Automatismes 1 - Suites

Automatisme 1

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 4n + 2$.
   Calculer u_7.

2. Soit (v_n) une suite définie par $v_0 = 4$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = -2v_n + 3$.
   Calculer v_3.

Corrigé 1

1. Dans l'expression de u_n on remplace n par 7, on obtient : $u_7 = 2 \times 7^2 - 4 \times 7 + 2 = 72$.

2. On calcule successivent les termes jusqu'à obtenir v_3 :
   $v_1 = -2 \times \boldsymbol{v_0} + 3 = -2 \times \mathbf{4} + 3 = \mathbf{-5}$
   $v_2 = -2 \times \boldsymbol{v_1} + 3 = -2 \times \mathbf{(-5)} + 3 = \mathbf{13}$
   $v_3 = -2 \times \boldsymbol{v_2} + 3 = -2 \times \mathbf{13} + 3 = \mathbf{-23}$

Automatisme 2

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{-5n - 2}{2n + 1}$.
   Calculer u_4.

2. Soit (v_n) une suite définie par $v_0 = -4$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = -4 - v_n^2$.
   Calculer v_2.

Corrigé 2

1. Dans l'expression de u_n on remplace n par 4, on obtient : $u_4 = \dfrac{-5 \times 4 - 2}{2 \times 4 + 1} = \dfrac{-22}{9}$.

2. On calcule successivent les termes jusqu'à obtenir v_2 :
   $v_1 = -4 - (\boldsymbol{v_0})^2 = -4 - \mathbf{(-4)}^2 = \mathbf{-20}$
   $v_2 = -4 - (\boldsymbol{v_1})^2 = -4 - \mathbf{(-20)}^2 = \mathbf{-404}$

Automatisme 3

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -3n^2 + 2$.
   Calculer u_8.

2. Soit (v_n) une suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = -4v_n + 4$.
   Calculer v_4.

Corrigé 3

1. Dans l'expression de u_n on remplace n par 8, on obtient : $u_8 = -3 \times 8^2 + 2 = -190$.

2. On calcule successivent les termes jusqu'à obtenir v_4 :
$v_1 = -4 \times \boldsymbol{v_0} + 4 = -4 \times \mathbf{2} + 4 = \mathbf{-4}$
$v_2 = -4 \times \boldsymbol{v_1} + 4 = -4 \times \mathbf{(-4)} + 4 = \mathbf{20}$
$v_3 = -4 \times \boldsymbol{v_2} + 4 = -4 \times \mathbf{20} + 4 = \mathbf{-76}$
$v_4 = -4 \times \boldsymbol{v_3} + 4 = -4 \times \mathbf{(-76)} + 4 = \mathbf{308}$

Automatisme 4

1. Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 10.

   a. Pour $n \in \mathbf{N}$, donner v_n, le terme général de la suite v.

   b. Calculer $\mathcal{S}_{40} = v_0 + v_1 + ... + v_{40}$.

2. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $0{,}2$.

   a. Pour $n \in \mathbf{N}$, donner u_n, le terme général de la suite u.

   b. Calculer $\mathcal{S}_{15} = u_0 + u_1 + ... + u_{15}$.

Corrigé 4

1. a. Soit $n \in \mathbf{N}$. $\begin{aligned} v_n &= v_0 + n \times 10 \\ &= 1 + 10n \end{aligned}$

   b. $$\begin{aligned} S_{40} &= v_0 + v_1 + ... + v_{40} \\ &= 41 \times \frac{v_0 + v_{40}}{2} \\ &= 41 \times \frac{1 + (1 + 10 \times 40)}{2} \\ &= 41 \times \frac{1 + 401}{2} \\ &= 41 \times \frac{402}{2} \\ &= 41 \times 201 \\ &= 8241 \end{aligned}$$

2. a. Soit $n \in \mathbf{N}$. $\begin{aligned} u_n &= u_0 \times 0,2^n \\ &= 4 \times 0,2^n \end{aligned}$

   b. $$\begin{aligned} S_{15} &= u_0 + u_1 + ... + u_{15} \\ &= u_0 \times \frac{1 - 0,2^{16}}{1 - 0,2} \\ &= 4 \times \frac{1 - 0,2^{16}}{1 - 0,2} \\ &\approx 4 \times 1,25 \\ &\approx 5 \end{aligned}$$

Automatisme 5

1. w la suite arithmétique de premier terme $w_0 = 7$ et de raison 4.

   a. Pour $n \in \mathbf{N}$, donner w_n, le terme général de la suite w.

   b. Calculer $\mathcal{S}_{30} = w_0 + w_1 + ... + w_{30}$.

