Chapitre 6

Suites arithmétiques et géométriques

1 Deux exemples d'étude de suites

Exercice 1

En 2020, un village U comptait 800 habitants mais chaque année il perd 5 habitants au profit d'un village V qui comptait 580 habitants en 2020.

En quelle année, la population du village V dépassera-telle celle du village U ?

Modélisation de la situation avec des suites

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n on a $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite (u_n).

Schéma général :

Procédure 1 : Utilisation des formes explicites des deux suites

Propriété

Si (u_n) est une suite **arithmétique** de raison r, alors pour tous entiers naturels n et m :

- $u_n = u_0 + n \times r$ (forme explicite)
- $u_n = u_m + (n - m)r$

Procédure 2 : Utilisation des représentations graphiques des deux suites

Propriété

Si (u_n) est une suite **arithmétique** de raison r, alors, dans un repère, les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ sont alignés.

Procédure 3 : Utilisation d'un tableur

	A	B	C
1	n	U	V
2	0	800	580
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

Procédure 4 : Utilisation d'un algorithme

Python

```python
u = ...
v = ...
n = ...

while u ... v :
    u = ...
    v = ...
    n = ...

print(...)
```

Exercice 2

Mathieu a placé 4000 € sur un compte qui rapporte 2 % d'intérêts chaque année.
Julie a placé 3500 € sur un compte qui rapporte 3 % d'intérêts chaque année.

Au bout de combien d'années, Julie disposera-telle de plus d'argent que Mathieu ?

Modélisation de la situation avec des suites

Définition

Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier n on a $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite (u_n).

Schéma général :

Procédure 1 : Utilisation des formes explicites des deux suites

Propriété

Si (u_n) est une suite **géométrique** de raison $q \neq 0$, alors pour tous entiers naturels n et m :

- $u_n = u_0 \times q^n$ (forme explicite)
- $u_n = u_m \times q^{n-m}$

Procédure 2 : Utilisation d'un tableur

	A	B	C
1	n	U	V
2	0	4000	3500
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		

Procédure 3 : Utilisation d'un algorithme

2 Sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique

Propriété

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- si $r > 0$ alors u est croissante.
- si $r < 0$ alors u est décroissante.
- si $r = 0$ alors u est constante.

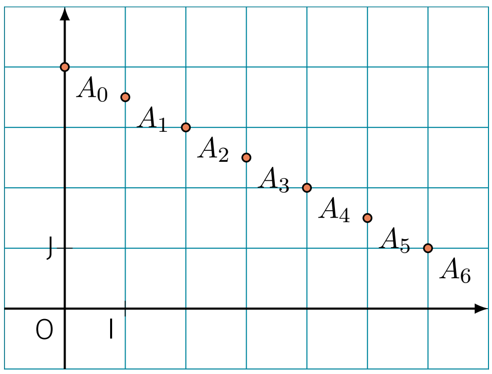
Preuve

Exemple

Soit la suite α définie par

$$\begin{cases} \alpha_0 & = & 4 \\ \alpha_{n+1} & = & \alpha_n - \dfrac{1}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

C'est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$, c'est donc une suite décroissante.



Propriété

Soit u une suite géométrique de raison q.

- Si $q < 0$ la suite n'est ni croissante ni décroissante.
- Si $q = 0$ la suite est nulle à partir de u_1.
- Si $q = 1$ la suite est constante.

- Si $u_0 > 0$ alors
  - Si $q > 1$ la suite est croissante.
  - Si $0 < q < 1$ la suite est décroissante.
- Si $u_0 < 0$ alors
  - Si $q > 1$ la suite est décroissante.
  - Si $0 < q < 1$ la suite est croissante.

Preuve

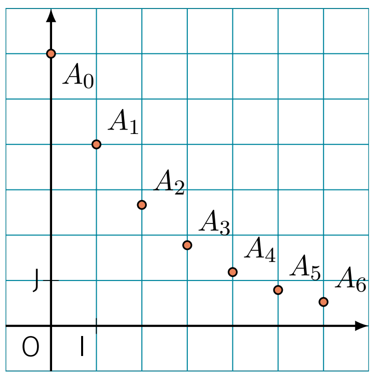
Exemples

La suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 6 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2}{3}u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$.

Comme $u_0 > 0$ et que $0 < q < 1$, elle est décroissante.

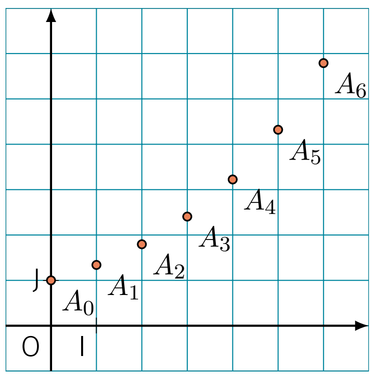


La suite v définie par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & 1,34\, v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est une suite géométrique de raison $q = 1,34$.

Comme $u_0 > 0$ et que $q < 1$, elle est croissante.



3 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique

Sommes des termes d'une suite arithmétique

Propriété

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad 0+1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

On note : $$\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Preuve

Démonstration en vidéo : https ://youtu.be/hHySWepnHwY

Histoire

Une anecdote raconte que le jeune Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), alors âgé de 10 ans a utilisé cette astuce pour effectuer très rapidement et avant tous ses camarades un calcul donné par son instituteur. Il s'agissait de calculer la somme $1+2+3+\ldots+100$.
Pour en savoir plus : https ://youtu.be/pvKLXuueQTI

Propriété : Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Soient n et p deux entiers naturels, avec $n < p$.

- La somme des $n+1$ premiers termes de la suite u_n est égale à :

$$u_0 + u_1 + u_2 + ...u_{n-1} + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

- La somme des termes d'indice p à n est égale à :

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Preuve

Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété

Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

On note : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Preuve

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
On note : $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$.

On a : $q \times S_n = q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} + q^n + q^{n+1}$

D'où $S_n - qS_n = 1 + q - q + q^2 - q^2 + ... + q^n - q^n - q^{n+1}$

$1 \times S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$

$(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$

Ainsi $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ en divisant par $1-q$ car $q \neq 1$

Propriété : Somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0.
Soient n et p deux entiers naturels, avec $n < p$.

- La somme des $n+1$ premiers termes de la suite u_n est égale à :

$$u_0 + u_1 + u_2 + ...u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- La somme des termes d'indice p à n est égale à :

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Preuve

Exemples

1. Calculer $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + 75.$
2. Calculer $S_2 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^9.$
3. La suite (u_n) est arithmétique avec $u_3 = 3$ et $u_9 = 15$.
   Calculer $u_3 + u_4 + ... + u_9$
4. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $v_0 = 3$.
   Calculer la somme des dix premiers termes de la suite (v_n).

Exercice 3

Alice a deux propositions de salaires lors de son arrivée dans une entreprise le 1er janvier 2023 :

- **Proposition 1 :** Elle commence avec un salaire de 2000 € mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 115 €.
- **Proposition 2 :** Elle commence avec un salaire de 2000 € mensuel la première année et son salaire mensuel augmente chaque année de 5%.

Afin de se constituer un pécule pour faire le tour du monde en 2033, Alice souhaite mettre de côté **UN** salaire mensuel par an jusqu'à son départ.

Quelle proposition lui conseillez-vous de choisir ?