Chapitre 8

Fonctions dérivées et applications

1 Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle **ouvert** I.
Si f est dérivable en tout nombre de I alors on dit que f est **dérivable *sur* I**. On peut alors définir la **fonction dérivée de f** (aussi appelée la dérivée de f, plus simplement) : à tout nombre x de I elle associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x.

Exemple 1

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet , soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $h \neq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)-2-(3x-2)}{h}\\ &= \frac{3h}{h}\\ &= 3\end{aligned}$$

Ainsi quand h tend vers zéro cette quantité tend vers 3 (bien évidemment vu qu'elle ne dépend pas de h). On a donc $f'(x) = 3$.
f' est donc la fonction constante qui à tout réel x associe 3.
Ce n'est pas très étonnant vu que la représentation graphique de f est une droite de pente 3 (elle est sa propre tangente en tout point).

Exemple 2

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:
Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $h \neq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2-4(x+h)+1-(3x^2-4x+1)}{h}\\ &= \frac{3x^2+6xh+3h^2-4x-4h+1-3x^2+4x-1}{h}\\ &= \frac{6xh-4h+3h^2}{h}\\ &= 6x-4+3h\end{aligned}$$

Quand h tend vers zéro cette quantité tend vers $6x - 4$. On a donc $f'(x) = 6x - 4$.
f' est donc la fonction affine définie par $f'(x) = 6x - 4$.

Dérivées des fonctions de référence

Propriété

On note D_f l'ensemble de définition de la fonction f et $D_{f'}$ son ensemble de dérivabilité.

Fonction f définie par :	D_f	Fonction dérivée f' définie par :	$D_{f'}$
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$, avec $m, p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$

Il est important de connaître ce tableau **par cœur** pour ne pas avoir à recalculer des limites de taux de variation comme dans les exemples 1 et 2. Cela nous fera gagner beaucoup de temps par la suite.

2 Fonctions dérivées et opérations

Pour ce paragraphe, u et v désignent deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle ouvert I.

2.1 Dérivée d'une somme

Propriété

La fonction $u + v$ est dérivable sur I et l'on a :

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

Preuve

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 + 3x + \sqrt{x}$ est dérivable sur R_+^*, de dérivée $f'(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.2 Dérivée d'un produit

Propriété

La fonction uv est dérivable sur I et l'on a :

$$\boxed{\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}}$$

Preuve

Exemple

La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$ est dérivable sur cet intervalle de dérivée :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \times \sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{2x^2}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{5}{2}x\sqrt{x}
\end{aligned}$$

2.3 Dérivée d'un produit de fonction par un réel

Propriété

Soit k un réel, alors la fonction ku est dérivable sur I et on a :

$$\boxed{(ku)' = ku'}$$

Preuve

Exemple

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^2$ a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $f'(x) = 14x$.

2.4 Dérivée du carré d'une fonction

Propriété

u^2 est dérivable sur I et :

$$\boxed{\boldsymbol{(u^2)' = 2uu'}}$$

Preuve

Exemple

La fonction définie sur R par $f(x) = x^4$ (c'est à dire $f(x) = \left(x^2\right)^2$ est dérivable sur R et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times x^2 \times 2x \\ &= 4x^3 \end{aligned}$$

2.5 Dérivée de l'inverse d'une fonction

Propriété

Supposons que u ne s'annule pas sur I (c'est à dire que pour tout $x \in I$, $u(x) \neq 0$), alors la fonction $\frac{1}{u}$ est définie sur I. Elle est dérivable sur I et :

$$\boxed{\boldsymbol{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}}$$

Preuve

Exemple

La fonction définie sur $]\,2\,;\,+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ est dérivable sur cet intervalle et on a :

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x-3)^2}$$

2.6 Dérivée du quotient de deux fonctions

Propriété

Supposons que v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est définie sur I. Elle est dérivable sur I et :

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Preuve

Exemple

La fonction définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ est dérivable sur **R** et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \times (x^2+1) - x^2 \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

2.7 Dérivée de f définie par $f(x) = g(ax+b)$

Propriété

Soient a et b deux réels et soit J l'intervalle tel que pour tout $x \in J, ax+b \in I$.
La fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ est définie et dérivable sur J et :

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x) = a \times g'(ax+b)}}$$

Exemple

La fonction définie sur $\left[-\dfrac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} \end{aligned}$$

3 Variations d'une fonction et dérivée

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.
- Si $f' \geqslant 0$ sur I alors f est croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ sur I alors f est décroissante sur I.
- Si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I.

