Suites numériques, modèles discrets

Capacités attendues :

❏ Modéliser un problème par une suite donnée par une formule explicite ou une relation de récurrence.

❏ Calculer une limite de suite géométrique, de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1.

❏ Représenter graphiquement une suite donnée par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue d'un intervalle I dans lui-même. Conjecturer le comportement global ou asymptotique d'une telle suite.

❏ Pour une récurrence arithmético-géométrique : recherche d'une suite constante solution particulière; utilisation de cette suite pour déterminer toutes les solutions.

Modéliser par une suite

Exercice 1

Pour prendre le train, Nolwenn achète un abonnement mensuel qui coûte 400 €.
Avec cet abonnement, chaque billet de train qu'elle achète est au prix de 2 €.

1. Combien Nolwenn paiera-t-elle au total si elle achète 10 billets de train ?
2. On note u_n le prix que paye Nolwenn par mois pour l'abonnement et n billets de train.
   a. Exprimer u_n en fonction de n.
   b. Nolwenn a payé 434 €. Combien de billets de train a-t-elle achetés ?

Exercice 2

Nawal s'entraîne pour un marthon.
Le premier jour d'entrainement, elle court 1 km. Puis, chaque jour, elle décide d'augmenter sa distance de course de 10 % par rapport au jour pcédent.

Modéliser cette situation par une suite.

Exercice 3

Le 1er janvier 2024, Jean place 5000 € sur un compte épargne. Chaque année, le 31 décembre, la banque lui verse 2 % de la somme disponible sur le compte et il dépose 2000 € supplémentaires.

Modéliser cette situation par une suite.

Représentation graphique d'une suite

Exercice 4 Évolution d'une population de tortues

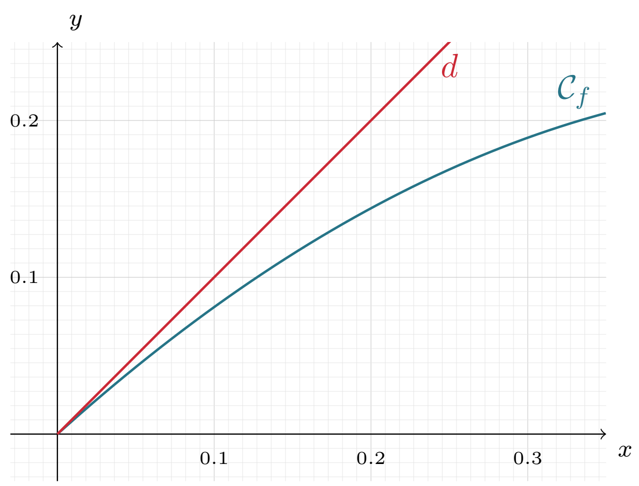
On s'intéresse à une population de tortues dans un écosystème. Au début de l'année 2020, on comptait 300 tortues.
Une étude a permis de modéliser le nombre de tortues par la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par

$$u_0 = 0,3 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = 0,9x(1-x)$ et u_n représente le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Calculer, selon ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2021.

2. On va représenter les premiers termes de cette suite pour conjecturer l'évolution de cette population.
   On a représenté ci-dessous $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f et d la droite d'équation $y = x$.



   a. Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis A_0, le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0. Quelle est l'ordonnée de A_0 ?

   b. Placer B_1, le point de d de même ordonnée que A_0. Quelle est son abscisse ?

   c. Placer A_1, le point de $\mathcal{C}_f$ de même abscisse que B_1. Quelle est son ordonnée ?

   d. Continuer ce processus pas à pas et placer successivement u_2, u_3, u_4 et u_5 sur l'axe des abscisses.

3. Que peut-on dire du comportement de la suite (u_n) ? Que peut-on conjecturer pour cette population de tortues ?

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $\begin{cases} u_0 & = & 10 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$

1. Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ dans un repère orthonormé.

2. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite.

