Fonctions dérivées et applications

1ère spe

Calculs de dérivées

Exercice 1 Dérivée d'une somme

Soit f une fonction définie sur un ensemble I.
Dans chaque cas, préciser son ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ et déterminer sa dérivée f'.

1. $f(x) = 2022$ et $I = \mathbb{R}$ ....
2. $f(x) = 4x + 7$ et $I = \mathbb{R}$ ....
3. $f(x) = x^4$ et $I = \mathbb{R}$ ....
4. $f(x) = 4x^4$ et $I = \mathbb{R}$ ....
5. $f(x) = x^3 + x^2$ et $I = \mathbb{R}$ ....
6. $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ et $I = \mathbb{R}$ ....
7. $f(x) = \sqrt{x} + x$ et $I = [0\,;\,+\infty[$ ....
8. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ et $I = \mathbb{R}^*$ ....

Exercice 2 Dérivée d'un produit

Soit f une fonction. Dans chaque cas, préciser son ensemble de définition D_f, son ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ et déterminer sa dérivée f'.

1. $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$.
2. $f(x) = (2x + 3)(1 - 4x)$.
3. $f(x) = (x^2 - x + 2)(2x^3 - 4)$.
4. $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + x)$.
5. $f(x) = \sqrt{x}(x + 1)$.
6. $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - x + 1)$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{x}(x^2 - 1)$.
8. $f(x) = x^2\left(\sqrt{x} + 1\right)$.

Exercice 3 Dérivée d'un inverse

Soit f une fonction. Dans chaque cas, préciser son ensemble de définition D_f, son ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ et déterminer sa dérivée f'.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.
5. $f(x) = \dfrac{-2}{x^2 + x + 1}$.
6. $f(x) = \dfrac{3}{x^4 + 1}$.

Exercice 4 Dérivée d'un quotient

Soit f une fonction définie sur un ensemble I. Dans chaque cas, préciser son ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ et déterminer sa dérivée f'.

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$; $I = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$; $I = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$; $I =]1 ; +\infty[$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$.

Exercice 5 Dérivée de $g : x \mapsto f(ax+b)$

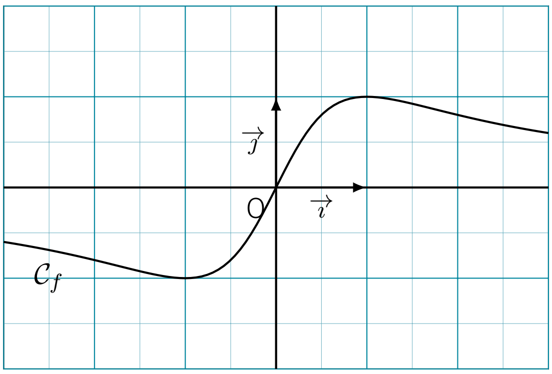
Soit f une fonction définie sur un ensemble I. Dans chaque cas, préciser son ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ et déterminer sa dérivée f'.

1. $f(x) = (3x+1)^3$; $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = (1-2x)^4$; $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \sqrt{2x+1}$; $I = \left[-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.
4. $f(x) = \sqrt{2-3x}$; $I = \left]-\infty ; \dfrac{2}{3}\right]$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer $D_{f'}$ l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ pour $x \in D_{f'}$.
2. $\mathcal{C}_f$ admet-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ? Si oui, préciser en quel(s) point(s).
3. Déterminer une équation de chaque tangente obtenue à la question 2.

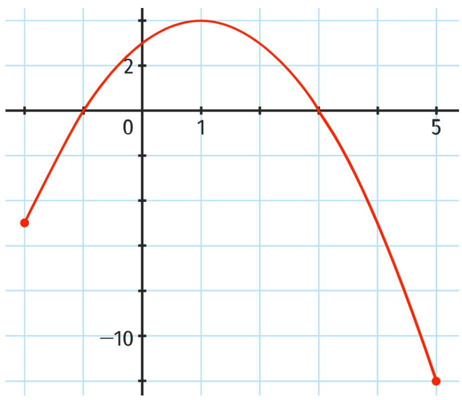


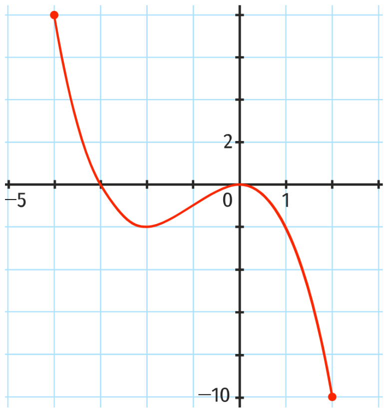
Dérivée et sens de variation

Exercice 7

La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.