2. Soit v la suite géométrique de premier terme $v_1 = 7$ et de raison $0{,}6$.

   a. Pour $n \in \mathbf{N}$, donner v_n, le terme général de la suite v.

   b. Calculer $\mathcal{S}_{10} = v_1 + v_2 + ... + v_{10}$. Donner un arrondi au millième près.

Corrigé 5

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_n = w_0 + n \times 4$
$= 7 + 4n$

b. $S_{30} = w_0 + w_1 + \ldots + w_{30}$
$= 31 \times \dfrac{w_0 + w_{30}}{2}$
$= 31 \times \dfrac{7 + (7 + 4 \times 30)}{2}$
$= 31 \times \dfrac{7 + 127}{2}$
$= 31 \times \dfrac{134}{2}$
$= 31 \times 67$
$= 2077$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_n = v_1 \times 0,6^{n-1}$
$= 7 \times 0,6^{n-1}$

b. $S_{10} = v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}$
$= v_1 \times \dfrac{1 - 0,6^{10}}{1 - 0,6}$
$= 7 \times \dfrac{1 - 0,6^{10}}{1 - 0,6}$
$\approx 7 \times 2,4849$
$\approx 17,394$

Automatisme 6

1. Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 3$ et de raison 10.
   a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner v_n, le terme général de la suite v.
   b. Calculer $S_{20} = v_1 + v_2 + \ldots + v_{20}$.
2. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_1 = 8$ et de raison $0{,}3$.
   a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner u_n, le terme général de la suite u.
   b. Calculer $S_{12} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{12}$.

Corrigé 6

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_n = v_1 + (n-1) \times 10$
$= 3 + 10(n-1)$
$= 3 + 10n - 10$
$= -7 + 10n$

b. $S_{20} = v_1 + v_2 + \ldots + v_{20}$
$= 20 \times \dfrac{v_1 + v_{20}}{2}$
$= 20 \times \dfrac{3 + (-7 + 10 \times 20)}{2}$
$= 20 \times \dfrac{3 + 193}{2}$
$= 20 \times \dfrac{196}{2}$
$= 20 \times 98$
$= 1960$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = u_1 \times 0,3^{n-1}$
$= 8 \times 0,3^{n-1}$

b. $S_{12} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{12}$
$= u_1 \times \dfrac{1 - 0,3^{12}}{1 - 0,3}$
$= 8 \times \dfrac{1 - 0,3^{12}}{1 - 0,3}$
$\approx 8 \times 1,4286$
$\approx 11,429$

Automatisme 7

1. Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_1 = -3$ et de raison 5.

   a. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, donner v_n, le terme général de la suite v.

   b. Calculer $\mathcal{S}_{20} = v_1 + v_2 + ... + v_{20}$.

2. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_1 = 4$ et de raison 3.

   a. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, donner u_n, le terme général de la suite u.

   b. Calculer $\mathcal{S}_{12} = u_1 + u_2 + ... + u_{12}$.

Corrigé 7

1. a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $\begin{aligned} v_n &= v_1 + (n-1) \times 10 \\ &= -3 + 5(n-1) \\ &= -3 + 5n - 5 \\ &= -8 + 5n \end{aligned}$

   b. $\begin{aligned} S_{20} &= v_1 + v_2 + ... + v_{20} \\ &= 20 \times \frac{v_1 + v_{20}}{2} \\ &= 20 \times \frac{-3 + (-8 + 5 \times 20)}{2} \\ &= 20 \times \frac{-3 + 92}{2} \\ &= 20 \times \frac{89}{2} \\ &= 890 \end{aligned}$

2. a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $\begin{aligned} u_n &= u_1 \times 3^{n-1} \\ &= 4 \times 3^{n-1} \end{aligned}$

   b. $\begin{aligned} S_{12} &= u_1 + u_2 + ... + u_{12} \\ &= u_1 \times \frac{1 - 3^{12}}{1 - 3} \\ &= 4 \times \frac{1 - 3^{12}}{1 - 3} \\ &= 4 \times 265\ 720 \\ &= 1\ 062\ 880 \end{aligned}$

Automatisme 8

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n, strictement positif, par :
$$u_n = \left(7 - \frac{3}{n}\right)\left(\frac{9}{n^4} + 4\right)$$

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier strictement positif n par :
$$v_n = \frac{4 - 7n}{n}$$

Corrigé 8

1. On sait que $\lim\limits_{n \to \infty} 7 - \frac{3}{n} = 7$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{9}{n^4} + 4 = 4$.
   Ainsi, d'après les propriétés des limites d'un produit, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(7 - \frac{3}{n}\right)\left(\frac{9}{n^4} + 4\right) = \mathbf{28}$.

