Sens de variation et sommes

Sens de variation

Exercice 1 Sens de variation d'une suite arithmétique

Déterminer les variations des suites définies ci-dessous :

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \pi - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = v_n + 1 - \sqrt{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison $\pi - 3 > 0$.
donc (u_n) est strictement croissante.

2. (v_n) est une suite arithmétique de raison $1 - \sqrt{2} < 0$.
donc (v_n) est strictement décroissante

Exercice 2 Sens de variation d'une suite géométrique

Donner les variations des suites géométriques définies ci-dessous :

1. (u_n) de premier terme 2 et de raison 0,3.
2. (v_n) de premier terme 3 et de raison -5.
3. (w_n) de premier terme -6 et de raison 14.
4. (z_n) de premier terme 3 et de raison $\sqrt{2}$.
5. (t_n) de premier terme -5 et de raison $\sqrt{\frac{10}{\pi^2}}$.
6. (r_n) de premier terme 0 et de raison 12.

1. $u_n = 2 \times (0,3)^n$. $2 > 0$ et $0 < 0,3 < 1$
donc (u_n) est positive décroissante.

2. $v_n = 3 \times (-5)^n$. $-5 < 0$ donc (v_n) n'est ni croissante, ni décroissante

3. $w_n = -6 \times 14^n$ $-6 < 0$ et $14 > 1$
donc (w_n) est négative décroissante.

4. $z_n = 3(\sqrt{2})^n$ $3 > 0$ et $\sqrt{2} > 1$
donc (z_n) est positive croissante

5. $t_n = -5\left(\sqrt{\frac{10}{\pi^2}}\right)^n$ $-5 < 0$ et $\pi^2 \approx 9,87$ donc $\sqrt{\frac{10}{\pi^2}} > 1$
$= -5\left(\frac{\sqrt{10}}{\pi}\right)^n$ donc (t_n) est négative décroissante.

6. $r_n = 0 \times (12)^n$
$= 0$ donc (r_n) est constante égale à 0.

Exercice 3

Soit u la suite définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 3 + 4n$.

1. Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{40}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} u_k$.
3. Calculer de deux manières $u_{21} + u_{22} + \dots + u_{40}$.

1. $u_0 + u_1 + \dots + u_{40} = 41 \dfrac{u_0 + u_{40}}{2}$
$= 41 \times \dfrac{3 + 3 + 4 \times 40}{2}$
$= 41 \times \dfrac{166}{2}$
$= 41 \times 83$
$= 3403.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$
$= 21 \times \dfrac{u_0 + u_{20}}{2}$
$= 21 \times \dfrac{3 + 3 + 4 \times 20}{2}$
$= 21 \times 43$
$= 903.$

3. $u_{21} + u_{22} + \dots + u_{40} = \displaystyle\sum_{k=0}^{40} u_k - \sum_{k=0}^{20} u_k$
$= 3403 - 903$
$= 2500.$

$u_{21} + u_{22} + \dots + u_{40} = 20 \times \dfrac{u_{21} + u_{40}}{2}$
$= 20 \times \dfrac{3 + 4 \times 21 + 3 + 4 \times 40}{2}$
$= 20 \times 125$
$= 2500.$

Exercice 4

Un étudiant loue une chambre pendant 2 ans. Le loyer initial est de 200 euros par mois mais tous les mois il augmente de 2%.

1. Exprimer les loyers à l'aide d'une suite géométrique.
2. En déduire la somme totale que l'étudiant aura à payer sur deux ans.
3. Quel est le loyer moyen payé par l'étudiant sur deux ans ?

1. On définit u par : $\begin{cases} u_0 = 200 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1,02\, u_n \end{cases}$.
u_n est le montant à payer après n mois.

2. $u_0 + u_1 + \dots + u_{23} = u_0 \dfrac{1 - (1,02)^{23+1}}{1 - 1,02}$
$\approx 200 \times \dfrac{-0,6084}{-0,2}$
$\approx 200 \times 30,42186$
$\approx 6084,37.$

Sur deux ans, l'étudiant devra payer environ 6084,37 €.

3. $\dfrac{6084,37}{24} \approx 253,52$
Le loyer moyen est de 253,52 € environ.

Exercice 5

Le film *Avatar* est sorti aux États-Unis le 18 décembre 2009. La recette lors de la première semaine s'est élevée à 77 millions de dollars. Cette recette a ensuite diminué en moyenne de 15% chaque semaine. Le réalisateur James Cameron a investi 500 millions de dollars pour la réalisation du film. Pour les calculs, l'unité est le million de dollars.

