Second degré - Exercices

Plusieurs formes pour un même polynôme

Exercice 1

Donner la forme développée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = (x-1)(x-2)$.
- $g(x) = (x-3)(x-4)$.
- $l(x) = 7(x+2)(x-5)$.
- $m(x) = -3x(x-2)$.
- $k(x) = (x-\sigma_1)(x-\sigma_2)$ où σ_1 et σ_2 sont deux réels.

Exercice 2

Donner la forme développée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = (x+1)^2 + 1$
- $g(x) = 3(x-1)^2 + 7$.
- $h(x) = -2(x+7)^2 + 2$.
- $k(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
- $l(x) = (x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont deux réels.

Exercice 3

Regrouper les expressions égales

- $2x^2 - 10x + 12$
- $2x^2 - 14x + 20$
- $2x^2 - 16x + 30$
- $2(x-2)(x-5)$
- $2(x-2)(x-3)$
- $2(x-3)(x-5)$
- $2\left(x-4\right)^2 - 2$
- $2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$
- $2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$

Exercice 4

Suivre le modèle suivant pour écrire les polynômes suivants sous forme canonique.
Modèle :

$f(x) = x^2 + 2x + 7$	on isole les 2 premiers termes;
$= \left(x^2 + 2x\right) + 7$	entre parenthèses, on voit le début d'une identité remarquable;
$= \left(x^2 + 2 \times x \times 1\right) + 7$	il manque juste le 1^2, donc on écrit
$= \left(x^2 + 2 \times x \times 1 \boxed{+1^2 - 1^2}\right) + 7$	et grâce à cette astuce
$= \left((x+1)^2 - 1\right) + 7$	rassemblons les constantes;
$= (x+1)^2 + 6$	et voilà une forme canonique!

- $f(x) = x^2 + 2x - 3.$
- $g(x) = x^2 + 4x + 1.$
- $h(x) = x^2 + 6x - 9.$
- $k(x) = x^2 - 2x - 1$
- $l(x) = x^2 - 8x + 10.$
- $m(x) = x^2 + 7x - 1.$

Exercice 5 - Utiliser la forme factorisée pour résoudre une inéquation liée au signe

On considère la fonction définie sur R par $\quad f(x) = 3x^2 + 12x - 15$

1. Montrer que pour tout $x \in$ R on a $\quad f(x) = 3(x-1)(x+5).$
2. À l'aide d'un tableau de signes, résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0.$
3. Montrer que pour tout $x \in$ R on a $\quad f(x) + 24 = 3(x+3)(x+1).$
4. Résoudre $f(x) \geqslant -24.$

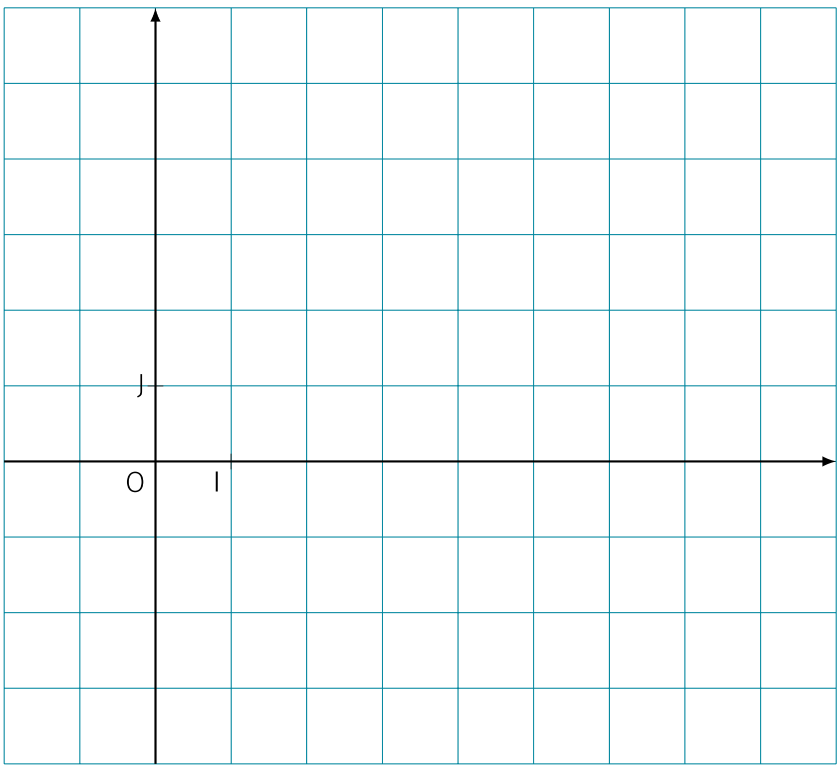
Exercice 6 - Utiliser la forme canonique

