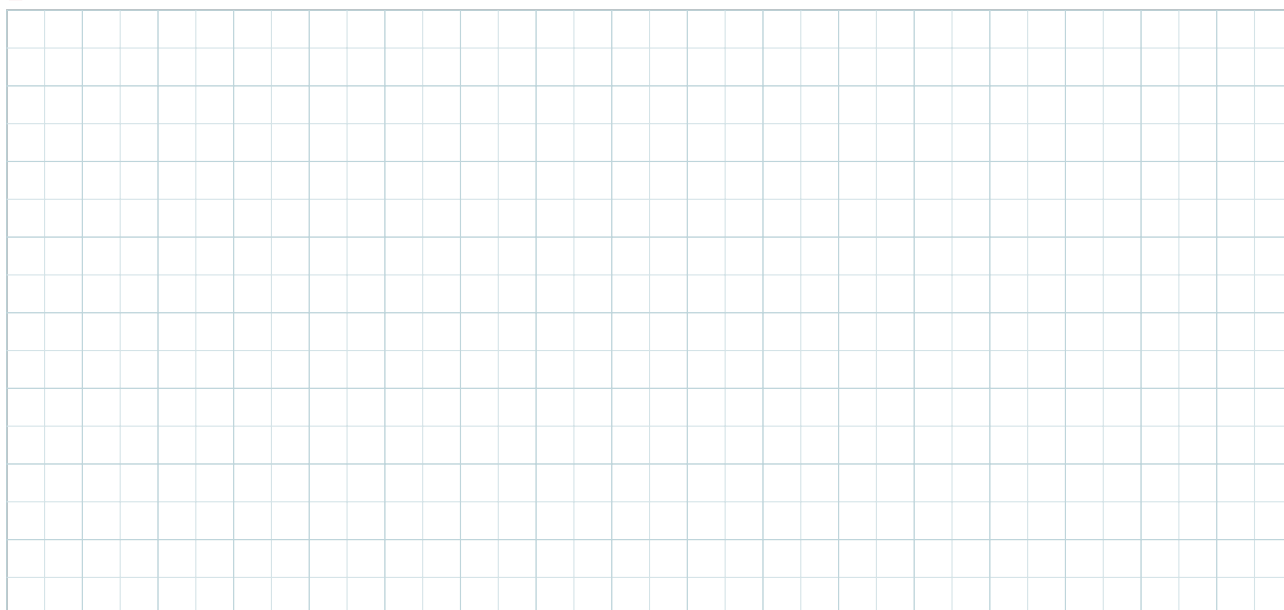
- $u_n = u_m + (n - m)r$



Procédure 2 : Utilisation des représentations graphiques des deux suites

Propriété

Si (u_n) est une suite **arithmétique** de raison r , alors, dans un repère, les points de coordonnées $(n ; u_n)$ sont alignés.



Procédure 3 : Utilisation d'un tableur

	A	B	C
1	n	U	V
2	0	800	580
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

Procédure 4 : Utilisation d'un algorithme**Python**

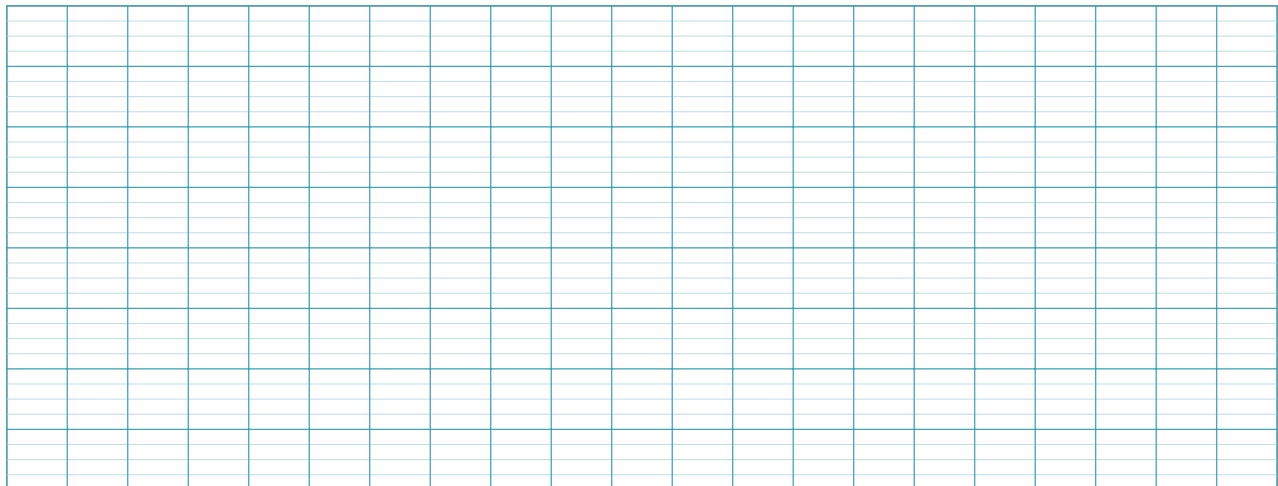
```

U = ...
V = ...
n = ...

while U ... V :
    U = ...
    V = ...
    n = ...

print(...)