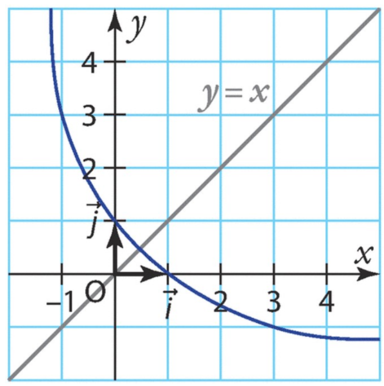
3. Conjecturer les variations de la suite (u_n) et sa limite.

Exercice 6

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & f(v_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

avec f la fonction dont la représentation grphique est donnée ci-contre en bleu.



1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (v_n).
2. Que peut-on dire sur les variations la limite de la suite (v_n) ?

Suites de références

Exercice 7

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

1. Calculer u_1.
2. Calculer u_4.

Exercice 8

Soit (v_n) une suite aritmétique de raison -5 et de premier terme $v_1 = 4$.

1. Calculer v_2.
2. Calculer v_{11}.

Exercice 9

Soit (w_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, telle que $\quad w_4 = 3 \quad$ et $\quad w_6 = 48$.
Déterminer la valeur de q.

Exercice 10

Soit (t_n) une suite arithmétique de raison r telle que $\quad t_4 = 3 \quad$ et $\quad t_7 = 18$.
Déterminer la valeur de r.

Exercice 11

Un contrat d'entretien d'une piscine prévoit un versement de 200 € la première année, puis des versements annuels qui augmentent de 2 % par an.
Quelle somme totale aura versé le propriétaire de la piscine au bout de 15 ans ?

Exercice 12

Un cycliste qui s'entraîne pour le Tour de Bretagne parcourt 100 km lors de la première semaine de son entraînement, puis il augmente chaque semaine la distance parcourue de 20 km.
Quelle distance aura-t-il parcourue au bout de ses 20 semaines d'entraînement ?

Exercice 13

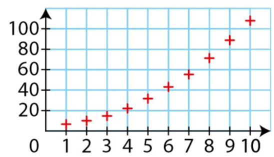
Le nombre de noyaux d'un échantillon de 500 noyaux d'iode 131 diminue chaque jour de 8,3 %.
Au bout de combien de jours ce nombre aura-t-il diminué de moitié ?

Limite d'une suite

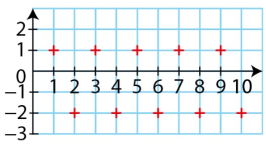
Exercice 14

Pour chacune des suites représentées ci-dessous, dire quelle semble être sa limite éventuelle.

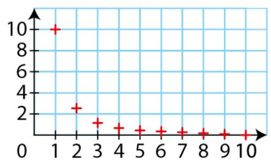
1.



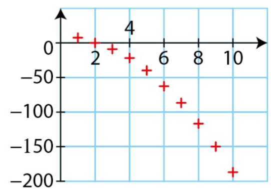
2.



3.



4.



Exercice 15 🖩

Dans chaque cas, à l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites définie sur **N** par :

1. $u_n = -2n + 3$ **2.** $v_n = 0,5n^2$ **3.** $w_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ **4.** $t_n = (-3)^n$

Exercice 16

(u_n) est la suite définie sur **N** par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Voici une fonction `seuil` ci-contre, écrite en langage Python.

1. Quel est le rôle de cette fonction `seuil` ?

2. Saisir et exécuter ce programme pour :

- $m = 1000$ • $m = 100\,000$ • $m = 10^{10}$

3. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Python

```python
def seuil(m) :
    n = 0
    c = 0
    while c < m :
        c = 4*c+3
        n = n+1
    return n
```

Exercice 17 Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de Héron

On attribue à Hippase de Métaponte (500 av. J.-C.) la découverte de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Héron d'Alexandrie aurait établi une méthode pour approcher ce nombre (et plus largement la racine carrée de n'importe quel entier).

Calculer $\sqrt{2}$ revient à construire un carré dont l'aire est 2.

Pour $x > 0$, si on construit un rectangle de premier côté x et d'aire 2, le deuxième côté aura pour longueur $\frac{2}{x}$, car $x \times \frac{2}{x} = 2$.

On construit ensuite un deuxième rectangle d'aire 2 dont le premier côté a pour longueur la moyenne des côtés du rectangle précédent, soit $\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. On réitère ce processus aussi longtemps que l'on veut; on peut démontrer que le rectangle ainsi construit s'approche de plus en plus d'un carré de côté $\sqrt{2}$.

