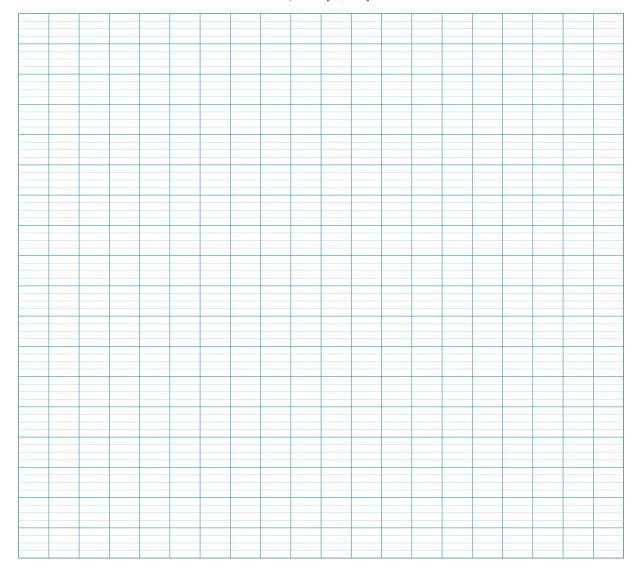
Évaluation-bilan 5

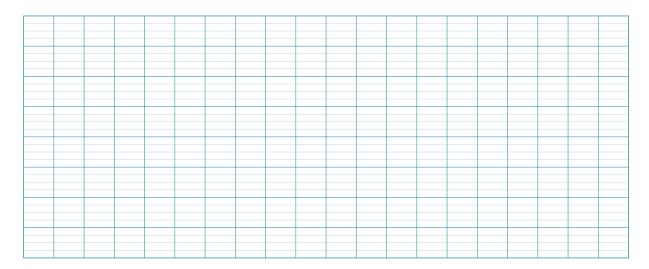
T^{ale}Comp

Calculatrice autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées.

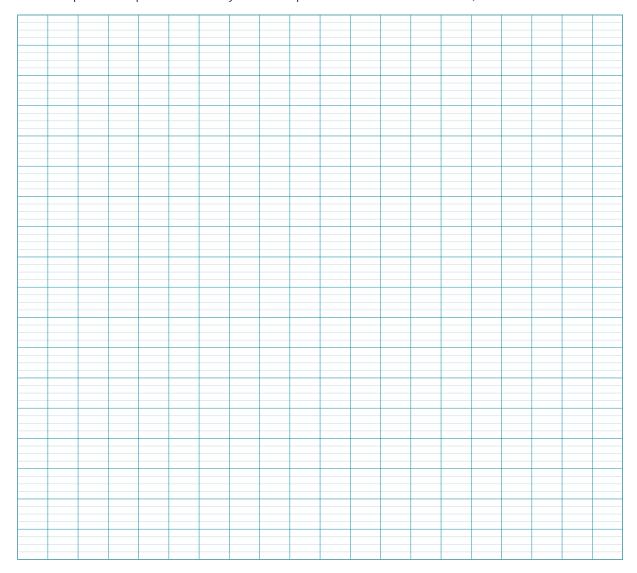
Exercice 1 ... / 8 pts

- **1.** Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ 20]$ par $f(x)=\frac{x+1-\ln(x)}{x}$.
 - a. Démontrer que, pour tout réel x de $[1\ ;\ 20]:$ $f'(x)=\frac{-2+\ln(x)}{x^2}.$
 - **b.** Résoudre dans $[1\ ;\ 20]$ l'inéquation $-2+\ln(x)>0$.
 - **c.** En déduire le tableau de variations de f sur [1; 20].





- 2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2000 pièces electroniques. On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 20$, le coût moyen de fabrication d'une pièces est de f(x) euros, où f est la fonction définie à la question précédente.
 - **a.** Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.
 - b. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes? Justifier.