```

**Exercice 2**

Mathieu a placé 4000 € sur un compte qui rapporte 2 % d'intérêts chaque année.

Julie a placé 3500 € sur un compte qui rapporte 3 % d'intérêts chaque année.

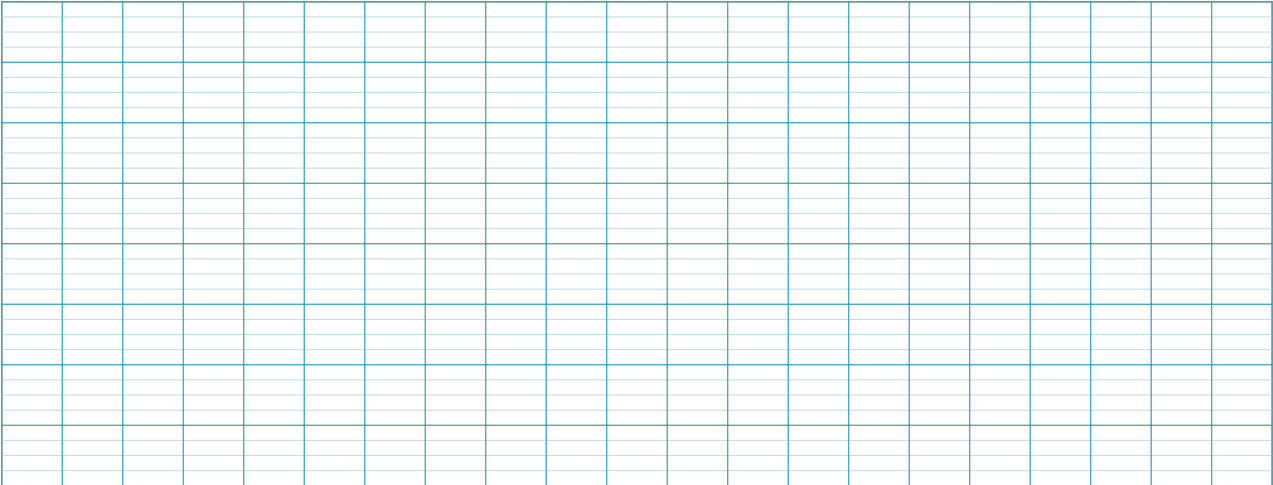
Au bout de combien d'années, Julie disposera-t-elle de plus d'argent que Mathieu ?

Modélisation de la situation avec des suites**Définition**

Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier n on a $u_{n+1} = q \times u_n$.

Le nombre q est appelé **raison** de la suite (u_n) .

Schéma général :

