

Exercice 1

Soit λ un nombre réel.

A, B et C sont trois points tels que $AB = 20\lambda + 12$, $BC = 15(\lambda + 1)$ et $AC = 25\lambda + 19$.
On considère le point D tel que ABCD est un parallélogramme.

1. Faire un schéma et rappeler une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme soit un rectangle.
2. Déterminer toutes les valeurs de λ pour lesquelles ABCD est un rectangle.
3. Quelle est alors la longueur BD ?

Exercice 2

1. Rappeler la définition d'une fonction affine.
2. Démontrer la proposition suivante :
« Si f est une fonction affine, alors pour tous réels u et v , $f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{f(u) + f(v)}{2}$ ».
3. Compléter la phrase suivante qui permet de reformuler cette propriété en terme de moyenne :
Si f est une fonction affine, alors l'image par f de la moyenne de deux nombres réels est égale à

Exercice 3

On considère un entier naturel n non nul.

On pose $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$.

1. En remarquant que $S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$, déterminer une expression de $2S_n$ en fonction de n .
2. En déduire une expression de S_n en fonction de n .
3. Calculer $1 + 2 + 3 + \dots + 2021$.

Un peu d'histoire

Selon une légende, pendant un cours, l'instituteur de **Carl Friedrich Gauss** (mathématicien allemand, 1777-1855) voulant obtenir le calme dans sa classe, demanda à ses élèves de calculer la somme $1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

C'est en utilisant la technique précédente que Carl Friedrich trouva rapidement la réponse.