1. Montrer que si x_0 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{2}$, alors $\frac{2}{x}$ est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$, et inversement.

2. On choisit $x_0 = 2$ comme première valeur approché de $\sqrt{2}$. On étudie la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   a. Représenter graphiquement la fonction f telle que $x_{n+1} = f(x_n)$, ainsi que les premiers termes de la suite (x_n).

   b. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (x_n).

   c. Compléter la fonction `heron` ci-contre de paramètre `p` pour qu'elle renvoie un encadrement d'amplitude 10^{-p} de $\sqrt{2}$.

   d. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-15} de $\sqrt{2}$.

Python

```python
def heron(p) :
    x = 2
    y = ...
    while x-y > ... :
        x = ...
        y = ...
    return(y,x)
```

Exercice 18

Calculer la limite de chacune des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_n = -n^2 - 6n + 15$
2. $v_n = \dfrac{8}{-3n+1}$
3. $w_n = \left(\dfrac{5}{n^2} + 4\right)(3 - \sqrt{n})$
4. $t_n = \dfrac{5n+3}{n}$

Exercice 19

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 - 4n + 1$.

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas déterminer la limite de (u_n) avec les propriétés des limites.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = n^2\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$.

3. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 20

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{2n+1}{3n+2}$.

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas déterminer la limite de (v_n) avec les propriétés des limites.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $v_n = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}$.

3. En déduire la limite de (v_n).

Comparaisons de limites

Exercice 21

Déterminer la limite de chacune des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

1. $u_n = n^3 + (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $v_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
3. $w_n = \sqrt{n^2+3n+5}$ pour $n \in \mathbb{N}$
4. $t_n = \frac{4n+(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 22

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 - 3n + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n(n-3)$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 23

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Donner un encadrement de v_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 24

Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \frac{n^2}{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > n - 1$.

2. En déduire la limite de la suite (w_n).

Limites et suites géométriques

Exercice 25

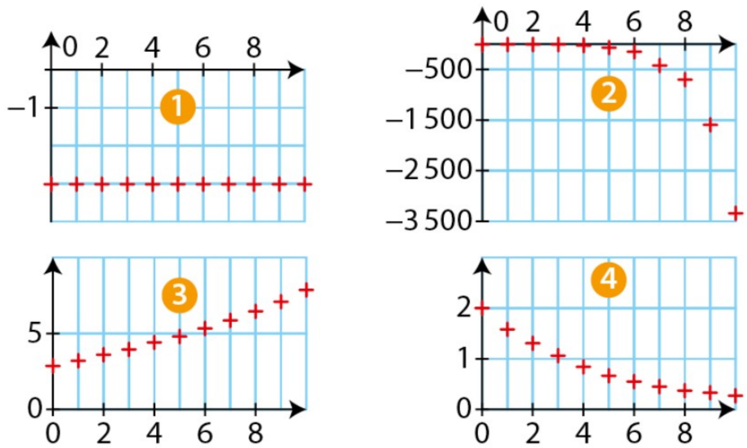
Dans chaque cas, préciser la raison de la suite géométrique définie sur $\mathbf{N}$ et donner sa limite.

1. $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2,5\, u_n$.
2. $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = 1,5\, v_n$.
3. $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_{n+1} = 0,5\, w_n$.
4. $t_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $t_{n+1} = \frac{1}{4}\, t_n$.

Exercice 26

On a représenté quatre suites géométriques $(u_n), (v_n), (w_n)$ et (t_n) dans un repère.

1. Associer chaque graphique à la suite géométrique définie sur $\mathbf{N}$ qui lui correspond.
   - $u_n = 3 \times 1,1^n$
   - $v_n = -2 \times 2,1^n$
   - $w_n = 2 \times 0,8^n$
   - $t_n = -3 \times 1^n$
2. En déduire, en justifiant, la limite de chaque suite.