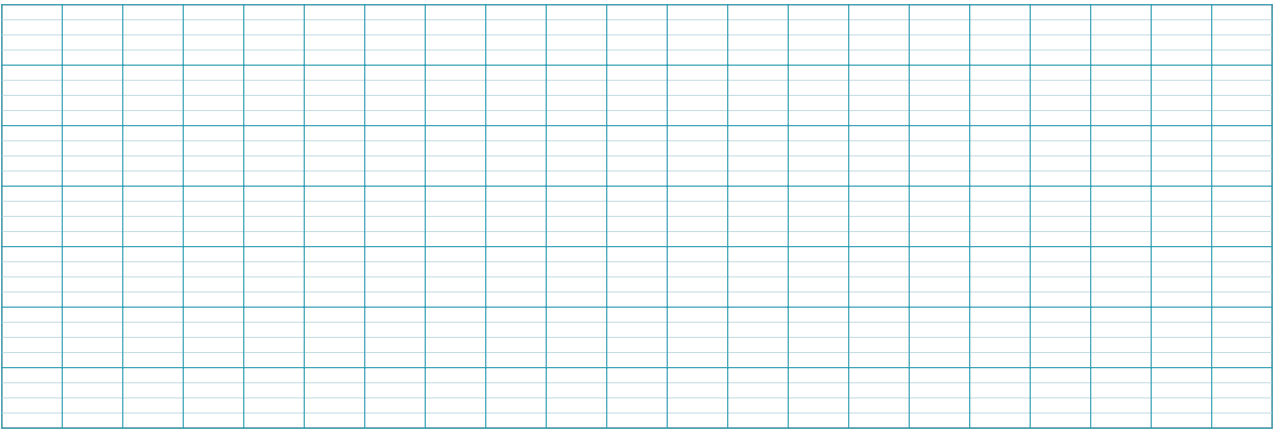


Procédure 1 : Utilisation des formes explicites des deux suites

Propriété

Si (u_n) est une suite **géométrique** de raison $q \neq 0$, alors pour tous entiers naturels n et m :

- $u_n = u_0 \times q^n$ (forme explicite)
- $u_n = u_m \times q^{n-m}$



Procédure 2 : Utilisation d'un tableur

	A	B	C
1	n	U	V
2	0	4000	3500
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

Procédure 3 : Utilisation d'un algorithme



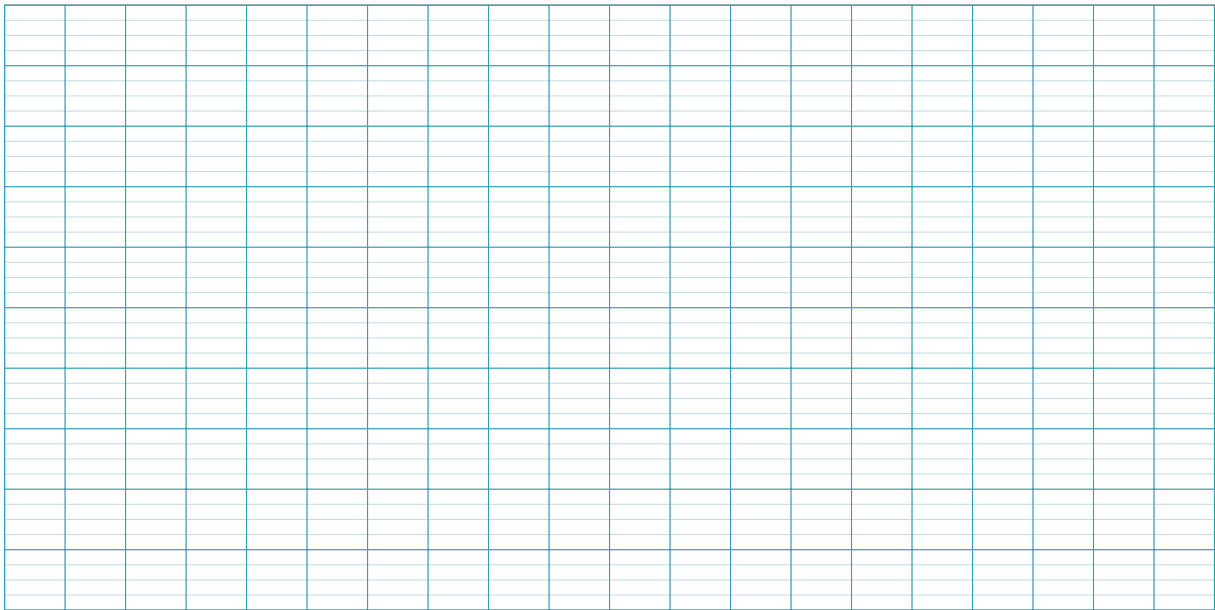
2 Sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique

Propriété

Soit u une suite arithmétique de raison r .

- si $r > 0$ alors u est croissante.
- si $r < 0$ alors u est décroissante.
- si $r = 0$ alors u est constante.

