Chapitre 9
Produit scalaire

Dans tout le cours, on se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1 Norme d'un vecteur

Définition

Soient $\vec{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
On appelle **norme** de $\vec{u}$ le réel positif ou nul noté $\|\vec{u}\|$, défini par $\|\vec{u}\| = AB$.

Propriété

Soient λ un réel et $\vec{u}$ un vecteur.
On a $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

Propriété

Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple

Soient $A\,(-1\ ;\ 2)$ et $B\,(3\ ;\ -1)$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ -1-2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

2 Produit scalaire de deux vecteurs

On considère trois points A, B et C et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

Définition

Le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$

def.png