Corrigé de l'évaluation 1 - Sujet A

1ère spé

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = -\dfrac{1}{2}(x+1)^2 + 5.$

1. Compléter le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

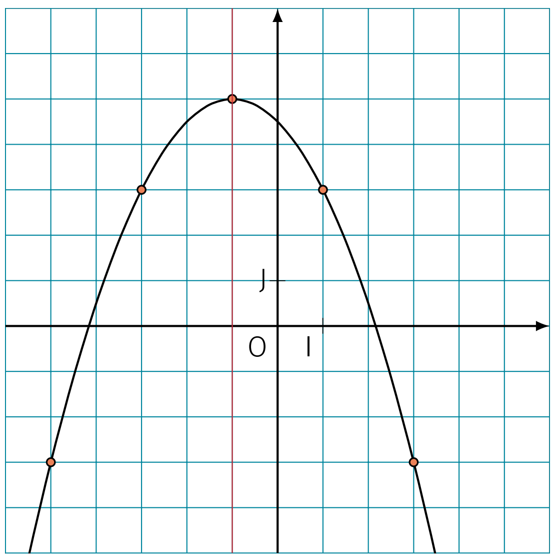
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	5	$\searrow$

2. Calculer $f(1)$ et $f(3)$.

$$\begin{aligned} f(1) &= -\frac{1}{2} \times (1+1)^2 + 5 \\ &= -\frac{1}{2} \times 2^2 + 5 \\ &= -\frac{1}{2} \times 4 + 5 \\ &= -2 + 5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= -\frac{1}{2} \times (3+1)^2 + 5 \\ &= -\frac{1}{2} \times 4^2 + 5 \\ &= -\frac{1}{2} \times 16 + 5 \\ &= -8 + 5 \\ &= -3 \end{aligned}$$

3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-contre.
Indiquer les points utilisés.



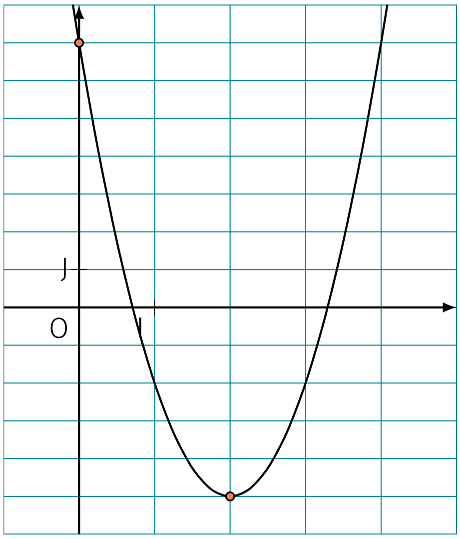
Exercice 2

1. On définit la fonction f sur **R** par $\quad f(x) = 3(x-2)^2 - 5$.

   a. Donner la forme développée de f.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\left(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2\right) - 5 \\ &= 3\left(x^2 - 4x + 4\right) - 5 \\ &= 3x^2 - 12x + 12 - 5 \\ &= 3x^2 - 12x + 7 \end{aligned}$$

   b. Tracer l'allure de la courbe représentative de f en précisant les points remarquables.

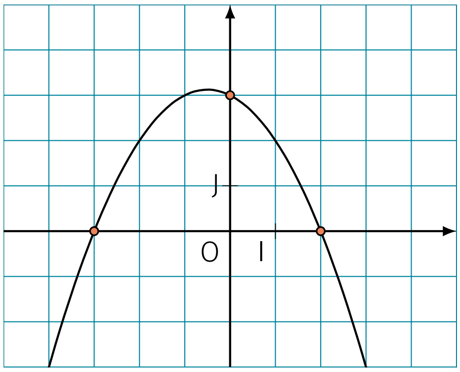


2. On définit la fonction g sur **R** par $\quad g(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x+3)$.

   a. Donner la forme développée de g.

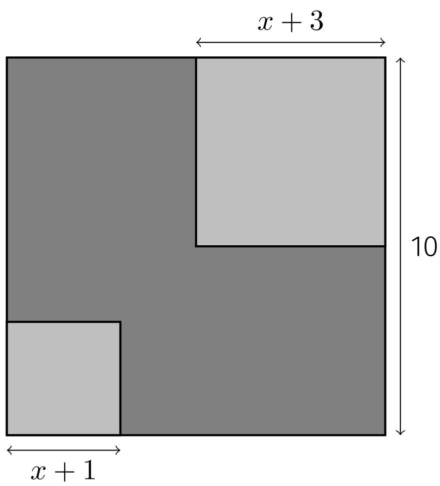
$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 3x - 2x - 6\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 + x - 6\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \end{aligned}$$

   b. Tracer l'allure de la courbe représentative de g en précisant les points remarquables.



