Second degré - Corrigé des exercices

Plusieurs formes pour un même polynôme

Exercice 1

Donner la forme développée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x)=(x-1)(x-2)$.
- $g(x)=(x-3)(x-4)$.
- $l(x)=7(x+2)(x-5)$.
- $m(x)=-3x(x-2)$.
- $k(x)=(x-\sigma_1)(x-\sigma_2)$ où σ_1 et σ_2 sont deux réels.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)\\ &= x\times x + x\times(-2) - 1\times x - 1\times(-2)\\ &= x^2-2x-x+2\\ &= x^2-3x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-3)(x-4)\\ &= x\times x + x\times(-4) - 3\times x - 3\times(-4)\\ &= x^2-4x-3x+12\\ &= x^2-7x+12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(x) &= 7(x+2)(x-5)\\ &= 7\left(x^2-5x+2x-10\right)\\ &= 7\left(x^2-3x-10\right)\\ &= 7x^2-21x-30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(x) &= -3x(x-2)\\ &= -3x\times x - 3x\times(-2)\\ &= -3x^2+6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(x) &= (x-\sigma_1)(x-\sigma_2)\\ &= x\times x + x\times(-\sigma_2) - \sigma_1\times x - \sigma_1\times\sigma_2\\ &= x^2-\sigma_2 x-\sigma_1 x+\sigma_1\,\sigma_2\\ &= x^2-(\sigma_1+\sigma_2)\,x+\sigma_1\,\sigma_2 \end{aligned}$$

Exercice 2

Donner la forme développée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x)=(x+1)^2+1$
- $g(x)=3(x-1)^2+7$.
- $h(x)=-2(x+7)^2+2$.
- $k(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.
- $l(x)=(x-\alpha)^2+\beta$ où α et β sont deux réels.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2+1\\ &= x^2+2\times x\times 1+1^2+1\\ &= x^2+2x+1+1\\ &= x^2+2x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 3(x-1)^2+7\\ &= 3\left(x^2-2\times x\times 1+1^2\right)+7\\ &= 3\left(x^2-2x+1\right)+7\\ &= 3x^2-6x+3+7\\ &= 3x^2-6x+10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= -2(x+7)^2+2 \\ &= -2\left(x^2+2\times x\times 7+7^2\right)+2 \\ &= -2\left(x^2+14x+49\right)+2 \\ &= -2x^2-28x-98+2 \\ &= -2x^2-28x-96 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \\ &= x^2-2\times x\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \\ &= x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} \\ &= x^2-x+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(x) &= (x-\alpha)^2+\beta \\ &= x^2-2\times x\times\alpha+\alpha^2+\beta \\ &= x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta \end{aligned}$$

Exercice 3

Regrouper les expressions égales

- $2x^2-10x+12$
- $2x^2-14x+20$
- $2x^2-16x+30$
- $2(x-2)(x-5)$
- $2(x-2)(x-3)$
- $2(x-3)(x-5)$
- $2\,(x-4)^2-2$
- $2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$
- $2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

On développe les formes factorisées :

- $$\begin{aligned} 2(x-2)(x-5) &= 2\left(x^2-5x-2x+10\right) \\ &= 2\left(x^2-7x+10\right) \\ &= 2x^2-14x+20 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 2(x-2)(x-3) &= 2\left(x^2-3x-2x+6\right) \\ &= 2\left(x^2-5x+6\right) \\ &= 2x^2-10x+12 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 2(x-3)(x-5) &= 2\left(x^2-5x-3x+15\right) \\ &= 2\left(x^2-8x+15\right) \\ &= 2x^2-16x+30 \end{aligned}$$

On développe les formes canoniques :

- $$\begin{aligned} 2\,(x-4)^2-2 &= 2\left(x^2-2\times x\times 4+4^2\right)-2 \\ &= 2\left(x^2-8x+16\right)-2 \\ &= 2x^2-16x+32-2 \\ &= 2x^2-16x+30 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{2} &= 2\left(x^2-2\times x\times\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2\right)-\frac{9}{2} \\ &= 2\left(x^2-7x+\frac{49}{4}\right)-\frac{9}{2} \\ &= 2x^2-14x+\frac{49}{2}-\frac{9}{2} \\ &= 2x^2-14x+\frac{40}{2} \\ &= 2x^2-14x+20 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{2} &= 2\left(x^2-2\times x\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{2} \\ &= 2\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)-\frac{1}{2} \\ &= 2x^2-10x+\frac{25}{2}-\frac{1}{2} \\ &= 2x^2-10x+\frac{24}{2} \\ &= 2x^2-10x+12 \end{aligned}$$

D'où :

- $2x^2-10x+12 \;=\; 2(x-2)(x-3) \;=\; 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$
- $2x^2-14x+20 \;=\; 2(x-2)(x-5) \;=\; 2\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$

- $= 2x^2 - 16x + 30 \;=\; 2(x-3)(x-5) \;=\; 2\,(x-4)^2 - 2$

Exercice 4

Suivre le modèle suivant pour écrire les polynômes suivants sous forme canonique.
Modèle :

$f(x) = x^2 + 2x + 7$	on isole les 2 premiers termes ;
$= (x^2 + 2x) + 7$	entre parenthèses, on voit le début d'une identité remarquable ;
$= (x^2 + 2 \times x \times 1) + 7$	il manque juste le 1^2, donc on écrit
$= \left(x^2 + 2 \times x \times 1 \boxed{+1^2 - 1^2}\right) + 7$	et grâce à cette astuce
$= \left((x+1)^2 - 1\right) + 7$	rassemblons les constantes ;
$= (x+1)^2 + 6$	et voilà une forme canonique !

- $f(x) = x^2 + 2x - 3.$
- $g(x) = x^2 + 4x + 1.$
- $h(x) = x^2 + 6x - 9.$
- $k(x) = x^2 - 2x - 1$
- $l(x) = x^2 - 8x + 10.$
- $m(x) = x^2 + 7x - 1.$

Soit x un nombre réel.

- $$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x - 3 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1^2 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 1 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + 4x + 1 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 + 1 \\ &= (x+2)^2 - 4 + 1 \\ &= (x+2)^2 - 3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} h(x) &= x^2 + 6x - 9 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2 - 9 \\ &= (x+3)^2 - 9 - 9 \\ &= (x+3)^2 - 18 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} k(x) &= x^2 - 2x - 1 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1^2 - 1 \\ &= (x-1)^2 - 1 - 1 \\ &= (x-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} l(x) &= x^2 - 8x + 10 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 - 4^2 + 10 \\ &= (x-4)^2 - 16 + 10 \\ &= (x-4)^2 - 6 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} m(x) &= x^2 + 7x - 1 \\ &= x^2 - 2 \times x \times \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 1 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} - \frac{4}{4} \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{53}{4} \end{aligned}$$