Preuve

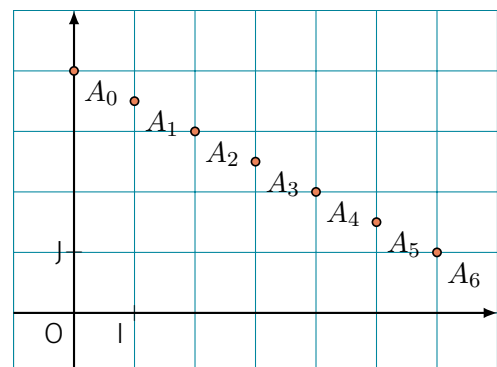


Exemple

Soit la suite α définie par

$$\begin{cases} \alpha_0 = 4 \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C'est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$, c'est donc une suite décroissante.



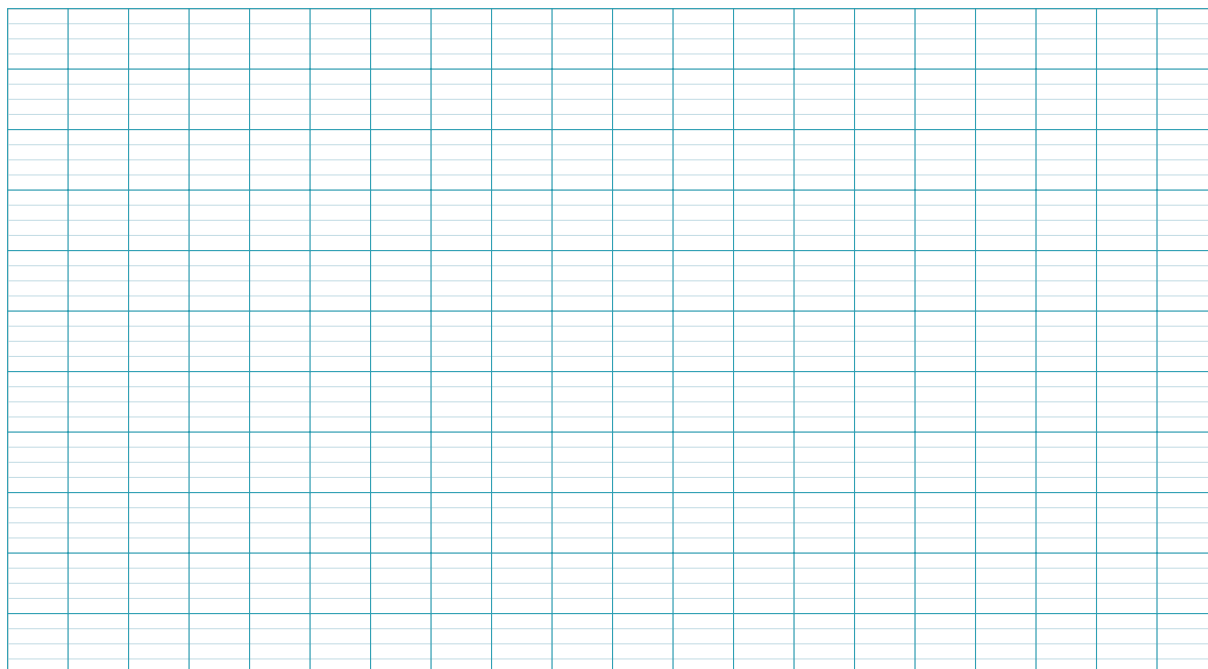
Propriété

Soit u une suite géométrique de raison q .

- Si $q < 0$ la suite n'est ni croissante ni décroissante.
- Si $q = 0$ la suite est nulle à partir de u_1 .
- Si $q = 1$ la suite est constante.

- Si $u_0 > 0$ alors
 - Si $q > 1$ la suite est croissante.
 - Si $0 < q < 1$ la suite est décroissante.
- Si $u_0 < 0$ alors
 - Si $q > 1$ la suite est décroissante.
 - Si $0 < q < 1$ la suite est croissante.

Preuve



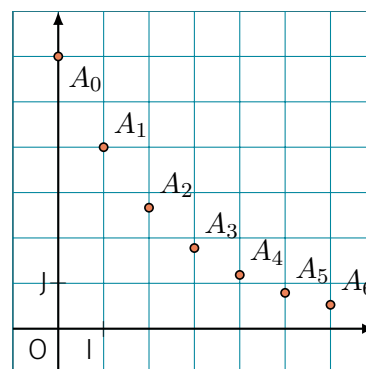
Exemples

La suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}$$

est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

Comme $u_0 > 0$ et que $0 < q < 1$, elle est décroissante.

