Corrigé de l'interrogation A

$1^{\text{ère}}$spé

On considère f , la fonction définie sur R par $\quad f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 30x - 5.$
Déterminer la fonction dérivée de f.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 30 \times 1 + 0 \\ &= 12x^2 - 14x + 30 \end{aligned}$$

On considère g la fonction définie par $\quad g(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 7}{x - 1}.$

Quel est l'ensemble de définition de g ?
Déterminer la fonction dérivée de g.

Le dénominateur $x - 1$ s'annule pour $x = 1$. L'ensemble de définition de g est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\begin{array}{llll} & u(x) = 3x^2 + 2x + 7 & \text{et} & v(x) = x - 1 \\ \text{On a :} & u'(x) = 6x^2 + 2 & \text{et} & v'(x) = 1. \end{array}$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(6x + 2)(x - 1) - (3x^2 + 2x + 7) \times 1}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 6x + 2x - 2 - 3x^2 - 2x - 7}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 6x - 9}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

On considère la fonction h définie par $\quad h(x) = \sqrt{x}(x^2 + 1).$

Quel est l'ensemble de définition de h ?
Déterminer la fonction dérivée de h.

La fonction racine carrée est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. L'ensemble de définition de h est $[0\,;\,+\infty[$.
Soient u et v les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\begin{array}{llll} & u(x) = \sqrt{x} & \text{et} & v(x) = x^2 + 1 \\ \text{On a :} & u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{et} & v'(x) = 2x. \end{array}$$

D'où pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 1) + \sqrt{x} \times 2x \\ &= \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 + 1 + 2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x^2 + 1 + 4x^2}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$$

Corrigé de l'interrogation B

n considère f , la fonction définie sur R par $\quad f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 20x + 7$.
Déterminer la fonction dérivée de f.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 20 \times 1 + 0 \\ &= 15x^2 + 6x - 20 \end{aligned}$$

On considère g la fonction définie par $\quad g(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x + 1}$.
Quel est l'ensemble de définition de g ?
Déterminer la fonction dérivée de g.

Le dénominateur $x + 1$ s'annule pour $x = -1$. L'ensemble de définition de g est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$\begin{array}{llll} & u(x) = 2x^2 - 3x + 5 & \text{et} & v(x) = x + 1 \\ \text{On a :} & u'(x) = 4x - 3 & \text{et} & v'(x) = 1. \end{array}$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(4x - 3)(x + 1) - (2x^2 - 3x + 5) \times 1}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 4x - 3x - 3 - 2x^2 + 3x - 5}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x - 8}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

On considère la fonction h définie par $\quad h(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)$.

Quel est l'ensemble de définition de h ?
Déterminer la fonction dérivée de h.

La fonction racine carrée est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. L'ensemble de définition de h est $[0\ ;\ +\infty[$.
Soient u et v les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\begin{array}{llll} & u(x) = \sqrt{x} & \text{et} & v(x) = x^2 - 1 \\ \text{On a :} & u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{et} & v'(x) = 2x. \end{array}$$

D'où pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1) + \sqrt{x} \times 2x \\ &= \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 - 1 + 4x^2}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$$