Chapitre 2

Fonctions : limites et continuité

1 Rappels sur la dérivation

Dérivées des fonctions de référence

Propriété

On note D_f l'ensemble de définition de la fonction f et $D_{f'}$ son ensemble de dérivabilité.

Fonction f définie par :	D_f	Fonction dérivée f' définie par :	$D_{f'}$
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$, avec $m, p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$

Fonctions dérivées et opérations

Propriété

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle ouvert I et k un nombre réel.

- La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.
- La fonction ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.
- La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$.
- Si, pour tout $x \in I, v(x) \neq 0$, alors :
  - la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
  - la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Propriété

Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels et soit J l'intervalle tel que pour tout $x \in J, ax+b \in I$.

La fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ est définie et dérivable sur J et $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Sens de variation, extremum local et dérivée

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de point où elle s'annule), alors la fonction f est **strictement croissante** sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de point où elle s'annule), alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I.

Propriété

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert i et c un réel appartenant à I.
Si f' **s'annule et change de signe** en c, alors $f(c)$ est un **extremum local** de f.

Exemples

On considère une fonction f définie sur un intervalle $]a\ ;\ b[$ contenant c.

x	a		c		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

$f(c)$ est un minimum local.

x	a		c		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	

$f(c)$ est un maximum local.

2 La fonction exponentielle

Définition de la fonction exponentielle

Propriété

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\text{pour tout nombre réel } x \quad f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Définition

La **fonction exponentielle** est la fonction, notée exp, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$.

Propriétés algébriques

Propriété

La fonction exponentielle est **strictement positive** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Propriété : Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels x et y, $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$.

Preuve

Soit y un nombre réel fixé.
On définit la fonction f par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{[\exp(x)]^2} = 0$$

On en déduit que f est une fonction **constante**. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) = \exp(y)$.
On a donc montré que $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$. Ainsi $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Propriété

Pour tout nombre réel x, $\quad \exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad$ et $\quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Preuve

Soit x un nombre réel. On applique le théorème précédent à x et $-x$. On obtient :

$$\begin{aligned}\exp(x) \times \exp(-x) &= \exp(x - x)\\ &= \exp(0)\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ et $\exp(-x)$ sont inverses l'un de l'autre. Donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Propriété

Pour tous nombres réels x et y, $\quad \exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Propriété (admise)

Pour tout réel x et tout entier relatif n, $\quad \boxed{[\exp(x)]^n = \exp(nx)}$.

Exemples

- $\begin{aligned}\exp(3) \times \exp(7) &= \exp(3 + 7)\\ &= \exp(10)\end{aligned}$
- $\exp(-5) = \dfrac{1}{\exp(5)}$
- $\begin{aligned}(\exp(2))^4 &= \exp(4 \times 2)\\ &= \exp(8)\end{aligned}$

Le nombre e

Définition

On note $\quad \exp(1) = e$

Remarques

- e est un nombre réel irrationnel.
- $e \approx 2,718$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n = e^n$.

Notation

Par extension, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on notera : $\quad \exp(x) = e^x$.

Propriété

Avec cette notation, les propriétés vues précédemment s'écrivent :
Pour tous x, y réels et tout n entier relatif,

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^x \times e^{-x} = 1$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

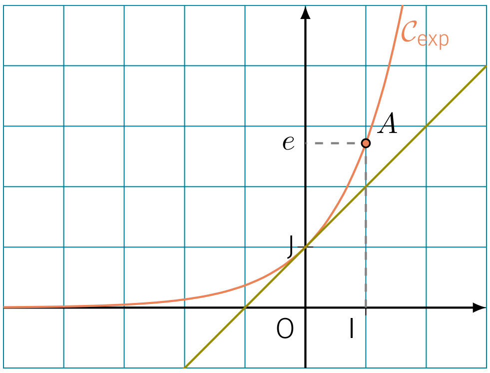
Exemple

$$\begin{aligned}\frac{\left(e^7\right)^4 \times e^3}{e^4} &= \frac{e^{7\times 4} \times e^3}{e^4}\\ &= \frac{e^{28} \times e^3}{e^4}\\ &= e^{28+3-4}\\ &= e^{27}\end{aligned}$$

Variations de la fonction exponentielle

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur **R**.