Exercice 3

Voici un carré de côté 10 auquel on a ôté deux carrés de côtés $x+1$ et $x+3$ **qui ne se chevauchent pas** pour obtenir la forme dessinée en gris foncé.



1. Quelle est la valeur minimale que peut prendre la variable x ? Sa valeur maximale ? En déduire l'intervalle dans lequel varie x.

   Les longueurs $x+1$ et $x+3$ doivent être positives. D'où $\quad x > -1$.
   Les carrés ne doivent pas se chevaucher donc $x+1+x+3$ doit être inférieur à 10.

$$\begin{aligned} x+1+x+3<10 \quad &\iff \quad 2x+4<10 \\ &\iff \quad 2x<6 \\ &\iff \quad x<3 \end{aligned}$$

Ainsi $x \in \,]-1\,;\,3[$.

2. Montrer que l'aire $A(x)$ de la figure gris foncé est : $A(x) = -2x^2 - 8x + 90$.

   Soit $x \in \,]-1\,;\,3[$.

$$\begin{aligned} A(x) &= 10^2 - (x+1)^2 - (x+3)^2 \\ &= 100 - (x^2 + 2\times x \times 1 + 1^2) + (x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) \\ &= 100 - (x^2+2x+1) - (x^2+6x+9) \\ &= 100 - x^2 - 2x - 1 - x^2 - 6x - 9 \\ &= -2x^2 - 8x + 90 \end{aligned}$$

3. Donner la forme canonique de A.

   Soit $x \in \,]-1\,;\,3[$.

$$\begin{aligned} A(x) &= -2x^2 - 8x + 90 \\ &= -2\left[x^2+4x-45\right] \\ &= -2\left[x^2 + 2\times x \times 2 + 2^2 - 2^2 - 45\right] \\ &= -2\left[(x+2)^2 - 4 - 45\right] \\ &= -2\left[(x+2)^2 - 49\right] \\ &= -2(x+2)^2 + 98 \end{aligned}$$

4. Peut-on faire en sorte que l'aire en gris foncé soit égale à 50 ?
   Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x ?

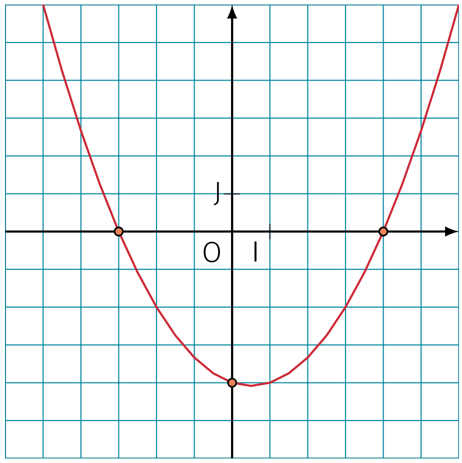
   Soit $x \in \,]-1\,;\,3[$.

$$\begin{aligned} A(x) = 50 \quad &\iff \quad -2(x+2)^2 + 98 = 50 \\ &\iff \quad -2(x+2)^2 = -48 \\ &\iff \quad (x+2)^2 = 24 \\ &\iff \quad x+2 = -\sqrt{24} \quad \text{ou} \quad x+2 = \sqrt{24} \\ &\iff \quad x = -2-\sqrt{24} \quad \text{ou} \quad x = -2+\sqrt{24} \end{aligned}$$

Or $-2-\sqrt{24} < -2$ donc $-2-\sqrt{24} \notin \,]-1\,;\,3[$.
Et $4 < \sqrt{24} < 5$ donc $2 < -2+\sqrt{24} < 3$ et ainsi $-2+\sqrt{24} \in \,]-1\,;\,3[$.

L'aire en gris foncé ne peut être égale à 50 que lorsque $x = -2+\sqrt{24}$.

Exercice 4



f est la fonction polynôme du second degré représentée graphiquement par la parabole ci-contre.

Déterminer l'expression algébrique de f à l'aide des trois points indiqués sur la parabole.

On lit que la fonction f a pour racines -3 et 4.

Il existe donc un réel non nul a tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{aligned} f(x) &= a\,(x-(-3))\,(x-4) \\ &= a(x+3)(x-4) \end{aligned}$

De plus la parabole coupe l'axe des ordonnées en -4 donc $f(0) = -4$.

$$\begin{aligned} f(0) = -4 \quad &\iff \quad a \times (0+3) \times (0-4) = -4 \\ &\iff \quad -12a = -4 \\ &\iff \quad a = \frac{-4}{-12} \\ &\iff \quad a = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

D'ou, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3}(x+3)(x-4)$.

