Suites numériques

Définir une suite

Exercice 1 Par récurrence ou par son terme général ?

Pour chaque suite :

- Dire si elle est définie par récurrence ou par son terme général.
- Calculer les quatre premiers termes.

1. $w_n = 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$
2. $\begin{cases} k_0 & = & 1 \\ k_{n+1} & = & k_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$
3. $z_n = \sqrt{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. $\begin{cases} l_0 & = & 100 \\ l_{n+1} & = & 0,1 l_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$
5. $j_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$
6. $\begin{cases} p_0 & = & 2 \\ p_{n+1} & = & (p_n)^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$

Exercice 2 Passage du terme général à une relation de récurrence

1. La suite a est définie par $a_n = 3n - 4$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   a. Donner l'expression de a_{n+1} en fonction de n.
   b. En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et de n.

2. La suite g est définie par $g_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   a. Donner l'expression de g_{n+1} en fonction de n.
   b. En déduire l'expression de g_{n+1} en fonction de g_n et de n.

3. La suite u est définie par $u_n = n^2 + n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   a. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de n.
   b. En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n et de n.

4. La suite v est définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.
   a. Donner l'expression de v_{n+1} en fonction de n.
   b. En multipliant le membre de droite par $\dfrac{n+1}{n+1}$, trouver l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n et de n.

Exercice 3 Suite définie par une formule de tableur

On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	0	C2	2	3	4	
2	u_n	-2	=3*C1^2+5*C1-2				
3							
4							
5							
6							

a. Si on étend la formule de la cellule **C2** à la cellule **D2**, quelle est la valeur de u_2 ?

b. Exprimer le terme général u_n en fonction de n en utilisant la formule donnée par le tableur.

2. Pour chacune des feuilles de calcul, écrire la relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n et donner les trois premiers termes de la suite (u_n).

a.

	A	B	C
1	n	u_n	
2	0	3	
3	1	=3*B2+1	
4	2		
5			
6			
7			
8			

b.

	A	B	C
1	n	u_n	
2	0	-1	
3	1	=B2+2*A3	
4	2		
5			
6			
7			

Exercice 4 Suite définie par un algorithme

1. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme

```
Pour i allant de 0 à 10 :
    u <- 2i - 1
Fin Pour
```

a. Quelle sera la dernière valeur calculée par cet algorithme ?

b. On appelle (u_n) la suite associée aux valeurs calculée par l'algorithme.
Donner l'expression du terme général de cette suite.

2. On considère le script suivant :

Python

```python
u = 1
for i in range(10) :
    u = (u-1)/(u-2)
```

a. On appelle (u_n) la suite associée aux valeurs calculées par le script.
Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n et calculer les quatre premiers termes de cette suite.

b. À l'aide de la calculatrice, afficher les 10 premiers termes de cette suite.

Exercice 5 Une récurrence d'ordre 2

La suite r est définie par $r_0 = 2$, $r_1 = 3$ et, pour tout entier naturel n :

$$r_{n+2} = 2r_n - r_{n+1}$$

Calculer les cinq premiers termes de la suite.

Exercice 6 Deux suites récurrentes imbriquées

Les suites a et b sont définies par $a_0 = 900$, $b_0 = 200$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & 0,9a_n + 0,1b_n \\ b_{n+1} & = & 0,1a_n + 0,9b_n \end{cases}$$

Calculer les trois premiers termes des deux suites.

Exercice 7 Une suite périodique

On considère la suite p définie par

$$\begin{cases} p_0 & = & 2 \\ p_{n+1} & = & 1 - \dfrac{1}{p_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Calculer les 10 premiers termes de cette suite.

Modéliser à l'aide d'une suite

Exercice 8

On considère la succession de figures suivantes :

Figure 1 Figure 2 Figure 3

On note b_n le nombre de bâtons nécessaires à la construction de la figure n où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **a.** Donner les valeurs de b_1, b_2 et b_3.
   b. Tracer la figure 4 et donner la valeur de b_4.
   c. Conjecturer une formule explicite de la suite (b_n).

2. En supposant exacte la conjecture émise à la question **1c**, déterminer :
   a. la valeur de b_{20} ;
   b. quelle est la plus grande figure que l'on puisse construire avec 200 bâtons.

