Corrigé des exercices du cours

Exercice 1

1. Vérifier que 31 est une solution de $10x - 11 = 8x + 51$.
2. Vérifier que 7 est une solution de $\dfrac{3}{4}x + \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{97}{20}$.
3. Vérifier que $\sqrt{2}$ est une solution de $\sqrt{2}x - \sqrt{6} = -\sqrt{3}x + 2$.

1. D'une part :

$$\begin{aligned} 10 \times 31 - 11 &= 310 - 11 \\ &= 299 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} 8 \times 31 + 51 &= 248 + 51 \\ &= 299 \end{aligned}$$

Donc 31 est bien solution de l'équation $10x - 11 = 8x + 51$.

2. D'une part :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \times 7 + \frac{2}{5} &= \frac{21}{4} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{21 \times 5}{4 \times 5} + \frac{2 \times 4}{5 \times 4} \\ &= \frac{105}{20} + \frac{8}{20} \\ &= \frac{113}{20} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \times 7 - \frac{97}{20} &= \frac{21}{2} - \frac{97}{20} \\ &= \frac{21 \times 10}{2 \times 10} - \frac{97}{20} \\ &= \frac{210}{20} - \frac{97}{20} \\ &= \frac{113}{20} \end{aligned}$$

Donc 7 est bien solution de l'équation $\dfrac{3}{4}x + \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{97}{20}$.

3. D'une part :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{6} &= \left(\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{6} \\ &= 2 - \sqrt{6} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} -\sqrt{3} \times \sqrt{2} + 2 &= -\sqrt{2 \times 3} + 2 \\ &= 2 - \sqrt{6} \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{2}$ est bien solution de l'équation $\sqrt{2}x - \sqrt{6} = -\sqrt{3}x + 2$.

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes :

1. $34x - 5 = 23x + 50$
2. $3x + 1 = 3x - 7$
3. $2,4x - 3 = -5,7x + 8$
4. $\dfrac{3}{4}x + 1 = \dfrac{7}{10}x - \dfrac{2}{7}$
5. $\sqrt{2}x - 2 = \pi x + \sqrt{5}$
6. $2x - 3(4x - 5) = 17$

1. $34x-5=23x+50 \iff 34x-5-23x+5=23x+50-23x+5$

$\iff 11x=55$

$\iff \dfrac{11x}{11}=\dfrac{55}{11}$

$\iff x=5$

$\mathcal{S}_1=\{5\}$

2. $3x+1=3x-7 \iff 3x+1-3x=3x-7-3x$

$\iff 1=-7$

Cette égalité est toujours fausse.

$\mathcal{S}_2=\varnothing$ Cette équation n'a pas de solution.

3. $2,4x-3=-5,7x+8 \iff 2,4x-3+5,7x+3=-5,7x+8+5,7x+3$

$\iff 8,1x=11$

$\iff \dfrac{8,1x}{8,1}=\dfrac{11}{8,1}$

$\iff x=\dfrac{110}{81}$

$\mathcal{S}_3=\left\{\dfrac{110}{81}\right\}$

4. $\dfrac{3}{4}x+1=\dfrac{7}{10}x-\dfrac{2}{7} \iff \dfrac{3}{4}x+1-\dfrac{7}{10}x-1=\dfrac{7}{10}x-\dfrac{2}{7}-\dfrac{7}{10}x-1$

$\iff \dfrac{3\times 5}{4\times 5}x-\dfrac{7\times 2}{10\times 2}x=-\dfrac{2}{7}-1$