Corrigé de l'évaluation 1 - Sujet B

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur R par $\quad f(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)^2 - 3.$

1. Compléter le tableau de variation de f sur R :

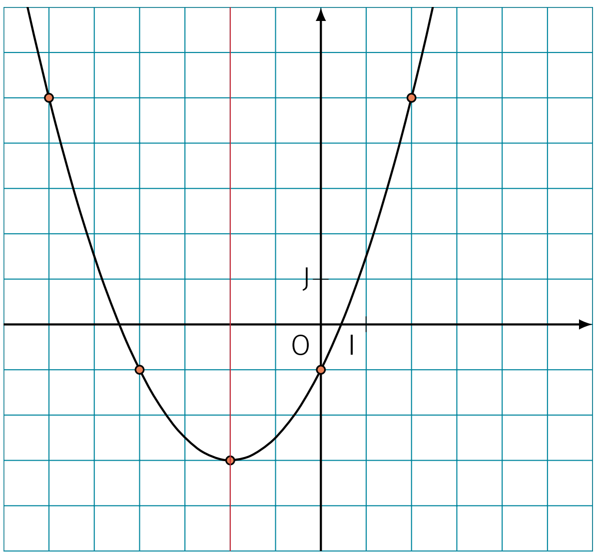
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Variations de f	↘	-3	↗

2. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} \times (0+2)^2 - 3 \\ &= \frac{1}{2} \times 2^2 - 3 \\ &= \frac{1}{2} \times 4 - 3 \\ &= 2 - 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{2} \times (2+2)^2 - 3 \\ &= \frac{1}{2} \times 4^2 - 3 \\ &= \frac{1}{2} \times 16 - 3 \\ &= 8 - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-contre.
Indiquer les points utilisés.

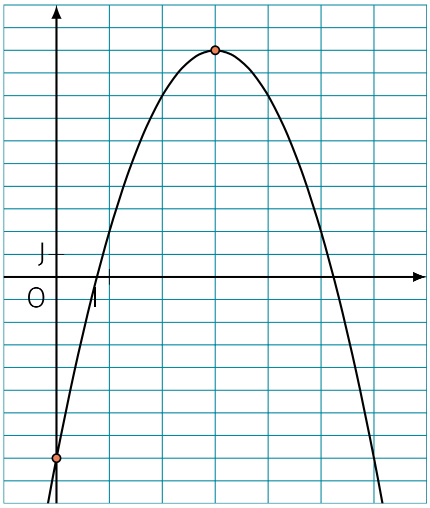


Exercice 2

1. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = -2(x-3)^2 + 10.$

   a. Donner la forme développée de f.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2\right) + 10 \\ &= -2\left(x^2 - 6x + 9\right) + 10 \\ &= -2x^2 + 12x - 18 + 10 \\ &= -2x^2 + 12x - 8 \end{aligned}$$

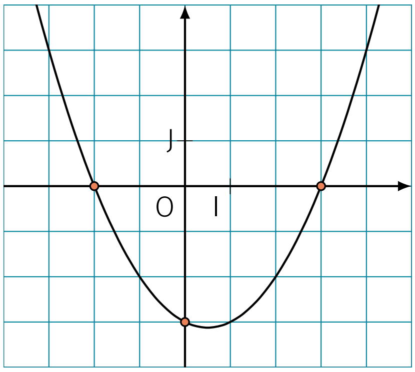


   b. Tracer l'allure de la courbe représentative de f en précisant les points remarquables.

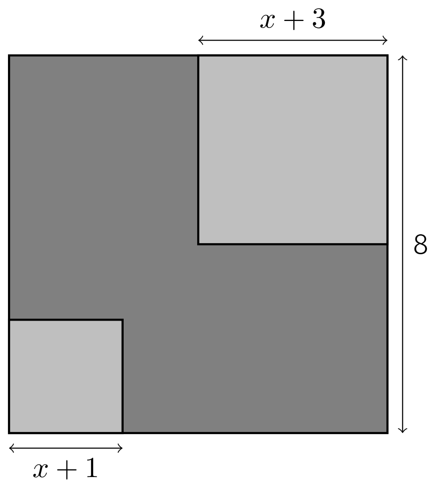
2. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $\quad g(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)(x-3).$

   a. Donner la forme développée de g.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 3x + 2x - 6\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 - x - 6\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 \end{aligned}$$



   b. Tracer l'allure de la courbe représentative de g en précisant les points remarquables.



