Chapitre 4

Fonction logarithme népérien

1 Fonction réciproque

Propriété et définition : Fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J.
Il existe une fonction définie sur J et à valeurs dans I, appelée **fonction réciproque de** f et notée f^{-1} telle que

$$\text{pour tous réels } x \in I \text{ et } y \in J, \text{ l'égalité } \; f(x) = y \; \text{ est équivalente à } \; x = f^{-1}(y).$$

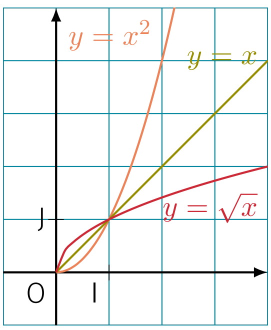
Exemple

La fonction f définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2$ est dérivable donc **continue** sur I et strictement croissante sur I.
Elle prend ses valeurs dans $J = [0\,;\,+\infty[$.

Pour tous $x \in I$ et $y \in J$, $\quad y = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{y} = x$.

Donc la fonction réciproque de f est la fonction racine carrée.

$$\text{Pour tout } x \in [0\,;\,+\infty[,\; f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

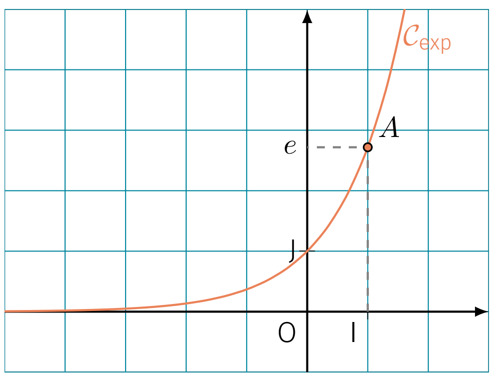


2 Fonction logarithme népérien

On a vu que la fonction exponentielle est une fonction continue et strictement croissante sur **R**.

De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto e^x$	0	$+\infty$



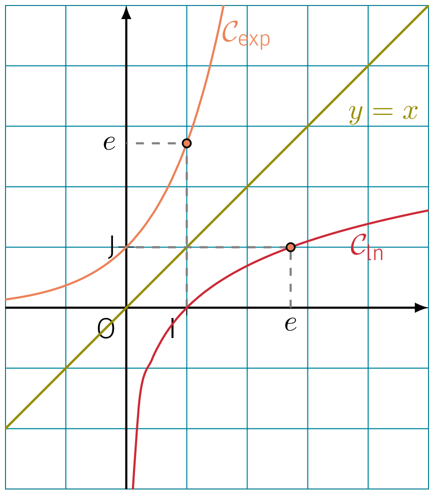
La fonction exponentielle admet donc une fonction réciproque définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

Définition

On appelle fonction **logarithme népérien** et on note ln la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
Ainsi pour tous $x \in]0\,;\,+\infty[$ et $y \in \mathbf{R}$, $\ln(x) = y$ équivaut à $x = e^y$.

- $e^0 = 1$ donc $\ln 1 = 0$;
- $e^1 = e$ donc $\ln e = 1$.

x	e^{-1}	1	2	e	e^3
$\ln x$	-1	0	$\ln 2$	1	3



Propriété

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Conséquences de la définition

- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$;
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$;

Propriété

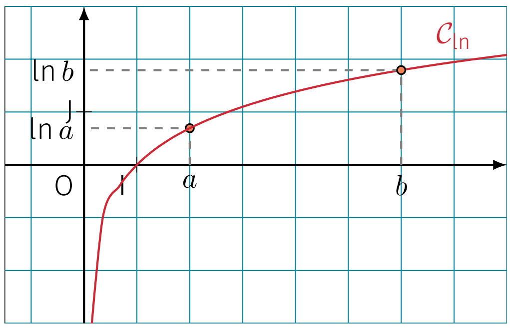
La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Preuve

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
On a donc $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.
Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur **R** donc :

$$\ln a < \ln b$$

On a ainsi prouvé que pour tous $0 < a < b$, $\ln a < \ln b$.



Conséquences

Pour tous réels strictement positifs a et b :

- $\ln a = \ln b \iff a = b$;
- $\ln a < \ln b \iff 0 < a < b$;
- $\ln a > 0 \iff a > 1$;
- $\ln a < 0 \iff 0 < a < 1$;

3 Propriétés algébriques du logarithme népérien

Propriété : Relation fonctionnelle

Pour tous réels strictement positifs a et b, $\quad \ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

Preuve

Soient a et b deux réels strictement positifs.
$e^{\ln(a\times b)} = a \times b \quad$ et $\quad e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$.
On a donc $\quad e^{\ln(a\times b)} = e^{\ln a + \ln b} \quad$ d'où $\quad \ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

Exemples

- $\ln 10 = \ln(2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5$
- Pour $x > 0$, $\quad \ln(2x) = \ln 2 + \ln x$
- Pour $x > 0$, $\quad \ln(x^2) = \ln x + \ln x = 2 \ln x$

Un peu d'histoire

La fin du 16e siècle est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes. Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs compliqués. Les multiplications, divisions et extractions de racines sont particulièrement pénibles à la main.

Après de longues années de travail, la mathématicien écossais **John Napier** établit, en 1614, une table appelée « table de logarithmes » qui permet, grâce à la relation fonctionnelle précédente, de remplacer le calcul d'une multiplication par une addition.

Propriétés

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier.

- $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln a^n = n \ln a$
- $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$

Preuve

- $a \times \dfrac{1}{a} = 1 \quad$ donc $\quad \ln 1 = \ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{a} \quad$ d'où $\quad 0 = \ln a + \ln \dfrac{1}{a} \quad$ et ainsi $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.
- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{b} = \ln a - \ln b$.
- $\ln a^n = \ln \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} = n \ln a$.

- $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\sqrt{a}$ d'où $\dfrac{1}{2}\ln a = \ln\sqrt{a}$.

4 Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété

La fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

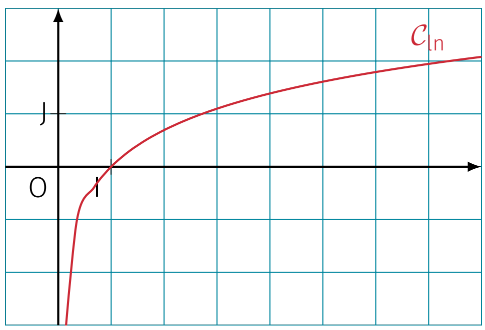
Preuve

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$.
Soit $x > 0$.
On a $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$.
Or $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = \ln'(x) \times x$.
Donc $\ln'(x) \times x = 1$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriétés (admises)

- $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

x	0	$+\infty$
$\ln' x$	‖	$+$
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



L'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

Propriété

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Preuve

Soient a et h deux réels de I tels que $a + h \in I$ et $u(a+h) \neq u(a)$.

On a $\dfrac{\ln(u(a+h)) - \ln(u(a))}{h} = \dfrac{\ln(u(a+h)) - \ln(u(a))}{u(a+h) - u(a)} \times \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$.

Or $\lim\limits_{h\to 0} u(a+h) - u(a) = 0$ car u est dérivable donc continue en a

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(u(a+h)) - \ln(u(a))}{u(a+h) - u(a)} = \ln'(u(a)) = \dfrac{1}{u(a)}$.

De plus $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.

On a donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(u(a+h)) - \ln(u(a))}{h} = \dfrac{u'(a)}{u(a)}$.