Corrigé de l'évaluation-bilan 4 - A

1ère spé

Exercice 1

Une chaîne de salons de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe, deux prestations supplémentaires cumulables :

- Une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin » ;
- Des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Le tableauc ci-contre donne la répartition incomplète des demandes des clients sur une semaine.

On choisi un client au hasard.

On note C l'événement : « Le client souhaite une « couleur-soin » et E l'événement : « Le client souhaite un « effet coup de soleil ».

	C	$\overline{C}$	Total
E	10	15	25
$\overline{E}$	14	1	15
Total	24	16	40

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

1. La probabilité que le client ait choisi une « couleur-soin » et un « effet coup de soleil » est :

❏ $P_E(C)$ ✔ $P(C \cap E)$ ✔ 25% ❏ 40%

2. $P_{\overline{E}}(C)$ représente la probabilité que le client :

❏ ait choisi une « couleur-soin » sans « effet coup de soleil » ;
❏ ait choisi une « couleur-soin » et « effet coup de soleil » ;
❏ n'ait pas choisi un « effet coup de soleil » sachant qu'il a choisi une « couleur-soin » ;
✔ ait choisi une « couleur-soin » sachant qu'il n'a pas choisi un « effet coup de soleil ».

3. La probabilité que le client n'ait choisi ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil » est :

❏ 25% ✔ $2,5\%$ ✔ $\dfrac{1}{40}$ ❏ $\dfrac{1}{16}$

Corrigé :
D'après le tableau, on a :

1. $$P(E \cap C) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

3. $$P(\overline{C} \cap \overline{E}) = \frac{1}{40} = 0,025 = 2,5\%$$

Exercice 2

Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres depuis Paris.
Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.
De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option « visites guidées ».

Une étude a produit les données suivantes :

- 42 % des clients optent pour l'avion ;
- Parmi les clients ayant choisi le train, 44 % choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 30 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option « visites guidées ».

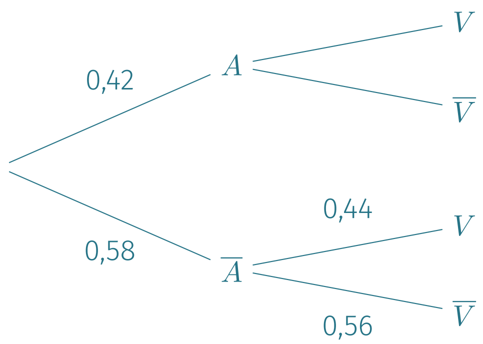
On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.
On considère les événements suivants :

- A : le client a choisi l'avion ;
- V : le client a choisi l'option « visites guidées ».

1. Donner les probabilités $P(A)$, $P_{\bar{A}}(V)$ et $P(A \cap V)$ et construire un arbre de probabilités représentant la situation.
2. Calculer $P_A(V)$.
3. Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à $0{,}555$ environ.
4. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au centième.
5. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante.
   Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prenne l'option « visites guidées » ? On donnera les résultats sous forme de valeurs approchées à 10^{-3} près.

Corrigé :

1. De l'énoncé, on déduit que :
   $P(A) = 0{,}42$
   $P_{\bar{A}}(V) = 0{,}44$
   $P(A \cap V) = 0{,}3$
   On peut alors construire cet arbre de probabilités :



2. On a donc $P_A(V) = \dfrac{P(A \cap V)}{P(A)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}42} = \dfrac{30}{42} = \dfrac{5}{7}$.

3. Comme A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, on peut appliquer la loi des probabilités totales : $P(V) = P(A \cap V) + P(\bar{A} \cap V)$.
Or $P(\bar{A} \cap V) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(V) = (1 - 0{,}42) \times 0{,}44 = 0{,}2552$.
Donc $P(V) = 0{,}3 + 0{,}2552 = 0{,}5552$.