Exercice 3

Voici un carré de côté 8 auquel on a ôté deux carrés de côtés $x+1$ et $x+3$ **qui ne se chevauchent pas** pour obtenir la forme dessinée en gris foncé.

1. Quelle est la valeur minimale que peut prendre la variable x ? Sa valeur maximale ? En déduire l'intervalle dans lequel varie x.

   Les longueurs $x+1$ et $x+3$ doivent être positives. D'où $\quad x > -1$.
   Les carrés ne doivent pas se chevaucher donc $x+1+x+3$ doit être inférieur à 8.

$$\begin{aligned} x+1+x+3< \quad &\iff \quad 2x+4<8 \\ &\iff \quad 2x<4 \\ &\iff \quad x<2 \end{aligned}$$

Ainsi $x \in \left]-1\ ;\ 2\right[$.

2. Montrer que l'aire $A(x)$ de la figure gris foncé est : $A(x) = -2x^2 - 8x + 54$.

Soit $x \in \left]-1\ ;\ 2\right[$

$$\begin{aligned} A(x) &= 8^2 - (x+1)^2 - (x+3)^2 \\ &= 64 - (x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2) + (x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) \\ &= 64 - (x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 6x + 9) \\ &= 64 - x^2 - 2x - 1 - x^2 - 6x - 9 \\ &= -2x^2 - 8x + 54 \end{aligned}$$

3. Donner la forme canonique de A.

Soit $x \in \left]-1\ ;\ 2\right[$

$$\begin{aligned} A(x) &= -2x^2 - 8x + 54 \\ &= -2\left[x^2 + 4x - 27\right] \\ &= -2\left[x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 - 27\right] \\ &= -2\left[(x+2)^2 - 4 - 27\right] \\ &= -2\left[(x+2)^2 - 31\right] \\ &= -2(x+2)^2 + 62 \end{aligned}$$

4. Peut-on faire en sorte que l'aire en gris foncé soit égale à 50 ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x ?

Soit $x \in \left]-1\ ;\ 2\right[$

$$\begin{aligned} A(x) = 50 \quad &\iff \quad -2(x+2)^2 + 62 = 50 \\ &\iff \quad -2(x+2)^2 = -12 \\ &\iff \quad (x+2)^2 = 6 \\ &\iff \quad x+2 = -\sqrt{6} \quad \text{ou} \quad x+2 = \sqrt{6} \\ &\iff \quad x = -2-\sqrt{6} \quad \text{ou} \quad x = -2+\sqrt{6} \end{aligned}$$

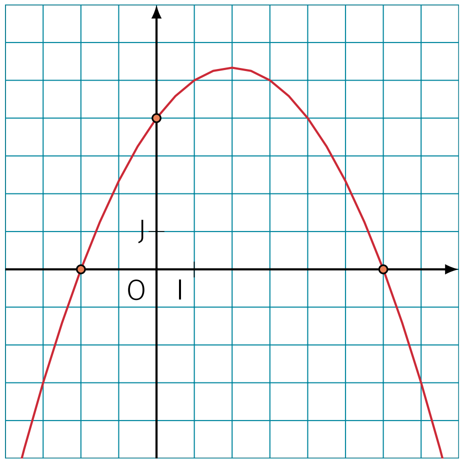
Or $\quad -2-\sqrt{6} < -2 \quad$ donc $\quad -2-\sqrt{6} \notin \left]-1\ ;\ 2\right[$.
Et $\quad 2 < \sqrt{6} < 3 \quad$ donc $\quad 0 < -2+\sqrt{6} < 1 \quad$ et ainsi $\quad -2+\sqrt{6} \in \left]-1\ ;\ 2\right[$.

L'aire en gris foncé ne peut être égale à 50 que lorsque $x = -2+\sqrt{6}$.

Exercice 4

f est la fonction polynôme du second degré représentée graphiquement par la parabole ci-contre.

Déterminer l'expression algébrique de f à l'aide des trois points indiqués sur la parabole.



On lit que la fonction f a pour racines -2 et 6.

Il existe donc un réel non nul a tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{aligned} f(x) &= a\,(x-(-2))\,(x-6) \\ &= a(x+2)(x-6) \end{aligned}$

De plus la parabole coupe l'axe des ordonnées en 4 donc $f(0) = 4$.

$$\begin{aligned} f(0) = 4 \quad &\iff \quad a \times (0+2) \times (0-6) = 4 \\ &\iff \quad -12a = 4 \\ &\iff \quad a = -\frac{4}{12} \\ &\iff \quad a = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

D'ou, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{3}(x+2)(x-6)$.