Exercice 9

Avec des carreaux, on construit un motif géométrique par la succession des figures suivantes :

Modéliser, à l'aide d'une suite récurrente, le nombre de carreaux de chaque figure.

Exercice 10

En 2021, un journal régional compte 62 000 abonnés. On suppose que chaque année 85 % des abonnés renouvellent leur abonnement et que l'on compte 4500 nouveaux abonnés.

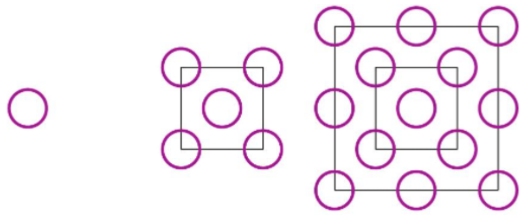
1. Déterminer le nombre de d'abonnés à ce journal en 2022, puis en 2023.
2. Modéliser, à l'aide d'une suite récurrente, le nombre d'abonnés à ce journal.

Exercice 11

Une ville compte 195 médecins. En raison des départs à la retraite, elle enregistre chaque année une perte de médecins de 4 % et on estime à 5 le nombre de nouveaux médecins qui s'installent.
À l'aide d'une suite, modéliser cette situation pour estimer le nombre de médecins dans n années.

Exercice 12

Avec des anneaux, on réalise une succession de motifs géométriques dont on a représenté les trois premiers ci-contre.
Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note c_n le nombre d'anneaux du motif n.



1. **a.** Représenter le motif 4 et donner les valeurs de c_1, c_2, c_3 et c_4.
   b. Établir une relation de récurrence entre c_{n+1} et c_n.
2. On remarque que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\quad c_n = 1 + 0 \times 4 + 1 \times 4 + ... + (n-1) \times 4.$
   a. On admet que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\quad 1 + 2 + ... + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}.$
   Prouver que $\quad c_n = 2n^2 - 2n + 1.$
   b. Quel est le plus grand motif que l'on peut réaliser avec 2000 anneaux ?

Exercice 13 Suites de moyennes

On considère les suites (a_n) et (b_n) vérifiant $a_0 \geqslant 0, b_0 \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

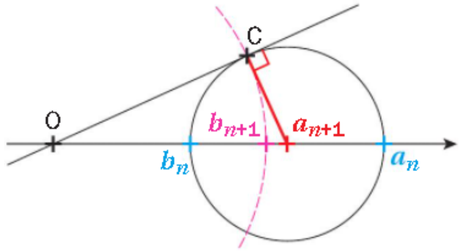
1. Pour chacun des termes initiaux donnés ci-dessous :
   - calculer a_1, b_1, a_2 et b_2 ;
   - ranger dans l'ordre croissant les nombres a_1, b_1, a_2 et b_2.

a. $a_0 = 8$ et $b_0 = 18$. **b.** $a_0 = 45$ et $b_0 = 5$. **c.** $a_0 = 6$ et $b_0 = 6$.

2. Connaissant les nombres a_n et b_n, une construction géométrique des nombres a_{n+1} et b_{n+1}, sur l'axe des nombres réels d'origine O, est illustrée ci-dessous :

   a. Justifier cette construction.
   Aide : Utiliser le théorème de Pythagore.

   b. Conjecturer une propriété concernant la monotnie des suites (a_n) et (b_n).



***Info :** a et b étant deux nombres positifs, le nombre $\sqrt{ab}$ est appelé **moyenne géométrique** de a et b.*

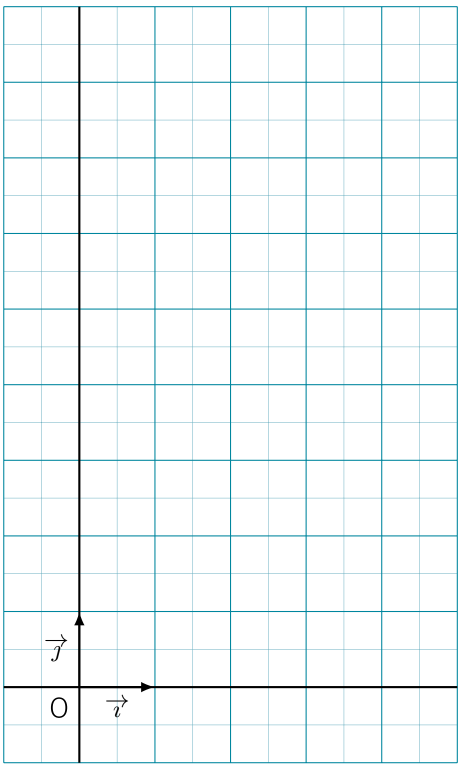
Représentation graphique d'une suite

Exercice 14

Considérons la suite u définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 0,5u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Représenter ces termes dans le repère ci-dessous.
3. Quelle semblent être la variation et la « limite » de la suite u ?