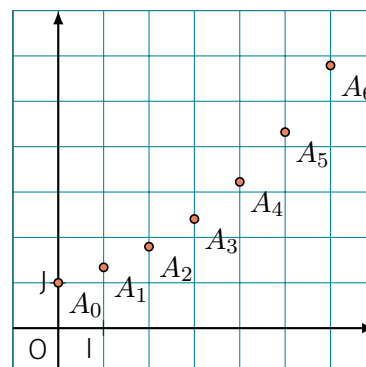


La suite v définie par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 1,34 v_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}$$

est une suite géométrique de raison $q = 1,34$.

Comme $u_0 > 0$ et que $q < 1$, elle est croissante.



3 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique

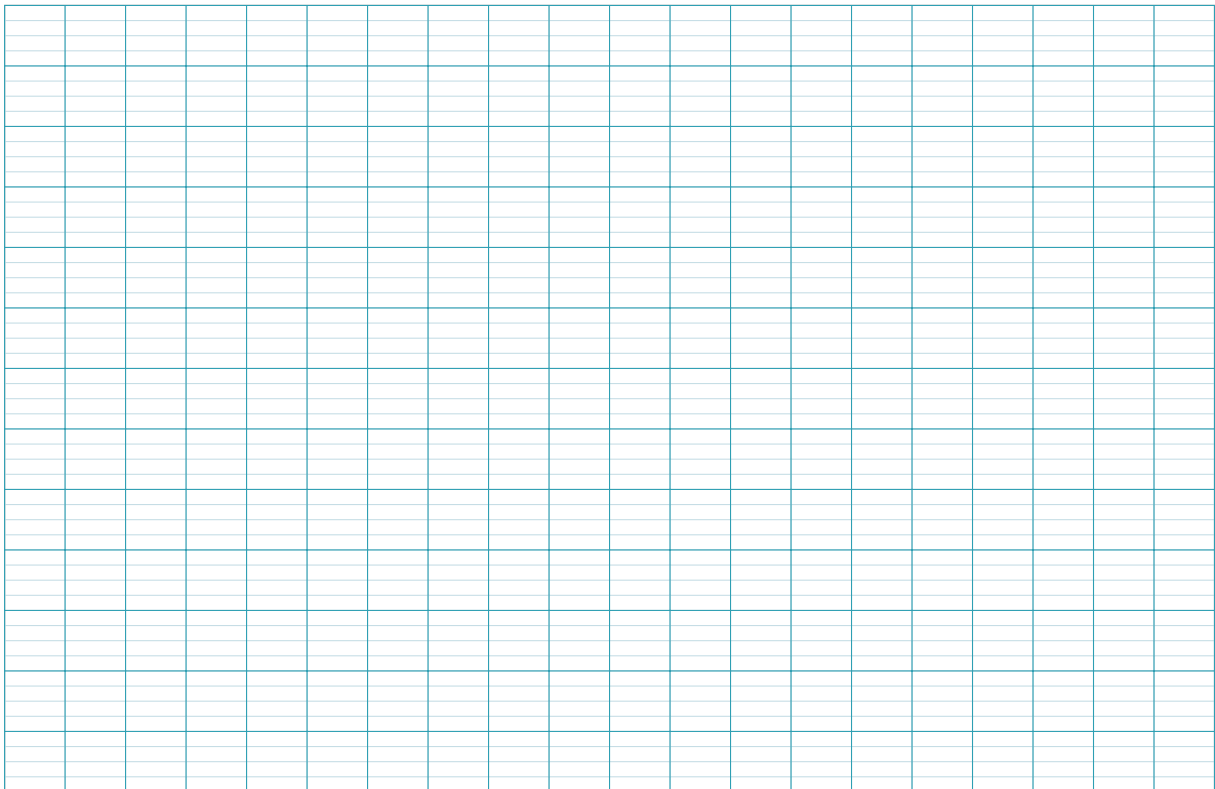
Sommes des termes d'une suite arithmétique

Propriété

Pour tout entier $n \geq 1$, $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

