Préparation de l'évaluation-bilan 5

T^ale^Comp

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $[1 ; 25]$ par $f(x) = \dfrac{x+2-\ln(x)}{x}$.

   a. Démontrer que, pour tout réel x de $[1 ; 25]$: $\quad f'(x) = \dfrac{-3+\ln(x)}{x^2}$.

   b. Résoudre dans $[1 ; 25]$ l'inéquation $-3+\ln(x) > 0$.

   c. En déduire le tableau de variations de f sur $[1 ; 25]$.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2500 pièces electroniques.
   On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièces est de $f(x)$ euros, où f est la fonction définie à la question précédente.

   a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

   b. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

Exercice 2

Une commune dispose de 380 vélos qu'elle loue chaque mois.
Le nombre de vélos loués le n^{e} mois après le mois de janvier 2025 est modélisé par la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = -140 \times 0,9^n + 420$$

1. a. Calculer u_0 et u_1 puis interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

   b. Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

2. La commune envisage d'acheter des vélos supplémentaires pour répondre à la demande. La responsable de souhaite prévoir la date à partir de laquelle le nombre de vélos sera insuffisant.

   a. Utiliser la fonction ln pour résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $-140 \times 0,9^n + 420 > 380$.

   b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

Le niveau sonore N, en décibels (dB), d'un bruit, à une distance D, en m, de sa source, dépond de la puissance sonore P, en watts (W), de la source. Il est donnée par la relation :

$$N = 120 + 4\ln\left(\frac{P}{13 \times D^2}\right)$$

1. On donne $N = 84$ dB et $D = 10$ m. Calculer la puissance sonore P, arrondir au centième.

2. Sur le chantier d'une entreprise de travaux publics, une machine de découpe a une puissance sonore égale à $0,026$ W.

   a. Montrer qu'à une distance D de la machine, le niveau sonore N dû à celle-ci vérifie la relation $N = 120 + 4\ln(0,002) - 4\ln\left(D^2\right)$.

   b. Montrer qu'une approximation de N est $N \approx 95,14 - 8\ln(D)$.

3. **Dans cette question, on utilisa l'approximation $N \approx 95,14 - 8\ln(D)$.**
   Un ouvrier doit porter des protection individuelles contre le bruit dès qu'un risque apparaît.

Impact sur l'audition	Niveaux sonores (en dB)
Aucun	$[0 ; 85[$
Risque faible	$[85 ; 90[$
Risque élevé	$[90 ; 120[$

   a. Justifier, à l'aide du tableau ci-dessus qu'un ouvrier de cette entreprise se situant à 3m de la machine doive porter des protections individuelles contre le bruit.

   b. Déterminer la distance à partir de laquelle un ouvrier sort de la zone de risque élevé. Arrondir au dm.

Corrigé - Préparation éval-bilan 5

Exercice 1

1. a. Soit $x \in [1\ ;\ 25]$.

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = x + 2 - \ln(x) \quad \text{et} \quad v(x) = x$$
$$u'(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v'(x) = 1$$

D'où
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) x - (x + 2 - \ln(x))}{x^2} \\ &= \frac{x - 1 - x - 2 + \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{-3 + \ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

b. Soit $x \in [1\ ;\ 25]$, $\quad -3 + \ln(x) > 0 \iff \ln(x) > 3$
$\iff x > e^3 \quad$ Or $e^3 \approx 20,0855$
$\iff x \in \left]e^3\ ;\ 25\right]$

c. Pour $x \in [1\ ;\ 25]$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-3 + \ln(x)$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1		e^3		25
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	3	$\searrow$	$1 - e^{-3}$	$\nearrow$	$1.08 - 0.04 \ln 25$

2. a. La fonction f admet un minimum sur $[1\ ;\ 25]$ en $e^3 \approx 20,085$ et $f(e^3) = 1 - e^{-3} \approx 0,95$.
Le coût moyen de fabrication d'une pièce est minimal pour 2009 pièces produites et vaut environ 0,95 €.

b. Le coût moyen d'une pièce ne peut pas être de 0,50 € car $0,50 < 1 - e^{-3} \approx 0,95$.

Exercice 2

1. a. $u_0 = -140 \times 0,9^0 + 420 = -140 \times 1 + 420 = -140 + 420 = 280$
$u_1 = -140 \times 0,9^1 + 420 = -140 \times 0,9 + 420 = -126 + 420 = 294$.
La commune loue 280 vélos en janvier 2025 et 294 vélos en février 2025.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= -140 \times 0,9^{n+1} + 420 - (-140 \times 0,9^n + 420)\\
&= -140 \times 0,9^n \times 0,9 + 420 + 140 \times 0,9^n - 420\\
&= -140 \times 0,9^n \times 0,9 + 140 \times 0,9^n \times 1\\
&= -140 \times 0,9^n \times (0,9 - 1)\\
&= -140 \times 0,9^n \times (-0,1)\\
&= 14 \times 0,9^n
\end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -140 \times 0,9^n + 420 = 420$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
-140 \times 0,9^n + 420 > 380 &\iff -140 \times 0,9^n > -40\\
&\iff 0,9^n < \frac{40}{140}\\
&\iff 0,9^n < \frac{2}{7}.\\
&\iff \ln(0,9^n) < \ln\left(\frac{2}{7}\right) && \text{car ln est croissante sur }]0~;~+\infty[\\
&\iff n\ln(0,9) < \ln\left(\frac{2}{7}\right)\\
&\iff n > \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\ln(0,9)} && \text{car } \ln(0,9) < 0\\
&\iff n \geqslant 12.
\end{aligned}$$

b. À partir du 12e mois soit janvier 2026, le nombre de vélos sera insuffisant.

Exercice 3

1. Pour $N = 84$ dB et $D = 10$ m, on a :

$$\begin{aligned}
84 = 120 + 4\ln\left(\frac{P}{13 \times 10^2}\right) &\iff -36 = 4\ln\left(\frac{P}{1300}\right)\\
&\iff -9 = \ln\left(\frac{P}{1300}\right)\\
&\iff e^{-9} = \frac{P}{1300}\\
&\iff P = 1300e^{-9}\\
&\iff P \approx 0,16 \text{ W}.
\end{aligned}$$

2. **a.** Pour $P = 0,026$ W, on a :

$$\begin{aligned}
N &= 120 + 4\ln\left(\frac{0,026}{13 \times D^2}\right)\\
&= 120 + 4\ln\left(\frac{0,002}{D^2}\right)\\
&= 120 + 4\ln(0,002) - 4\ln(D^2)
\end{aligned}$$

b. $N = 120 + 4\ln(0,002) - 4\ln(D^2)$

$N = 120 + 4\ln(0,002) - 4 \times 2\ln(D)$

$N \approx 95,14 - 8\ln(D)$.

3. a. Pour $D = 3$ m, on a :

$$\begin{aligned} N &\approx 95,14 - 8\ln(3) \\ &\approx 95,14 - 8 \times 1,099 \\ &\approx 86,35 \text{ dB.} \end{aligned}$$

L'ouvrier doit porter des protections individuelles car $85 < N < 90$ dB.

b. $$\begin{aligned} N < 90 \quad &\iff \quad 95,14 - 8\ln(D) < 90 \\ &\iff \quad -8\ln(D) < -5,14 \\ &\iff \quad \ln(D) > \frac{5,14}{8} \\ &\iff \quad D > e^{\frac{5,14}{8}} \\ &\iff \quad D > e^{0,6425} \\ &\iff \quad D > 1,9 \end{aligned}$$

L'ouvrier sort de la zone de risque élevé à partir de 1,9 m.