Suites numériques, modèles discrets

Modéliser par une suite

Exercice 1

1. Pour 10 billets de train, elle payera : $400 + 2 \times 10$
$= 420$ €.

2. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 400 + 2n$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = 434 \iff 400 + 2n = 434$
$\iff 2n = 34$
$\iff n = 17.$

Nolwenn a acheté 17 billets de train.

Exercice 2

On appelle u_n la distance (en km) parcourue par Nawal le jour n.

On a : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = 1{,}1\, u_n. \end{cases}$

(u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $1{,}1$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = u_1 \times 1{,}1^{n-1}$.
$= 1{,}1^{n-1}$.

Exercice 3

On appelle u_n la somme disponible le 1er janvier $2024+n$.

On a : $\begin{cases} u_0 = 5000 \\ u_{n+1} = 1{,}02 \times u_n + 2000. \end{cases}$

(u_n) est une suite arithmético-géométrique.
Nous verrons au cours du chapitre comment calculer le terme général d'une telle suite.

Représentation graphique d'une suite

Exercice 4 Evolution d'une population de tortues.

1. Nb de tortues en 2021 : $u_1 = f(u_0)$

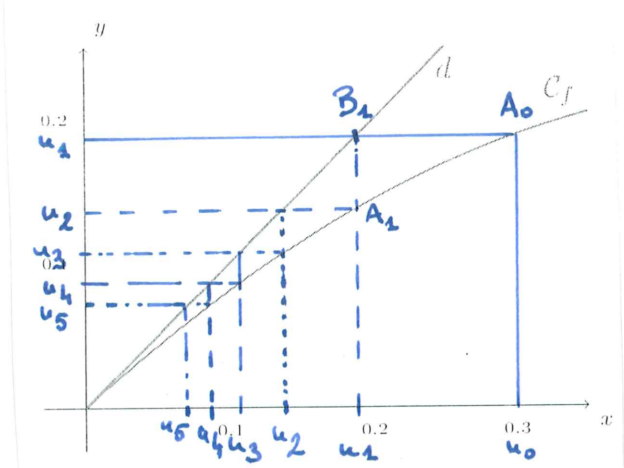
$= 0,9 \times 0,3 \times (1 - 0,3)$

$= 0,27 \times 0,7$

$= 0,189$

Selon ce modèle, il y avait 0,189 milliers soit 189 tortues au début de l'année 2021.

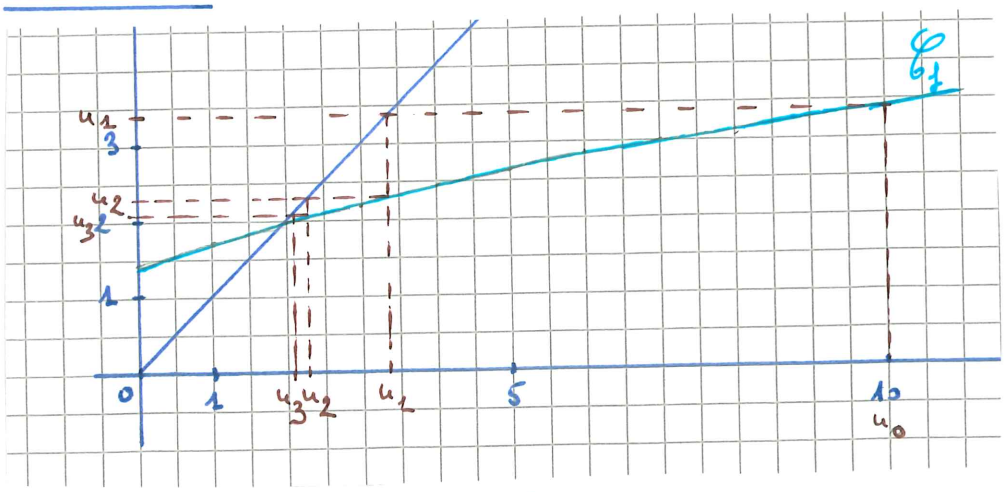
2.



3. La suite (u_n) semble strictement décroissante. Elle semble avoir pour limite 0.

On peut conjecturer que la population de tortue va finir par s'éteindre.

Exercice 5



La suite (u_n) semble décroissante. Elle semble avoir pour limite 2.