$\iff \dfrac{15}{20}x-\dfrac{14}{20}x=-\dfrac{2}{7}-\dfrac{7}{7}$

$\iff \dfrac{1}{20}x=-\dfrac{9}{7}$

$\iff \dfrac{20}{20}x=-\dfrac{9\times 20}{7}$

$\iff x=-\dfrac{180}{7}$

$\mathcal{S}_4=\left\{-\dfrac{180}{7}\right\}$

5. $\sqrt{2}x-2=\pi x+\sqrt{5} \iff \sqrt{2}x-2-\pi x+2=\pi x+\sqrt{5}-\pi x+2$

$\iff \sqrt{2}x-\pi x=\sqrt{5}+2$

$\iff \left(\sqrt{2}-\pi\right)x=2+\sqrt{5}$

$\iff \dfrac{\left(\sqrt{2}-\pi\right)x}{\sqrt{2}-\pi}=\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\pi}$

$\iff x=\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\pi}$

$\mathcal{S}_5=\left\{\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\pi}\right\}$

6. $2x-3(4x-5)=17 \iff 2x-3\times 4x-3\times(-5)=17$

$\iff 2x-12x+15=17$

$\iff -10x+15-15=17-15$

$\iff -10x=2$

$$\iff \frac{-10x}{-10} = \frac{2}{-10}$$

$$\iff x = -0,2$$

$\mathcal{S}_6 = \{-0,2\}$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

1. $(3x-5)(4x+8)=0$
2. $x^2+3x-5=x^2-7x-4$
3. $(x-5)^2=(x+4)^2$
4. $(2x-1)(3x+2)+(2x-1)(7-x)=0$
5. $(4x-1)(x-7)-(x-7)^2=0$

1. $$\begin{aligned} (3x-5)(4x+8)=0 &\iff 3x-5=0 \quad \text{ou} \quad 4x+8=0 \\ &\iff 3x=5 \quad \text{ou} \quad 4x=-8 \\ &\iff \frac{3x}{3}=\frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{4x}{4}=-\frac{8}{4} \\ &\iff x=\frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad x=-2 \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_1 = \left\{-2\,;\frac{5}{3}\right\}$

2. $$\begin{aligned} x^2+3x-5=x^2-7x-4 &\iff x^2+3x-5-x^2=x^2-7x-4-x^2 \\ &\iff 3x-5=-7x-4 \end{aligned}$$

On obtient une équation du premier degré.

$$\begin{aligned} &\iff 3x+7x=-4+5 \\ &\iff 10x=1 \\ &\iff \frac{10x}{10}=\frac{1}{10} \\ &\iff x=0,1 \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_2 = \{0,1\}$

3. **Méthode 1 : En développant**

$$(x-5)^2=(x+4)^2 \iff x^2-2\times x\times 5+5^2=x^2+2\times x\times 4+4^2$$

On développe les identités remarquables.

$$\begin{aligned} &\iff x^2-10x+25-x^2=x^2+8x+16-x^2 \\ &\iff -10x+25=8x+16 \\ &\iff -10x-8x=16-25 \\ &\iff -18x=-9 \\ &\iff \frac{-18x}{-18}=\frac{-9}{-18} \\ &\iff x=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_3 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Méthode 2 : En factorisant

$$\begin{aligned}
(x-5)^2=(x+4)^2 \quad & \Longleftrightarrow \quad (x-5)^2-(x+4)^2=0 \\
& \quad\quad \textit{On reconnait une identité remarquable de la forme } a^2-b^2. \\
& \Longleftrightarrow \quad ((x-5)+(x+4))\,((x-5)-(x+4))=0 \\
& \quad\quad \textit{On factorise en } (a+b)(a-b). \\
& \Longleftrightarrow \quad (x-5+x+4)(x-5-x-4)=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (2x-1)\times(-9)=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{(2x-1)\times(-9)}{-9}=\frac{0}{-9} \\
& \Longleftrightarrow \quad 2x-1=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad 2x=1 \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{2x}{2}=\frac{1}{2} \\
& \Longleftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_3=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

4. $$\begin{aligned}
(2x-1)(3x+2)+(2x-1)(7-x)=0 \quad & \Longleftrightarrow \quad (2x-1)\left[(3x+2)+(7-x)\right]=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (2x-1)\left[3x+2+7-x\right]=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (2x-1)(2x+9)=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad 2x-1=0 \quad \text{ou} \quad 2x+9=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad 2x=1 \quad \text{ou} \quad 2x=-9 \\
& \Longleftrightarrow \quad x=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_4=\left\{-\frac{9}{2}\,;\frac{1}{2}\right\}$

