Chapitre 3

Suites numériques

1 Notion de suite

Définition : suite

Une suite est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels.
La suite u associe à tout nombre entier n un unique réel $u(n)$. On note généralement ce nombre u_n, et on l'appelle le **terme de rang n de la suite u**.
La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).

Exemples : divers modes de génération d'une suite

Les termes d'une suite peuvent être générés de diverses manières. En voici trois (qui sont assez anecdotiques en première) :

- La suite u dont le terme de rang n est la n$^{\text{ième}}$ décimale de π.
  $u_0 = 3$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 1$, $\ldots$
- La suite d dont le terme de rang n est le nombre d'entiers naturels qui divisent n.
  $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 2$, $d_4 = 3$, $d_5 = 2$, $\ldots$
- La suite ϕ, dite **de Fibonacci**, dont les deux premiers termes valent 1 et dont chaque terme suivant s'obtient en faisant la somme des deux précédents.
  $\phi_0 = 1$, $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = 2$, $\phi_3 = 3$, $\phi_4 = 5$, $\ldots$

Ces exemples compliqués mais intéressants ne seront pas étudiés en détail ; ils montrent cependant la diversité des méthodes que l'on peut utiliser pour générer une suite.
Voici trois modes courants de génération d'une suite :

1.1 À l'aide d'une fonction

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient $\mathbb{N}$, alors on peut définir la suite (u_n) par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$$

Exemple

La suite v est définie par :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad v_n = \frac{n}{n^2+1} \qquad (1)$$

On a alors $v_0 = f(0) = 0$, $v_1 = f(1) = \frac{1}{2} \dots$

Pour calculer v_{40}, il suffit de remplacer n par 40.

On dit que (1) est **l'expression du terme général de** v.

1.2 À l'aide d'une relation de récurrence

On peut définir les termes d'une suite (u_n) en donnant son premier terme u_0 et une relation qui permet de calculer un terme de la suite à partir du (ou des) précédents.

Exemple

La suite u est définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - 5$$

On se sert de la relation de récurrence pour calculer d'abord u_1, puis u_2 et ainsi de suite :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2u_0 - 5 \\ &= 2 \times 2 - 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 2u_1 - 5 \\ &= 2 \times (-1) - 5 \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= 2u_2 - 5 \\ &= 2 \times (-7) - 5 \\ &= -19 \end{aligned}$$

Pour déterminer u_n, il faut d'abord calculer u_0, u_1, …, u_{n-1}.

1.3 À l'aide d'un algorithme

Voici un exemple célèbre, très simple à programmer : la suite de Syracuse, que nous noterons σ. On peut générer ses premiers termes avec l'algorithme suivant :

Algorithme

```
Variables
    a, n, i sont des entiers naturels
Debut
    Afficher "Entrer le nombre de termes souhaités"
    Lire n
    Afficher "Entrer la valeur de départ"
    Lire a
    Répéter n fois :
        Si a est pair:
            Alors a <- a / 2
        Sinon:
```

```
                a <- 3 * a + 1
          Fin Si
          Afficher a
     Fin Pour
Fin
```

Une conjecture (encore non démontrée à ce jour) affirme que quelle que soit la valeur de l'entier σ_0 choisie par l'utilisateur alors, pourvu que n soit assez grand, la boucle pour finira par afficher 4, 2, 1, 4, 2, 1 . . . (programmez et essayez).

Exercice 1

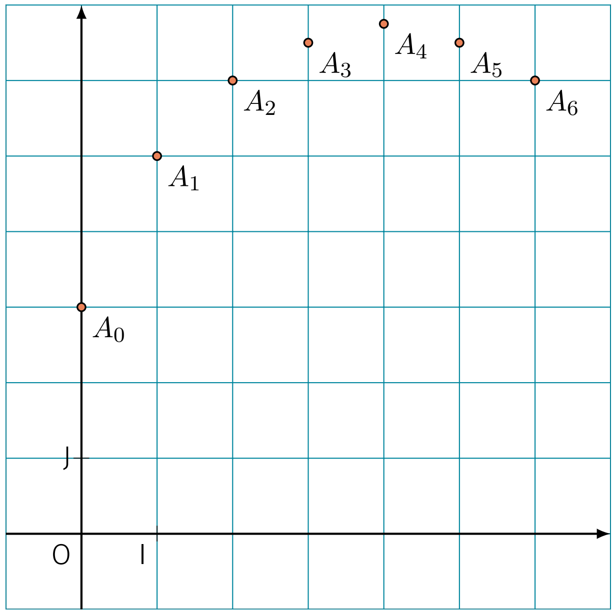
Pour chacune des suites suivantes, déterminer les trois premiers termes

