Vendredi 28/03/2025

NOM, Prénom :

Évaluation-bilan 5

T^ale^Comp

Calculatrice autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

… / 8 pts

1. Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ 20]$ par $f(x) = \dfrac{x+1-\ln(x)}{x}$.

   a. Démontrer que, pour tout réel x de $[1\ ;\ 20]$: $f'(x) = \dfrac{-2+\ln(x)}{x^2}$.

   b. Résoudre dans $[1\ ;\ 20]$ l'inéquation $-2+\ln(x) > 0$.

   c. En déduire le tableau de variations de f sur $[1\ ;\ 20]$.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2000 pièces electroniques.
On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 20$, le coût moyen de fabrication d'une pièces est de $f(x)$ euros, où f est la fonction définie à la question précédente.

   a. Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

   b. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

Exercice 2

... / 6 pts

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
Le nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020 est modélisé par la suite (a_n) définie sur **N** par :

$$a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$$

1. **a.** Calculer a_0 et a_1 puis interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.
   b. Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (a_n).
2. L'entreprise souhaite de changer de locaux lorsque la moitié de ses collaborateurs seront en télétravail. Elle veut prévoir la date à laquelle organiser ce déménagement.
   a. Utiliser la fonction ln pour résoudre dans **N** l'inéquation $-2\,800 \times 0,85^n + 3\,000 > 2500$.
   b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3

... / 6 pts

Le niveau sonore N, en décibels (dB), d'un bruit, à une distance D, en m, de sa source, dépond de la puissance sonore P, en watts (W), de la source. Il est donnée par la relation :

$$N = 120 + 4\ln\left(\frac{P}{13 \times D^2}\right)$$

1. On donne $N = 76$ dB et $D = 100$ m. Calculer la puissance sonore P, arrondir au centième.

2. Sur le chantier d'une entreprise de travaux publics, une machine de découpe a une puissance sonore égale à $0,039$ W.

   a. Montrer qu'à une distance D de la machine, le niveau sonore N dû à celle-ci vérifie la relation $N = 120 + 4\ln(0,003) - 4\ln\left(D^2\right)$.

   b. Montrer qu'une approximation de N est $N \approx 96,76 - 8\ln(D)$.

3. **Dans cette question, on utilisa l'approximation $N \approx 96,76 - 8\ln(D)$.**
   Un ouvrier doit porter des protection individuelles contre le bruit dès qu'un risque apparaît.

Impact sur l'audition	Niveaux sonores (en dB)
Aucun	$[0\ ;\ 85[$
Risque faible	$[85\ ;\ 90[$
Risque élévé	$[90\ ;\ 120[$

   a. Justifier, à l'aide du tableau ci-dessus qu'un ouvrier de cette entreprise se situant à 3m de la machine doive porter des protections individuelles contre le bruit.

   b. Déterminer la distance à partir de laquelle un ouvrier sort de la zone de risque élevé. Arrondir au dm.

NOM, Prénom :

Corrigé - Éval-bilan 5

T^{ale}Comp

Exercice 1

1. a. Soit $x \in [1\ ;\ 20]$.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x + 1 - \ln(x)$ et $v(x) = x$

$u'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$

D'où $$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)x - (x + 1 - \ln(x))}{x^2} = \frac{x - 1 - x - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{-2 + \ln(x)}{x^2}$$

b. Soit $x \in [1\ ;\ 20]$, $-2 + \ln(x) > 0 \iff \ln(x) > 3$

$\iff x > e^2$ Or $e^2 \approx 7,3891$

$\iff x \in \left]e^2\ ;\ 20\right]$

c. Pour $x \in [1\ ;\ 20]$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2 + \ln(x)$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1		e^2		20
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	2	$\searrow$	$1 - e^{-2}$	$\nearrow$	$1.05 - 0.05 \ln 20$

2. a. La fonction f admet un minimum sur $[1\ ;\ 20]$ en $e^2 \approx 7,39$ et $f(e^2) = 1 - e^{-2} \approx 0,86$.
Le coût moyen de fabrication d'une pièce est minimal pour 739 pièces produites et vaut environ 0,86 €.

b. Le coût moyen d'une pièce ne peut pas être de 0,50 € car $0,50 < 1 - e^{-2} \approx 0,86$.