On considère la fonction g définie sur R par $\quad g(x) = -0,5(x-4)^2 + 5.$

1. Donner le tableau de variation de g sur R.
2. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	4	6	8
$g(x)$			

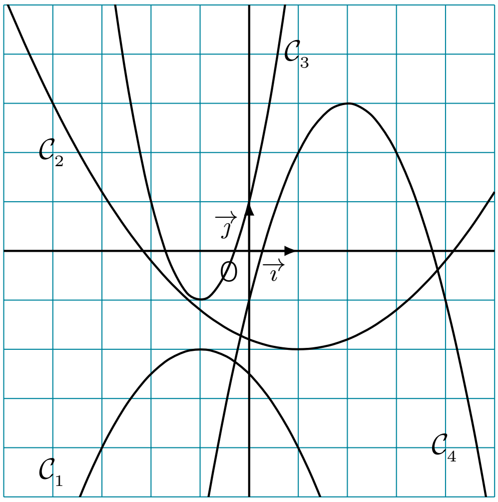
3. Représenter $\mathcal{C}_g$ dans le repère ci-dessous :



4. Résoudre graphiquement $g(x) = 0,5.$
5. Retrouver ce résultat par le calcul.

Des paraboles

Exercice 7



Voici les expressions de quatre fonctions polynôme du second degré :

- $f(x) = \dfrac{1}{5}(x-1)^2 - 2$
- $g(x) = (x+1)^2 - 1$
- $h(x) = -\dfrac{1}{2}(x+1)^2 - 2$
- $k(x) = -(x-2)^2 + 3$

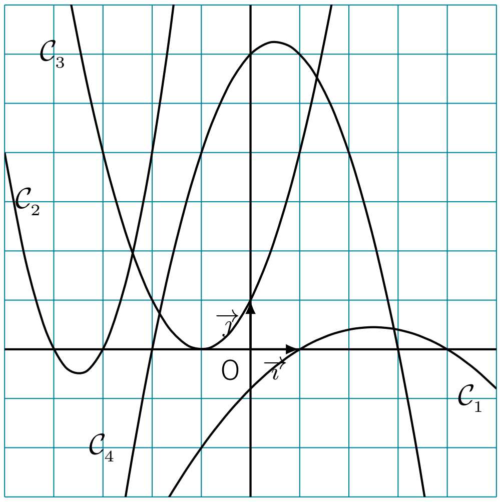
Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

Exercice 8

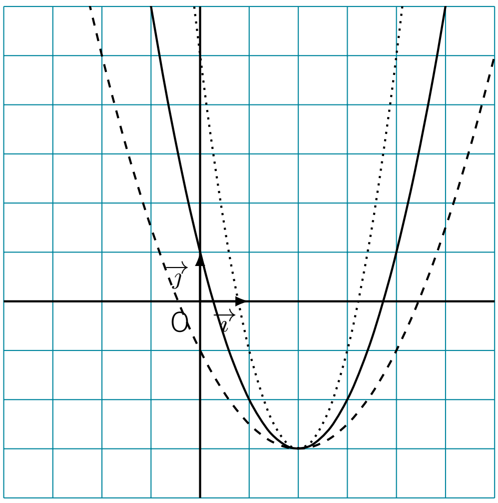
Voici les expressions de quatre fonctions polynôme du second degré

- $f(x) = -\dfrac{1}{5}(x-4)(x-1)$
- $g(x) = -(x-3)(x+2)$
- $h(x) = (x+1)^2$
- $k(x) = 2(x+4)(x+3)$

Associer chaque fonction à sa courbe représentative.