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par : $\quad u_n = \dfrac{2n+1}{n+5}$

2. (v_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 2v_n - 5n \end{cases}$

1.4 Représentation graphique

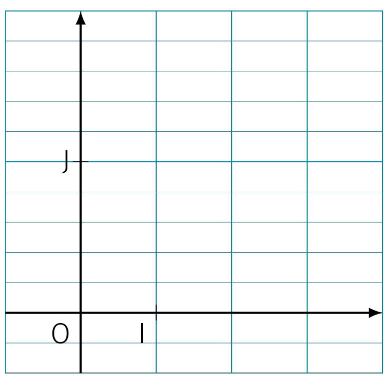
Soit u une suite et $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ un repère du plan, alors on peut représenter u dans $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ en plaçant les points $A_n\,(n\ ;\ u_n)$.



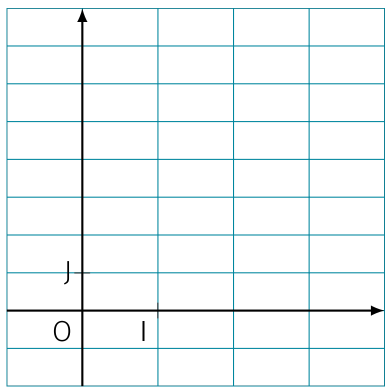
Exercice 2

Dans un repère, représenter graphiquement les trois premiers termes des deux suites (u_n) et (v_n) de l'exercice 1.

1. Représentation graphique des trois premiers termes de (u_n) :



2. Représentation graphique des trois premiers termes de (v_n) :



2 Sens de variation d'une suite

Définition

Soit u une suite.
On dit que u est **croissante** si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad u_{n+1} \geqslant u_n$.

On dit que u est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad u_{n+1} \leqslant u_n$.

On dit que u est **constante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n$.

On dit que u est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Remarque

Une suite peut être croissante (décroissante, constante ou monotone) **à partir d'un certain rang**. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
La suite u est croissante à partir du rang n_0 si pour tout entier $n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} \geqslant u_n$.

Exemples et méthodes

Exemple : suite définie par récurrence

Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & u_n + n^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n + n^2 - u_n \\ &= n^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} \geqslant u_n$ et on en conclut que cette suite est croissante.

Exemple : suite dont on connaît le terme général

Soit v la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\quad v_n = n^2 + 6n + 1$.
Alors $\quad v_n = (n+3)^2 - 8, \quad$ donc on peut écrire $\quad v_n = f(n) \quad$ où f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = (x+3)^2 - 8$.
Or cette fonction est croissante sur $]-3; +\infty[$ donc *a fortiori* sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi v est croissante.

L'exemple précédent ne doit pas laisser croire que si l'on a affaire à une série définie par son terme général, alors il faut étudier la fonction associée.
Soit la suite w définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{1}{2^n}$. Alors

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{2^{n+1}} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $w_{n+1} \leqslant w_n$ et on en conclut que cette suite est décroissante.

Exemple : suite strictement positive

Soit u la suite définie pour tout entier $n > 0$ par : $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.
Puisque $u_n > 0$ pour tout entier $n \neq 0$, on peut calculer :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{1} \\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

Or $n < n+1$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, donc $u_{n+1} < u_n$.
Ainsi (u_n) est strictement décroissante.

Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n)

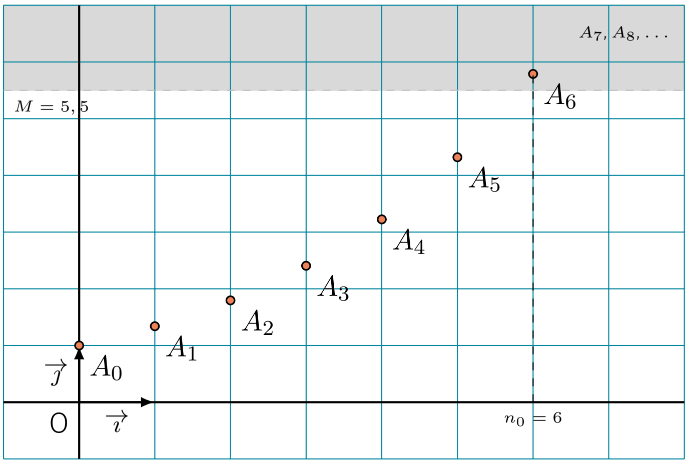
Voici trois méthodes parmi lesquelles on peut choisir :

1. On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
   - Si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite est strictement croissante.
   - Si pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite est strictement décroissante.
2. Si la suite est définie explicitement, on étudie le sens de variation de la fonction f telle que $u_n = f(n)$.
3. Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
   - Si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite est strictement croissante.
   - Si pour tout entier n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite est strictement croissante.