5. $$\begin{aligned}
(4x-1)(x-7)-(x-7)^2=0 \quad & \Longleftrightarrow \quad (4x-1)(x-7)-(x-7)(x-7)=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (x-7)\left[(4x-1)-(x-7)\right]=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (x-7)\left[4x-1-x+7\right]=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (x-7)(3x+6)=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad x-7=0 \quad \text{ou} \quad 3x+6=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad x=7 \quad \text{ou} \quad 3x=-6 \\
& \Longleftrightarrow \quad x=7 \quad \text{ou} \quad x=-2
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_5=\{-2\,;7\}$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes et faire un schéma de l'ensemble des solutions.

1. $2x-5<7x-35$
2. $3x+1>-8x-7$
3. $-1,2x-8,1>3,2x+5,7$
4. $1,4x-3\geqslant-5,7x-18$
5. $\frac{2}{5}x+1\leqslant\frac{7}{10}x+\frac{2}{3}$
6. $\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}>-\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}$

Exercice 5

Donner le tableau de signes des expressions suivantes :

1. $3x + 2$
2. $-4x - 9$
3. $\frac{3}{5}x - \frac{2}{7}$
4. $\sqrt{3}x - 3$
5. $(2x - 1)(-3x + 2)$
6. $\frac{5x - 2}{-7x - 8}$

1. Calcul de la racine :

$$\begin{aligned} 3x + 2 = 0 \quad &\iff \quad 3x = -2 \\ &\iff \quad x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $3x + 2$		$-$	0	$+$	

2. Calcul de la racine :

$$\begin{aligned} -4x - 9 = 0 \quad &\iff \quad -4x = 9 \\ &\iff \quad x = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
signe de $-4x - 9$		$+$	0	$-$	

3. Calcul de la racine :

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x - \frac{2}{7} = 0 \quad &\iff \quad \frac{3}{5}x = \frac{2}{7} \\ &\iff \quad \frac{5}{3} \times \frac{3}{5}x = \frac{5}{3} \times \frac{2}{7} \\ &\iff \quad x = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{10}{21}$		$+\infty$
signe de $\frac{3}{5}x - \frac{2}{7}$		$-$	0	$+$	

4. Calcul de la racine :

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x - 3 = 0 \quad &\iff \quad \sqrt{3}x = 3 \\ &\iff \quad x = \frac{3}{\sqrt{3}} \\ &\iff \quad x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de $\sqrt{3}x - 3$		$-$	0	$+$	

5. Calcul des racines :

$$\begin{aligned} 2x - 1 = 0 \quad &\iff \quad 2x = 1 \\ &\iff \quad x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x + 2 = 0 \quad &\iff \quad -3x = -2 \\ &\iff \quad x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $2x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-3x + 2$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(2x - 1)(-3x + 2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

