

Exercice 1

Suite à des problèmes de production, un fabricant de tablettes de chocolat met en place une nouvelle chaîne de production : l'ancienne chaîne ne prend désormais en charge que 40 % de la production.

Un contrôle qualité montre que :



- parmi les tablettes produites par l'ancienne chaîne, 68 % sont commercialisables;
 - parmi les tablettes produites par la nouvelle chaîne, 90 % sont commercialisables.
1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
On introduira des évènements bien choisis.
 2. Calculer la probabilité que la tablette provienne de la nouvelle chaîne et soit commercialisable.
 3. La tablette tirée au sort n'est pas commercialisable. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la nouvelle chaîne ?

Exercice 2 Spécificité et sensibilité d'un test

On s'intéresse à deux test médicaux permettant de détecter des maladies.

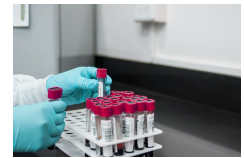
Infos

- La **sensibilité d'un test** est la probabilité que le test soit positif si la personne est porteuse de la maladie testée.
- La **spécificité d'un test** est la probabilité que le test soit négatif si la personne n'est pas porteuse de la maladie.
- La **valeur prédictive positive (VPP) d'un test** est la probabilité que la personne soit réellement malade si son test est positif.
- La **valeur prédictive négative (VPN) d'un test** est la probabilité que la personne ne soit pas réellement malade si son test est négatif.

La mucoviscidose

On s'intéresse aux patients porteurs d'une mutation dans le gène CFTR qui est impliqué dans la mucoviscidose.

En France, une personne sur 34 est porteuse de la mutation (cela n'implique pas d'être malade car il s'agit d'une maladie autosomique récessive). Il existe un test pouvant détecter ces mutations avec une sensibilité de 85 % et une spécificité proche de 100 %.



On note :

- M l'événement « être porteur de cette mutation »;
- T l'événement « le test est positif ».

1. Traduire les probabilités de de l'énoncé à l'aide des événements T et M.
2. A près avoir fait un test qui s'est révélé négatif, déterminer la probabilité d'être quand même porteur.

L'appendicite

Pour diagnostiquer la présence d'une appendicite chez des patients présentant des douleurs abdominales aiguës, on réalise une échographie de la région abdominale.

Parmi les 255 patients chez lesquels l'échographie était positive, 235 présentaient effectivement une appendicite. Toutefois, 75 des 585 patients dont l'échographie était négative présentaient également une appendicite.



1. Représenter les données sous forme d'un tableau à double entrée.
2. Quelle est la spécificité du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?
3. Quelle est la sensibilité du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?
4. Quelle est la valeur prédictive positive du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?
5. Quelle est la valeur prédictive négative du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?

Exercice 3

Lorsqu'il emprunte des livres à la bibliothèque, Mathieu en emprunte 1, 2, 3 4, ou 5 avec la même probabilité. On appelle L la variable aléatoire donnant le nombre de livres empruntés par Mathieu lorsqu'il va a la bibliothèque.

1. Quelle loi suit L ?
2. En déduire $E(L)$.
3. Déterminer $P(L \geq 4)$.

Exercice 4

Pour un jeu de rôle, Sophia utilise un dé équilibré à vingt faces numérotées de 1 à 20.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire D donnant le résultat d'un lancer?
2. Calculer la probabilité d'obtenir une réussite critique, c'est-à-dire un 20, lors d'un lancer.



Identifier et utiliser la loi de Bernoulli

Exercice 5 Identifier une situation où une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli

Dans chaque cas, déterminer si la variable aléatoire X suit ou non une loi de Bernoulli. Si oui, préciser le paramètre de cette loi.

1. Une urne contient trois boules numérotées 0, 1 et 2. On tire une boule au hasard et on note X la valeur inscrite sur la boule.
2. On lance une pièce truquée qui a 55 % de chances de tomber sur Pile. X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la pièce tombe sur Face et 0 sinon.
3. On lance un dé équilibré. X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat du lancer est supérieur ou égal à 5, et 0 sinon.

Exercice 6

Une urne contient 10 boules roses et 5 boules vertes.

Soit R la variable aléatoire égale au nombre de boules roses obtenues (0 ou 1) lorsque l'on tire une boule au hasard dans cette urne.