Exercice 27

Dans chaque cas, déterminer en justifiant la limite de la suite définie sur $\mathbf{N}$ par :

1. $u_n = 7\,(2 - 0,2^n)$
2. $v_n = \dfrac{1 + 0,7^n}{2^n}$
3. $w_n = 5^n - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$
4. $t_n = \dfrac{3n + 5^n}{1 - \dfrac{1}{n^2}}$

Exercice 28

Déterminer la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbf{N}$ par $S_n = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Exercice 29

(u_n) est la suite géométrique de raison $0,8$ telle que $u_0 = 3$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

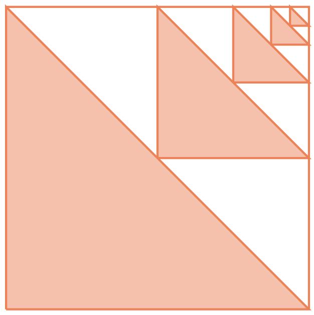
1. Exprimer S_n en fonction de n.

2. Donner la limite de la suite (S_n).

Exercice 30 Propagation d'une rumeur

Dans un lycée de 800 élèves, un élève dévoile un secret à deux de ses camarades, puis se tait. Le lendemain, chaque camarade ayant appris le secret le dit à deux élèves qui ne le connaissent pas, puis se tait. La même règle est appliquée les jours suivants.
Déterminer le nombre de jours nécessaires pour que tous les élèves du lycée connaissent la rumeur.

Exercice 31



1. En traçant la diagonale d'un carré de côté 1, on obtient un triangle rectangle que l'on colorie, comme sur la figure ci-contre.
   Calculer l'aire de ce triangle.
2. On construit de la même manière un triangle rectangle que l'on colorie dans le quart du carré en haut à droite, et ainsi de suite...
   On obtient un ensemble de n triangles colorés dont l'aire totale est notés A_n, pour n entier supérieur ou égal à 1.
   Quelle est la limite de la suite (A_n) ?

Exercice 32 Évolution d'une population de bactéries

Un échantillon de 100 mL d'eau contient 50 000 bactéries pathogènes, rendant un plan d'eau impropre à la baignade. En temps normal, le nombre de bactéries diminue de 10 % chaque jour.

1. **a.** Modéliser l'évolution du nombre quotidien de bactéries à l'aide d'une suite dont on précisera le terme général.
   b. Quelle est la limite de cette suite ?
   c. La baignade sera à nouveau autorisée lorsqu'il n'y aura pas plus de 100 bactéries dans un échantillon de 100 mL.
   Déterminer le nombre de jours nécessaires pour que la baignade soit à nouveau autorisée.
2. On veut écrire en langage Python une fonction `seuil` pour répondre à la question précédente.
   a. Compléter le script.
   b. Utiliser la fonction `seuil` pour retrouver la réponse à la question **1.c**.

Python

```
def seuil(m) :
    n = 0
    c = 50000
    while c>m :
        c = ...
        n = ...
    return n
```

Exercice 33 ✱

Déterminer la limite de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\quad u_n = \dfrac{5^n - 4^n}{5^{n+1} - 4^{n+1}}$

Suites arithmético-géométriques

Exercice 34 Évolution d'une population de macareux moines

Image : Pixabay

Sur une petite île de l'Atlantique Nord, on a observé l'évolution d'une population de macareux moines depuis plusieurs années.
Il y avait 600 macareux moines sur l'île au 1er juin 2020.
On note u_n l'effectif de cette population au 1er juin $2020+n$.
Les observations permettent de modéliser cette évolution par la relation
$u_{n+1} = 0,7\, u_n + 30$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer que cette relation de récurrence est vérifiée par la suite constante (c_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N},\ c_n = 100$.

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - c_n$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

   b. Montrer que $v_0 = 500$ et en déduire l'expression de v_n en fonction de n.

   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 500 \times 0,7^n + 100$.

3. Estimer avec ce modèle la population de macareux moines au 1er juin 2025 sur cette île.

Exercice 35

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & 5u_n - 12 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Déterminer la suite constante (c_n) qui vérifie la relation de récurrence $\quad c_{n+1} = 5c_n - 12 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire le terme général de la suite (u_n).

Exercice 36

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\quad v_0 = 8 \quad$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = 0,1v_n + 9$.