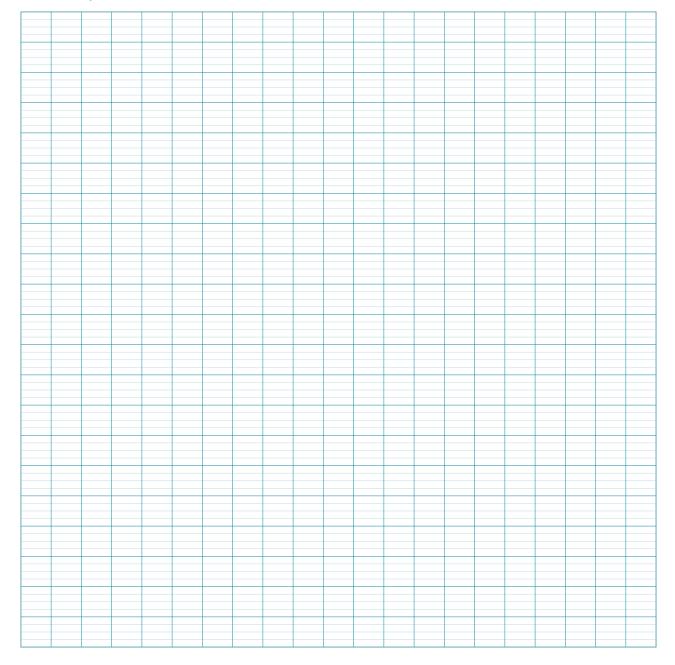
Exercice 2 ... / 6 pts

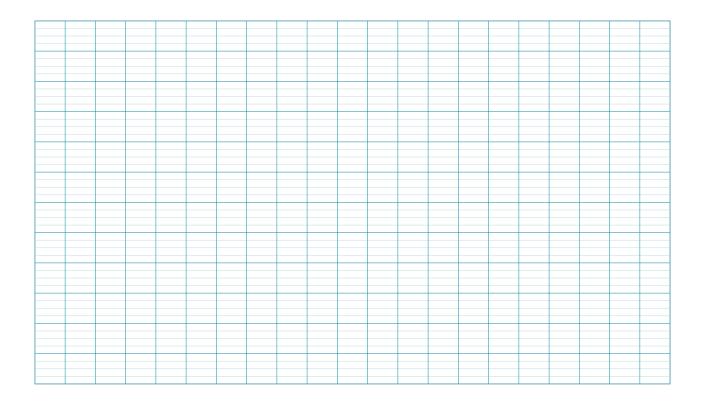
En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

Le nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020 est modélisé par la suite (a_n) définie sur ${\bf N}$ par :

$$a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$$

- **1. a.** Calculer a_0 et a_1 puis interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.
 - **b.** Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (a_n) .
- 2. L'entreprise souhaite de changer de locaux lorsque la moitié de ses collaborateurs seront en télétravail. Elle veut prévoir la date à laquelle organiser ce déménagement.
 - a. Utiliser la fonction ln pour résoudre dans N l'inéquation $-2\,800 \times 0,85^n + 3\,000 > 2500$.
 - b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.