1. Justifier que R suit la loi $\mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.
2. Combien faut-il ajouter de boules vertes dans l'urne pour que R suive la loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$?

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(0, 2)$.

1. Donner $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$.
2. Déterminer $E(X)$.

Identifier, représenter et utiliser un schéma de Bernoulli

Exercice 8

On lance trois fois successivement une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,75 et on s'intéresse au nombre de PILE obtenus.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera n , le nombre de répétitions et p , la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois PILE.

Exercice 9

Une entreprise estime que 5 % des appareils qu'elle produit nécessitent un réglage au moment de la mise en service.

On prélève trois appareils au hasard dans la production d'une journée.

1. Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation.
2. Représenter ce schéma par un arbre pondéré.
3. À l'aide de l'arbre, déterminer le coefficient binomial $\binom{3}{2}$.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de chemins comportant 14 succès dans un schéma de Bernoulli où l'on répète 20 épreuves.

Exercice 10

1. Donner chacun des coefficients binomiaux suivants : $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{2}$, $\binom{4}{0}$, $\binom{3}{3}$ et $\binom{5}{0}$.
2. Même question avec $\binom{7}{1}$, $\binom{13}{1}$ et $\binom{81}{1}$.
3. À l'aide du triangle de Pascal, déterminer $\binom{5}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{7}{2}$ et $\binom{7}{4}$.

Loi binomiale

Exercice 11

On répète 10 fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$. Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

La variable aléatoire E donnant le nombre d'échecs :

- ☐ ne suit pas une loi binomiale.
- ☐ suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,2$.
- ☐ suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,8$.
- ☐ suit la loi binomiale de paramètres $n = 0,2$ et $p = 10$.

Exercice 12

La ville de Las Vegas accueille environ 100 000 touristes chaque jour. On estime que 5 % des touristes ne viennent pas à Las Vegas pour jouer au casino.

On interroge au hasard 10 touristes dans la rue. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de touristes répondant ne pas être venus dans cette ville pour jouer.

Expliquer pourquoi on peut considérer que Y suit une loi binomiale.

Exercice 13

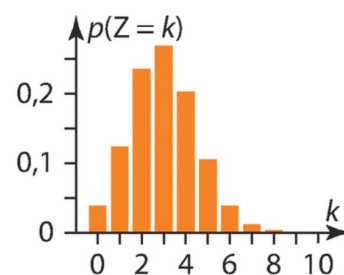
1. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,83$. Calculer l'espérance de X .
2. Même question avec Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,79$.

Exercice 14

On considère une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale représentée par le diagramme en barres ci-contre.

Quelle est son espérance ?

- ☐ 8 ☐ 0,26 ☐ 3 ☐ 6

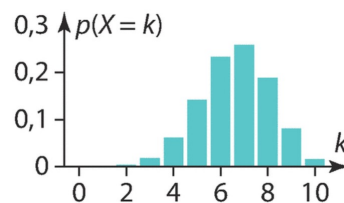


Exercice 15

On donne ci-contre le diagramme en barres associé à une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et p inconnu.

Parmi les trois réels ci-dessous, lequel est susceptible d'être la valeur de p ?

- ☐ 0,66 ☐ 0,16 ☐ 0,87



Exercice 16

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,63$.

1. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associé à X de la forme $[0 ; b]$.
2. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à X .

Exercice 17 Test d'une pièce de monnaie

Hugo et Aya jouent à Pile ou Face avec une pièce de monnaie.

Au bout de plusieurs parties, lassé de perdre, Hugo prétend que la pièce n'est pas équilibrée et que la probabilité d'obtenir Face n'est pas égale à $\frac{1}{2}$.

Pour vérifier cette affirmation, Hugo et Aya ont une idée, ils décident de lancer 100 fois la pièce de

monnaie et de compter le nombre de fois où ils obtiennent Face. Sur les 100 lancers, ils obtiennent 41 fois Face.

Partie A : Loi de probabilité théorique de la pièce



On suppose que la pièce est équilibrée.

X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'apparitions de Face sur 100 lancers d'une pièce équilibrée.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Partie B : À la recherche d'un intervalle

On se propose de déterminer un intervalle I de la forme $[50 - m ; 50 + m]$ tel que $P(X \in I) \geq 1 - \alpha$ où α est un nombre réel donné de l'intervalle $]0 ; 1[$.