On note : $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Preuve



Démonstration en vidéo : <https://youtu.be/hHySWepnHwY>

Histoire



Une anecdote raconte que le jeune Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), alors âgé de 10 ans a utilisé cette astuce pour effectuer très rapidement et avant tous ses camarades un calcul donné par son instituteur. Il s'agissait de calculer la somme $1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

Pour en savoir plus : <https://youtu.be/pvKLXuueQTl>

Propriété : Somme des termes d'une suite arithmétique

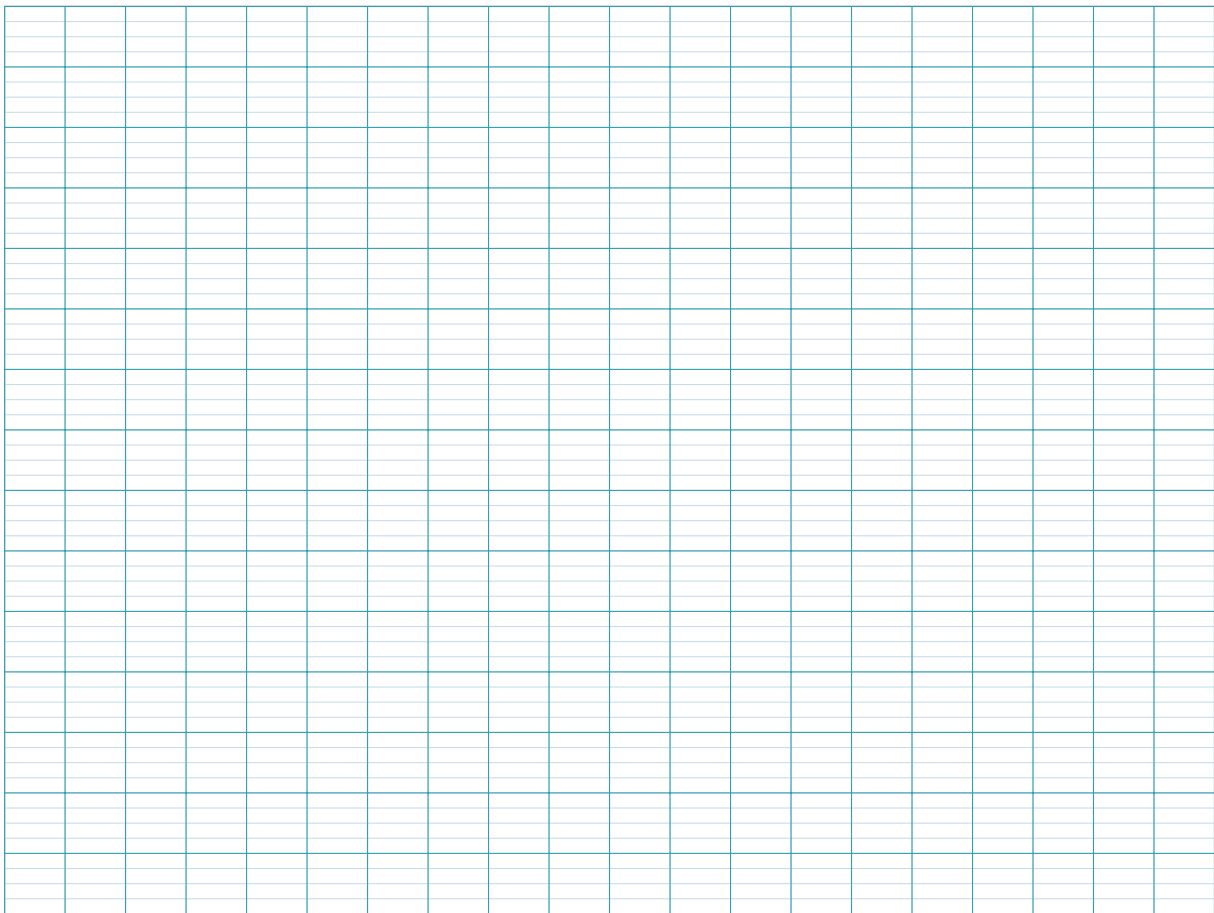
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .
Soient n et p deux entiers naturels, avec $n < p$.