6. Calcul des racines :

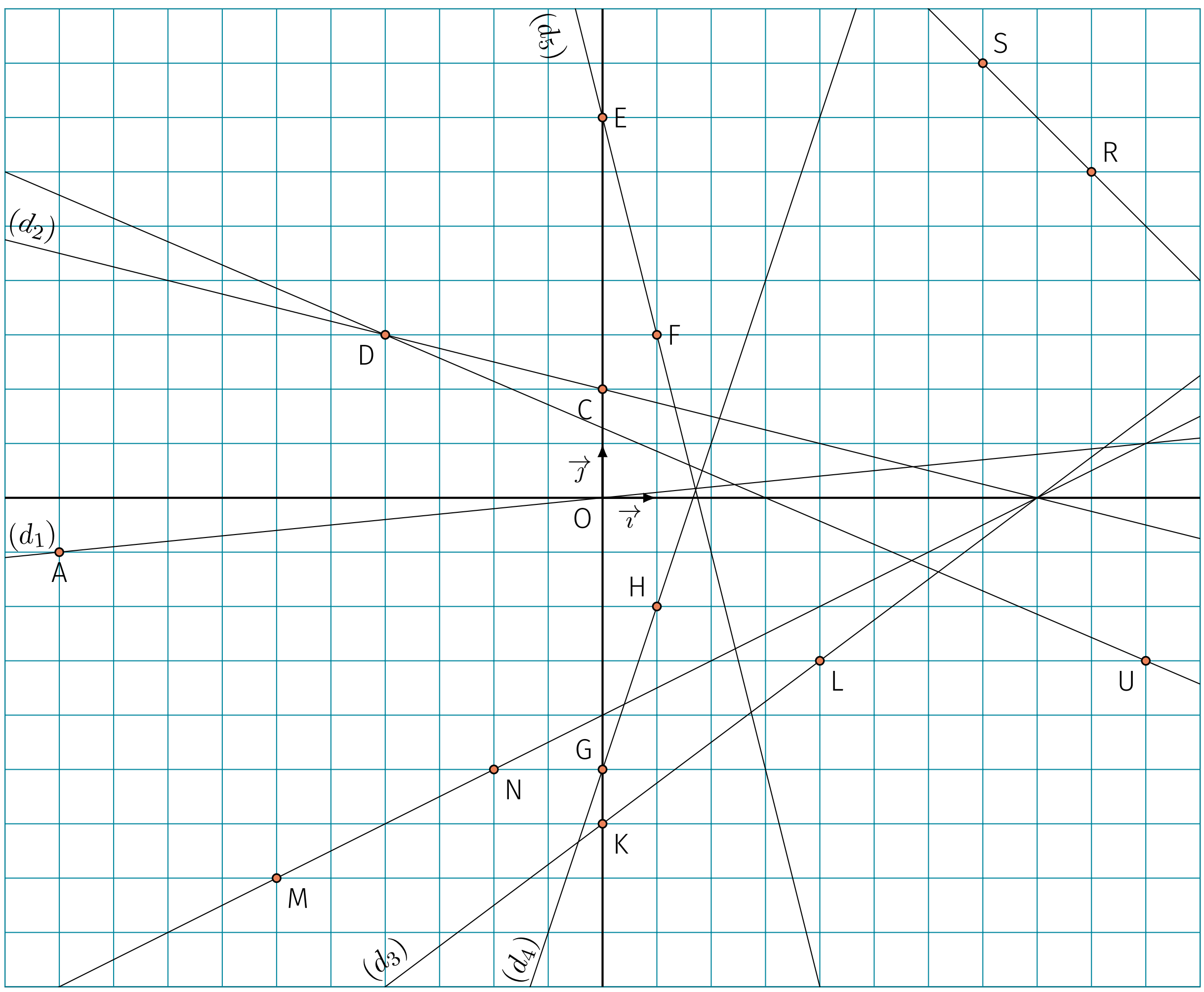
$$5x-2=0 \iff 5x=2 \iff x=\frac{2}{5}$$

$$-7x-8=0 \iff -7x=8 \iff x=-\frac{8}{7}$$

x	$-\infty$		$-\frac{8}{7}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
signe de $5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-7x-8$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $\frac{5x-2}{-7x-8}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Exercice 6

Sans justifier, lire les équations des droites (d_1) à (d_5) du graphique suivant :



- $(d_1) : y = \frac{1}{10}x$
- $(d_2) : y = -\frac{1}{4}x + 2$
- $(d_3) : y = \frac{3}{4}x - 6$
- $(d_4) : y = 3x - 5$
- $(d_5) : y = -4x + 7$

Exercice 7

> Déterminer les équations réduites des droites (SR) et (DU) du graphique précédent.
>
> Déterminer et tracer sur le graphique précédent l'équation réduite de la droite passant par $B\,(300\ ;\ -95)$ et $T\,(-111\ ;\ 42)$.