1.  Représenter graphiquement la loi de probabilité de X avec un diagramme en bâtons.
 - a.  Déterminer la plus petite valeur de m telle que

$$P(X \in [50 - m ; 50 + m]) \geq 0,90 \quad (\text{ici } \alpha = 0,1).$$

- b. Conclure :

Dans plus de 90 % des échantillons de 100 lancers, la fréquence d'apparition de Face est comprise entre et

- c. La fréquence d'apparition de Face obtenue par Hugo et Aya appartient-elle à cet intervalle ?
On dit qu'**au seuil de 90 %, on rejette l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée.**


2. On choisit maintenant $\alpha = 0,05$.

- a. Déterminer le plus petit entier naturel m tel que $P(X \in [50 - m ; 50 + m]) \geq 0,95$.

- b. La fréquence d'apparition de Face obtenue par Hugo et Aya appartient-elle à cet intervalle ?
Compléter : Au seuil de 95 %, on l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée.

Exercice 18 Validation d'un modèle

On estime que dans une population donnée, 72 % utilisent au moins un réseau social. On suppose que l'utilisation d'un réseau social par une personne donnée n'influe pas sur les autres personnes de la population étudiée. On interroge au hasard 100 personnes de cette population et on note X le nombre de personnes utilisant au moins un réseau social parmi ce groupe de 100 personnes.

1. Donner la loi suivie par X ainsi que ses paramètres.
2. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter ce nombre.
3.  Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,95$.
Interpréter ce résultat.

4. 📊 Donner une approximation au millième de $P(65 \leq X \leq 79)$.
Qu'est-ce-que cela signifie pour les valeurs prises par la variable aléatoire ?
5. Sur les 100 personnes interrogées, 77 utilisent un réseau social.
Au vu des questions 3. et 4., l'échantillon semble-t-il conforme aux attentes ? Avec quelle probabilité peut-on accepter ce modèle ?

Exercice 19 Surbooking

Il est important pour une compagnie aérienne d'optimiser les recettes liées aux vols qu'elle assure. Certaines compagnies ont recours à la pratique de la surréservation (ou « surbooking ») et vendent plus de billets que de places dans l'avion. Le problème pour la compagnie est de ne pas non plus vendre trop de billets : cela l'amènerait à rembourser les personnes ne pouvant embarquer et nuirait à son image.



On va chercher à optimiser le taux de surréservation sans dépasser un niveau de risque raisonnable pour la compagnie « In the air ».

Partie A : Modélisation du problème


La compagnie « In the air » dispose d'un avion de 240 places pour un vol intérieur. On considère que les comportements des passagers sont indépendants les uns des autres et on évalue à 0,9 la probabilité qu'un passager soit présent à l'embarquement. On suppose dans cette partie que la compagnie a vendu exactement 240 places et on nomme X la variable aléatoire égale au nombre de passagers embarquant parmi les 240 possibles.

1. Justifie que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 240$ et $p = 0,9$.
2. Quelle est l'espérance de X ? Interpréter ce nombre dans le contexte.
3. Calculer $P(X \leq 219)$. Donner une interprétation de ce nombre expliquant la nécessité pour la compagnie d'avoir recours à la surréservation.
4. 📊 Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,95$, puis interpréter le résultat.

Partie B : Étude du risque de surréservation

La compagnie a vendu 257 places alors qu'elle n'en dispose que de 240.

1. Quel est le taux de surréservation, c'est-à-dire le rapport entre le nombre de places vendues au-delà de la capacité de l'appareil et cette même capacité ? On exprimera le résultat en pourcentage, arrondi à 0,1 %.
2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers se présentant effectivement à l'embarquement. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire Y et en préciser les paramètres.
3. a. Pour quelles valeurs de Y la compagnie devra-t-elle refuser des passagers à l'embarquement ?

- b. Déterminer la probabilité que la compagnie doive refuser au moins 1 client.
4.  La compagnie souhaite ne pas prendre un risque supérieur à 1 %. La solution envisagée est-elle acceptable pour la compagnie ? Si non, quel nombre de places maximum lui conseillez-vous de vendre pour ne pas dépasser ce risque ?

Loi géométrique

Exercice 20

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la variable aléatoire X proposée suit ou non une loi géométrique. Si oui, préciser alors le paramètre de cette loi.