1. Soit R_0 la recette obtenue la première semaine. Calculer R_1 et R_2 (ne pas justifier).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer R_{n+1} en fonction de R_n en justifiant.
3. Exprimer R_n en fonction de n et de R_0.
4. Quel est le sens de variation de la suite (R_n) ? Justifier.
5. Quelle est la recette pour la vingtième semaine (arrondir au centième) ?
6. Exprimer en fonction de n le total T_n des recettes engrangées de la première semaine à la (n+1)-ième de la manière la plus simple possible.
7. Quand n devient très grand, de quelle valeur limite T_n se rapproche-t-il ?
8. On considère l'algorithme ci contre :
   Que fait cet algorithme ?
9. On l'exécute et l'algorithme affiche 22.
   Interpréter ce résultat.

Code Python

```
n = 0
r = 77
t = 77
while t < 500 :
    n = n + 1
    r = 0.85 * r
    t = t + r
print(n)
```

1. $R_0 = 77$

$R_1 = (1-0{,}15) \times R_0 = 0{,}85 \times 77 = 65{,}45$

$R_2 = 0{,}85 \times R_1 = 0{,}85 \times 65{,}45 = 55{,}6325.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $R_{n+1} = (1-0{,}15) R_n = 0{,}85\, R_n.$

3. $R_n = R_0 \times 0{,}85^n = 77 \times 0{,}85^n$

4. $R_0 > 0$ et $q = 0{,}85 \in \,]0;1[$ donc R_n est positive décroissante.

5. Recette pour la 20^e semaine : $R_{19} = 77 \times 0{,}85^{19} \approx 3{,}51.$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ $T_n = R_0 + R_1 + \dots + R_n$

$= R_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$= 77 \times \dfrac{1-0{,}85^{n+1}}{1-0{,}85}$

$= \dfrac{77}{0{,}15}\left(1-0{,}85^{n+1}\right).$

7. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^{n+1} = 0$.

donc quand n devient très grand, T_n se rapproche de $\frac{77}{15}$.

8. L'algorithme donne le numéro de la semaine à partir de laquelle la recette dépasse 500, c'est-à-dire quand le film devient rentable.

9. À partir de la 23^e semaine, le film est devenu rentable.

Pour approfondir

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 4}{n+1}$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = nu_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. En déduire l'expression du terme général de (v_n).
4. En déduire l'expression du terme général de (u_n).

1. $u_2 = \dfrac{1 \times u_1 + 4}{1+1} = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$

$u_3 = \dfrac{2 \times u_2 + 4}{2+1} = \dfrac{2 \times \frac{5}{2} + 4}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$v_{n+1} - v_n = (n+1)\, u_{n+1} - n\, u_n$

$= \dfrac{(n+1)(n\, u_n + 4)}{n+1} - n\, u_n$

$= n\, u_n + 4 - n\, u_n$

$= 4$.

donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_1 = 1$.

3. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = a + 4n$ avec $a \in \mathbb{R}$ à déterminer

$v_1 = 1$ donc $a + 4 = 1 \iff a = -3$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = -3 + 4n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = n\, u_n$

$\iff -3 + 4n = n\, u_n$

$\iff u_n = \dfrac{-3+4n}{n}$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = 4 - \dfrac{3}{n}$.

Exercice 7

n est un entier naturel. À l'aide de suites arithmétiques :

1. Calculer $0+1+\cdots+(2n-1)+2n$, somme des entiers de 0 à $2n$.
2. Calculer $0+2+4+\ldots(2n-2)+2n$, somme des entiers pairs de 0 à $2n$.
3. En déduire $1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1)$, somme des entiers impairs compris entre 0 et $2n$.

1. $0+1+\ldots+(2n-1)+2n = u_0+u_1+\ldots+u_{2n-1}+u_{2n}$ avec $u_n = 0+1\times n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$= (2n+1)\,\frac{u_0+u_{2n}}{2}$$
$$= (2n+1)\,\frac{0+2n}{2}$$
$$= n\,(2n+1)$$

2. $0+2+4+\ldots+(2n-2)+2n = 2\left[0+1+2+\ldots+(n-1)+n\right]$

$$= 2\left[u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_n\right]$$
$$= 2\,(n+1)\,\frac{u_0+u_n}{2}$$
$$= (n+1)\,(0+n)$$
$$= n\,(n+1).$$

3. $1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1) = 0+1+\ldots+(2n-1)+2n - \left[0+2+4+\ldots+(2n-2)+2n\right]$

$$= n\,(2n+1) - n\,(n+1)$$
$$= n\left[2n+1-(n+1)\right]$$
$$= n \times n$$
$$= n^2.$$

Exercice 8

n est un entier naturel. Calculer $2\times 2^2\times 2^3\ldots\times 2^n$.

$$2\times 2^2\times 2^3\times\ldots\times 2^n = 2^{1+2+3+\ldots+n}$$
$$= 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$