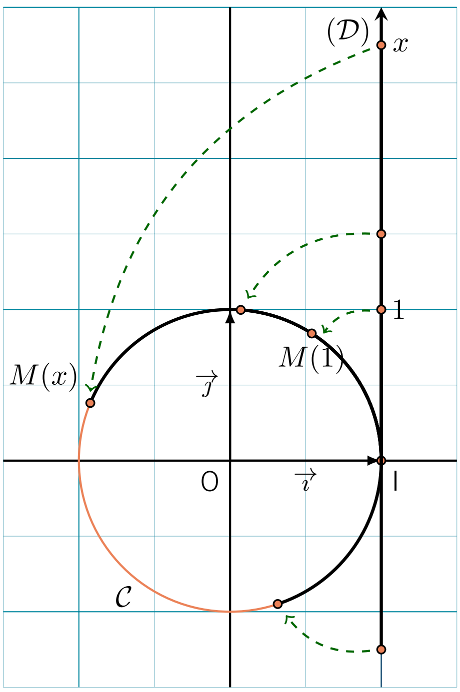
Chapitre 7

Trigonométrie

Dans le plan, on choisit une *orientation* : on décide de manière arbitraire que le *sens direct* est le sens de rotation contraire à celui des aiguilles d'une montre. L'autre sens et appelé *sens indirect*.

1 L'enroulement de R sur le cercle trigonométrique



Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1. Il est fréquent de munir le plan d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et de prendre pour cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 centré en O.

Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par $I\,(1 ; 0)$, orientée et dirigée par $\vec{j}$. La droite graduée $(\mathcal{D})$ représente alors l'ensemble **R**.

On « enroule » **R** sur le cercle en faisant correspondre :

- zéro avec I ;
- chaque point de $(\mathcal{D})$ représentant un réel positif x avec l'unique point $M(x)$ du cercle tel que l'arc $\widehat{IM}$ soit **direct** et de longueur x ;
- chaque point de $(\mathcal{D})$ représentant un réel négatif x avec l'unique point $M(x)$ du cercle tel que l'arc $\widehat{IM}$ soit l'image de x sur $\mathcal{C}$ et de longueur $-x$.

On appelle ce point $M(x)$ **l'image de x sur $\mathcal{C}$**.

Propriété

> Le cercle trigonométrique a pour longueur 2π.

Propriété

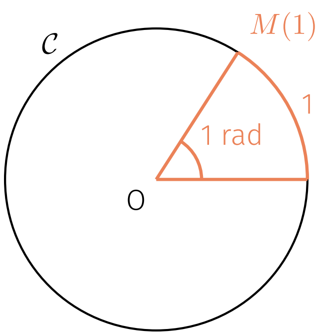
- Deux nombres réels x et x' ont la même image sur $\mathcal{C}$ si et seulement si ces deux nombres sont séparés par un multiple entier de 2π, ce qui peut s'écrire

$$\boldsymbol{x - x' = k \times 2\pi \qquad (k \in \mathbf{Z})}$$

- Si M est l'image d'un réel x alors les nombres qui ont également M pour image sont les réels de la forme

$$\boldsymbol{x + k \times 2\pi \qquad (k \in \mathbf{Z})}$$

Définition : radian



On définit l'unité **radian** comme ceci : un radian est la mesure d'un angle qui intercepte un arc de $\mathcal{C}$ de longueur 1.
360 degrés correspondent à 2π radians.

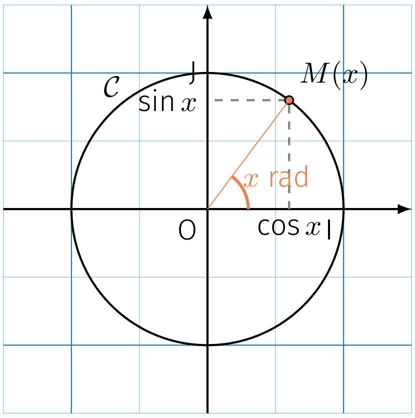
Propriété : Conversion des mesures d'angles usuelles

Angle (en degrés)	360	180	90	d	$r \times \dfrac{360}{2\pi}$
Angle (en radians)	2π	π	$\dfrac{\pi}{2}$	$d \times \dfrac{2\pi}{360}$	r

Exemples

- Un angle de 30° mesure .... radians.
- Un angle de 45° mesure .... radians.
- Un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ radians mesure .... degrés.
- Un angle de $\dfrac{3\pi}{4}$ radians mesure .... degrés.

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel



Définition : cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit M son image sur $\mathcal{C}$.
On appelle **cosinus de x** et on note $\cos x$ l'abscisse de M.
L'ordonnée de M est le **sinus de x**, noté $\sin x$.

Propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

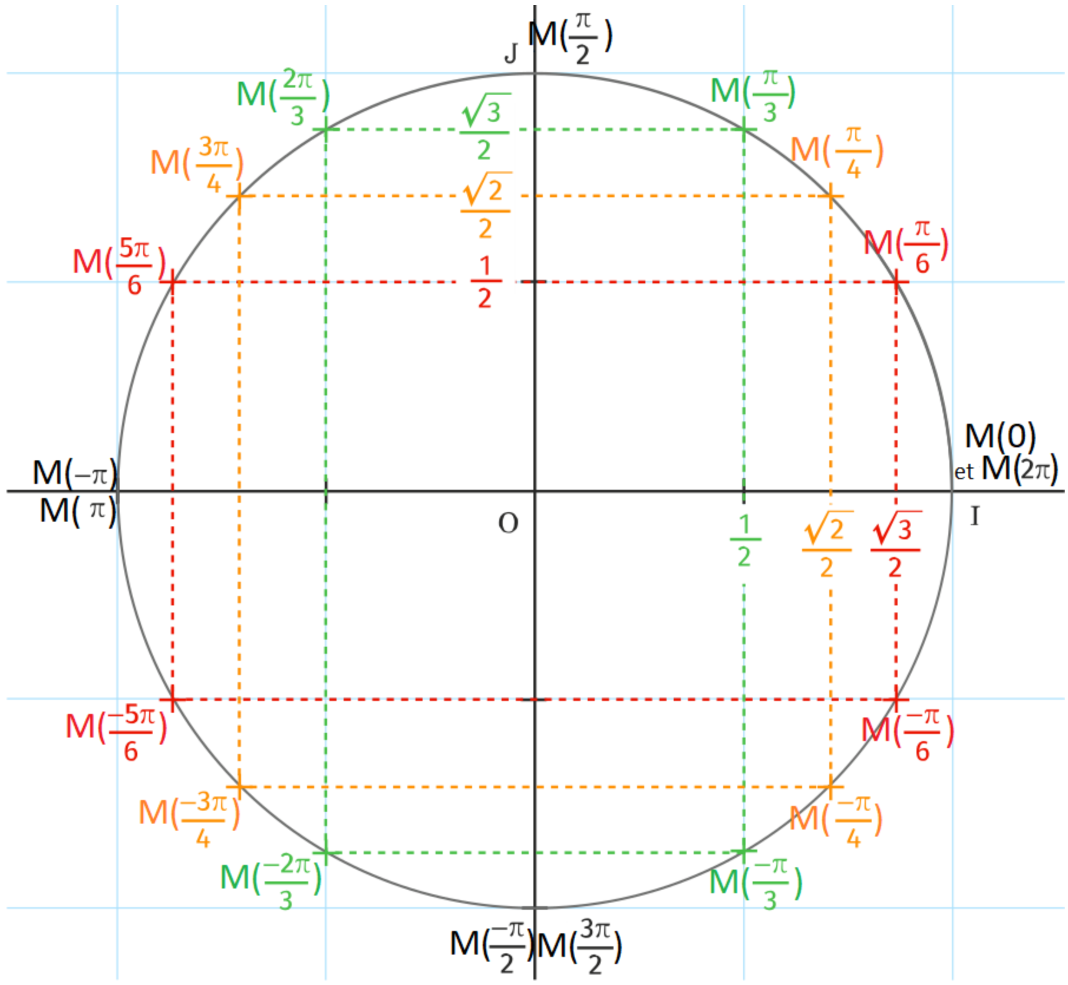
Cosinus et sinus classiques

x en degrés	0	30	45	60	90	180
x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Preuve

Démonstrations en vidéo :

- Démontrer que $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$: https ://youtu.be/ViDEbKPzd34
- Démontrer que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$: https ://youtu.be/gYeR0TzOHAw

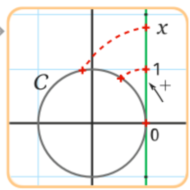


À retenir

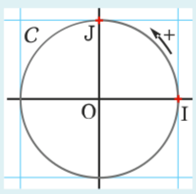
Proportionnalité entre radians et degrés
2π rad $= 360°$
π rad $= 180°$
$\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$

Radian : nouvelle unité pour mesurer un angle

Enroulement de la droite numérique



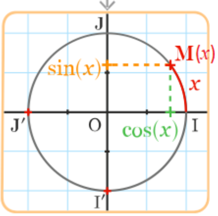
Cercle trigonométrique (rayon 1 et orienté)



TRIGONOMÉTRIE

Cosinus et Sinus

Cosinus : $\cos(x) = x_M$
Sinus : $\sin(x) = y_M$



Valeurs remarquables

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0