Corrigé du DL1

Exercice 1

Soit λ un nombre réel.
A, B et C sont trois points tels que $AB = 20\lambda+12$, $BC = 15(\lambda+1)$ et $AC = 25\lambda+19$.
On considère le point D tel que ABCD est un parallélogramme.

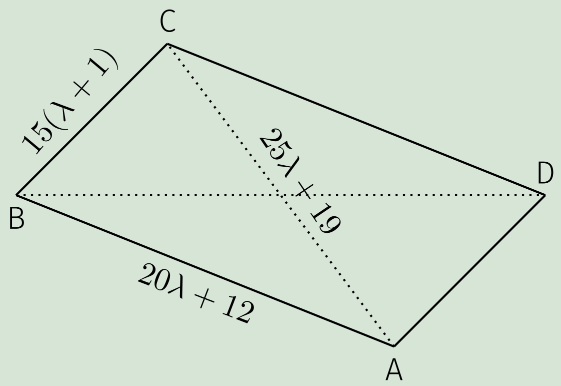
1. Faire un schéma et rappeler une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme soit un rectangle.

2. Déterminer toutes les valeurs de λ pour lesquelles ABCD est un rectangle.

3. Quelle est alors la longueur BD ?

Corrigé de l'exercice 1

1. Un parallélogramme est un rectangle si, et seulement si, il possède un angle droit.
Schéma correspondant aux données :



2. ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow$ ABC est rectangle en B

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \textit{d'après le théorème de Pythagore et sa réciproque}\\
&\Leftrightarrow (25\lambda+19)^2 = (20\lambda+12)^2 + (15(\lambda+1))^2\\
&\Leftrightarrow 625\lambda^2 + 950\lambda + 361 = 400\lambda^2 + 480\lambda + 144 + 225\lambda^2 + 450\lambda + 225\\
&\Leftrightarrow 625\lambda^2 + 950\lambda + 361 = 625\lambda^2 + 930\lambda + 369\\
&\Leftrightarrow 20\lambda = 8\\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{20}\\
&\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

3. Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur.
Donc pour $\lambda = \frac{2}{5}$: $BD = AC = 25 \times \frac{2}{5} + 19 = 29$

Exercice 2

1. Rappeler la définition d'une fonction affine.

2. Démontrer la proposition suivante :
   « Si f est une fonction affine, alors pour tous réels u et v, $\quad f\left(\dfrac{u+v}{2}\right) = \dfrac{f(u)+f(v)}{2}$ ».

3. Compléter la phrase suivante qui permet de reformuler cette propriété en terme de moyenne :
   Si f est une fonction affine, alors l'image par f de la moyenne de deux nombres réels est égale à ....

Corrigé de l'exercice 2

1. f est une fonction affine si :
   - f est définie sur $\mathbb{R}$;
   - Il existe deux réels m et p tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = mx + p$.

2. Soit f une fonction affine.
   Soient m et p deux réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = mx + p$.
   Soient u et v deux réels.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{u+v}{2}\right) &= m\frac{u+v}{2} + p \\ &= \frac{1}{2}mu + \frac{1}{2}mv + p \\ &= \frac{1}{2}(mu+p) + \frac{1}{2}(mv+p) \\ &= \frac{mu+p}{2} + \frac{mv+p}{2} \\ &= \frac{f(u)+f(v)}{2} \end{aligned}$$

   On a ainsi démontré que pour tous u et v réels, $\quad f\left(\dfrac{u+v}{2}\right) = \dfrac{f(u)+f(v)}{2}$.

3. Cette propriété peut s'énoncer :
   « Si f est une fonction affine, alors l'image par f de la moyenne de deux nombres réels est égale à la moyenne des images par f de ces deux nombres. »

Exercice 3

On considère un entier naturel n non nul.
On pose $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n$.

1. En remarquant que $S_n = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1$, déterminer une expression de $2S_n$ en fonction de n.

2. En déduire une expression de S_n en fonction de n.

3. Calculer $1 + 2 + 3 + ... + 2021$.