- On a $S\,(7\ ;\ 8)$ et $R\,(9\ ;\ 6)$.
  La droite (SR) a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec m et p deux réels à déterminer.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_R - y_S}{x_R - x_S} \\ &= \frac{6-8}{9-7} \\ &= -1 \end{aligned}$$

D'où $(SR) : y = -x + p$
Déteminons p :
Les coordonnées de S vérifient l'équation $y = -x + p$.

$$\begin{aligned} y_S = -x_S + p \quad &\iff \quad 8 = -7 + p \\ &\iff \quad p = 15 \end{aligned}$$

CONCLUSION : La droite (SR) a pour équation réduite $y = -x + 15$.

- On a $D\,(-4\ ;\ 3)$ et $U\,(10\ ;\ -3)$.
  La droite (DU) a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec m et p deux réels à déterminer.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_U - y_D}{x_U - x_D} \\ &= \frac{-3-3}{10+4} \\ &= -\frac{6}{14} \\ &= -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

D'où $(DU) : y = -\frac{3}{7}x + p$
Déteminons p :
Les coordonnées de D vérifient l'équation $y = -\frac{3}{7}x + p$.

$$\begin{aligned} y_D = -\frac{3}{7}x_D + p \quad &\iff \quad 3 = -\frac{3}{7} \times (-4) + p \\ &\iff \quad \frac{21}{7} = \frac{12}{7} + p \\ &\iff \quad p = \frac{9}{7} \end{aligned}$$

CONCLUSION : La droite (DU) a pour équation réduite $y = -\frac{3}{7}x + \frac{9}{7}$.

- On a $B\,(300\ ;\ -95)$ et $T\,(-111\ ;\ 42)$.
  La droite (BT) a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ avec m et p deux réels à déterminer.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_T - y_B}{x_T - x_B} \\ &= \frac{42+95}{-111-300} \\ &= -\frac{137}{411} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

D'où $(BT) : y = -\frac{1}{3}x + p$
Déteminons p :
Les coordonnées de B vérifient l'équation $y = -\frac{1}{3}x + p$.

$$\begin{aligned} y_B = -\frac{1}{3}x_B + p \quad &\iff \quad -95 = -\frac{1}{3} \times 300 + p \\ &\iff \quad -95 = -100 + p \\ &\iff \quad p = 5 \end{aligned}$$

CONCLUSION : La droite (BT) a pour équation réduite $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

Exercice 8

1. Le couple $(4\,;-2)$ est-il solution du système $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ y = x - 6 \end{cases}$?

2. Le couple $(2\,;1)$ est -il solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$?

1. Pour $x = 4$ et $y = -2$:

   $$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \times 4 - 2 \\ &= 6 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x - 6 &= 4 - 6 \\ &= -2 \end{aligned}$$

   Le couple $(4\,;-2)$ est solution des deux équations. Il est donc solution du système.

2. Pour $x = 2$ et $y = 1$:

   $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \times 2 + 3 \times 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

   Le couple $(2\,;1)$ n'est pas solution de la première équation. Il n'est donc pas solution du système.

Exercice 9

Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

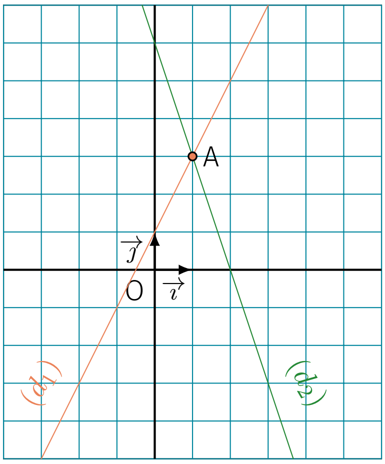
1. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y = 5x + 6 \\ x = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = x - 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 2y = -7 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

