

Primitives et équations différentielles TaleComp

Capacités attendues :

- ❑ Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- ❑ Déterminer les primitives d'une fonction, en reconnaissant la dérivée d'une fonction de référence ou une fonction de la forme $2uu'$, $e^u u'$ ou $\frac{u'}{u}$.
- ❑ Résoudre une équation différentielle $y' = ay$. Pour une équation différentielle $y' = ay + b$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer la solution générale.

Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.

Méthode

Pour vérifier qu'une fonction f est solution d'une équation différentielle du premier ordre :

- On calcule f' ;
- On évalue séparément les deux membres de l'équation différentielle en remplaçant $f(x)$ et $f'(x)$ par leurs expressions ;
- On vérifie que les deux membres de l'égalité sont égaux.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $y' = 2x + 1$ pour x réel.

Montrer que la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^2 + x + 3$ est solution de cette équation différentielle.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.

Montrer que la fonction g définie sur \mathbf{R} par $g(x) = e^{2x}$ est solution de cette équation différentielle.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $xy' + y = x$ pour x réel.

Montrer que la fonction h définie sur \mathbf{R} par $h(x) = \frac{1}{2}x$ est solution de cette équation différentielle.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2 + e^{-x}$ pour x réel.

Dans chaque cas, vérifier si la fonction définie sur \mathbf{R} est solution de (E) :

1. $f : x \mapsto 2x + e^{-x}$

2. $g : x \mapsto \frac{2xe^x + 1}{e^x}$

Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée.

Méthode

Pour vérifier qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f donnée, on dérive F et on vérifie que $F' = f$.

Exercice 5

Soient f et F les fonctions définies sur \mathbf{R} par $f(x) = xe^x$ et $F(x) = (x - 1)e^x$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur \mathbf{R} .
2. En déduire toutes les primitives de f sur \mathbf{R} .

Exercice 6

Soient f et F les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ et $F(x) = 2x + 3 \ln(x)$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.
2. Déterminer la primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Calculer une primitive en utilisant les fonctions de référence

Exercice 7

Dans chaque cas, déterminer une primitive sur I de la fonction définie :

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $I = \mathbf{R}$

4. $k(x) = \frac{1}{4}e^x + 2x$, $I = \mathbf{R}$

2. $g(x) = 5x^3 + 4x^2 - x + 1$, $I = \mathbf{R}$

5. $l(x) = \frac{2}{x} + 5e^x$, $I =]0 ; +\infty[$

3. $h(x) = 7x^3 - \frac{3}{x}$, $I =]0 ; +\infty[$

6. $m(x) = \frac{1}{x^2} - 3x^2$, $I =]0 ; +\infty[$

Déterminer d'autres primitives

Exercice 8

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I .

1. $f : x \mapsto -e^{-x}, \quad I = \mathbf{R}$
2. $g : x \mapsto \frac{3x^2}{x^3 + 5}, \quad I =]0; +\infty[$
3. $h : x \mapsto 2(2x + 1)(x^2 + x - 7), \quad I = \mathbf{R}$

Exercice 9

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I .

1. $f : x \mapsto 2(3x^2 + 2)(x^3 + 2x), \quad I = \mathbf{R}$
2. $g : x \mapsto (2x + 1)e^{x^2+x+2}, \quad I = \mathbf{R}$
3. $h : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad I = \mathbf{R}$

Exercice 10

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I .

1. $f : x \mapsto 2(4x^3 + 3)(x^4 + 3x), \quad I = \mathbf{R}$
2. $g : x \mapsto \frac{3}{3x - 1}, \quad I = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$
3. $h : x \mapsto 2e^{2x+1}, \quad I = \mathbf{R}$

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay$

Exercice 11

1. Résoudre l'équation différentielle $3y' = 2y$.
2. Donner l'allure des courbes représentatives des solutions de cette équation différentielle.
3. Déterminer l'unique solution f de cette équation différentielle qui vérifie $f(1) = e$.

Exercice 12

1. Résoudre les équations différentielles :

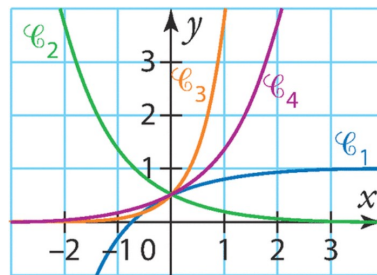
a. $y' = 2y$

b. $y' = -5y$

2. Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto Ke^{-5x}$ suivant le signe du réel K .

Exercice 13

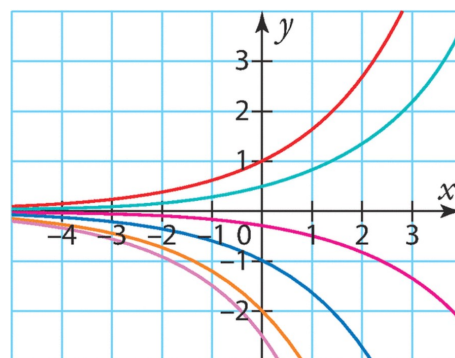
Parmi les courbes suivantes, quelle est celle qui correspond à la solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$ qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ en 0 ?



Exercice 14

On a représenté ci-dessous les courbes de certaines solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$. On considère dans les questions suivantes toutes les solutions de l'équation.