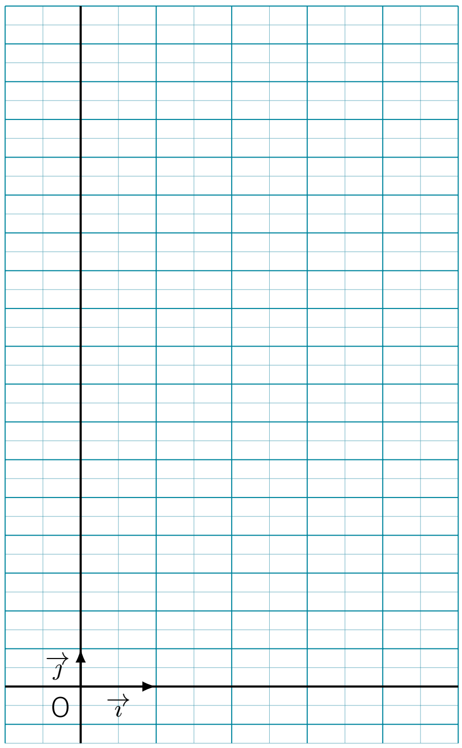


Exercice 15

Considérons la suite v définie par :

$$\begin{cases} v_0 & = & 16 \\ v_{n+1} & = & 0,5v_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.
2. Représenter ces termes dans le repère ci-dessous.
3. Quelle semblent être la variation et la « limite » de la suite v ?

