Chapitre 1

Suites numériques, modèles discrets

Dans tout ce chapitre, on considère des suites numériques.

1 Définition et représentation graphique d'une suite

Définition : Suite définie par une formule explicite

Définir une suite (u_n) par une formule explicite, c'est donner pour tout entier n l'expression du terme u_n en fonction de n.

Exemple

La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 1$.
On a donc $u_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$ et $u_{20} = 3 \times 20 + 1 = 61$.

Définition : Suite définie par une relation de récurrence

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner un (ou plusieurs) premier(s) terme(s) et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Exemple

La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = 3v_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On a : $\begin{aligned} v_1 &= 3v_0 + 1 \\ &= 3 \times (-4) + 1 \\ &= -11 \end{aligned}$

Et : $\begin{aligned} v_2 &= 3v_1 + 1 \\ &= 3 \times (-11) + 1 \\ &= -32 \end{aligned}$

Méthode : Modéliser avec une suite

Un lycée a 1500 élèves inscrits le 1er septembre 2024. Chaque année, 30 % des anciens élèves ne se réinscrivent pas et il y a 500 nouveaux élèves.

1. **Combien y aura-t-il d'élèves inscrit au lycée le 1er septembre 2025 ?**
2. **Modéliser cette situation à l'aide d'une suite.**

1. 30 % des élèves ne se réinscrivent pas. Cela correspond à une baisse de 30 % : le nombre d'élèves est multiplié par $\left(1 - \dfrac{30}{100}\right)$.
   $1500 \times \left(1 - \dfrac{30}{100}\right) + 500 = 1550.$
   Il y aura donc 1550 élèves incrits au 1er septembre 2025.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre d'élèves inscrits au lycée en $2024 + n$.

   u_0 est le nombre d'élèves inscrit au lycée au 1er septembre 2024.
   $u_0 = 1500$

   Soit $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est le nombre d'élèves inscrits en $2024 + n + 1$, c'est-à-dire l'année suivant $2024 + n$.

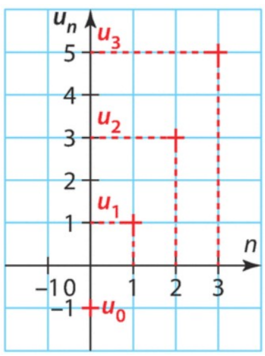
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) + 500 \\ &= 0,7u_n + 500 \end{aligned}$$

Représentation graphique d'une suite

Pour représenter graphiquement la suite (u_n) dans un repère, on place les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n - 1$ est représentée graphiquement dans le repère ci-contre.



Propriétés

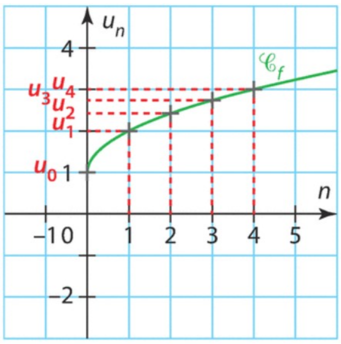
Soient (u_n) une suite réelle et f une fonction.

- **Formule explicite :**
  Si la suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, alors u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n appartenant à la courbe représentative de la fonction f.

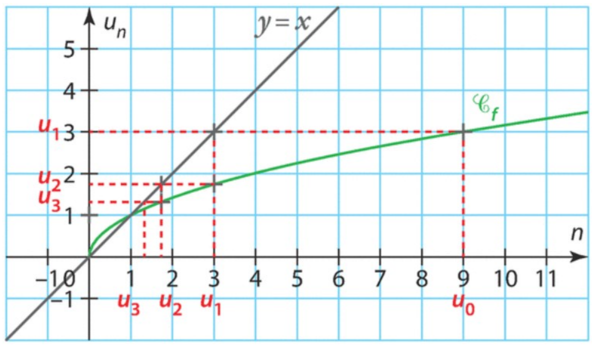
- **Relation de récurrence :**
  Si la suite (u_n) est définie par donnée de son premier terme u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, on construit graphiquement les termes de la suite à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).

Exemples

la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \sqrt{x}$.
La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.



la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
La suite (u_n) est définie par
$u_0 = 9$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