Exercice 6

1. $v_0 = 3$; $v_1 = f(3) = -1$; $v_2 = f(-1) = 3$; $v_3 = f(3) = -1$

2. La suite (v_n) alterne entre les deux valeurs 3 et -1. Elle n'a pas de limite.

Suites de référence

Exercice 7

1. $u_1 = u_0 \times 2$
$= 3 \times 2$
$= 6$

2. $u_4 = u_0 \times 2^4$
$= 3 \times 16$
$= 48$

Exercice 8

1. $v_2 = v_1 + (-5)$
$= 4 - 5$
$= -1$

2. $v_{11} = v_1 + (11-1) \times (-5)$
$= 4 - 10 \times 5$
$= -46.$

Exercice 9

(w_n) est géométrique de raison $q>0$ donc $w_6 = q^2 \times w_4$

On résout $48 = q^2 \times 3.$ dans $\mathbb{R}+$:

$48 = q^2 \times 3 \iff 16 = q^2$
$\iff q = \sqrt{16}$
$\iff q = 4.$

La suite (w_n) a pour raison 4.

Exercice 10

(t_n) est une suite arithmétique de raison r donc
$t_7 = 3r + t_4$.

On résout $18 = 3r + 3$:

$18 = 3r + 3 \iff 15 = 3r$
$\iff r = 5.$

La suite (t_n) a pour raison 5.

Exercice 11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle u_n la somme payée l'année n.

On a : $\begin{cases} u_1 = 200 \\ u_{n+1} = 1{,}02\ u_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 200$ et de raison $1{,}02$.

On veut calculer : $u_1 + u_2 + \dots + u_{15} = u_1 \times \dfrac{1 - 1{,}02^{15}}{1 - 1{,}02}$

$$\approx 200 \times \frac{1 - 1{,}35}{-0{,}02}$$

$$\approx 3458{,}68.$$

Au bout de 15 ans, le propriétaire de la piscine aura versé environ 3458,68 €.

Exercice 12

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle u_n la distance parcourue la $n^{\text{ième}}$ semaine.

On a $\begin{cases} u_1 = 100 \\ u_{n+1} = 20 + u_n \quad , \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 100$ et de raison 20.

On veut calculer : $u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = 20 \times \dfrac{u_1 + u_{20}}{2}$

$$= 20 \times \frac{100 + 100 + 19 \times 20}{2}$$

$$= 20 \times \frac{580}{2}$$

$$= 5\,800.$$

Le cycliste aura parcouru 5 800 km au bout de ses 20 semaines d'entraînement.

Exercice 13

On modélise cette situation par une suite :
Soit u_n le nombre de noyaux d'iode le jour n.

On a : $\begin{cases} u_0 = 500. \\ u_{n+1} = (1-0,083)\, u_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $0,917$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times 0,917^n$.
$= 500 \times 0,917^n$.

On veut déterminer la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que $u_n \leq 250$.

Avec la calculatrice on obtient $u_7 \approx 273$
et $u_8 \approx 249,99$.

Le nombre de noyaux aura diminué de moitié au bout de 8 jours.

Limite d'une suite

Exercice 14

1. La suite ne semble pas avoir de limite finie.
   Elle semble diverger vers $+\infty$.
2. La suite ne semble pas avoir de limite.
3. La suite semble avoir pour limite 0.
4. La suite ne semble pas avoir de limite finie.
   Elle semble diverger vers $-\infty$.

Exercice 15

1. (u_n) semble avoir pour limite $-\infty$.
2. (v_n) semble avoir pour limite $+\infty$.
3. (w_n) semble avoir pour limite 1.
4. (t_n) ne semble pas avoir de limite.

Exercice 16

1. La fonction seuil sert à déterminer le rang à partir duquel la suite (u_n) dépasse une valeur donnée.

2. seuil (1000) renvoit 5
seuil (100 000) renvoit 9
seuil (10 ** 10) renvoit 17.

3. la suite (u_n) semble avoir pour limite $+\infty$.

Exercice 17 Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Héron.