1. Soit un point M_0 de coordonnées $(x_0 ; y_0)$.
Combien de courbes passent par le point M_0 ?
2. Montrer que les tangentes à toutes les courbes au point d'ordonnée 2 sont parallèles à la droite d'équation $y = x$.



Exercice 15

Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique. La puissance du son émis, initialement de 100 watts, diminue avec le temps t , mesuré en secondes.

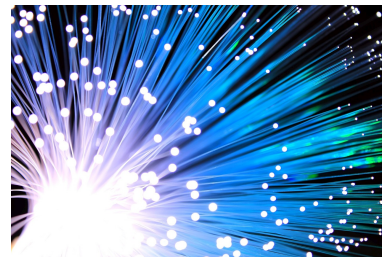
On modélise par $f(t)$ la puissance du son émis, exprimée en watts, t secondes après le pincement de la corde. Le son s'affaiblit à une vitesse proportionnelle à sa puissance, il a été établi que le coefficient de proportionnalité est $-0,12$.



1. **i** Si f est la fonction puissance, alors la vitesse d'évolution de cette puissance est f' .
Écrire l'équation différentielle traduisant la diminution de la puissance du son émis.
2. Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle qui vérifie la condition initiale $f(0) = 100$.
3. Quelle est la puissance du son émis deux secondes après le pincement de la corde ?
4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 80$, on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat.

Exercice 16

Une fibre optique est un fil très fin en verre ou en plastique, qui a la propriété de conduire la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données. La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation, exprimée en km.



On admet que la fonction puissance g est définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0,035y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,035y = 0$.
2. Sachant que $g(0) = 7$, déterminer $g(x)$.
3. Pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient inférieure à 0,08 mW.
Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?

Résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$

Exercice 17

Choisir la bonne réponse :

1. Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 10$ est :
☐ 20 ☐ -20 ☐ 10 ☐ -10
2. Une solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 2$ est :
☐ $f : x \mapsto e^{-2x} + 1$ ☐ $g : x \mapsto e^{-2x} - 1$ ☐ $h : x \mapsto e^{2x} + 1$ ☐ $k : x \mapsto e^{2x} - 1$
3. La fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 2 - e^{-4x}$ est solution de l'équation différentielle :
☐ $y' - 4y = 8$ ☐ $y' - 8y = 4$
☐ $y' - 2y = 8$ ☐ $y' + 4y = 8$

Exercice 18

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2y - 1$
2. $y' + 2y = 3$

Exercice 19

1. Résoudre $y' - 2y = 5$.
2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle telle que $f(0) = 0$.

Exercice 20

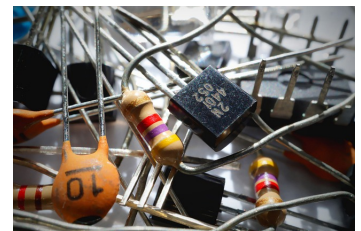
On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 5y = 3$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) .
2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = \frac{-6}{5}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur \mathbf{R} .
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = -10$.

Exercice 21 Décharge d'un condensateur physique

Un condensateur de capacité C farads est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans une résistance de R ohms.

En notant $u(t)$ la tension (en volts) aux bornes du condensateur au bout de t secondes, u est alors une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ qui est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{RC}y = 0$.



1. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{RC}y = 0$ et en déduire l'expression de la fonction u .
2. On suppose que $R = 1000$ et $C = 10^{-4}$.
Pendant combien de temps (au centième de seconde près) la tension aux bornes du condensateur reste-t-elle supérieure ou égale à 5 volts ?

Exercice 22 Loi de refroidissement de Newton

Un corps est placé dans une enceinte dont on maintient la température constante égale à 20°C . À l'instant initial $t = 0$, la température du corps est de 70°C et, après 5 min, elle n'est plus que de 60°C . La température du corps en fonction du temps (en min) est notée $T(t)$. T est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$. La loi de refroidissement de Newton énonce que T' est proportionnelle à $T - 20$.

1. Justifier que la fonction $t \mapsto T(t) - 20$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay$, puis déterminer la fonction T .
2. Déterminer la température du corps (au degré près) après une demi-heure.
3. Après combien de temps (à la minute près) la température du corps sera-t-elle de 40°C ?

Exercice 23 Croissance de bactéries

La nombre de bactéries B d'une culture passe de 600 à l'instant initial à 1800 après 2 heures. On suppose que le taux de croissance est directement proportionnel au nombre de bactéries présentes. Déterminer :

1. Une équation avec des conditions qui traduisent le problème.
2. Une formule qui permet de calculer le nombre de bactéries $B(t)$ à l'instant t .
3. Le nombre de bactéries après 4 heures.
4. Le temps nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12 000.

Exercice 24 En économie

Dans une économie keynésienne simple, la consommation C s'exprime par l'égalité $C = 360 + 0,8Y$ et $I = 120$, où Y est le revenu et I l'investissement.

Lorsque le marché est hors de l'équilibre, on suppose que le revenu Y évolue en fonction du temps selon l'équation différentielle $Y' = 0,25(C + I - Y)$.

À la période initiale, le revenu Y_0 est égal à 2000.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction Y .
2. Déterminer la fonction Y .
3. Étudier la limite de la fonction Y en $+\infty$ et en déduire une conclusion sur la stabilité de l'équilibre de cette économie.