Corrigé - Inéquations (1)

$1^{\text{ère}}$spé

Résoudre dans **R** les inéquations suivantes :

1. $2x^2 + 4x + 4 < 0$
2. $-x^2 + 6x - 14 < 0$
3. $3x^2 - 3x - 36 < 0$
4. $-2x^2 - 14x - 20 \leqslant 0$
5. $-2x^2 + 12x - 16 > 0$
6. $-x^2 - 4x - 3 \leqslant 0$

1. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^2 + 4x + 4$.
   On cherche à résoudre $P(x) < 0$.
   Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
   $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 4 = -16$
   $\Delta < 0$ donc le polynôme P n'admet pas de racine.
   Il est toujours du signe de $a = 2 > 0$, donc $P(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   On en déduit $S = \emptyset$.

2. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^2 + 6x - 14$.
   On cherche à résoudre $P(x) > 0$.
   Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
   $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-14) = -20$
   $\Delta < 0$ donc le polynôme P n'admet pas de racine.
   Il est toujours du signe de $a = -1 < 0$, donc $P(x) < 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   On en déduit $S =$ **R**.

3. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2 - 3x - 36$.
   On cherche à résoudre $P(x) < 0$.
   Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
   $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-36) = 441$
   $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
   $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{441}}{6} = -3$
   $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{441}}{6} = 4$
   On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
   Comme $a = 3 > 0$:
   On peut résumer le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$3x^2 - 3x - 36$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Finalement $S =]-3; 4[$.

4. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^2 - 14x - 20$.
On cherche à résoudre $P(x) \leq 0$.
Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
$\Delta = (-14)^2 - 4 \times (-2) \times (-20) = 36$
$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
$x_1 = \dfrac{14-\sqrt{36}}{-4} = -5$
$x_2 = \dfrac{14+\sqrt{36}}{-4} = -2$
On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
Comme $a = -2 < 0$:
On peut résumer le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
$-2x^2 - 14x - 20$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement $S =]-\infty; -5] \cup [-2; +\infty[$.

5. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^2 + 12x - 16$.
On cherche à résoudre $P(x) > 0$.
Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
$\Delta = 12^2 - 4 \times (-2) \times (-16) = 16$
$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
$x_1 = \dfrac{-12-\sqrt{16}}{-4} = 2$
$x_2 = \dfrac{-12+\sqrt{16}}{-4} = 4$
On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
Comme $a = -2 < 0$
on en déduit le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$-2x^2 + 12x - 16$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement $S =]2; 4[$.

6. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^2 - 4x - 3$.
On cherche à résoudre $P(x) \leq 0$.
Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 4$
$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
$x_1 = \dfrac{4-\sqrt{4}}{-2} = -3$
$x_2 = \dfrac{4+\sqrt{4}}{-2} = -1$

On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
Comme $a = -1 < 0$:
On peut résumer le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$-x^2 - 4x - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement $S =]-\infty;-3] \cup [-1;+\infty[$.