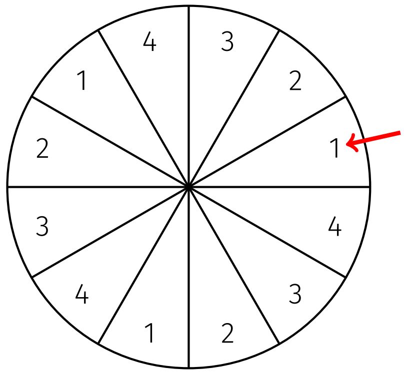
Corrigé de la préparat° à l'éval-bilan 4 T^{ale}Comp



Exercice 1

Dans une kermesse, on fait tourner la roue de loterie équilibrée ci-contre où tous les secteurs ont le même angle.
Le joueur gagne le nombre de points indiqué par le secteur désigné par la flèche.
X est la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2. Combien de points un joueur peut-il espérer gagner en moyenne lors d'une partie ?
3. Pour pouvoir tourner la roue, le joueur doit payer 1 euro. Un point rapporte 0,40 €. Le jeu est-il équitable ?

Correction

1. X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$.
2. L'espérance de X est $\dfrac{1+2+3+4}{4} = 2,5$. Un joueur peut donc espérer gagner 2,5 points en moyenne lors d'une partie.
3. Le joueur doit payer 1 euro pour jouer. Il peut espérer gagner $2,5 \times 0,4$ € soit 1 €. Le jeu est donc équitable.

Exercice 2

En janvier 2025, la ville de Rennes a subit une crue exceptionnelle de l'Ille. La précédente crue semblable a eu lieu en 1981.
On suppose que les crues de l'Ille sont indépendantes entre elles, qu'il y a au plus une crue par an et que chaque année, une crue se réalise avec une probabilité égale à 0,02.

Période entre deux crues

Soit T la variable aléatoire égale au nombre d'années écoulées avant la prochaine crue de l'Ille.
Si nécessaire, on arrondira les résultats à 10^{-4} près.

1. Calculer $P(T = 1)$ et interpréter le résultat.
2. Calculer la probabilité que la prochaine crue de l'Ille se produise dans 10 ans.
3. Quelle est la loi de probabilité suivie par T ? Préciser son (ou ses) paramètre(s).
4. Justifier qu'une telle crue se produit en moyenne tous les 50 ans.

Correction

1. $P(T = 1) = 0,02$. Cela signifie que la probabilité qu'une crue se produise l'année suivante est de 2%.

2. Pour que la prochaine crue de l'Ille se produise dans 10 ans, il faut qu'il n'y ait pas de crue pendant 9 ans puis une crue la 10^{e} année.
   On a donc : $P(T = 10) = (1 - 0,02)^9 \times 0,02 \approx 0,0167$.
   La probabilité que la prochaine crue de l'Ille se produise dans 10 ans est d'environ 1,67%.

3. La variable aléatoire T modélise le temps pour obtenir un succès (ici une crue) en répétant de manière indépendante une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,02$.
   T suit donc une loi géométrique de paramètre $p = 0,02$.

4. L'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $\dfrac{1}{p}$.
   Donc $E(T) = \dfrac{1}{0,02} = 50$.
   Une crue de l'Ille se produit donc en moyenne tous les 50 ans.

Nombre de crues par siècle

Soit N la variable aléatoire égale au nombre de crues de l'Ille pendant les 100 prochaines années.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par N ? Préciser son (ou ses) paramètre(s).

2. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de crue de l'Ille pendant les 100 prochaines années.

3. En déduire la probabilité qu'il y ait au moins une crue de l'Ille pendant les 100 prochaines années.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 5 crues de l'Ille pendant les 100 prochaines années.

Correction

1. La variable aléatoire N compte le nombre de succès (ici le nombre de crues) en répétant 100 fois de manière indépendante une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,02$.
   N suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$.

2. $P(N = 0) = \binom{100}{0} \times 0,02^0 \times 0,98^{100} \approx 0,1326$.
   La probabilité qu'il n'y ait pas de crue de l'Ille pendant les 100 prochaines années est d'environ 13,26%.

3. $P(N \geqslant 1) = 1 - P(N = 0) \approx 0,8674$.
   La probabilité qu'il y ait au moins une crue de l'Ille pendant les 100 prochaines années est d'environ 86,74%.

4. $P(N \geqslant 5) = 1 - P(N < 5) \approx 0,0508$.
   La probabilité qu'il y ait au moins 5 crues de l'Ille pendant les 100 prochaines années est d'environ 5,08%.

Exercice 3 Loi de refroidissement de Newton

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C. On la laisse refroidir dans une pièce à température ambiante de 20°C.
On va étudier à l'aide d'une suite le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton.

Pour tout entier naturel n, on note t_n la température du café (en °C)au bout de n minutes.
On a ainsi $t_0 = 80$. Entre deux minutes consécutives n et $n+1$, on a $t_{n+1} - t_n = -0,2(t_n - 20)$.

1. Conjecturer d'après le contexte le sens de variation de la suite (t_n).
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $t_{n+1} = 0,8t_n + 4$.
3. Exprimer t_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (t_n).

Correction

1. On étudie le refroidissement d'un café. La température du café devrait donc diminuer et la suite (t_n) devrait donc être décroissante.
2. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n - 0,2(t_n - 20) \\ &= t_n - 0,2t_n + 4 \\ &= 0,8t_n + 4. \end{aligned}$$

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 0,8t_n + 4$ et $t_0 = 80$.
   (t_n) est une suite arithmétique de premier terme $t_0 = 80$ et de raison $q = 0,8$.

   Suite constante vérifiant la relation de récurrence :

   Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad x = 0,8x + 4 \Leftrightarrow x - 0,8x = 4$
   $$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 0,2x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 20. \end{aligned}$$

   La suite constante (c_n) égale à 20 vérifie donc la relation $c_{n+1} = 0,8c_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Suite géométrique auxiliaire :

   On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = t_n - c_n$.
   Montrons que (v_n) est une suite géométrique :

   Soit $n \in \mathbb{N}$
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= t_{n+1} - c_{n+1} \\ &= 0,8t_n + 4 - (0,8c_n + 4) \\ &= 0,8t_n + 4 - 0,8c_n - 4 \\ &= 0,8(t_n - c_n) \\ &= 0,8v_n. \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = t_0 - c_0 = 80 - 20 = 60$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 0,8^n = 60 \times 0,8^n$.

Terme général de la suite (t_n) :

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, t_n = c_n + v_n = 20 + 60 \times 0,8^n$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$.

   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 20 + 60 \times 0,8^n = 20$.

   La température du café tend donc vers 20°C.