1. Soit x_0 un réel strictement positif.

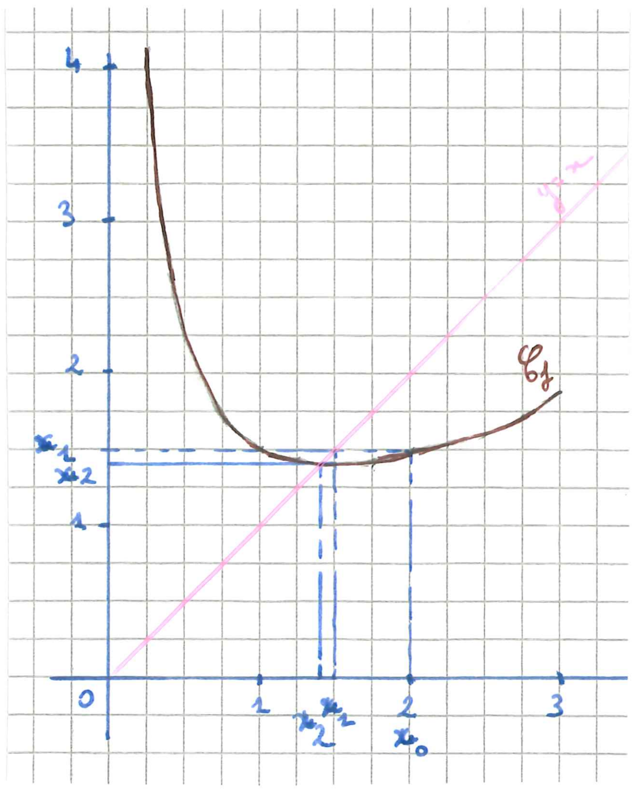
$$x_0 > \sqrt{2} \iff \frac{1}{x_0} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

$$\iff \frac{2}{x_0} < \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2}}}_{=\sqrt{2}}$$

$$\iff \frac{2}{x_0} < \sqrt{2}.$$

2.



b) la suite (x_n) semble décroissante.
Elle semble converger vers l'abscisse a du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la première bissectrice.

Déterminons a :

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \iff a = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$$

$$\iff \frac{a}{2} = \frac{1}{a}$$

$(a > 0)$

$$\iff a^2 = 2$$

$$\iff a = \sqrt{2}$$

c)

```
def heron (p) :
    x = 2
    y = 2 / x
    while x - y > p
        x = 0.5 * (x + y)
        y = 2/x
    return (y, x).
```

d) À l'aide du programme :
$\sqrt{2}$ est compris entre
1,4142135623730 95 et
1,4142135623730 96.

Exercice 18

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -6n = -\infty$

$\Big\}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n+1 = -\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} + 4 = 4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \sqrt{n} = -\infty$

$\Big\}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n+3 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\Big\}$ Par quotient, on a une forme indéterminée.

Soit $n > 0$. $t_n = \dfrac{5n}{n} + \dfrac{3}{n}$
$= 5 + \dfrac{3}{n}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 5$.

Exercice 19

1. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -4n+1 = -\infty$

$\Big\}$ Par somme, on a une forme indéterminée.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = n^2 - 4n^2 \times \dfrac{1}{n} + \dfrac{n^2}{n^2}$

$= n^2\left(1 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 4$

$\Big\}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 20

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n+2 = +\infty$

$\Big\}$ Par quotient, on obtient une forme indéterminée.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n = \frac{n \times 2 + n \times \frac{1}{n}}{n \times 3 + n \times \frac{2}{n}} = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}$$

3. On a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} 2+\frac{1}{n} = 2 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 3+\frac{2}{n} = 3. \end{array}\right\} \text{ d'où } \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{2}{3}.$$

Comparaisons de limites

Exercice 21

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $n^3 - 1 \leqslant n^3 - (1)^n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 - 1 = +\infty$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $1 \leqslant 2 + (-1)^n \leqslant 3$

d'où $\frac{1}{n} \leqslant \frac{2+(-1)^n}{n} \leqslant \frac{3}{n}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. (d'après le théorème des gendarmes)

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $n^2 + 3n + 5 > n^2$

d'où $\sqrt{n^2+3n+5} > \sqrt{n^2}$

ainsi $w_n > n$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $4n - 1 \leqslant 4n + (-1)^n \leqslant 4n+1$

d'où $4 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{4n+(-1)^n}{n} \leqslant 4 + \frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 - \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \frac{1}{n} = 4$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 4$ (d'après le théorème des gendarmes).

Exercice 22

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n > n^2 - 3n$

d'où $\quad u_n > n(n-3)$.

2. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$

d'où par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} n(n-3) = +\infty$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 23

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\quad 1 - \dfrac{1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1}$

2. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n+1} = 1$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n+1} = 1$

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

Exercice 24 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad n^2 > n^2 - 1$

d'où $\quad w_n > \dfrac{n^2 - 1}{n+1}$

Or $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$

donc $w_n > \dfrac{(n+1)(n-1)}{n+1}$

ainsi $w_n > n - 1$.

2. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

limites et suites géométriques

Exercice 25

1. (u_n) suite géométrique de raison $2{,}5 > 1$ et de limite $-\infty$.
2. (v_n) suite géométrique de raison $1{,}5 > 1$ et de limite $+\infty$.
3. (w_n) suite géométrique de raison $0{,}5 \in]0;1[$ et de limite 0.
4. (t_n) suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4} \in]0;1[$ et de limite 0.