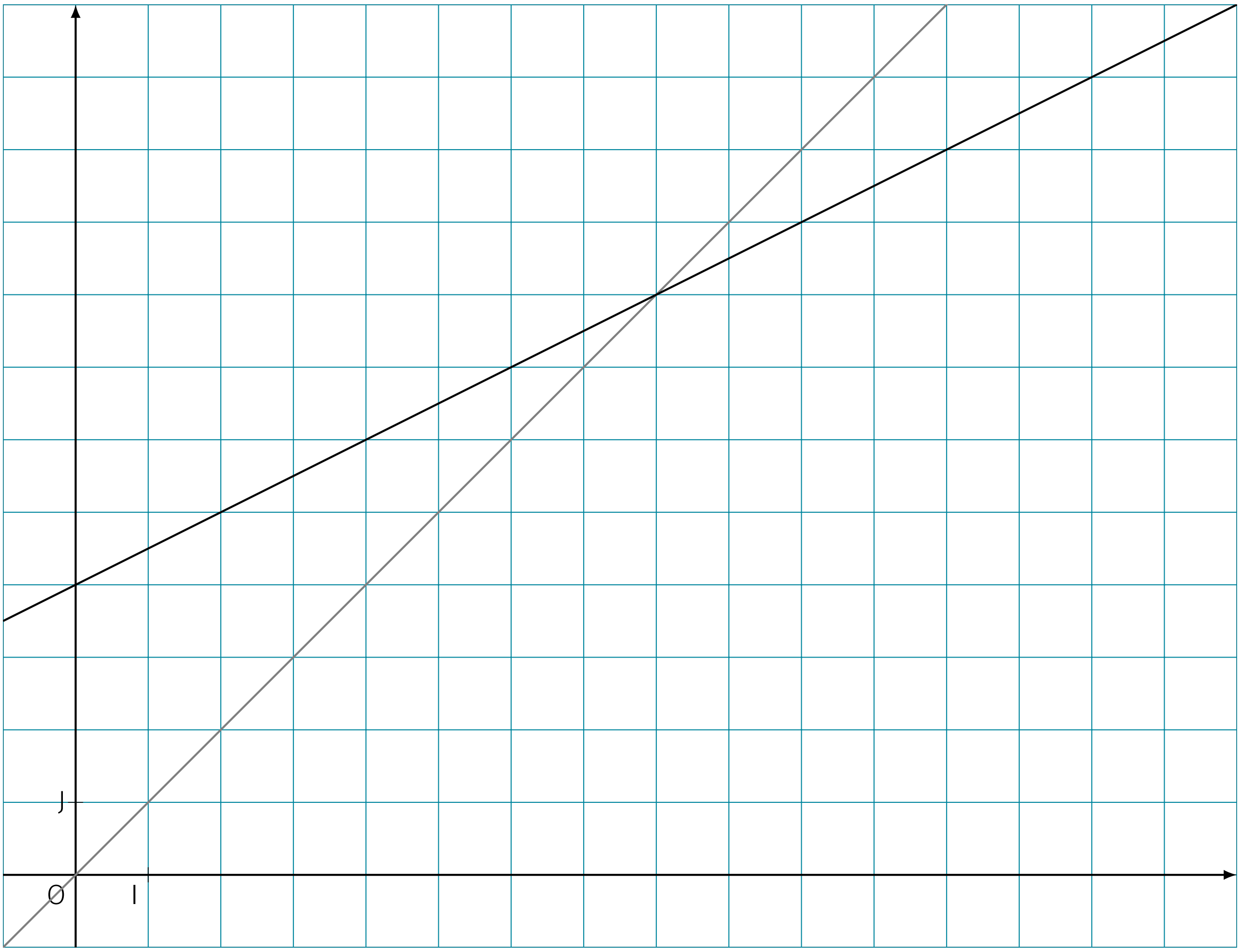


Exercice 16

On considère la famille de suites (α_n) suivante : $\begin{cases} \alpha_0 &= a & \text{où } a \text{ est un réel donné} \\ \alpha_{n+1} &= 0,5\alpha_n + 4 & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Il existe un moyen commode de représenter ces suites :

- On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0,5x + 4$.
- Dans un repère **orthogonal**, on représente $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$:



1. On considère la suite u définie à l'exercice 14.
   Au crayon à papier (puis en rouge une fois que vous êtes sûr(e) de vous) nous allons représenter les premiers termes de u :
   - Placer sur l'axe des abscisses le **nombre** u_0.
   - Placer le **point** de coordonnées $(u_0 \ ; \ f(u_0))$.
   - Placer le **point** de coordonnées $(f(u_0) \ ; \ f(u_0))$ et relier avec le **point** précédent.
   - Puisque $f(u_0) = u_1$, placer sur l'axe des abscisses le **nombre** u_1.
   - Placer le **point** de coordonnées $(u_1 \ ; \ f(u_1))$ et relier avec le **point** précédent.
   - Placer le **point** de coordonnées $(f(u_1) \ ; \ f(u_1))$ et relier avec le **point** précédent.
   - Puisque $f(u_1) = u_2$, placer sur l'axe des abscisses le **nombre** u_2.
   - Et cætera.
2. Faire de même en vert pour les premiers termes de la suite v définie à l'exercice 15.