1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de f sur $[-2 ; 5]$.
2. Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.





Exercice 8

La courbe ci-contre représente une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 2]$.

1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de g sur $[-4\ ;\ 2]$.
2. Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[-4\ ;\ 2]$.

Exercice 9

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $I = [2\ ;\ 8]$. Le tableau ci-dessous donne le signe de $f'(x)$ sur I.

x	2		3		5		8
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Dresser le tableau de variations de f sur I.

Exercice 10

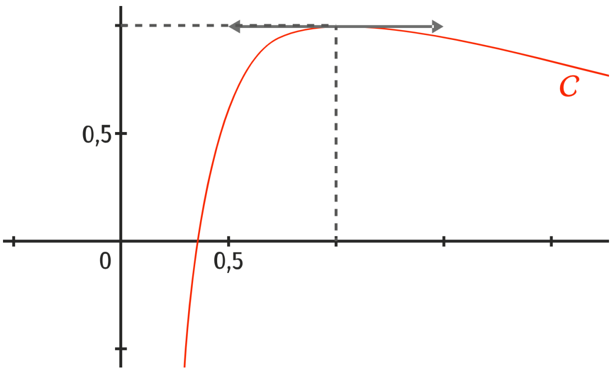
g est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $I = [0\ ;\ +\infty[$. Le tableau ci-dessous donne le signe de $g'(x)$ sur I.

x	0		3		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

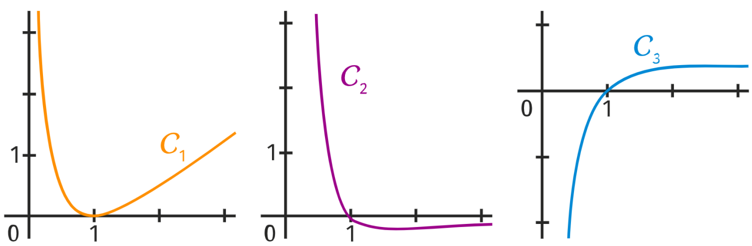
1. Sachant que $g(3) = -1$ et $g(6) = 2$, dresser le tableau de variations de g.
2. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction g.

Exercice 11

On considère la fonction f dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.



Parmi les trois courbes suivantes, quelle est la seule susceptible de représenter la fonction dérivée de f ?



Exercice 12

f est la fonction définie par $f(x) = -x^3 + x^2 - x$. f' est la fonction dérivée de f.

1. Préciser $\mathcal{D}_f$, ensemble de définition et de dérivabilité de f.
2. Calculer $f'(x)$ puis vérifier que , pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = -2x^2 - (x-1)^2$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 13

g est la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de g.
2. Calculer $g'(x)$ puis vérifier que $g'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.
3. Étudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

Exercice 14

h est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$. h' est la fonction dérivée de h.

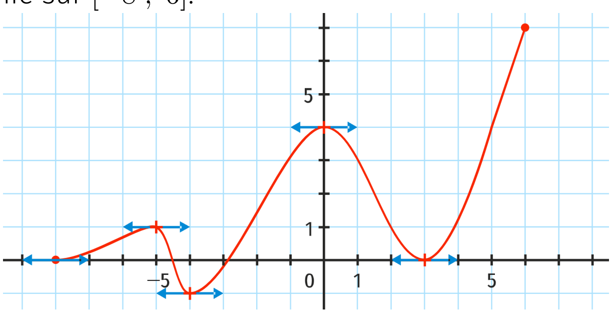
1. Justifier la dérivabilité de h sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Vérifier que $h'(x) = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.
3. En déduire les variations de h sur $]0\,;\,+\infty[$.

Extremums d'une fonction

Exercice 15

La courbe ci-dessous représente une fonction h définie sur $[-8\,;\,6]$.

1. Quel est le maximum local de h sur $[-8\,;\,-4]$?
2. Quel est le minimum local de h sur $[-8\,;\,0]$?
3. Quel est le maximum de h sur $[-8\,;\,6]$?
4. Quel est le minimum de h au voisinage de 3 ?



