Préparation à l'évaluation-bilan 5

Exercice 1 Concentration d'un antibiotique

On étudie la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient. On modélise cette concentration par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par : $g(t) = \dfrac{4t}{t^2+1}$.
$g(t)$ représente la concentration en mg.L^{-1} de l'antibiotique lorsquer t heures se sont écoulées.

Répondre aux questions suivantes de façon algébrique. Il est possible de vérifier la cohérence des résultats à l'aide d'un graphique à la calculatrice.

1. On cherche à déterminer sur quel intervalle de temps la concentration sera supérieure ou égale à 1,6 mg.L^{-1}.

   a. Montrer que résoudre l'inéquation $g(t) \geqslant 1,6$ revient à résoudre l'inéquation $-1,6t^2 + 4t - 1,6 \geqslant 0$.

   b. Résoudre l'inéquation $-1,6t^2 + 4t - 1,6 \geqslant 0$ et conclure : sur quel intervalle de temps la concentration sera-t-elle supérieure ou égale à 1,6 mg.L^{-1} ?

2. On cherche à determiner si concentration peut être strictement supérieure à 2 mg.L^{-1}.

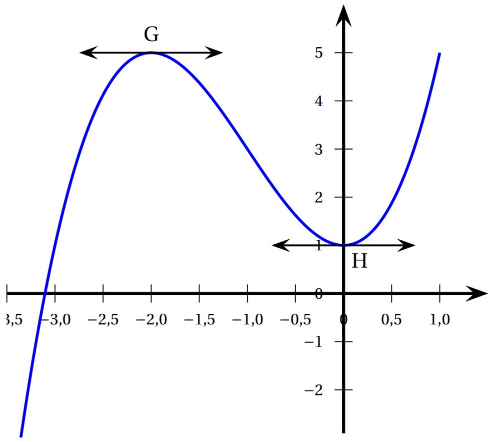
   a. Montrer que résoudre l'inéquation $g(t) > 2$ revient à résoudre l'inéquation $-2t^2 + 4t - 2 > 0$.

   b. Résoudre l'inéquation $-2t^2 + 4t - 2 > 0$ et conclure : la concentration peut-elle être strictement supérieure à 2 mg.L^{-1} ?

Exercice 2

La courbe ci-contre représente dans un repère du plan une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Les points G$(-2\ ;\ 5)$ et H $(0\ ;\ 1)$ appartiennent à la courbe représentative de la fonction f et les tangentes à la courbe aux points G et H sont horizontales.

Le but de l'exercice est de déterminer l'expression algébrique de la fonction f.



1. Déterminer $f(0)$, $f(-2)$, $f'(0)$ et $f'(-2)$.

2. On admet que pour tout réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

où a, b, c et d désignent des nombres réels .

a. Donner une expression de $f'(x)$ à l'aide de a, b, c et d.

b. Traduire $f(0) = 1$ par une égalité sur les coefficients a, b, c et d et en déduire la valeur de d.
Traduire $f'(0) = 0$ par une égalité et en déduire la valeur de c. Conclure :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 +$ .... et $f'(x) =$ . . . .

c. Traduire $f(-2) = 5$ par une égalité sur les coefficients a et b. Traduire $f'(-2) = 0$ par une égalité sur les coefficients a et b.

d. Résoudre le système (S) : $\begin{cases} -8a + 4b = 4 \\ 12a - 4b = 0 \end{cases}$

Conclure en donnant l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé de la prép° à l'éval-bilan 5

Exercice 1 Concentration d'un antibiotique

1. a. Soit $t \in [0\ ;\ 10]$.

$$\begin{aligned} g(t) \geqslant 1,6 &\iff \frac{4t}{t^2+1} \geqslant 1,6 \\ &\iff 4t \geqslant 1,6(t^2+1) \quad \text{car } t^2+1>0. \\ &\iff 4t \geqslant 1,6t^2+1,6 \\ &\iff 0 \geqslant 1,6t^2-4t+1,6 \end{aligned}$$

b. On résout l'inéquation $1,6t^2-4t+1,6 \leqslant 0$.
Calcul du discriminant :
$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4\times 1,6\times 1,6 \\ &= 16-10,24 \\ &= 5,76 \end{aligned}$$

Calcul des racines :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{4-\sqrt{5,76}}{2\times 1,6} \\ &= \frac{4-2,4}{3,2} \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{4+\sqrt{5,76}}{2\times 1,6} \\ &= \frac{4+2,4}{3,2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

On a donc :

t	0		0,5		2		10
Signe de $1{,}6t^2-4t+1{,}6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $1,6t^2-4t+1,6 \leqslant 0$ est $[0,5\ ;\ 2]$.

La concentration sera donc supérieure ou égale à 1,6 mg.L^{-1} entre 30 min et 2 h après la prise de l'antibiotique.

2. a. Soit $t \in [0\ ;\ 10]$.

$$\begin{aligned} g(t) > 2 &\iff \frac{4t}{t^2+1} > 2 \\ &\iff 4t > 2(t^2+1) \quad \text{car } t^2+1>0. \\ &\iff 4t > 2t^2+2 \\ &\iff 0 > 2t^2-4t+2. \end{aligned}$$

b. On résout l'inéquation $2t^2 - 4t + 2 < 0$.

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2\\ &= 16 - 16\\ &= 0\end{aligned}$$

Calcul de la racine :

$$\begin{aligned}t_0 &= \frac{4}{2 \times 2}\\ &= 1\end{aligned}$$

On a donc :

t	0		1		10
Signe de $2t^2 - 4t + 2$		$+$	0	$+$	

L'inéquation $2t^2 - 4t + 2 < 0$ n'a pas de solution.

La concentration ne peut donc pas être strictement supérieure à 2 mg.L^{-1}.

Exercice 2

1. Par lecture graphique, on a :

- $f(0) = 1$;
- $f(-2) = 5$;
- $f'(0) = 0$;
- $f'(-2) = 0$.

2. a. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d\\ &= a \times 3x^2 + b \times 2x + c \times 1 + 0\\ &= 3ax^2 + 2bx + c.\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}f(0) = 1 &\iff a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = 1\\ &\iff d = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(0) = 0 &\iff 3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = 0\\ &\iff c = 0\end{aligned}$$

On a donc $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.

c. $$\begin{aligned}f(-2) = 5 &\iff a \times (-2)^3 + b \times (-2)^2 + 1 = 5\\ &\iff -8a + 4b = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(-2) = 0 &\iff 3a \times (-2)^2 + 2b \times (-2) = 0\\ &\iff 12a - 4b = 0\end{aligned}$$

d. On résout le système (S) :

$$\begin{cases} -8a + 4b = 4 \\ 12a - 4b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -8a + 4b = 4 \\ -8a + 12a + 4b - 4b = 4 + 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -8a+4b=4 \\ 4a=4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -8\times 1+4b=4 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -8+4b=4 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4b=12 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases}$$

Le système (S) admet un unique couple solution : $(1\,;3)$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.