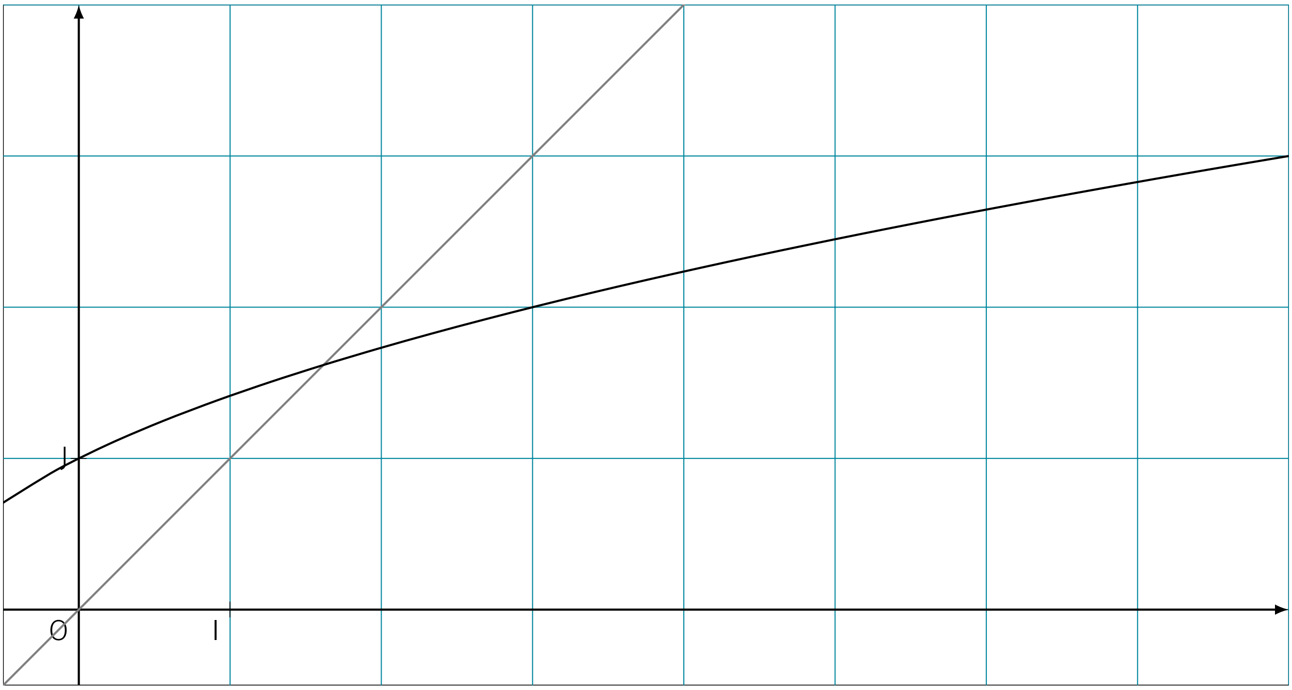
Exercice 17

On peut adapter ce procédé aux suites définies par récurrence à l'aide d'une fonction f :

$$\begin{cases} u_0 = a & \text{où a est un réel donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour l'exemple, prenons f définie sur $[-1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.
Représenter sans chercher à les calculer, les premiers termes de la suite r définie par

$$\begin{cases} r_0 = 8 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+r_n} & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

