Corrigé de l'évaluation-bilan 6

Exercice 1

Lors du lancement d'un hebdomadaire (magazine publié chaque semaine), 1 200 exemplaires ont été vendus.
Une étude de marché prévoit une progression des ventes de 2 % chaque semaine.
On modélise le nombre d'hebdomadaires vendus par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de journaux vendus durant la n-ième semaine après le début de l'opération.
On a donc $u_0 = 1\,200$.

1. Calculer le nombre u_1. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$\begin{aligned} u_1 &= 1200 \times 1,02 \\ &= 1224 \end{aligned}$$

Donc le nombre d'hebdomadaires vendus durant la deuxième semaine est de 1224.

2. Préciser la nature de la suite (u_n).
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1200$ et de raison $q = 1,02$.

Donc, pour tout entier naturel n, on a : $$\begin{aligned} u_n &= u_0 \times q^n \\ &= 1200 \times 1,02^n \end{aligned}$$

3. Voici le programme complété pour que l'exécution de `semaine(30000)` renvoie le nombre de semaines nécessaires pour que le nombre total d'hebdomadaires vendus soit supérieur à 30 000 :

Python

```python
def semaine(n) :
    u = 1200
    S = 1200
    n = 0
    while S < 30000 :
        n = n + 1
        u = 1.02 * u
        S = S + u
    return(n)
```

4. Déterminer par le calcul le nombre total d'hebdomadaires vendus au bout d'un an (52 semaines).

$$\begin{aligned} S_{51} &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{51} \\ &= u_0 \times \frac{1-q^{52}}{1-q} \\ &= 1200 \times \frac{1-1,02^{52}}{1-1,02} \\ &= 1200 \times \frac{1-1,02^{52}}{-0,02} \\ &\approx 1200 \times 90,0164 \\ &\approx 108\,020 \end{aligned}$$

Donc le nombre total d'hebdomadaires vendus au bout d'un an est de 108 020.

Exercice 2

Une collectivité locale octroie une subvention de 166 440 € pour le forage d'une nappe d'eau souterraine.
Une entreprise estime que le forage du premier mètre coûte 120 €; le forage du deuxième mètre coûte 60 € de plus que celui du premier mètre; le forage du troisième mètre coûte 60 € de plus que celui du deuxième mètre, etc.
Plus généralement, le forage de chaque mètre supplémentaire coûte 60 € de plus que celui du mètre précédent.

Pour tout entier naturel n, on note : u_n le coût (en euros) du forage après avoir creusé n mètres et T_n le coût (en euros) du forage de $n+1$ mètres; ainsi $u_0 = 120$ et $T_0 = 120$.

1. Calculer u_1 et u_2. Interpréter les résultats obtenus dans le contexte de l'exercice.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + 60 \\ &= 120 + 60 \\ &= 180 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + 60 \\ &= 180 + 60 \\ &= 240 \end{aligned}$$

Donc le coût du forage du deuxième mètre est de 180 € et le coût du forage du troisième mètre est de 240 €.

2. Préciser la nature de la suite (u_n)
En déduire l'expression de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 120$ et de raison $r = 60$.

Donc, pour tout entier naturel n, on a : $$\begin{aligned} u_n &= u_0 + n \times r \\ &= 120 + n \times 60 \\ &= 120 + 60n \end{aligned}$$

3. Pour tout entier naturel n, on note T_n le coût total (en euros) du forage de $n+1$ mètres.
Ainsi $T_0 = 120$ et $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Calculer T_1 puis T_2. Interpréter les résultats obtenus dans le contexte de l'exercice.

$$T_1 = u_0 + u_1 \\ = 120 + 180 \\ = 300$$

$$T_2 = u_0 + u_1 + u_2 \\ = 120 + 180 + 240 \\ = 540$$

Donc le coût total du forage de 2 mètres est de 300 € et le coût total du forage de 3 mètres est de 540 €.

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $T_n = 30n^2 + 150n + 120$.

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \\ &= (n+1) \times \frac{120 + (120 + 60n)}{2} \\ &= (n+1) \times \frac{120 + 120 + 60n}{2} \\ &= (n+1) \times \frac{240 + 60n}{2} \\ &= (n+1)(120 + 30n) \\ &= 120n + 120 + 30n^2 + 30n \\ &= 30n^2 + 150n + 120 \end{aligned}$$

b. En déduire par le calcul la longueur maximale que l'entreprise peut forer avec la subvention de 166 440 €.

$$\begin{aligned} T_n \leqslant 166\,440 \quad &\iff \quad 30n^2 + 150n + 120 \leqslant 166\,440 \\ &\iff \quad 30n^2 + 150n - 166\,320 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= 150^2 - 4 \times 30 \times (-166\,320) \\ &= 22\,500 + 19\,958\,400 \\ &= 19\,980\,900 \end{aligned}$$

Calcul des racines :

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-150 - \sqrt{19980900}}{2 \times 30} \\ &= \frac{-150 - 4470}{60} \\ &= \frac{-4620}{60} \\ &= -77 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{-150 + \sqrt{19980900}}{2 \times 30} \\ &= \frac{-150 + 4470}{60} \\ &= \frac{4320}{60} \\ &= 72 \end{aligned}$$

On a donc le tableau de signes suivant :

n	$-\infty$		-77		72		$+\infty$
Signe de $30n^2 + 150n - 166\ 320$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc la longueur maximale que l'entreprise peut forer avec la subvention de 116 610 € est de 73 mètres.