Exercice 26

1. (u_n) représentée par le graphique 3
(v_n) représentée par le graphique 2
(w_n) représentée par le graphique 4
(t_n) représentée par le graphique 1.

2. (u_n) a pour premier terme 3 et pour raison $1,1 > 1$.
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

(v_n) a pour premier terme -2 et pour raison $2,1 > 1$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = -\infty$.

(w_n) a pour raison $0,8 \in]0;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

(t_n) a pour premier terme -3 et pour raison 1
donc (t_n) est constante égale à -3 et $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = -3$.

Exercice 27

1. $0,2 \in]0;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^n = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - 0,2^n = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2 \times 7$
$= 14$

2. $0,7 \in]0;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + 0,7^n = 1$.

$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

3. $5 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$

$\frac{1}{4} \in]0;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

4. $\lim 3n = +\infty$. et $5 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n + 5^n = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

Exercice 28

S_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{4} \in]0;1[$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}$

$= \dfrac{1}{\frac{3}{4}}$

$= \frac{4}{3}$.

Exercice 29

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ $S_n = u_0 \times \dfrac{1-0{,}8^{n+1}}{1-0{,}8}$

$= 3 \times \dfrac{1-0{,}8^{n+1}}{0{,}2}$

2. $0{,}8 \in]0;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{3}{0{,}2}$

$= \frac{30}{2}$

$= 15$.

Exercice 30 Propagation d'une rumeur.

Pour $n \in \mathbb{N}$ u_n désigne le nombre d'élèves mis au courant le jour n.

On a (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ désigne le nombre total d'élèves qui connaissent la rumeur le jour n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\quad S_n = 1 \times \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}$

$= 2^{n+1} - 1.$

On veut déterminer le plus petit entier n tel que $S_n \geqslant 800$.

$S_n \geqslant 800 \iff 2^{n+1} - 1 \geqslant 800$

$\iff 2^{n+1} \geqslant 801$

$\iff n+1 \geqslant 9$ à l'aide de la calculatrice

$\iff n \geqslant 8.$

Il faut 8 jours pour que tous les élèves connaissent la rumeur.

Exercice 31

1. $A_1 = \dfrac{1^2}{2} = \dfrac{1}{2}$

2. $A_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4}$

$A_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

$A_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{8}\right)^2$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

Ainsi on obtient $\quad A_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \dots + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n.$

Remarque : chaque triangle est une réduction de rapport $\dfrac{1}{2}$ du triangle précédent.
Ainsi l'aire du triangle à l'étape $n+1$ est égale à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ de l'aire du triangle à l'étape n.

$\dfrac{1}{4} \in]0;1[$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} A_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\frac{3}{4}}$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{3}$

$= \dfrac{2}{3}.$

Exercice 32 : Évolution d'une population de bactéries.

1\. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de bactéries présentes le jour n.

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 50\,000$ et de raison $1 - \frac{10}{100} = 0{,}9$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 50\,000 \times 0{,}9^n$.

b. $0{,}9 \in]0;1[$ donc (u_n) a pour limite 0.

c. À l'aide de la calculatrice, on obtient $u_{58} \approx 110{,}9$ et $u_{59} \approx 99{,}8$.

Il faut donc attendre 59 jours pour que la baignade soit de nouveau autorisée.

2\. a.

```
def seuil(m) :
    n = 0
    c = 50 000
    while c > m :
        c = c * 0.9
        n = n + 1
    return n.
```

b. On utilise la fonction seuil : seuil(100) renvoit 59.

Exercice 33

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{5^n\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}{5^{n+1}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{5}\ \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}$$

$\frac{4}{5} \in]0;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} = 1$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}} = 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{5}$.

Suites arithmético-géométriques.

Exercice 34 Evolution d'une population de macareux moines.

1. $0,7 \times 100 + 30 = 70 + 30$
$= 100.$

Donc la suite constante (c_n) egale à 100 vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $c_{n+1} = 0,7\, c_n + 30$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.
→ on cherche à démontrer que $v_{n+1} = q \times v_n$ avec q un réel à déterminer.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - c_{n+1} \\ &= 0,7 \times u_n + 30 - (0,7 \times c_n + 30) \\ &= 0,7 \times (u_n - c_n) \\ &= 0,7 \times v_n. \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,7.

b. $$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - c_0 \\ &= 600 - 100 \\ &= 500. \end{aligned}$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,7^n$
$= 500 \times 0,7^n$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = v_n + c_n$
$= 500 \times 0,7^n + 100$.