Exercice 16

Dans chaque cas :

a. Construire le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

b. Donner, suivants les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

1. f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ et $f(-2) = 0$.

2. f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \left]-\infty\,;\,2\right[$, $f'(x) > 0$ et, pour tout $x \in \left]2\,;\,+\infty\right[$, $f'(x) < 0$.
On sait de plus que $f'(2) = 0$ et $f(2) = -1$.

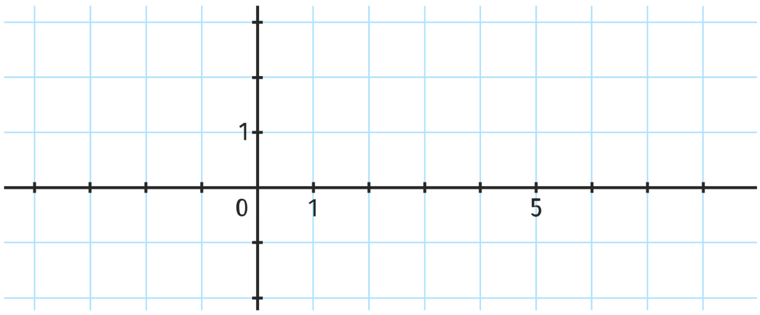
Exercice 17

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathcal{D} = [-3\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,5]$.

x	-3		0		1		4		5
$f'(x)$	0	+	‖	+	2	+	0	−	
f	1	↗	‖	↗	1	↗	3	↘	2

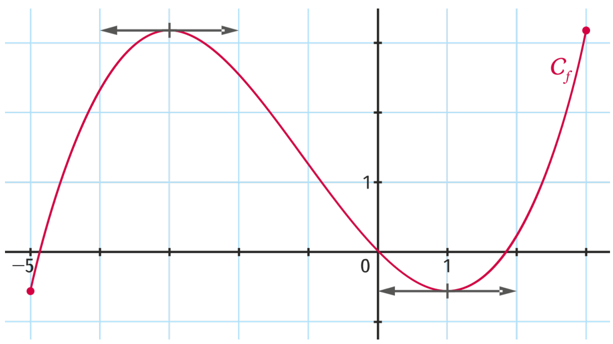
1. Écrire une équation pour chacune des tangentes à la courbe représentative de f que le tableau de variations permet de connaître.

2. Tracer une courbe compatible avec le tableau de variations.



Exercice 18 QCM

1. On donne ci-dessous la courbe C_f, représentative d'une fonction f définie sur $[-5\,;\,3]$. f' est la fonction dérivée de f.



- ☐ a. $f'(0) = 0$
- ☐ b. $f'(-4) < 0$
- ☐ c. Pour tout x de l'intervalle $[-3\,;\,1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
- ☐ d. f' s'annule une seule fois sur $[-5\,;\,3]$.

2. f est la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^3 - 4,8x - 3$.

- ☐ **a.** f est strictement croissante sur **R**.
- ☐ **b.** f admet un seul extremum local sur **R**.
- ☐ **c.** 3,2 est un minimum local de f sur **R**.
- ☐ **d.** f admet deux extremums locaux sur **R**.

3. g est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x - 4\sqrt{x}$.

- ☐ **a.** Pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.
- ☐ **b.** $g(4)$ est le maximum de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
- ☐ **c.** $g'(4) = g(4) = 0$.
- ☐ **d.** g est croissante sur $[4\ ;\ +\infty[$.

4. g est la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4-5x}{x-2}$.

- ☐ **a.** g est strictement croissante sur **R**.
- ☐ **b.** g est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$.
- ☐ **c.** g est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 2[$.
- ☐ **d.** 6 est le maximum de g sur $]-\infty\ ;\ 2[$.

Exercice 19

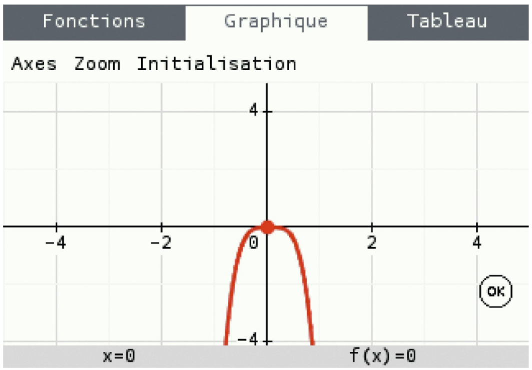
h est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x}\left(x^2 - 1\right)$. h' est la fonction dérivée de h.