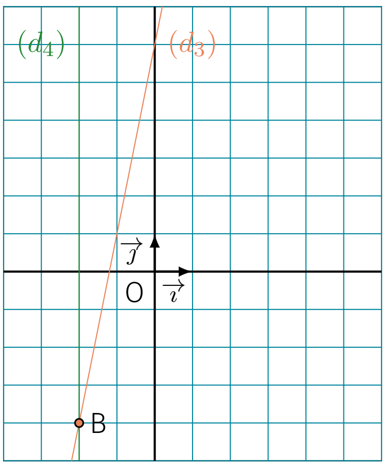
1. On trace les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = 2x + 1$ et $y = -3x + 6$.



(d_1) et (d_2) sont sécantes en $A\,(1\ ;\ 3)$ donc

$$\mathcal{S}_1 = \{(1\,;3)\}$$

2. On trace les droites (d_3) et (d_4) d'équations respectives $y = 5x + 6$ et $x = -2$.

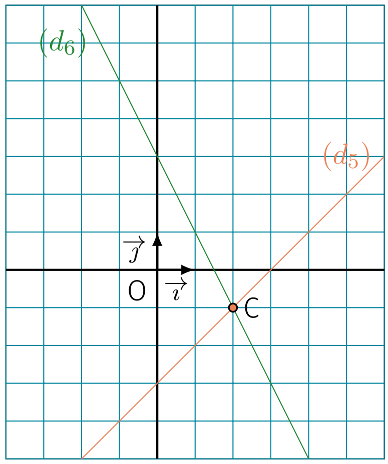


(d_3) et (d_4) sont sécantes en $B\,(-2\ ;\ -4)$ donc

$$\mathcal{S}_2 = \{(-2\,;-4)\}$$

3. $2x + y = 3 \iff y = -2x + 3$

On trace les droites (d_5) et (d_6) d'équations respectives $y = x - 3$ et $y = -2x + 3$.



(d_5) et (d_6) sont sécantes en $C\,(2\ ;\ -1)$ donc

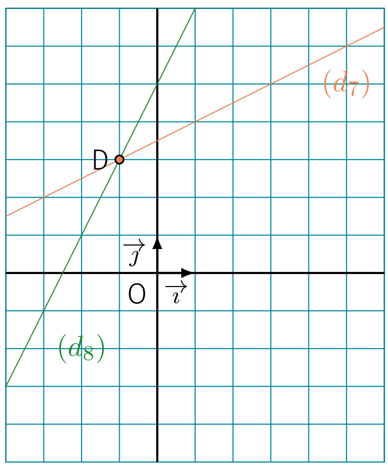
$$\mathcal{S}_3 = \{(2\,;-1)\}$$

4. $x - 2y = -7 \iff -2y = -x - 7$

$\iff y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$

$2x - y = -5 \iff y = 2x + 5$

On trace les droites (d_7) et (d_8) d'équations respectives $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$ et $y = 2x + 5$.



(d_7) et (d_8) sont sécantes en $D\,(-1\ ;\ 3)$ donc

$$\mathcal{S}_4 = \{(-1\,;3)\}$$

Exercice 10

Résoudre chacun des systèmes par substitution.

1. $\begin{cases} x+3y=8 \\ 2x-5y=-17 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x-3y=-13 \\ 4x-y=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 8x+3y=-4 \\ x+5y=1 \end{cases}$

1. Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+3y=8 \\ 2x-5y=-17 \end{cases} &\iff \begin{cases} x=8-3y \\ 2x-5y=-17 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=8-3y \\ 2(8-3y)-5y=-17 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=8-3y \\ 16-6y-5y=-17 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=8-3y \\ -11y=-33 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=8-3y \\ y=3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=8-3\times 3 \\ y=3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_1=\{(-1\,;3)\}$

2. Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2x+y=4 \\ 5x+3y=9 \end{cases} &\iff \begin{cases} y=4-2x \\ 5x+3(4-2x)=9 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=4-2x \\ 5x+12-6x=9 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=4-2x \\ -x=-3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=4-2\times 3 \\ x=3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=-2 \\ -x=-3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_2=\{(3\,;-2)\}$

3. Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\left\{\begin{array}{l}4x-3y=-13\\4x-y=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}4x-3y=-13\\4x-1=y\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}4x-3(4x-1)=-13\\y=4x-1\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}4x-12x+3=-13\\y=4x-1\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}-8x=-16\\y=4x-1\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}x=2\\y=4\times 2-1\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}x=2\\y=7\end{array}\right.$$

$\mathcal{S}_3=\{(2\,;7)\}$

4. Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\left\{\begin{array}{l}8x+3y=-4\\x+5y=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}8x+3y=-4\\x=1-5y\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}8(1-5y)+3y=-4\\x=1-5y\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}8-40y+3y=-4\\x=1-5y\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}-37y=-12\\x=1-5y\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{12}{37}\\x=1-5\times\dfrac{12}{37}\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{12}{37}\\x=\dfrac{37}{37}-\dfrac{60}{37}\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{12}{37}\\x=-\dfrac{23}{37}\end{array}\right.$$

$\mathcal{S}_4=\left\{\left(-\dfrac{23}{37}\,;\dfrac{12}{37}\right)\right\}$

Exercice 11

Résoudre chacun des systèmes par combinaisons linéaires.

1. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-3y=-19 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+4y=-6 \\ 5x+y=-10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x-6y=3 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+3y=4 \\ 8x-4y=5 \end{cases}$

1. Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-3y=-19 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+5x+3y-3y=5-19 \\ 5x-3y=-19 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 7x=-14 \\ 5x-3y=-19 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-2 \\ 5\times(-2)-3y=-19 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-2 \\ -10-3y=-19 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-2 \\ -3y=-9 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

$\mathcal{S}_1=\{(-2\,;3)\}$

2. Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{cases} 3x+4y=-6 \\ 5x+y=-10 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+4y=-6 \\ -4\times(5x+y)=-10\times(-4) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+4y=-6 \\ -20x-4y=40 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+4y=-6 \\ 3x-20x+4y-4y=-6+40 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+4y=-6 \\ -17x=34 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+4y=-6 \\ x=-2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3\times(-2)+4y=-6 \\ x=-2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -6+4y=-6 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$\mathcal{S}_2 = \{(-2\,;0)\}$

3. Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{cases} 4x - 6y = 3 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5\times(4x-6y) = 3\times 5 \\ -4\times(5x+7y) = 1\times(-4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 20x - 30y = 15 \\ -20x - 28y = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 20x - 30y = 15 \\ 20x - 20x - 30y - 28y = 15 - 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 20x - 30y = 15 \\ -58y = 11 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 20x - 30y = 15 \\ y = -\dfrac{11}{58} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 20x - 30 \times \left(-\dfrac{11}{58}\right) = 15 \\ y = -\dfrac{11}{58} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 20x = -\dfrac{330}{58} + \dfrac{15\times 58}{58} \\ y = -\dfrac{11}{58} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 20x = -\dfrac{330}{58} + \dfrac{870}{58} \\ y = -\dfrac{11}{58} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{540}{58} \times \dfrac{1}{20} \\ y = -\dfrac{11}{58} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{27}{58} \\ y = -\dfrac{11}{58} \end{cases}$$

$\mathcal{S}_3 = \left\{\left(\dfrac{27}{58}\,;-\dfrac{11}{58}\right)\right\}$

4. Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 8x - 4y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} -8\times(x+3y) = -8\times 4 \\ 8x - 4y = 5 \end{cases}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -8x-24y=-32 \\ 8x-4y=5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -8x+8x-24y-4y=-32+5 \\ 8x-4y=5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -28y=-27 \\ 8x-4y=5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{27}{28} \\ 8x-4\times\dfrac{27}{28}=5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{27}{28} \\ 8x-\dfrac{108}{28}=5 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{27}{28} \\ 8x=\dfrac{5\times 28}{8}+\dfrac{108}{28} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{27}{28} \\ 8x=\dfrac{248}{28} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{27}{28} \\ x=\dfrac{248}{28}\times\dfrac{1}{8} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{27}{28} \\ x=\dfrac{31}{28} \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}_4=\left\{\left(\frac{31}{28}\,;\frac{27}{28}\right)\right\}$$

Exercice 12

Résoudre par le calcul les systèmes suivants avec la méthode de votre choix.