4. On a $P_{\bar{V}}(A) = \dfrac{P(\bar{V} \cap A)}{P(\bar{V})} = \dfrac{P(A \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \dfrac{P(A) \times P_A(\bar{V})}{P(\bar{V})}$.
Or, d'après la question précédente : $P(\bar{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0{,}5552 = 0{,}4448$
et d'après la question 2 : $P_A(\bar{V}) = 1 - P_A(V) = 1 - \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{7}$.
Donc $P_{\bar{V}}(A) = \dfrac{0{,}42 \times \dfrac{12}{42}}{0{,}4448} \approx 0{,}27$.

5. On a vu que $P(\bar{V}) = 1 - 0{,}5552 = 0{,}4448$.
Comme les deux événements sont indépendants, en les appelant $\bar{V_1}$ et $\bar{V_2}$, on a : $P(\bar{V_1} \cap \bar{V_2}) = P(\bar{V_1}) \times P(\bar{V_2})$
La probabilité cherchée est donc égale à $P(\bar{V_1} \cap \bar{V_2}) = 0{,}4448 \times 0{,}4448 \approx 0{,}198$.

Exercice 3

Soit x un réel compris entre 0 et 1.
Soient A et B deux événements tels que $\quad P(A) = x, \quad P(B) = 1 - x \quad$ et $\quad P(A \cap B) = \dfrac{3}{16}$.
Déterminer toutes les valeurs de x possibles pour que A et B soient indépendants.

Corrigé :

$$\begin{aligned}
A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad &\iff \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\
&\iff \quad \frac{3}{16} = x \times (1 - x) \\
&\iff \quad \frac{3}{16} = x - x^2 \\
&\iff \quad x^2 - x + \frac{3}{16} = 0
\end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times \frac{3}{16} \\
&= 1 - \frac{3}{4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont donc :

$$x_1 = \frac{+1 + \sqrt{\frac{1}{4}}}{2 \times 1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{+1 - \sqrt{\frac{1}{4}}}{2 \times 1} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \qquad x_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

On a donc : A et B sont indépendants si et seulement si $x = \frac{3}{4}$ ou $x = \frac{1}{4}$.

Corrigé de l'évaluation-bilan 4 - B

1ère spé

Exercice 1

Une chaîne de salons de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe, deux prestations supplémentaires cumulables :

- Une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin » ;
- Des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Le tableauc ci-contre donne la répartition incomplète des demandes des clients sur une semaine.

	C	$\overline{C}$	Total
E	8	10	18
$\overline{E}$	17	5	22
Total	25	15	40

On choisi un client au hasard.

On note C l'événement : « Le client souhaite une « couleur-soin » et E l'événement : « Le client souhaite un « effet coup de soleil ».

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être correctes.

La probabilité que le client ait choisi une « couleur-soin » et un « effet coup de soleil » est :

✔ $P(C \cap E)$ ❏ $P_E(C)$ ✔ 20% ❏ 32%

$P_{\overline{E}}(C)$ représente la probabilité que le client :

❏ n'ait pas choisi un « effet coup de soleil » sachant qu'il a choisi une « couleur-soin » ;

✔ ait choisi une « couleur-soin » sachant qu'il n'a pas choisi un « effet coup de soleil » ;

❏ ait choisi une « couleur-soin » sans « effet coup de soleil » ;

❏ ait choisi une « couleur-soin » et « effet coup de soleil » ;

La probabilité que le client n'ait choisi ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil » est :

❏ 5% ✔ $12,5\%$ ❏ $\frac{5}{15}$ ❏ $\frac{4}{40}$

Corrigé :

D'après le tableau, on a :

1. $P(C \cap E) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

3. $P(\overline{C} \cap \overline{E}) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$

Exercice 2

Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres depuis Paris.
Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.
De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option « visites guidées ».

Une étude a produit les données suivantes :

- 49 % des clients optent pour l'avion ;
- Parmi les clients ayant choisi le train, 35 % choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 25 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option « visites guidées ».