Exercice 9



Voici les expressions de trois fonctions polynôme du second degré

- $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 - 3$
- $g(x) = 2(x-2)^2 - 3$
- $h(x) = (x-2)^2 - 3$

Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(x+1)^2 - 3 = 0$
2. $(x-7)^2 - 8 = 0$
3. $2(x+3)^2 - 50 = 0$
4. $3(x-2)^2 + 7 = 0$

Exercice 11

f est une fonction polynôme du second degré.
Quelle est la forme la plus adaptée (développée, factorisée ou canonique) permettant de répondre aux questions suivantes ?

1. Déterminer l'image de 0 par f.
2. Démontrer le sens de variation de f.
3. Résoudre $f(x) = 0$.
4. Résoudre $f(x) = c$.
5. Déterminer l'extremum de f.

Exercice 12

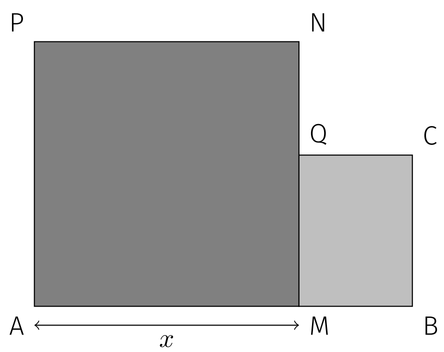
f est une fonction polynôme du second degré.
On donne les informations suivantes :

- Les antécédents de 0 par f sont -2 et 3.
- L'image de 4 par f est -5.

Déterminer une expression de f en fonction de x.

Exercice 13

L'unité est le centimètre.
AB=10 et M est un point de [AB].
AMNP est un carré, MBCQ est un rectangle et BC=4.



On pose $AM = x$.
On note $f(x)$ la somme des aires de AMNP et MBCQ en fonction de x.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Faire une figure pour $x = 3$.
3. Quelle est, en fonction de x, l'aire du carré AMNP ?
4. Que vaut, en fonction de x, la distance MB ?
5. En déduire l'aire du rectangle $MBCQ$.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a $\quad f(x) = x^2 - 4x + 40$.
7. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a $\quad f(x) = (x-2)^2 + 36$.
8. Donner le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$.
9. Pour quelle valeur de x la somme des aires est-elle minimale ?
10. Y a-t-il des valeurs de x pour lesquelles la somme des aires vaut 85cm^2 ?
11. Représenter $\mathcal{C}_f$ sur la calculatrice, avec une fenêtre convenable.

Forme factorisée et racines d'un polynôme

Exercice 14

Donner les formes factorisées (si elles existent) des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$
- $h(x) = x^2 + x + 1$
- $k(x) = -3x^2 + x + 1$
- $g(x) = 3x^2 + 2x + 4$
- $j(x) = 3x^2 - 2x + \dfrac{1}{3}$
- $l(x) = 4x^2 - 4x + 15$

Exercice 15

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $7x^2 + 5x + 1 = 0$
2. $0,5x^2 + 2,5x + 15 = 0$
3. $2x^2 - 7x + 3 = 0$
4. $15x^2 - 8x - 12 = 0$
5. $x^2 - 8 = 0$
6. $2(x^2 + x) = -3$
7. $15x^2 - 6x + \dfrac{3}{5} = 0$
8. $3x^2 - 2x = 0$
9. $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$
10. $12x^2 + 8x - 15 = 0$
11. $2 + 9x^2 = 0$
12. $20x^2 - 8x + \dfrac{4}{5} = 0$
13. $2(x^2 - x) = -5$
14. $5x^2 = x$
15. $x^2 + 2\sqrt{3}x - 9 = 0$

