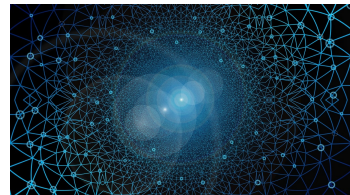


Soit  $a$  un nombre réel donné. On suppose que  $a > 1$  dans toute la suite du sujet.

Une figure  $(1, a)$  est un ensemble fini de points du plan tels que la distance entre deux d'entre eux vaut 1 ou  $a$ .



## Partie A

1. Donner un exemple de figure  $(1, \frac{3}{2})$  à trois points.
2. Existe-t-il une figure  $(1, a)$  à trois points telle que ces trois points soient les sommets d'un triangle rectangle ?
3. Donner un exemple de figure  $(1, \sqrt{2})$  à quatre points.

Le but du problème est d'obtenir une classification de l'ensemble des figures  $(1, a)$  en fonction du nombre de ses points et de leurs positions relatives.

4. On considère une figure  $(1, a)$  à trois points. Quelle est la nature du triangle formé par ces points ? On décrira les différents cas possibles.

## Partie B

Dans cette partie, ABC est un triangle équilatéral de côté 1.

On suppose que D est un point tel que les points A, B, C et D forment une figure  $(1, a)$ .

5. Montrer qu'il est impossible que les distances de D à chacun des trois autres points soient toutes égales à 1.
6. Est-il possible que la distance entre D et A soit égale à  $a$  et que toutes les autres distances entre deux points distincts de la figure valent 1 ? Si oui, indiquer la ou les valeur(s) correspondante(s) de  $a$ .
7. Comment placer D de telle sorte que la distance entre A et D soit égale à  $a$ , et, que toutes les autres distances entre deux points distincts de la figure valent 1 sauf une ? Déterminer la ou les valeur(s) correspondantes pour  $a$ .
8. Peut-on placer D de telle sorte que trois distances, exactement, entre deux points distincts de la figure soient égales à  $a$  ? Si oui, calculer la ou les valeur(s) correspondante(s) de  $a$ .

## Partie C

Dans cette partie, ABC est un triangle isocèle en B tel que  $AB = BC = 1$  et  $AC = a$ .

On suppose que D est un point tel que les points A, B, C et D forment une figure  $(1, a)$ .

9. Déterminer les nouvelles figures  $(1, a)$  à quatre points A, B, C et D en calculant  $a$  à chaque fois.

## Partie D

Dans cette partie, ABC est un triangle équilatéral de côté  $a$ .

On suppose que D est un point tel que les points A, B, C et D forment une figure  $(1, a)$ .

10. Déterminer les nouvelles figures  $(1, a)$  à quatre points A, B, C et D en calculant  $a$  à chaque fois.

## Partie E

11. Montrer qu'il existe une figure  $(1, a)$  à cinq points.