1. Une urne contient un boule blanche et deux boules noires. On tire au hasard, successivement et avec remise, n boules de cette urne. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de de boules blanches obtenues.
 2. On lance un dé équilibré à six faces plusieurs fois de suite : tant qu'on n'a pas obtenu un 6, on continue à lancer le dé. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de répétitions nécessaires à l'obtention d'un 6.
 3. Une joueuse de tennis réussit ses services 8 fois sur 10. X est le nombre d'essais nécessaires pour réussir un service.
1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès obtenus lors d'une série de n tirages. X ne prend pas ses valeurs dans \mathbf{N}^* (X peut être égale à 0).
 X ne suit pas une loi géométrique mais la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{3}$.
 2. La variable aléatoire X compte le nombre de répétitions nécessaires de l'expérience pour obtenir le succès « obtenir un 6 ». X prend ses valeurs dans \mathbf{N}^* . La probabilité de succès vaut $\frac{1}{6}$.
 X suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$.
 3. La variable aléatoire X compte le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le succès « réussir un service ». X prend ses valeurs dans \mathbf{N}^* . La probabilité de succès vaut $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.
 X suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{4}{5}$.

Exercice 21

On lance un dé équilibré jusqu'à ce qu'un 1 apparaisse pour la première fois.
 X est la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers nécessaires pour obtenir 1.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance. Interpréter le résultat obtenu.
3. Calculer et interpréter :

a. $P(X = 3)$

b. $P(X > 5)$

c. $P(X \leq 5)$

1. X compte le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le succès « obtenir un 1 ». La probabilité de succès vaut $\frac{1}{6}$.

X suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

2. $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$.

En moyenne, il faut 6 lancers pour obtenir un 1.

3. a. $P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$.

b. $P(X > 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$.

c. $P(X \leq 5) = 1 - P(X > 5) = 1 - \frac{3125}{7776} = \frac{4651}{7776}$.

Exercice 22

Un couple a recours à des Fécondation In Vitro (FIV) pour avoir un enfant. Le taux moyen de succès d'une FIV est de 25 % environ. Au-delà de 4 tentatives, les FIV ne sont plus remboursées par la Sécurité Sociale.

Arrondir les résultats au millième.

Quelle est la probabilité pour le couple :

1. De devoir faire plus de trois FIV pour avoir un enfant ?
2. D'avoir un enfant grâce à la FIV en étant remboursé par la Sécurité Sociale ?

1. X compte le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir le succès « avoir un enfant ». La probabilité de succès vaut $p = 0,25$. X suit donc la loi géométrique de paramètre $p = 0,25$.

$$P(X > 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

2. $P(X \leq 4) = 1 - P(X > 4) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{175}{256} \approx 0,684$. La probabilité d'avoir un enfant grâce à la FIV en étant remboursé par la Sécurité Sociale est d'environ 68,4 %.

Exercice 23

Dans un restaurant, on modélise le temps d'attente, en minutes, pour qu'une table se libère, par une variable aléatoire X qui suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,1$.

Arrondir les résultats au centième.

1. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 5 et 10 minutes pour obtenir une table ?
2. Un client attend depuis 10 min.
Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 min de plus pour obtenir une table ?

3. Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat obtenu.

1. $P(5 \leq X \leq 10) \approx 0,307$.

La probabilité qu'un client attende entre 5 et 10 minutes pour obtenir une table est d'environ 30,7%.

2. On utilise la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique :

$$P_{X \geq 10}(X \geq 15) = P(X \geq 5) = \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \frac{6561}{10000} = 0,6561.$$

La probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table est d'environ 65,61 %.

Exercice 24

La durée de vie, en année, d'un élément radioactif peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,0005$.

Le succès est alors l'événement « L'élément n'émet plus de rayonnement ».

T compte le nombre d'années nécessaires pour arriver au succès. *Arrondir les résultats au millième.*

1. Calculer :

$$\bullet P(T > 3000)$$

$$\bullet P(T \leq 5000)$$

$$\bullet P(1500 < T \leq 2500)$$

2. Calculer la probabilité que cet élément ne soit pas désintégré au bout de 2000 ans sachant qu'il n'a pas été désintégré au bout de 1000 ans.

3. La **demi-vie** d'un élément radioactif est le temps au bout duquel cet élément a une chance sur deux de ne plus émettre de rayonnement.

 Déterminer la durée de demi-vie de cet élément.