Exercice 16

Léna a écrit le script Python ci-dessous :

Python

```
a = float(input("entrez a"))
b = float(input("entrez b"))
c = float(input("entrez c"))
delta = b ** 2 - 4 * a * c
if delta > 0 :
    print(2)
elif delta == 0 :
    print(1)
else :
    print(0)
```

1. À quoi correspond le nombre affiché par ce script lorsqu'on entre les valeurs 2, 5 et 1 ?
2. Proposer un script en Python qui permet d'afficher les éventuelles racines réelles d'un polynôme du second degré à partir de ses coefficients.
   Aide : En Python, on calcule la racine carrée de x en tapant `sqrt(x)`.
   Tu peux saisir ce script dans ta calculatrice, et l'utiliser pour vérifier tes calculs.

Exercice 17 Somme et produit des racines d'un polynôme du second degré

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels.
On se donne une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$

1. Que représentent x_1 et x_2 pour f ?
2. Montrer que la forme développée de f est donnée par $f(x) = x^2 - sx + p$ avec s et p deux réels.
   Que représentent les réels s et p pour f ?
3. **Application :**
   a. Déterminer deux réels dont la somme est -24 et le produit est 135.
   b. Déterminer deux réels dont la somme est $\frac{5}{2}$ et le produit est $-\frac{3}{2}$.

Inéquations du second degré

Exercice 18

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 3x - 2 \geqslant 0$
2. $5x^2 - 6x < 0$
3. $-3x^2 + 30x - 75 > 0$
4. $-x^2 + 6x - 9 \leqslant 0$
5. $-2x^2 + 3x - 1 \leqslant 0$

Mise en équations

Exercice 19

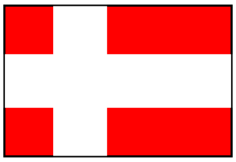
La longueur d'un rectangle surpasse sa largeur de 7 cm. Sa surface est de 228 cm^2. Quelles sont ses dimensions ?

Exercice 20

On doublera la surface d'un jardin rectangulaire 16×24 m si on l'entoure d'une bande de x m de large. Déterminer x.

Exercice 21

Un drapeau d'inspiration danoise a pour dimensions 3 m sur 2 m, la croix, blanche sur fond rouge, est composée de deux bandes de même largeur.



Quelle largeur doivent avoir ces bandes pour que l'aire de la croix soit égale à celle du fond rouge ?

Exercice 22 ⋆

Un père et son fils travaillent chez le même entrepreneur. Après un certain nombre d'heures de travail, le père reçoit 500 €.
Le fils, qui a travaillé 5 heures de moins et dont le salaire horaire est inférieur de 8 € à celui de son père, ne reçoit que 240 €.
Le but de l'exercice est de déterminer le salaire horaire de chacun et le nombre d'heures qu'ils ont travaillé.

On appelle x le salaire horaire du père et n le nombre d'heures effectuées par le père.

1. Exprimer n en fonction de x.
2. Exprimer le salaire horaire du fils en fonction de x.
3. Exprimer le nombre d'heures effectuées par le fils en fonction de x.
4. Montrer que l'équation du problème est $(x-8)\left(\dfrac{500}{x}-5\right)=240.$
5. Résoudre cette équation.
6. Sachant que le père et le fils on travaillé un nombre **entier** d'heures, déterminer le salaire horaire de chacun et le nombre d'heures qu'ils ont travaillées.

Pour approfondir

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{x-1}{2x-5} = \dfrac{x+1}{x-1}$

2. $\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2} = x+1$

Exercice 24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x^2}{x+2} > 1$

2. $\dfrac{-3x+1}{2-x} \leqslant \dfrac{-4x+5}{x+3}$

Exercice 25

Pour quelle(s) valeur(s) du réel a l'équation $x^2 + ax + 1 = 0$ admet-elle deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$?

Exercice 26 Équation bicarré

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) : \qquad x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

1. Poser $X = x^2$ et résoudre l'équation obtenue en remplaçant x^2 par X dans (E).
2. En déduire les solutions de (E).