Cette propriété est admise.

Remarque

Dans la propriété précédente, les réciproques des deux dernières affirmations sont fausses.
En effet, par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée $x \mapsto 3x^2$ n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$ car elle s'annule en zéro.

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $c \in I$.

- On dit que f admet un maximum sur I, atteint en c si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(c)$.
  Ce maximum vaut alors $f(c)$.
- On dit que f admet un minimum sur I, atteint en c si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(c)$.
  Ce minimum vaut alors $f(c)$.
- Dans les deux cas on dit que f admet un extrémum en c.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
S'il existe un intervalle **ouvert** J inclus dans I et $c \in J$ tel que f admette un extrémum sur J, on dit que f admet un extrémum local en c.

Remarque

Dans le cas ou f admet un extrémum sur I en c, on parle d'extremum global.
Un extrémum global est un extrémum local.
Un extrémum local n'est pas en général un extrémum global.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f' s'annule en changeant de signe en a alors f admet un extrémum local en a.

Méthode : Étudier une fonction

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$.

1. On explique pourquoi f est dérivable et sur quel ensemble :

f est dérivable sur R comme somme de fonction dérivables sur R.

2. On détermine l'expression algébrique de $f'(x)$:

Pour tout$x \in$ R, $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$

3. On étudie le signe de f' :

f' est un polynôme de degré 2, on détermine son discriminant, celui-ci vaut 324, donc f' admet deux racines que l'on détermine par le calcul : -1 et 5. Étant donné que le coefficient de plus haut degré de f' est positif, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

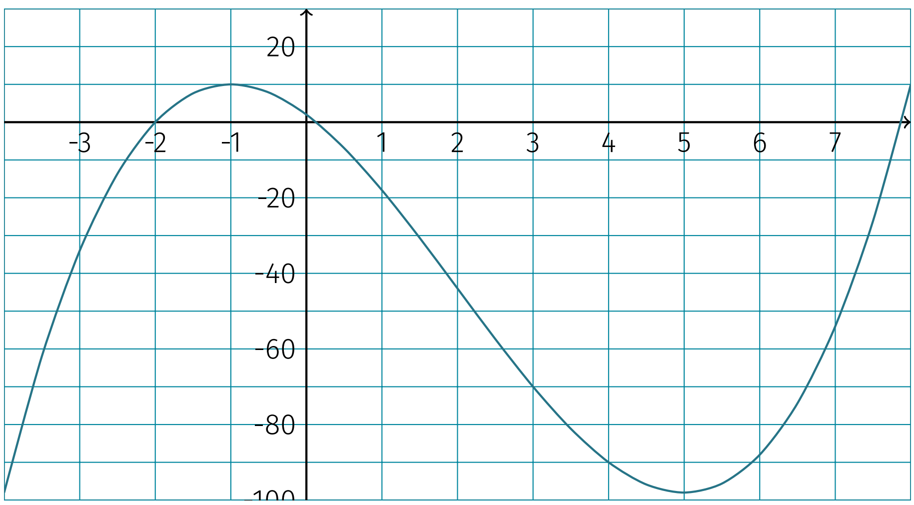
4. On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

5. On calcule la valeur de chaque extrémum de f :

On calcule que $f(-1) = 10$ et que $f(5) = -98$. On reporte dans le **tableau final :**

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	10	$\searrow$	-98	$\nearrow$	



Exemple

Étudier la fonction g définie par $g(x) = x - \sqrt{x}$.

- $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+$ car x doit être positif pour pouvoir écrire $\sqrt{x}$.
- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonction dérivable et sa dérivée est

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- Pour étudier le signe de $g'(x)$, on remarque que son dénominateur est positif. On doit donc étudier le signe de son numérateur en résolvant l'inéquation

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} - 1 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x})^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Sachant que $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ on obtient le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$