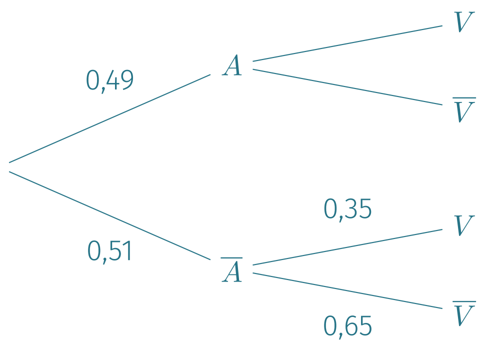
On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.
On considère les événements suivants :

- A : le client a choisi l'avion ;
- V : le client a choisi l'option « visites guidées ».

1. Donner les probabilités $P(A)$, $P_{\bar{A}}(V)$ et $P(A \cap V)$ et construire un arbre de probabilités représentant la situation.
2. Calculer $P_A(V)$.
3. Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à $0{,}429$ environ.
4. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au centième.
5. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante.
   Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prenne l'option « visites guidées » ? On donnera les résultats sous forme de valeurs approchées à 10^{-3} près.

Corrigé :

1. De l'énoncé, on déduit que :
   $P(A) = 0{,}49$
   $P_{\bar{A}}(V) = 0{,}35$
   $P(A \cap V) = 0{,}25$
   On peut alors construire cet arbre de probabilités :



2. On a donc $P_A(V) = \dfrac{P(A \cap V)}{P(A)} = \dfrac{0{,}25}{0{,}49} = \dfrac{25}{49}$.

3. Comme A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, on peut appliquer la loi des probabilités totales : $P(V) = P(A \cap V) + P(\bar{A} \cap V)$.
Or $P(\bar{A} \cap V) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(V) = (1 - 0{,}49) \times 0{,}35 = 0{,}1785$.
Donc $P(V) = 0{,}25 + 0{,}1785 = 0{,}4285$.

4. On a $P_{\bar{V}}(A) = \dfrac{P(\bar{V} \cap A)}{P(\bar{V})} = \dfrac{P(A \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \dfrac{P(A) \times P_A(\bar{V})}{P(\bar{V})}$.
Or, d'après la question précédente : $P(\bar{V}) = 1 - P(V) = 1 - 0{,}4285 = 0{,}5715$
et d'après la question 2 : $P_A(\bar{V}) = 1 - P_A(V) = 1 - \dfrac{25}{49} = \dfrac{24}{49}$.
Donc $P_{\bar{V}}(A) = \dfrac{0{,}49 \times \dfrac{24}{49}}{0{,}5715} \approx 0{,}42$.

5. On a vu que $P(\bar{V}) = 1 - 0{,}4285 = 0{,}5715$.
Comme les deux événements sont indépendants, en les appelant $\bar{V_1}$ et $\bar{V_2}$, on a : $P(\bar{V_1} \cap \bar{V_2}) = P(\bar{V_1}) \times P(\bar{V_2})$
La probabilité cherchée est donc égale à $P(\bar{V_1} \cap \bar{V_2}) = 0{,}5715 \times 0{,}5715 \approx 0{,}327$.

Exercice 3

Soit x un réel compris entre 0 et 1.
Soient A et B deux événements tels que $P(A) = x$, $P(B) = 1 - x$ et $P(A \cap B) = \dfrac{2}{9}$.
Déterminer toutes les valeurs de x possibles pour que A et B soient indépendants.

Corrigé :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ &\iff \frac{2}{9} = x \times (1 - x) \\ &\iff \frac{2}{9} = x - x^2 \\ &\iff x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times \frac{2}{9} \\ &= 1 - \frac{8}{9} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont donc :

$$x_1 = \frac{+1 + \sqrt{\frac{1}{9}}}{2 \times 1} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{+1 - \sqrt{\frac{1}{9}}}{2 \times 1} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

On a donc : A et B sont indépendants si et seulement si $x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = \dfrac{1}{3}$.