1. Justifier la dérivabilité de h sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Vérifier que $h'(x) = \dfrac{\left(x\sqrt{5}+1\right)\left(x\sqrt{5}-1\right)}{2\sqrt{x}}$.
3. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de h sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Déterminer l'extremum de h sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 20

Soit h la fonction définie sur **R** par $h(x) = -9x^4 + x^3$.
Maël a représenté cette fonction à la calculatrice pour dresser son tableau de variations.

1. À partir de cette représentation, comment dresser le tableau de variations de h ? h admet-elle un maximum ?
2. On note h' la fonction dérivée de h sur **R**.
   a. Déterminer l'expression de h'.
   b. En déduire le tableau de variations de h sur **R** ainsi que le maximum de h.
3. Proposer à Maël une fenêtre d'affichage permettant de voir les résultats obtenus à la question **2**.



Exercice 21

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathcal{D} = [-3\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 5]$.

x	-3		0		1		4		5
$f'(x)$	0	$+$	‖	$+$	2	$+$	0	$-$	
f	1	↗	‖	↗	1	↗	3	↘	2

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Pour tout $x \in]0\ ;\ 5]$, $f(x) > 0$.
2. f est strictement croissante sur $[-3\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 1]$.
3. Si $f(x) \in [1\ ;\ 3]$ alors $x \in [1\ ;\ 4]$.
4. T est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1. Une équations de T est : $2x - y - 1 = 0$.

Exercices de synthèse

Exercice 22 Coût marginal

Une entreprise fabrique des articles de luxe dont le coût mensuel de production pour une quantité de q dizaines d'objets s'exprime, en euro, par la fonction définie par :

$$C(q) = 15q^3 - 120q^2 + 350q + 1000 \quad \text{avec} \quad q > 0.$$

On appelle **coût marginal de production** la variation du coût total de production pour un article supplémentaire. Quand la quantité d'articles q est très importante, on admet que le coût marginal peut être approché par la dérivée $C'(q)$.

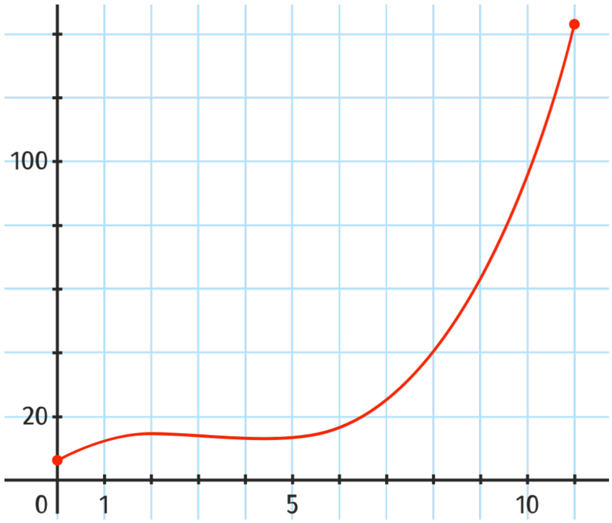
1. Calculer le coût marginal $\quad C_m(q) = C(q+1) - C(q)$.
2. Calculer $C'(q)$.
3. On étudie l'erreur commise en assimilant le coût marginal $C_m(q)$ à la dérivée $C'(q)$.
   a. Calculer $E(q) = C'(q) - C_m(q)$.
   b. Déterminer le nombre minimal d'objets à fabriquer pour que l'erreur commise soit inférieure à 1 %.

Exercice 23

Une entreprise fabrique des rétroviseurs pour voitures. la fonction « coût total » est définie sur $I = [0\ ;\ 11]$ par :

$$C(x) = 0,3x^3 - 3x^2 + 9x + 6$$

$C(x)$ est exprimée en milliers d'euros et x est le nombre de milliers d'articles fabriqués. Le prix de vente de 1000 articles est 8025 €. On suppose que chaque article fabriqué est vendu.
La courbe représentative de la fonction C est représentée ci-contre dans un repère orthogonal.



1. On note R la fonction recette, exprimée en milliers d'euros, relative à la vente de x milliers d'articles.

   a. Expliquer pourquoi $R(x) = 8,025x$.

   b. Tracer la courbe représentative de R dans le repère ci-dessus.

   c. Déterminer graphiquement l'intervalle de production qui permet de réaliser un bénéfice.

   d. Déterminer graphiquement la quantité x_0 que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal.