1. $\left\{\begin{array}{l} y=2 \\ x-y=3 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} -2x+2y=-6 \\ x+2y=6 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x+4y=2 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{l} 3x+9y=20 \\ -2x-6y+7=0 \end{array}\right.$

1. Résolution par substitution :
   Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\left\{\begin{array}{l} y=2 \\ x-y=3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=2 \\ x-2=3 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

$\mathcal{S}_1 = \{(5\,;2)\}$

2. Résolution par combinaison linéaire :
Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{cases} -2x + 2y = -6 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 2y = -6 \\ 2\times(x + 2y) = 2\times 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 2y = -6 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 2y = -6 \\ -2x + 2x + 2y + 4y = -6 + 12 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 2y = -6 \\ 6y = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 2y = -6 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 2 \times 1 = -6 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x = -8 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\mathcal{S}_2 = \{(4\,;1)\}$

3. Résolution par substitution :
Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - 4y \\ 3(2 - 4y) - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 - 4y \\ 6 - 12y - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 - 4y \\ 6 - 14y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 - 4y \\ -14y = -5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 - 4y \\ y = \dfrac{5}{14} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 - 4 \times \dfrac{5}{14} \\ y = \dfrac{5}{14} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{28}{14} - \dfrac{20}{14} \\ y = \dfrac{5}{14} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{8}{14} \\ y = \dfrac{5}{14} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{4}{7} \\ y = \dfrac{5}{14} \end{cases}$$

$\mathcal{S}_3 = \left\{ \left(\dfrac{4}{7} \,; \dfrac{5}{14} \right) \right\}$

4. Résolution par combinaisons linéaires :
   Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{cases} 3x + 9y = 20 \\ -2x - 6y + 7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\times(3x+9y) = 2\times 20 \\ 3\times(-2x-6y+7) = 3\times 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x + 18y = 40 \\ -6x - 18y + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x + 18y = 40 \\ 6x - 6x + 18y - 18y + 21 = 40 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x + 18y = 40 \\ 21 = 40 \qquad \textit{Cette équation n'a pas de solution.} \end{cases}$$

$\mathcal{S}_4 = \varnothing$

Exercice 13

1. Dans un parc zoologique, la visite coûte 30 € pour les adultes et 18 € pour les enfants. A la fin de la journée, on sait que 630 personnes ont visité le zoo et que la recette du jour est 14 220 €.
   Parmi les personnes qui ont visité le zoo ce jour-là, quel est le nombre d'enfants ?

2. Pour l'achat d'un livre et d'un stylo, la dépense est de 35 €. Après une réduction de 20%, sur le prix du livre et de 30% sur le prix du stylo, la dépense n'est que de 26 €.
   Calculer le prix d'un livre et celui d'un stylo avant la réduction.

3. Jean et Paul désirent acheter en commun un lecteur de CD qui coûte 200 €.
   Les économies de Paul représentent les $\dfrac{4}{5}$ de celles de Jean et, s'ils réunissent leurs économies, il leur manque 27,20 € pour pouvoir effectuer leur achat.
   Calculer le montant des économies de chacun des deux garçons.

4. Trois amis pêcheurs achètent des poches d'hameçons et des bouchons. Les poches sont toutes au même prix, les bouchons aussi.
   Le premier prend 3 poches et 2 bouchons. Le second, 2 poches et 4 bouchons. Le troisième, 4 poches et 1 bouchon. Le premier a dépensé 4,60 €, le second 6 €.
   Combien a dépensé le troisième ?