- La somme des $n + 1$ premiers termes de la suite u_n est égale à :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

- La somme des termes d'indice p à n est égale à :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}$$

Preuve**Somme des termes d'une suite géométrique****Propriété**

Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

On note : $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Preuve

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $q \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

On note : $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$.

On a : $q \times S_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}$

D'où $S_n - qS_n = 1 + q - q + q^2 - q^2 + \dots + q^n - q^n - q^{n+1}$

$$1 \times S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$$

$$(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

Ainsi $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ en divisant par $1 - q$ car $q \neq 1$

Propriété : Somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 .

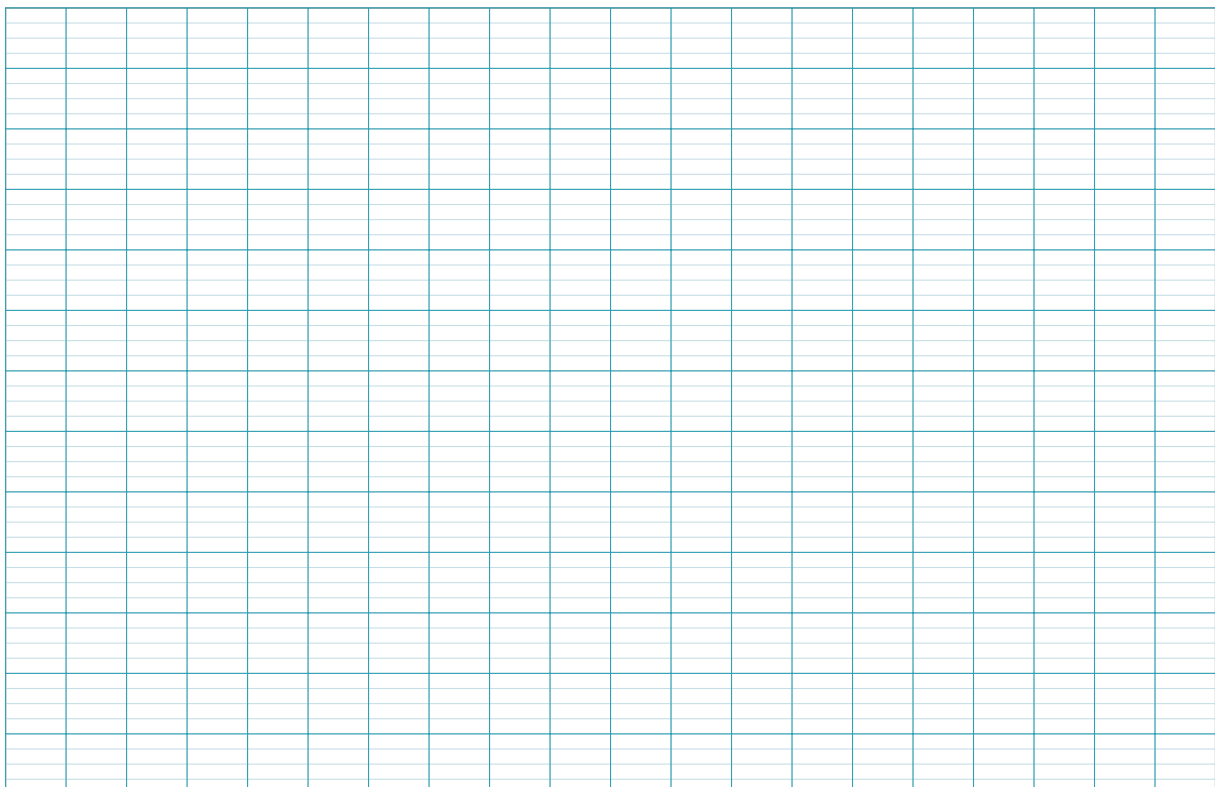
Soient n et p deux entiers naturels, avec $n < p$.