2. Le bénéfice réalisé par cette entreprise est donné, en milliers d'euros, par la fonction B définie et dérivable sur I. On note B' la fonction dérivée de B.

   a. Montrer que, pour tout $x \in I$, $B'(x) = -0,075(6x - 1)(2x - 13)$.

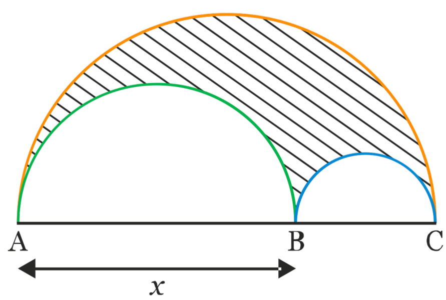
   b. Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau de variations de B.

   c. Retrouver, à partir du tableau de variations, la valeur de x_0. Justifier.

   d. Quel est le montant, en euros, du bénéfice maximal ?

Exercice 24

$[AC]$ est un segment de longueur 12 cm. B est un point du segment $[AC]$ tel que $AB = x$. On construit d'un même côté de la droite (AB) les demi-cercles de diamètres $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
On note $S(x)$ l'aire de la surface hachurée en fonction de x.



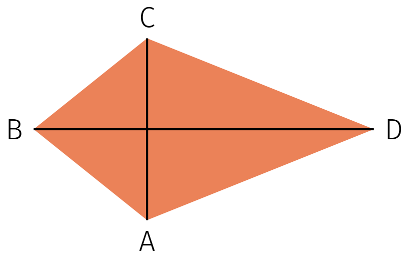
1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_S$ de la fonction S ?

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_S$, $\quad S(x) = \dfrac{\pi}{4}\left(12x - x^2\right)$.

3. Déterminer la valeur x_0 pour laquelle l'aire de la partie hachurée est maximale.

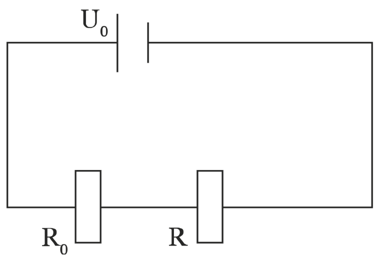
Exercice 25

Mélissa souhaite construire un cerf-volant d'aire maximale. Pour le confectionner, elle possède un bâton de longueur 180 cm qu'elle devra couper en deux.
On rappelle que les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires et que l'aire d'un tel cerf-volant est égale à $\dfrac{AC \times BD}{2}$.



Déterminer la longueur des diagonales pour satisfaire Mélissa. Préciser alors l'aire de son cerf-volant.

Exercice 26



Le circuit électrique schématisé ci-contre comprend :

- un générateur de f.é.m (force électromotrice) fixe $U_0 = 12$ volts ;
- une résistance fixe $R_0 = 6$ ohms ;
- une résistance variable R en ohms.

On admet que le puissance (en watt) dissipée dans la résistance R, en fonction de U_0 et de R_0, est donnée par la fonction P définie sur $K = [0\ ;\ +\infty[$ par $P(R) = \dfrac{U_0^2 R}{(R+R_0)^2}$.

1. Avec les valeurs données dans l'énoncé, écrire l'expression de la fonction P et déterminer sa dérivée.
2. Étudier les variations de la fonction P sur K.
3. Déterminer la valeur à donner à la résistance R pour que la puissance dissipée soit maximale.
4. a. À la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction P.
   b. Àl'aide du graphique, conjecturer pour quelles valeurs de R la puissance est supérieure à 4,5 watts.
   c. Vérifier, par le calcul, les résultats précédents.

Exercice 27

On définit la fonction f sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3 + ax^2 + ax$ où a est un réel fixé.
Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle strictement croissante sur $\mathbf{R}$?

Exercice 28

f est une fonction polynôme du troisième degré définie sur R par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels donnés avec $a \neq 0$. f' est la fonction dérivée de f.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b, c et x.
2. Démontrer que f admet deux extremums locaux sur R si, et seulement si, $4b^2 - 12ac > 0$.
3. Compléter le script suivant :

Python

```
D = 4*b**2-12*a*c
if D>0 :
    print(...................)
elif a>0 :
    print(...................)
else :
    print(...................)
```