Corrigé - Inéquations(2)

Résoudre dans R les inéquations suivantes :

1. $-5x^2 + 10x - 6 > 0$
2. $-2x^2 + 12x - 10 > 0$
3. $-x^2 - x + 2 < 0$
4. $-x^2 - 4x - 9 \leqslant 0$
5. $4x^2 + 8x - 12 > 0$
6. $-x^2 + 2x + 3 \geqslant 0$

1. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -5x^2 + 10x - 6$.
   On cherche à résoudre $P(x) > 0$.
   Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
   $\Delta = 10^2 - 4 \times (-5) \times (-6) = -20$
   $\Delta < 0$ donc le polynôme P n'admet pas de racine.
   Il est toujours du signe de $a = -5 < 0$, donc $P(x) < 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   On en déduit $S = \emptyset$.

2. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^2 + 12x - 10$.
   On cherche à résoudre $P(x) > 0$.
   Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
   $\Delta = 12^2 - 4 \times (-2) \times (-10) = 64$
   $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
   $x_1 = \dfrac{-12 - \sqrt{64}}{-4} = 1$
   $x_2 = \dfrac{-12 + \sqrt{64}}{-4} = 5$
   On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
   Comme $a = -2 < 0$
   on en déduit le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$-2x^2 + 12x - 10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Finalement $S =]1;5[$.

3. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^2 - x + 2$.
   On cherche à résoudre $P(x) < 0$.
   Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$
   $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
   $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{9}}{-2} = -2$

$x_2 = \dfrac{1+\sqrt{9}}{-2} = 1$
On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
Comme $a = -1 < 0$:
On peut résumer le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x^2 - x + 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement $S =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.

4. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^2 - 4x - 9$.
On cherche à résoudre $P(x) \leqslant 0$.
Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = -20$
$\Delta < 0$ donc le polynôme P n'admet pas de racine.
Il est toujours du signe de $a = -1 < 0$, donc $P(x) < 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
On en déduit $S = \mathbb{R}$.

5. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = 4x^2 + 8x - 12$.
On cherche à résoudre $P(x) > 0$.
Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
$\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times (-12) = 256$
$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
$x_1 = \dfrac{-8-\sqrt{256}}{8} = -3$
$x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{256}}{8} = 1$
On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
Comme $a = 4 > 0$
on en déduit le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$4x^2 + 8x - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement $S =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

6. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^2 + 2x + 3$.
On cherche à résoudre $P(x) \geq 0$.
Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 16$
$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
$x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{-2} = -1$
$x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{-2} = 3$

On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
Comme $a = -1 < 0$,
on peut résumer le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2 + 2x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement $S = [-1; 3]$.