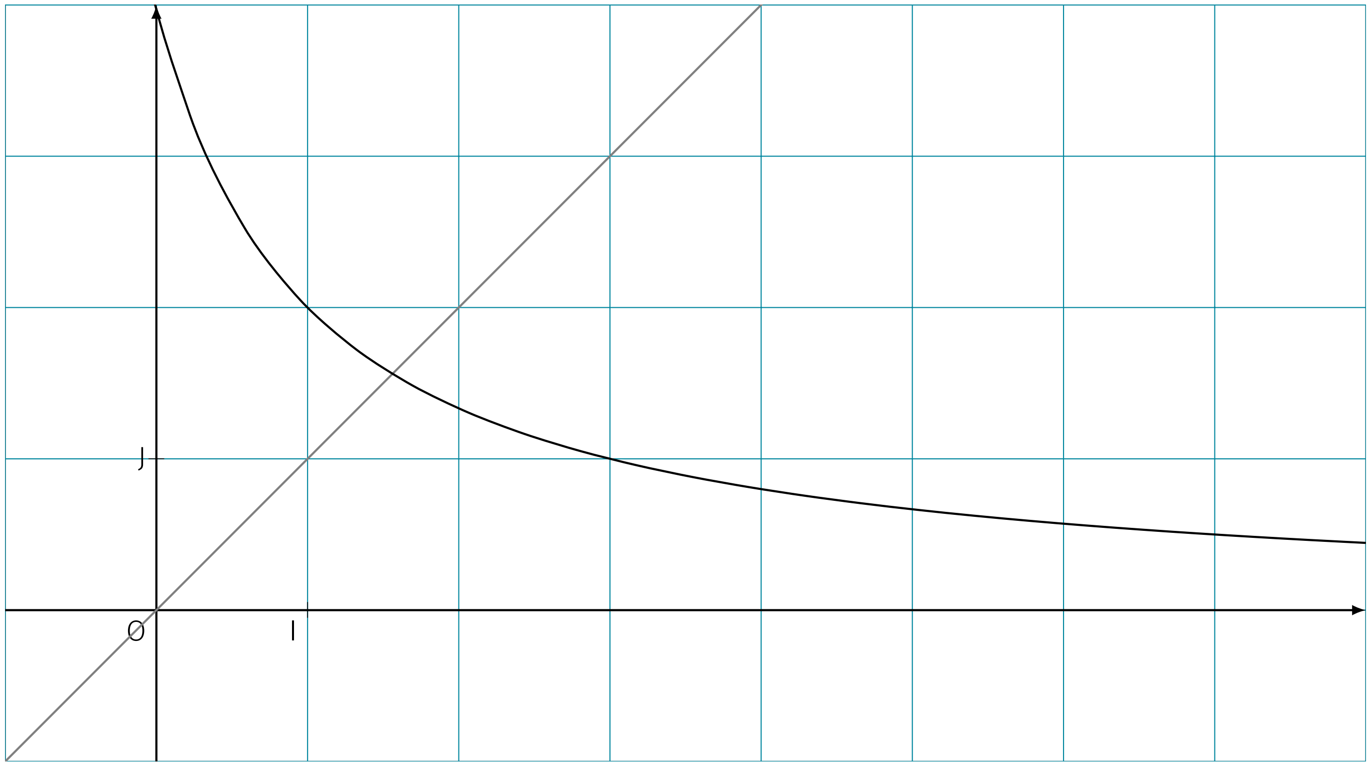


1. Conjecturer la variation de r et donner une valeur approchée de sa limite.

2. Proposer une valeur exacte en déterminant l'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$.

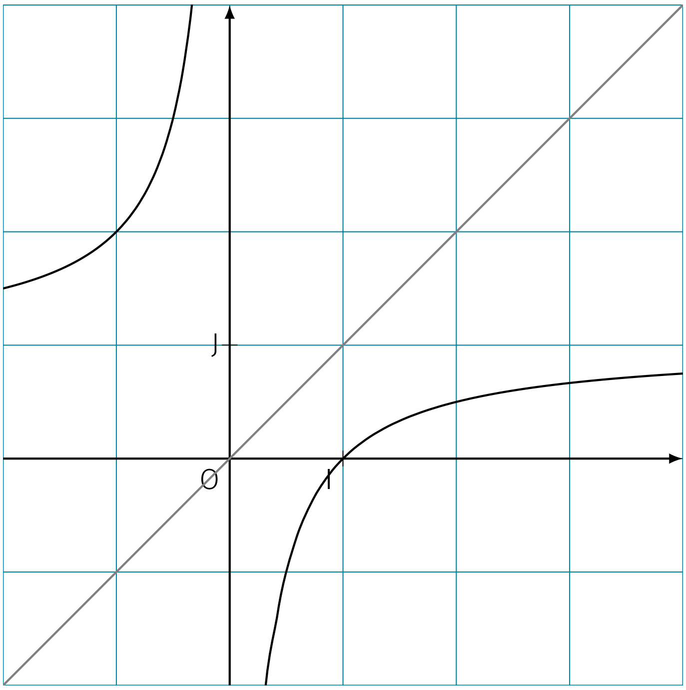
Exercice 18

Faire de même avec $\begin{cases} q_0 & = & 7 \\ q_{n+1} & = & \dfrac{4}{1+q_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$



Exercice 19

De même avec $\begin{cases} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & 1 - \dfrac{1}{v_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$



Sens de variation

Dans chaque cas, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par la relation donnée.

Exercice 20 À l'aide d'une étude de fonction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n - 4$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n^2 - 4$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2n - 3$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 10n + 15$

Exercice 21 À l'aide du signe de $u_{n+1} - u_n$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 - n + 1$
2. $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= u_n - \sqrt{u_n^2 + 3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= -u_n^2 + u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= u_n + n^2 - n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice 22 Sens de variation d'une suite à termes positifs à l'aide de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

On admet que les suites u, v et w sont à termes strictement positifs.

a. u définie par $u_0 = 20$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,4u_n$.

b. v définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{n+1}$.

c. w définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par , $w_n = \dfrac{n}{2^n}$.

Exercice 23

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 - n + 1$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (4n - 1)^2$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n$

Exercice 24

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5n^2 - n + 2$
3. $\begin{cases} t_0 &= 2 \\ t_{n+1} &= t_n - (n+3)^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
4. ★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = n^3 + 7n + 3$

Pour la question **4.**, on pourra utiliser l'identité : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Exercice 25

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 9n + (-3)^n$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n^3 - n^2$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$

4. $\begin{cases} t_0 & = & 2 \\ t_{n+1} & = & t_n - \sqrt{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$