Preuve

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.
la fonction dérivée de la la fonction exponentielle est strictement positive sur **R** donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur **R**.

Propriété

Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction f sur **R** par $f(x) = e^{ax+b}$.
La fonction f est dérivable sur **R** et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = a\, e^{ax+b}$.

Preuve

Soient a et b deux nombres réels.
La dérivée de f définie par $f(x) = g(ax+b)$ était donnée par : $f'(x) = a\, g'(ax+b)$.
On applique cette propriété avec $g = \exp$ et on obtient le résultat.

Exemple

Étude des variations d'une fonction :
La fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = -3\,e^{2x-5} + 1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 \times \left(-3\,e^{2x-5}\right) + 0 \\ &= -6\,e^{2x-5} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^{2x-5} > 0$, donc $h'(x) < 0$.
La fonction h est donc strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

Applications : résolutions d'équations et d'inéquations

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b :

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a < e^b \iff a < b$

Exemples

- **Résolution d'équation :**
  Résoudre dans $\mathbf{R}$ $e^{2x} = \dfrac{1}{e}$
  Soit $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} e^{2x} = \frac{1}{e} &\iff e^{2x} = e^{-1} \\ &\iff 2x = -1 \\ &\iff x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

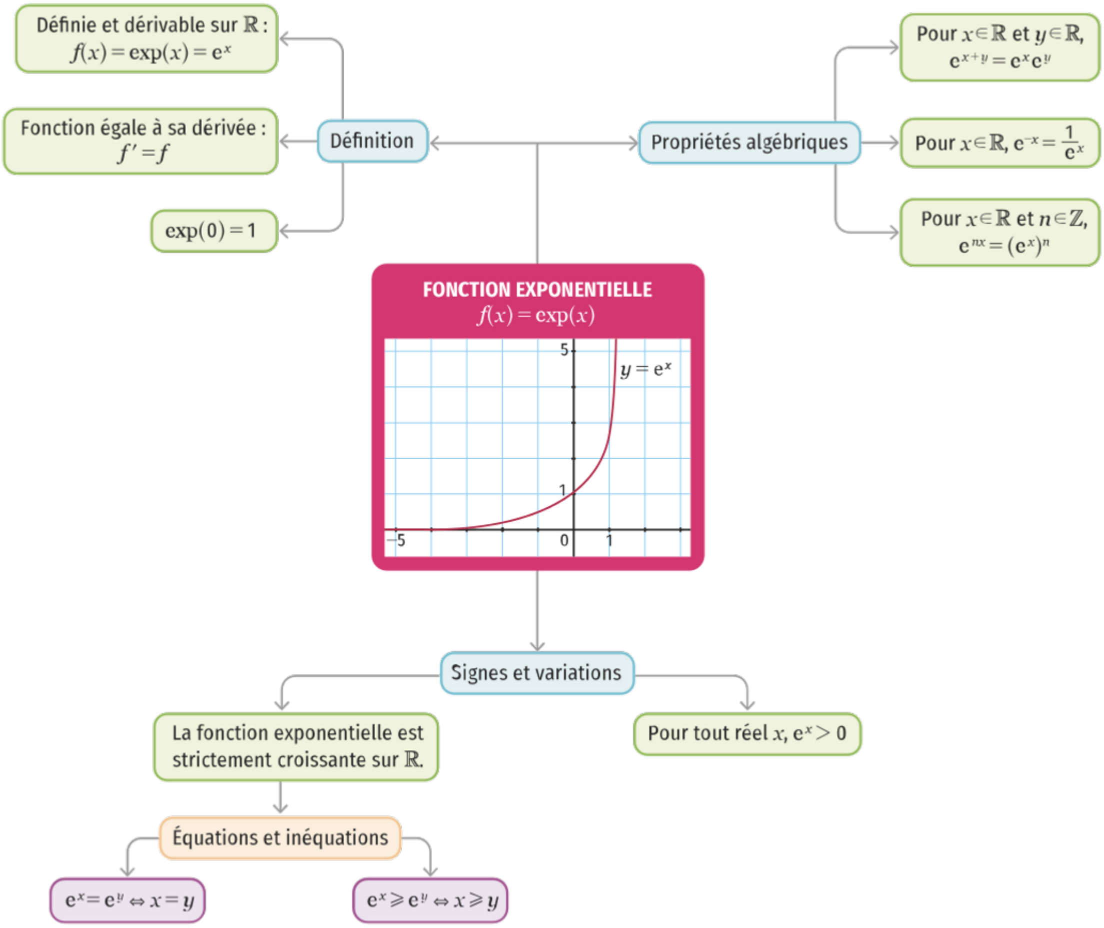
  L'équation $e^{2x} = \dfrac{1}{e}$ a pour unique solution $-\dfrac{1}{2}$.

