Ceinture marron 02 - Corrigé

Exercice 1 : Utiliser la forme canonique pour résoudre une équation du second degré

> Résoudre dans **R** l'équation $2x^2 + 3x - 5 = 0$ sans utiliser le discriminant, mais en utilisant la forme canonique du polynôme.

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + 3x - 5 = 0 \quad (1)$.
On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,
On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici 2.

$$(1) \iff \quad x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$$

On en déduit que : $x^2 + \dfrac{3}{2}x = \left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{9}{16}$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \\ \iff \quad & \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{5}{2} = 0 \\ \iff \quad & \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:
avec $a = \left(x + \dfrac{3}{4}\right)$ et $b = \dfrac{7}{4}$
L'équation à résoudre est équivalente à :

$$\left(x + \frac{3}{4} - \frac{7}{4}\right)\left(x + \frac{3}{4} + \frac{7}{4}\right) = 0$$

$$(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = 0$$

On applique la propriété du produit nul :
Soit $x - 1 = 0$, soit $x + \dfrac{5}{2} = 0$
Soit $x = 1$, soit $x = -\dfrac{5}{2}$

$$S = \left\{-\frac{5}{2} ; 1\right\}$$