Une descente infinie

Dans tout l'exercice, α désigne un entier naturel supérieur ou égal à 4. On considère l'équation (E) ci-dessous dont l'inconnue est le triplet d'entiers relatifs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$.

$$(E) : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$$

Le but de l'exercice est de démontrer que le seul triplet dans $\mathbb{Z}^3$ solution de (E) est $(0, 0, 0)$.

Partie 1

Soient b et c deux réels. On considère la fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $P(x) = x^2 + bx + c$.
Un réel r tel que $P(r) = 0$ est appelé *racine* de P. On suppose dans cette partie que P admet deux racines distinctes, r_1 et r_2. Ainsi, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ pour tout réel x.

1. Exprimer b et c en fonction de r_1 et r_2.
2. On suppose ici $b \leqslant 0$ et $c \geqslant 0$.
   Que peut-on dire du signe de r_1 et r_2 ?

Partie 2

1. a. On suppose que le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ est solution de l'équation (E). Montrer que $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de (E).
   Pour x réel, $|x|$ désigne la *valeur absolue* de x et vaut x si x est positif et $-x$ si x est négatif.
   b. En déduire que, s'il existe un triplet d'entiers relatifs différent de $(0, 0, 0)$ solution de l'équation (E), alors il existe un triplet d'entiers naturels différent de $(0, 0, 0)$ solution de l'équation (E).
2. Si le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ est solution de l'équation (E), que dire du triplet (x_2, x_1, x_3) ?
3. En déduire que, si l'équation (E) admet une solution dans $\mathbb{Z}^3$ différente du triplet $(0, 0, 0)$, alors elle admet une solution (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbb{N}^3$ différente du triplet $(0, 0, 0)$ et telle que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$.