- **Résolution d'inéquation :**
  Résoudre dans $\mathbf{R}$ $e^{-3x+4} + 1 \geqslant 2$.
  Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{-3x+4} + 1 \geqslant 2 &\iff e^{-3x+4} \geqslant 1 \\ &\iff e^{-3x+4} \geqslant e^0 \\ &\iff -3x + 4 \geqslant 0 \\ &\iff x \leqslant \frac{4}{3} \end{aligned}$$

  L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-3x+4} + 1 \geqslant 2$ est l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{4}{3}\right]$.

À retenir



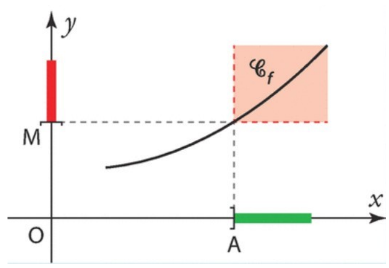
3 Limite d'une fonction en l'infini

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur l'intervalle considéré. La courbe représentative de f est notée $\mathcal{C}_f$ et n désigne un entier naturel non nul.

Définition : Limite infinie

On dit que la fonction f a pour **limite** $+\infty$ **en** $+\infty$ lorsque tout intervalle $]M\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand (c'est à dire lorsque x appartient à un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$). On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Remarque

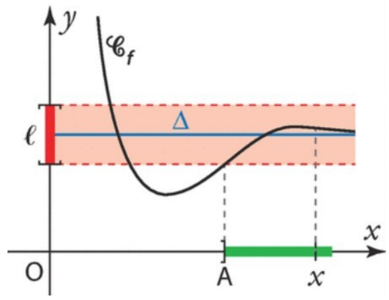
On définit de façon analogue : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Définitions : Limite finie et asymptote horizontale

Soit ℓ un nombre réel.
On dit que la fonction f a pour **limite** ℓ **en** $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand (c'est à dire lorsque x appartient à un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$). On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

La droite Δ d'équation $y = \ell$ est alors **asymptote horizontale** à la courbe $\mathcal{C}_f$.



Remarque

On définit de façon analogue : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Propriété : limites des fonctions usuelles

$f(x)$	x^2	x^3	x^n	$\sqrt{x}$	e^x	e^{ax}	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $a>0$ 0 si $a<0$	0	0	0	0
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non définie sur $]-\infty\ ;\ 0[$	0	0 si $a>0$ $-\infty$ si $a<0$	0	0	0	non définie sur $]-\infty\ ;\ 0]$

4 Limite d'une fonction en un nombre réel

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur l'intervalle considéré. Le nombre réel a appartient ou est une borne de l'ensemble de définition de f. La courbe représentative de f est notée $\mathcal{C}_f$ et n désigne un entier naturel non nul.