3. D'après ce modèle, au 1er juin 2025, la population de macareux sera de l'ordre de

$$\begin{aligned} u_5 &= 500 \times 0,7^5 + 100 \\ &\approx 184 \text{ individus.} \end{aligned}$$

Exercice 35

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad x = 5x - 12 \iff 4x = 12$

$\iff x = 3.$

La suite (c_n) constante égale à 3 vérifie la relation de récurrence $c_{n+1} = 5c_n - 12$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - c_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad v_{n+1} = u_{n+1} - c_{n+1}$

$= 5u_n - 12 - (5c_n - 12)$

$= 5(u_n - c_n)$

$= 5v_n.$

(v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = u_0 - c_0$

$= -2 - 3$

$= -5.$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 \times 5^n$

$= -5 \times 5^n.$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = v_n + c_n$

$= -5 \times 5^n + 3.$

$= -5^{n+1} + 3.$

Exercice 36

1. → On détermine la suite constante (c_n) qui vérifie la relation de récurrence :

Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad x = 0{,}1\,x + 9 \iff 0{,}9\,x = 9$

$\iff x = \dfrac{9}{0{,}9}$

$\iff x = 10.$

La suite (c_n) constante égale à 10 vérifie la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = 0{,}1\,c_n + 9$.

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$. on pose $w_n = v_n - c_n$.

On montre que (w_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad w_{n+1} = v_{n+1} - c_{n+1}$

$= 0,1 \times v_n + 9 - (0,1 \times c_n + 9)$

$= 0,1 (v_n - c_n)$

$= 0,1 \; w_n.$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $w_0 = v_0 - c_0$

$= 8 - 10$

$= -2.$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad w_n = -2 \times 0,1^n.$

et $\quad v_n = w_n + c_n$

$= -2 \times 0,1^n + 10.$

2. $0,1 \in]0;1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -2 \times 0,1^n = 0.$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 10$.

<u>Exercice 37</u>

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\quad u_{n+1} = 1,04 (u_n - 8,5)$

$= 1,04 \; u_n - 1,04 \times 8,5$

$= 1,04 \; u_n - 8,84.$

2. (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

→ On détermine la suite constante (c_n) vérifiant la relation de récurrence $c_{n+1} = 1,04 \; c_n - 8,84$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\quad x = 1,04 \; x - 8,84 \iff 0,04 \, x = 8,84$

$\iff x = \dfrac{8,84}{0,04}$

$\iff x = 221.$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad c_n = 221.$

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - c_n$

On montre que (v_n) est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} = u_{n+1} - c_{n+1}$
$= 1{,}04\, u_n - 8{,}84 - (1{,}04\, c_n - 8{,}84)$
$= 1{,}04\,(u_n - c_n)$
$= 1{,}04\, v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme
$v_0 = u_0 - c_0$ et de raison $1{,}04$.
$= 230 - 221$
$= 9$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 9 \times 1{,}04^n$.

et $u_n = v_n + c_n$
$= 9 \times 1{,}04^n + 221$.

3. On a $u_{29} \approx 249{,}1$ et $u_{30} \approx 250{,}2$.
Selon ce modèle, la quantité d'algues dépassera 250 tonnes dans 30 ans.

4.
```
def algues(n) :
    plage = 230
    ramasse = 8,5
    for i in range(n) :
        plage = 1,04 * (plage - ramasse)
        ramasse = 1,1 * ramasse.
    return (plage, ramasse)
```

algues (10) renvoit (176,4 , 22) Il y aura 176,4t d'algues sur la plage dans 10 ans.

algues (20) renvoit (-164,4 , 57)
La quantité d'algues sur la plage dans 20 ans serait négative.
La demande de l'usine devient trop forte. Il n'y aura pas assez d'algues pour la satisfaire.

Prolongements.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + 3}{u_n} = 2 + \frac{3}{u_n} = 2 + 3v_n.$$

(v_n) est donc une suite arithmético-géométrique.

→ On détermine la suite constante (c_n) qui vérifie la relation de récurrence $c_{n+1} = 3c_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $x = 3x + 2 \iff 2x = -2 \iff x = -1.$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = -1$

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - c_n$.

On montre que (w_n) est une suite géométrique de raison 3 (à faire) et de premier terme

$$w_0 = v_0 - c_0 = \frac{1}{u_0} + 1 = 2$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = 2 \times 3^n$$

$$v_n = w_n + c_n = 2 \times 3^n - 1.$$

$$u_n = \frac{1}{2 \times 3^n - 1}$$