1. Déterminer le terme général de la suite (v_n).

2. En déduire la limite de (v_n).

Exercice 37

Tous les ans, au mois de septembre, une association prélève 8,5 tonnes d'algues sur les plages d'une commune.
Au 1er septembre 2024, il y avait 230 tonnes d'algues sur ces plages.
Tous les ans, entre le 1er octobre et le 1er septembre suivant, la quantité d'algues sur ces plages augmente de 4 %. On note u_n la quantité d'algues (en tonnes) présente sur les plages au 1er septembre de l'année 2024+n.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 1,04\, u_n - 8,84$.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
3. La quantité d'algues sur ces plages dépassera-t-elle un jour 250 tonnes ?
4. Une usine de transformation d'algues en plastique prévoit de s'installer dans la commune en septembre 2025. Elle solicite l'association pour lui fournir chaque année 10 % d'algues de plus que l'année précédente.

Python

```python
def algues(...) :
    plage = 230
    ramasse = 8.5
    for i in range(...) :
        plage = ...
        ramasse = ...
    return(plage,ramasse)
```

Compléter le programme ci-contre pour que l'appel `algues(n)` renvoie la quantité d'algues sur les plages et la quantité d'algues ramassées en 2025+n.

Quelle quantité d'algues serait ainsi présente sur la plage dans 10 ans ? Dans 20 ans ?
Qu'en pensez-vous ?

Prolongements

Exercice 38

Soit la suite (u_n) défine $\mathbf{N}$ par : $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{2u_n+3} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$

On admet que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n ne s'annule pas.

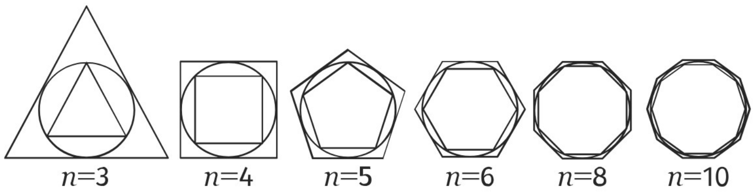
En utilisant la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 39 Approximation de π par la méthode d'Archimède

Archimède de Syracuse (287 av. J.-C - 212 av. J.-C.) est un grand scientifique grec de Sicile de l'Antiquité : physicien, astronome, mathématicien et ingénieur. Selon la légende, il aurait compris le principe que nous appelons aujourd'hui « poussée d'Archimède » dans son bain et aurait couru nu à travers les rues de la ville en criant « *Eurêka !* » (« J'ai trouvé ! »).

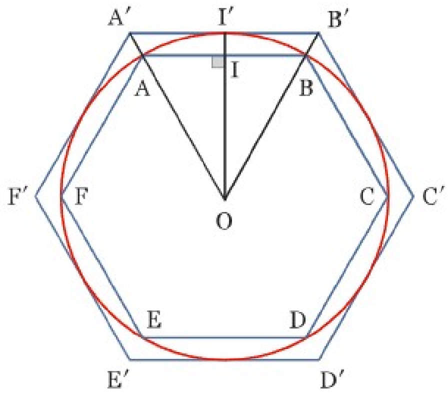
1. Rappeler le périmètre d'un cercle de rayon 1.

La méthode d'Archimède consiste à encadrer le périmètre d'un cercle de rayon 1 par les périmètres de polygones réguliers inscrits et circonscrits ayant de plus en plus de côtés.



On note P_n le périmètre du polygone régulier intérieur à n côtés et P'_n le périmètre du polygone régulier extérieur à n côtés.

2. **Étude du cas $n = 6$:**



a. À l'aide de la figure, justifier que $P_6 = 6$.

b. Calculer $\tan(30°)$.

c. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $P'_6 = 4\sqrt{3}$.

d. En déduire une première approximation de π.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = 2n \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$ et $P'_n = 2n \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$.

4. **Utilisation d'un algorithme :**

On souhaite créer un programme permettant de calculer une approximation de π avec une précision p donnée.

a. Compléter la première partie de l'activité Capytale **ef30-3390279**.

b. Pour obtenir une approximation de π à 10^{-3} près, combien de côtés doivent avoir les polygones réguliers à utiliser ?