- La somme des $n + 1$ premiers termes de la suite u_n est égale à :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

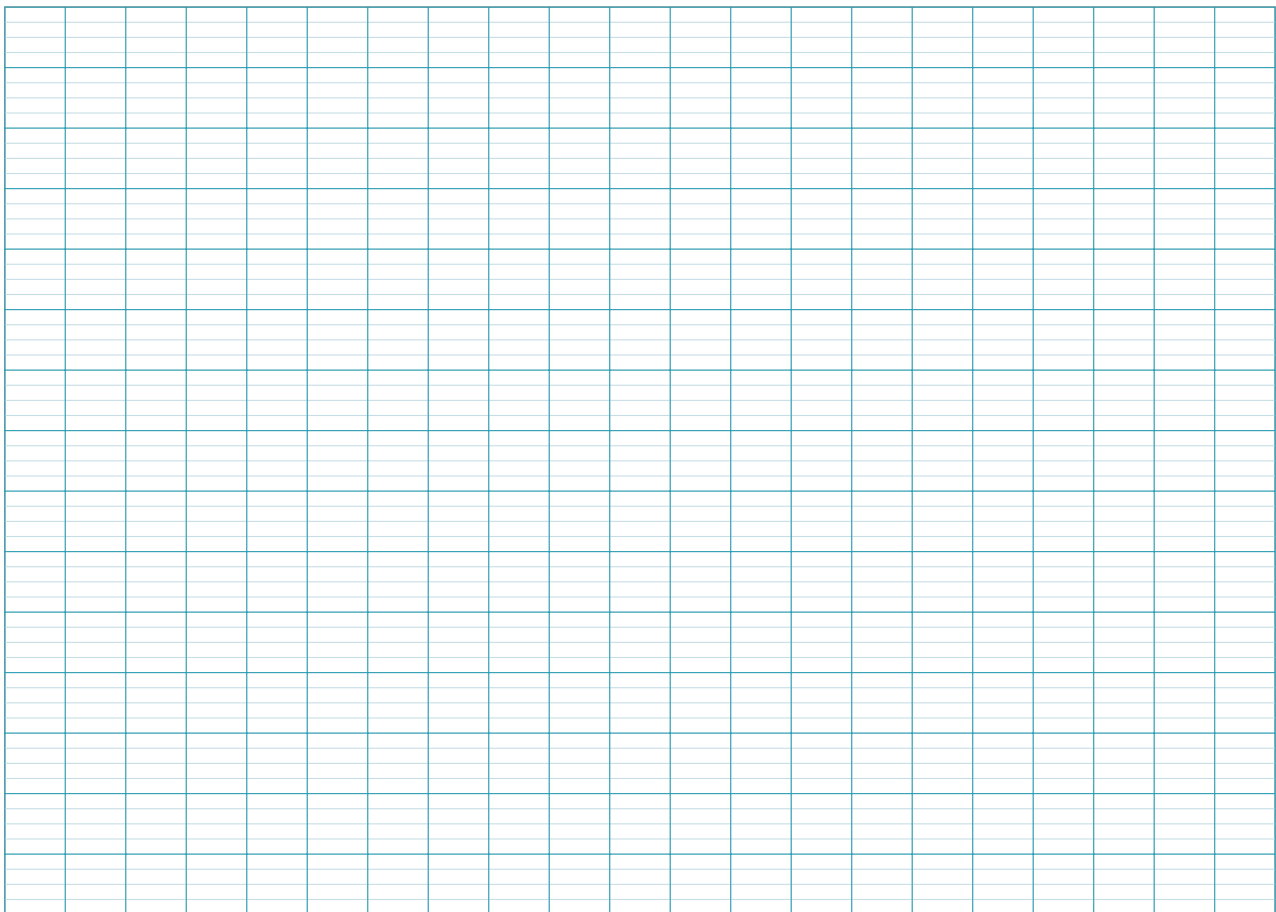
- La somme des termes d'indice p à n est égale à :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Preuve

Exemples

1. Calculer $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 75$.
2. Calculer $S_2 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^9$.
3. La suite (u_n) est arithmétique avec $u_3 = 3$ et $u_9 = 15$.
Calculer $u_3 + u_4 + \dots + u_9$
4. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $v_0 = 3$.
Calculer la somme des dix premiers termes de la suite (v_n) .



Exercice 3

Alice a deux propositions de salaires lors de son arrivée dans une entreprise le 1^{er} janvier 2023 :

- **Proposition 1 :** Elle commence avec un salaire de 2000 € mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 115 €.
- **Proposition 2 :** Elle commence avec un salaire de 2000 € mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 5%.

Afin de se constituer un pécule pour faire le tour du monde en 2033, Alice souhaite mettre de côté **UN** salaire mensuel par an jusqu'à son départ.

Quelle proposition lui conseillez-vous de choisir ?