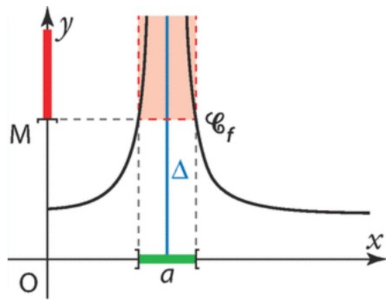
Limite infinie en un réel

Définitions : Limite infinie et asymptote verticale

On dit que la fonction$f$ a pour **limite** $+\infty$ **en** a lorsque tout intervalle $]M\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a (c'est-à-dire pour totus les x d'un intervalle ouvert contenant a). On note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

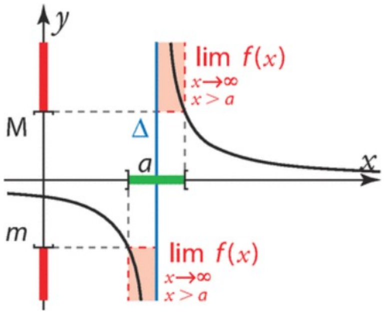
La droite Δ d'équation $x = a$ est alors une **asympote verticale** à la courbe $\mathcal{C}_f$.



Remarques

- On définit de manière analoque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- Lorsque la limite en a n'existe pas, on peut définir une limite à droite ou à gauche de a. On les note :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \left(\text{ou } \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \to a^-} f(x)\right)$$



5 Opérations sur les limites

Dans cette partie, f et g sont deux fonctions, a est un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$ et ℓ et ℓ' sont deux réels.

Propriété : Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)]$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemples

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

  Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 3 + \dfrac{1}{x} = +\infty$.
- On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

  On ne peut pas conclure pour $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x$. On a affaire à une **forme indéterminée**.

Propriété : Limite d'un produit

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} [f(x) \times g(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$.

Par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

Remarque

On a levé la forme indéterminée vue lors de l'exemple page 9.

Pour $x < 0$, on a : $\quad x^2 + x = x^2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Pour lever l'indétermination dans le cas d'un polynôme, on met en facteur le terme de plus haut degré.

Propriété : Limite d'un quotient

- Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemples

- On a $\lim\limits_{x \to -2^-} 2x + 1 = -3$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} x + 2 = 0^-$.

  Par quotient $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{2x+1}{x+2} = +\infty$.

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 = +\infty$.

  On ne peut pas conclure pour $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x+2}$. On a affaire à une **forme indéterminée**.

Exercice 1

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, réécrire le quotient $\dfrac{2x+1}{x+1}$ en factorisant par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x+2}$.

Déterminer des limites par comparaison

Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a\,;\,+\infty[$ (avec a réel) et ℓ un nombre réel.

Si :
- pour tout $x \in]a\,;\,+\infty[$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Théorème de comparaison

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a\,;\,+\infty[$ (avec a réel).

Si :
- pour tout $x \in]a\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant g(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si :
- pour tout $x \in]a\,;\,+\infty[$, $f(x) \leqslant h(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque

On a des propriétés similaires de limites en $-\infty$ et en a.

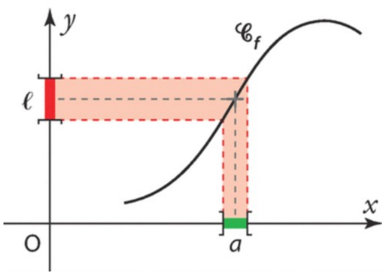
6 Continuité d'une fonction

Définitions

Définition : Limite finie

Soit ℓ un nombre réel.
On dit que la fonction f a pour **limite ℓ en a** lorsque tout intervalle ouverte contenant ℓ contient toute les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$



Définitions

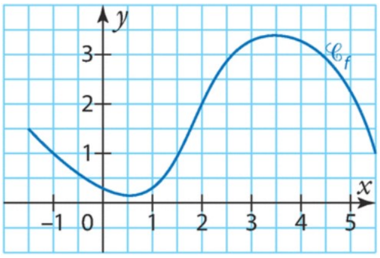
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

- On dit que f est **continue en** a lorsque f a une limite en a égale à $f(a)$ (c'est-à-dire lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$).
- On dit que f est **continue sur l'intervalle** I lorsque f est continue en tout réel a de I.

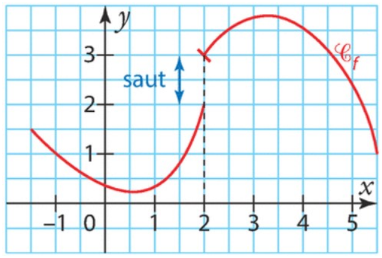
Remarque

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que la courbe représentative de f peut se tracer « sans lever le crayon ».