2. Pour tout entier n strictement positif, on a : $\frac{4 - 7n}{n} = \frac{4}{n} - 7$.
   $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} -7 = -7$.
   Ainsi, d'après les propriétés des limites d'une somme, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4 - 7n}{n} = \mathbf{-7}$.

Automatisme 9

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier positif ou nul n par :

$$u_n = n^8 + \sqrt{n}$$

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier n, strictement positif, par :

$$v_n = \frac{6+n^9}{n^5}$$

Corrigé 9

1. On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} n^8 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
   Ainsi, d'après les propriétés des limites de la somme, $\lim\limits_{n\to\infty} n^8 + \sqrt{n} = +\infty$.

2. On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} 6 + n^9 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^5 = +\infty$.
   Nous avons donc une forme indeterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », donc nous allons factoriser le numérateur par son terme de plus haut degré n^9 :

$$\begin{aligned}\frac{6+n^9}{n^5} &= \frac{n^9\left(\frac{6}{n^9}+1\right)}{n^5} \\ &= \frac{n^5 \times n^4\left(\frac{6}{n^9}+1\right)}{n^5} \\ &= n^4\left(\frac{6}{n^9}+1\right) \quad \text{en simplifiant par } n^5.\end{aligned}$$

   Or $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n^9} + 1 = 1$.
   Ainsi, d'après les propriétés des limites d'un produit, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6+n^9}{n^5} = +\infty$.

Automatisme 10

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n strictement positif, par :

$$u_n = \frac{-3-\frac{5}{n}}{\frac{2}{n^8}}$$

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier n strictement positif, par :

$$v_n = \frac{2+n^4}{n^4}$$

Corrigé 10

1. On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} -3 - \frac{5}{n} = -3$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^8} = 0$.

   Ainsi, d'après les propriétés des limites d'un quotient, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3-\frac{5}{n}}{\frac{2}{n^8}} = -\infty$.

2. On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} 2+n^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 = +\infty$.
Nous obtenons une forme indeterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », nous allons donc factoriser le numérateur par n^4 :

$$\begin{aligned}\frac{2+n^4}{n^4} &= \frac{n^4(\frac{2}{n^4}+1)}{n^4}\\ &= \frac{2}{n^4}+1 \text{ en simplifiant par } n^4.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^4} = 0$.
Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+n^4}{n^4} = 1$.

Automatisme 11

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n, , par :

$$u_n = \frac{1-4^n}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier positif n par :

$$v_n = 2^n - 3^n$$

Corrigé 11

1. $4 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} 1-4^n = -\infty$.
$0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$.
Ainsi, d'après les propriétés des limites d'un quotient, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-4^n}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n} = -\infty$.

2. On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$.
Nous obtenons une forme indeterminée du type « $+\infty - \infty$ », nous allons donc factoriser l'expression par le terme le plus « grand » (3^n) :

$$\begin{aligned}2^n - 3^n &= 3^n \times \frac{2^n}{3^n} - 3^n \times 1\\ &= 3^n \times \left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right)\\ &= 3^n \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)\end{aligned}$$

$0 < \frac{2}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 = -1$.
$3 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$.
Donc, d'après les propriétés des limites d'un produit, $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n - 3^n = -\infty$.

Automatisme 12

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \frac{5 + \frac{2}{n}}{\frac{7}{n^8}}$$

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier positif n par :

$$v_n = 10^n - 5^n$$

Corrigé 12

1. On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \frac{2}{n} = 5$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^8} = 0$.

   Ainsi, d'après les règles des limites d'un quotient, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\frac{2}{n}}{\frac{7}{n^8}} = +\infty$.

2. On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} 10^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n = +\infty$.
   Nous obtenons une forme indeterminée du type « $+\infty - \infty$ », nous allons donc factoriser l'expression par le terme le plus « grand » (10^n) :

$$\begin{aligned}
10^n - 5^n &= 10^n \times 1 - 10^n \times \frac{5^n}{10^n} \\
&= 10^n \times \left(1 - \frac{5^n}{10^n}\right) \\
&= 10^n \times \left(1 - \left(\frac{5}{10}\right)^n\right) \\
&= 10^n \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

   $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

   $10 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} 10^n = +\infty$.

   Donc, d'après les propriétés des limites d'un produit, $\lim\limits_{n\to\infty} 10^n - 5^n = +\infty$.