Exercice 2

1. a. $u_0 = -140 \times 0,9^0 + 420 = -140 \times 1 + 420 = -140 + 420 = 280$
$u_1 = -140 \times 0,9^1 + 420 = -140 \times 0,9 + 420 = -126 + 420 = 294.$
La commune loue 280 vélos en janvier 2025 et 294 vélos en février 2025.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -140 \times 0,9^{n+1} + 420 - (-140 \times 0,9^n + 420) \\ &= -140 \times 0,9^n \times 0,9 + 420 + 140 \times 0,9^n - 420 \\ &= -140 \times 0,9^n \times 0,9 + 140 \times 0,9^n \times 1 \\ &= -140 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) \\ &= -140 \times 0,9^n \times (-0,1) \\ &= 14 \times 0,9^n \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -140 \times 0,9^n + 420 = 420.$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} -140 \times 0,9^n + 420 > 380 &\iff -140 \times 0,9^n > -40 \\ &\iff 0,9^n < \frac{40}{140} \\ &\iff 0,9^n < \frac{2}{7}. \\ &\iff \ln(0,9^n) < \ln\left(\frac{2}{7}\right) \quad \text{car ln est croissante sur }]0\ ;\ +\infty[\\ &\iff n\ln(0,9) < \ln\left(\frac{2}{7}\right) \\ &\iff n > \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\ln(0,9)} \quad \text{car } \ln(0,9) < 0 \\ &\iff n \geqslant 12. \end{aligned}$$

b. À partir du 12^e^ mois soit janvier 2026, le nombre de vélos sera insuffisant.

Exercice 3

1. Pour $N = 84$ dB et $D = 10$ m, on a :

$$\begin{aligned} 84 = 120 + 4\ln\left(\frac{P}{13 \times 10^2}\right) &\iff -36 = 4\ln\left(\frac{P}{1300}\right) \\ &\iff -9 = \ln\left(\frac{P}{1300}\right) \\ &\iff e^{-9} = \frac{P}{1300} \\ &\iff P = 1300e^{-9} \\ &\iff P \approx 0,16 \text{ W}. \end{aligned}$$

2. a. Pour $P = 0,026$ W, on a :

$$\begin{aligned} N &= 120 + 4\ln\left(\frac{0,026}{13 \times D^2}\right) \\ &= 120 + 4\ln\left(\frac{0,002}{D^2}\right) \\ &= 120 + 4\ln(0,002) - 4\ln(D^2) \end{aligned}$$

b. $N = 120 + 4\ln(0,002) - 4\ln(D^2)$
$N = 120 + 4\ln(0,002) - 4 \times 2\ln(D)$
$N \approx 95,14 - 8\ln(D).$

3. a. Pour $D = 3$ m, on a :

$$\begin{aligned} N &\approx 95,14 - 8\ln(3) \\ &\approx 95,14 - 8 \times 1,099 \\ &\approx 86,35 \text{ dB.} \end{aligned}$$

L'ouvrier doit porter des protections individuelles car $85 < N < 90$ dB.

b. $$\begin{aligned} N < 90 \quad &\iff \quad 95,14 - 8\ln(D) < 90 \\ &\iff \quad -8\ln(D) < -5,14 \\ &\iff \quad \ln(D) > \frac{5,14}{8} \\ &\iff \quad D > e^{\frac{5,14}{8}} \\ &\iff \quad D > e^{0,6425} \\ &\iff \quad D > 1,9 \end{aligned}$$

L'ouvrier sort de la zone de risque élevé à partir de 1,9 m.