Exemples



La fonction f est continue sur son intervalle de définition.



La fonction f n'a pas de limite en 2.
f n'est pas continue en 2, elle n'est donc pas continue sur son intervalle de définition.

Propriété : Continuité et dérivabilité

Soient f sur fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

- Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
- Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Remarques

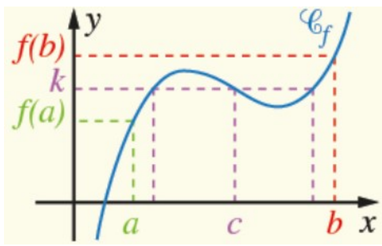
- La réciproque de cette propriété est fausse.
- L'intérêt de cette propriété est de pouvoir affirmer qu'une fonction est continue sachant que cette fontion est dérivable.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient f une fonction **continue** sur un intervalle I et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



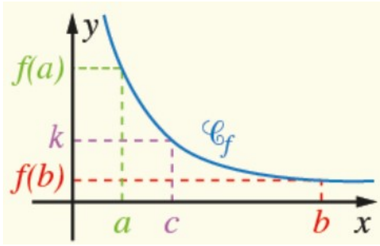
En d'autres termes, cela signifie que pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.

Fonctions continues strictement monotones

Propriété : Théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intevalle I et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

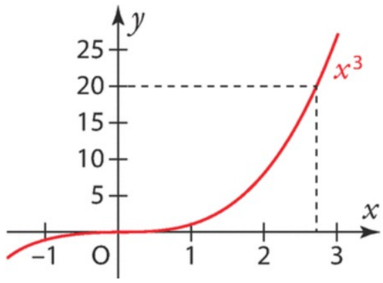


En d'autres termes, cela signifie que pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution comprise entre a et b.

Exemple

L'équation $x^3 = 20$ admet une unique solution sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ car :

- la fonction cube $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et continue sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$;
- 20 est compris entre $\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$.



Méthode : Résoudre une équation à l'aide d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $I = [-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.
On veut montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution dans $[-2\ ;\ +\infty[$.

- **On commence par étudier les variations de la fonction f sur $[-2\ ;\ +\infty[$:**

  Soit $x \in [-2\ ;\ +\infty[$.

  $$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \times 2x \\ &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

  $$f'(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

  On a donc le tableau de variations :

x	-2		0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗		↘		↗	

  On le complète avec les extremums locaux et les limites.

  On a : $f(-2) = -17$; $f(0) = 3$ et $f(2) = -1$.

  On calcule la limite de f en $+\infty$:

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 = -\infty$, on ne peut pas conclure à l'aide de somme de limites.

On factorise le polynôme f par son terme de plus haut degré.

Soit $x \in [-2\ ;\ +\infty[$ $\quad f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^3}\right)$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{x^3} = 1$.

Par produit de limites, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On a finalement le tableau de variations :

x	-2		0		2		$+\infty$
Variations de f	-17	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- **On applique le théorème des valeurs intermédiaires**

Sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, la fonction f est majorée par 3, donc l'équation $f(x) = 5$ n'admet pas de solution dans $[-2\ ;\ 2]$.

Sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, la fonction f est **continue** et **strictement croissante**. De plus 5 est compris entre $f(2) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires** l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[2\ ;\ +\infty[$.

En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice avec un pas de 0,1 on trouve $3,1 < \alpha < 3,2$.

Propriété et définition : Fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J.
Il existe une fonction définie sur J et à valeurs dans I, appelée **fonction réciproque de f** et notée f^{-1} telle que

pour tous réels $x \in I$ et $y \in J$, l'égalité $f(x) = y$ est équivalente à $x = f^{-1}(y)$.

Exemple

La fonction f définie sur $I = [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2$ est dérivable donc **continue** sur I et strictement croissante sur I.
Elle prend ses valeurs dans $J = [0\ ;\ +\infty[$.

Pour tous $x \in I$ et $y \in J$, $\quad y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{y} = x$.

Donc la fonction réciproque de f est f^{-1} la fonction racine carrée.