3 Recherches de seuils

Soit u une suite numérique. Voici deux situations classiques :

- u est une suite croissante et l'on conjecture que **pour n'importe nombre M, si grand soit-il**, on peut toujours trouver un rang n_0 tel qu'à partir de ce rang n_0, tous les termes de la suite u sont supérieurs à M.



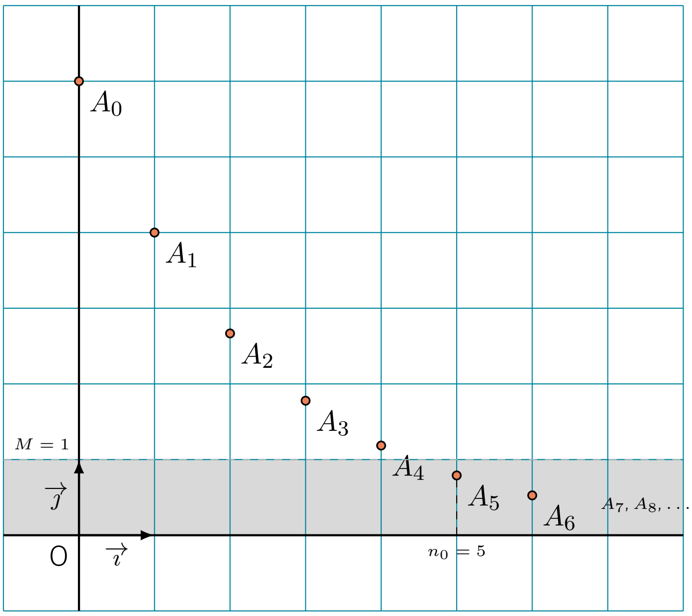
Par exemple dans la situation représentée ci-dessus, pour $M = 5,5$ on a $n_0 = 6$:

$$\text{pour tout } n \geqslant 6,\ u_n \geqslant 5,5$$

Quand cette conjecture est vraie on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

- u est une suite positive, décroissante, et l'on conjecture que **pour n'importe nombre positif ε, si petit soit-il**, on peut toujours trouver un rang n_0 tel qu'à partir de ce rang n_0, tous les termes de la suite u sont inférieurs à ε.



Par exemple dans la situation représentée ci-dessus, pour $\varepsilon = 1$ on a $n_0 = 5$:

$$\text{pour tout } n \geqslant 5,\ u_n \leqslant 1$$

Quand cette conjecture est vraie, on écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Rechercher un seuil pour la suite u c'est se fixer une valeur de M (dans le premier cas, ou de ε dans le deuxième) et déterminer n_0.

3.1 Par le calcul

Quand le terme général d'une suite n'est pas trop compliqué, on peut déterminer un seuil « à la main ».
Considérons la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 3 + 4n$. On conjecture que

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

Prenons alors M égal à 1000, alors

$$\begin{aligned} v_n \geqslant 1000 &\iff 3 + 4n \geqslant 1000 \\ &\iff 4n \geqslant 997 \\ &\iff n \geqslant \frac{997}{4} \\ &\iff n \geqslant 249,25 \\ &\iff n \geqslant 250 \quad \text{(car } n \text{ est entier)} \end{aligned}$$

En prenant $n_0 = 250$ on peut donc écrire :

$$n \geqslant 250 \Longrightarrow v_n \geqslant 1000$$

3.2 À l'aide d'un algorithme

Soit la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= u_n^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors une étude rapide u nous permet de conjecturer que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Écrivons alors un algorithme qui, quand l'utilisateur entre un nombre ε strictement positif, retourne le seuil n_0 pour lequel on a

$$n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant \varepsilon$$

En langage naturel :

Algorithme

```
Variables
    A est un nombre réel
    N est un entier
Debut
       N <- 0
       A <- 0,5
       Afficher "Entrer la valeur de epsilon : "
       Lire E
       Tant que A > E
          N <- N+1
          A <- A*A
       Fin Tant Que
```

```
        Afficher "La valeur du seuil est : ",N
Fin
```

Voici le code PYTHON :

Python

```python
n = 0
a = 0.5
epsilon = float(input('Entrer la valeur de epsilon : '))
while a > epsilon:
        n = n + 1
        a = a ** 2
print('La valeur du seuil est :', n)
```

Lorsqu'on entre 10^{-20} pour ε l'algorithme nous renvoie la valeur 7 pour n_0. On en déduit donc

$$n \geqslant 7 \Longrightarrow u_n \leqslant 10^{-20}$$