Exercice 3 ... / 6 pts

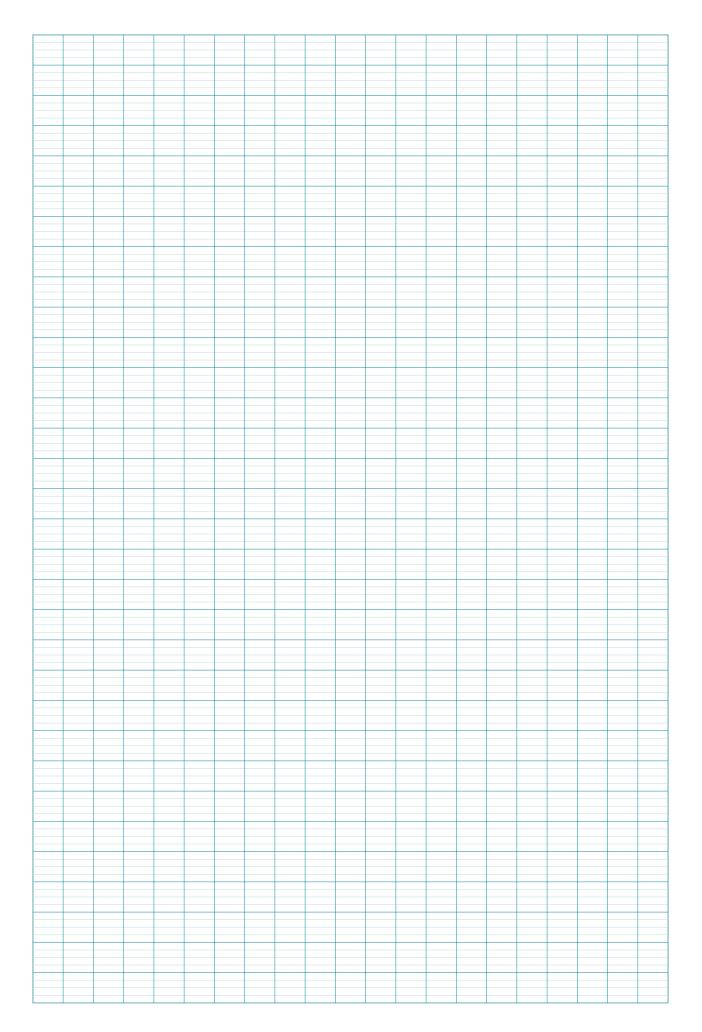
Le niveau sonore N, en décibels (dB), d'un bruit, à une distance D, en m, de sa source, dépond de la puissance sonore P, en watts (W), de la source. Il est donnée par la relation :

$$N = 120 + 4 \ln \left(\frac{P}{13 \times D^2} \right)$$

- **1.** On donne $N=76~\mathrm{dB}$ et $D=100~\mathrm{m}$. Calculer la puissance sonore P, arrondir au centième.
- 2. Sur le chantier d'une entreprise de travaux publics, une machine de découpe a une puissance sonore égale à 0,039 W.
 - a. Montrer qu'à une distance D de la machine, le niveau sonore N dû à celle-ci vérifie la relation $N=120+4\ln(0,003)-4\ln\left(D^2\right)$.
 - **b.** Montrer qu'une approximation de N est $N \approx 96,76-8\ln(D)$.
- 3. Dans cette question, on utilisa l'approximation $N \approx 96,76-8\ln(D)$. Un ouvrier doit porter des protection individuelles contre le bruit dès qu'un risque apparaît.

Impact sur l'audition	Niveaux sonores (en dB)
Aucun	$[0\; ;\; 85[$
Risque faible	[85; 90[
Risque élévé	[90; 120[

- **a.** Justifier, à l'aide du tableau ci-dessus qu'un ouvrier de cette entreprise se situant à 3m de la machine doive porter des protections individuelles contre le bruit.
- **b.** Déterminer la distance à partir de laquelle un ouvrier sort de la zone de risque élevé. Arrondir au dm.



Corrigé - Éval-bilan 5

T^{ale}Comp

Exercice 1

1. a. Soit $x \in [1; 20]$.

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x)=x+1-\ln(x) \quad \text{ et } \quad v(x)=x$$

$$u'(x)=1-\frac{1}{x} \quad \text{ et } \quad v'(x)=1$$

$$\begin{split} \text{D'où} & \quad f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ & = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)x - (x + 1 - \ln(x))}{x^2} \\ & = \frac{x - 1 - x - 1 + \ln(x)}{x^2} \\ & = \frac{-2 + \ln(x)}{x^2} \end{split}$$

$$\begin{array}{lll} \text{b. Soit } x \in \left[1 \; ; \; 20\right], & -2 + \ln(x) > 0 & \iff & \ln(x) > 3 \\ & \iff & x > e^2 & \text{Or } e^2 \approx 7,3891 \\ & \iff & x \in \left]e^2 \; ; \; 20\right] \end{array}$$

c. Pour $x \in [1 ; 20], x^2 > 0$ donc f'(x) est du signe de $-2 + \ln(x)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1	e^2	2	0
Signe de $f'(x)$	_	0	+	
Variations de f	2	$1 - e^{-2}$	1.05 - 0	.05 ln 20

- **2. a.** La fonction f admet un minimum sur $[1 \ ; \ 20]$ en $e^2 \approx 7,39$ et $f(e^2) = 1 e^{-2} \approx 0,86$. Le coût moyen de fabrication d'une pièce est minimal pour 739 pièces produites et vaut environ $0,86 \in$.
 - **b.** Le coût moyen d'une pièce ne peut pas être de 0,50 \in car $0,50 < 1 e^{-2} \approx 0,86$.

Exercice 2

1. a.
$$u_0 = -140 \times 0, 9^0 + 420 = -140 \times 1 + 420 = -140 + 420 = 280$$

 $u_1 = -140 \times 0, 9^1 + 420 = -140 \times 0, 9 + 420 = -126 + 420 = 294.$
La commune loue 280 vélos en janvier 2025 et 294 vélos en février 2025.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = -140 \times 0, 9^{n+1} + 420 - (-140 \times 0, 9^n + 420)$$

$$= -140 \times 0, 9^n \times 0, 9 + 420 + 140 \times 0, 9^n - 420$$

$$= -140 \times 0, 9^n \times 0, 9 + 140 \times 0, 9^n \times 1$$

$$= -140 \times 0, 9^n \times (0, 9 - 1)$$

$$= -140 \times 0, 9^n \times (-0, 1)$$

$$= 14 \times 0, 9^n$$

Donc $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite (u_n) est croissante. De plus, $\lim_{n\to+\infty}u_n=-140\times 0, 9^n+420=420.$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$-140 \times 0, 9^{n} + 420 > 380 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -140 \times 0, 9^{n} > -40$$

$$\iff \qquad 0, 9^{n} < \frac{40}{140}$$

$$\iff \qquad 0, 9^{n} < \frac{2}{7}.$$

$$\iff \qquad \ln(0, 9^{n}) < \ln\left(\frac{2}{7}\right) \qquad \text{car ln est croissante sur }]0 \; ; \; +\infty[$$

$$\iff \qquad n \ln(0, 9) < \ln\left(\frac{2}{7}\right)$$

$$\iff \qquad n > \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\ln(0, 9)} \qquad \text{car } \ln(0, 9) < 0$$

$$\iff \qquad n \geqslant 12.$$

b. À partir du 12^e mois soit janvier 2026, le nombre de vélos sera insuffisant.

Exercice 3

1. Pour $N=84~\mathrm{dB}$ et $D=10~\mathrm{m}$, on a :

$$84 = 120 + 4 \ln \left(\frac{P}{13 \times 10^2} \right) \iff -36 = 4 \ln \left(\frac{P}{1300} \right)$$

$$\iff -9 = \ln \left(\frac{P}{1300} \right)$$

$$\iff e^{-9} = \frac{P}{1300}$$

$$\iff P = 1300e^{-9}$$

$$\iff P \approx 0, 16 \text{ W}.$$

2. a. Pour P = 0,026 W, on a :

$$N = 120 + 4 \ln \left(\frac{0,026}{13 \times D^2} \right)$$

$$= 120 + 4 \ln \left(\frac{0,002}{D^2} \right)$$

$$= 120 + 4 \ln(0,002) - 4 \ln(D^2)$$

b.
$$N = 120 + 4\ln(0,002) - 4\ln(D^2)$$

 $N = 120 + 4\ln(0,002) - 4 \times 2\ln(D)$
 $N \approx 95,14 - 8\ln(D)$.

3. a. Pour D = 3 m, on a :

$$N \approx 95, 14 - 8 \ln(3)$$

 $\approx 95, 14 - 8 \times 1,099$
 $\approx 86, 35 \text{ dB}.$

L'ouvrier doit porter des protections individuelles car $85 < N < 90 \; \mathrm{dB}.$

$$\begin{array}{lll} \textbf{b.} \ N < 90 & \iff & 95,14-8\ln(D) < 90 \\ & \iff & -8\ln(D) < -5,14 \\ & \iff & \ln(D) > \frac{5,14}{8} \\ & \iff & D > e^{\frac{5,14}{8}} \\ & \iff & D > e^{0,6425} \\ & \iff & D > 1,9 \end{array}$$

L'ouvrier sort de la zone de risque élevé à partir de 1,9 m.