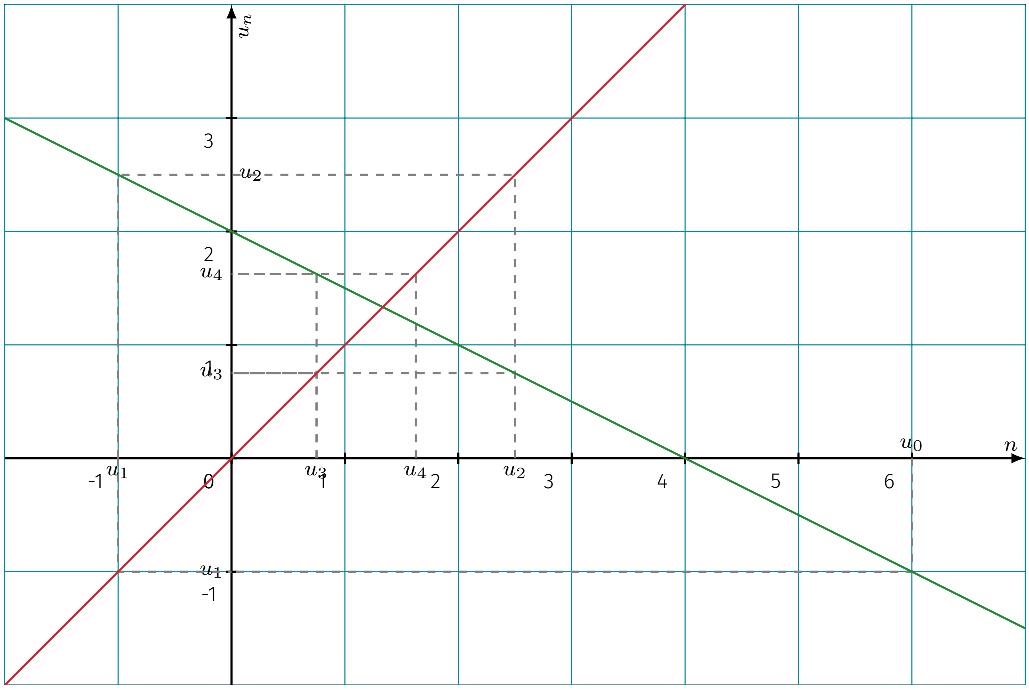
Méthode : Représenter graphiquement une suite définie par une relation de récurrence

Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 6 \\ u_{n+1} & = & -\dfrac{1}{2}u_n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad u_{n+1} = f(u_n) \quad$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2.$

- On commence par tracer la courbe représentative de f (ici la droite verte) et la première bissectrice.
- On représente ensuite les termes de la suite un par un :
  - On place u_0 sur l'axe des abscisses.
  - Pour obtenir u_1, on cherche l'image de u_0 par la fonction f.
  - On obtient la valeur de u_1 sur l'axe des ordonnées.
  - On utilise la première bissectrice pour reporter u_1 sur l'axe des abscisses.
  - Pour obtenir u_2, on cherhe l'image de u_1 par la fonction f. On continue ainsi pour obtenir les termes suivants



Utilisation de la calculatrice

Tutoriels vidéos pour utiliser l'application « Suites » de la calculatrice :

2 Suites de références

Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n on a $u_{n+1} = u_n + r$ (relation de récurrence).
Le nombre r est appelé **raison** de la suite (u_n).

Propriété

Si (u_n) est une suite **arithmétique** de raison r, alors pour tous entiers naturels n et p :

- $u_n = u_0 + n \times r$ (forme explicite)
- $u_n = u_p + (n - p)r$

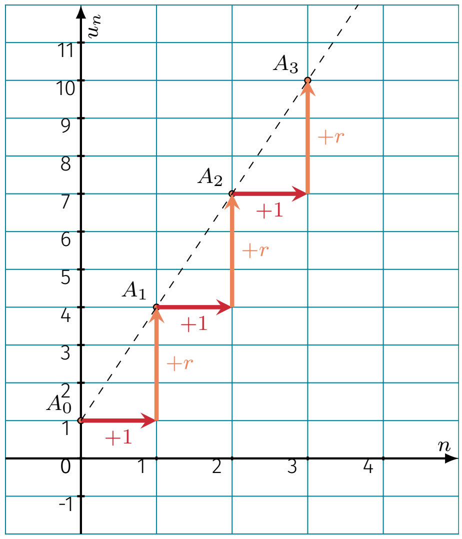
Exemple : Représentation graphique d'une suite arithmétique

On a représenté ci-contre les premiers termes de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par :

. . . .

Les points représentant les termes de cette suite sont alignés sur la droite d'équation réduite

. . . .



Propriété

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1, \quad 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Propriété : Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Soient n et p deux entiers naturels, avec $n < p$.

- La somme des $n+1$ premiers termes de la suite u_n est égale à :

$$u_0 + u_1 + u_2 + ...u_{n-1} + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

- La somme des termes d'indice p à n est égale à :

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier n on a $u_{n+1} = q \times u_n$ (relation de récurrence).
Le nombre q est appelé **raison** de la suite (u_n).

Propriété

Si (u_n) est une suite **géométrique** de raison $q \neq 0$, alors pour tous entiers naturels n et p :

- $u_n = u_0 \times q^n$ (forme explicite)
- $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Propriété

Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier naturel n, $1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Propriété : Somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0.
Soient n et p deux entiers naturels, avec $n < p$.

- La somme des $n+1$ premiers termes de la suite u_n est égale à :

$$u_0 + u_1 + u_2 + ...u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- La somme des termes d'indice p à n est égale à :

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

3 Limite d'une suite

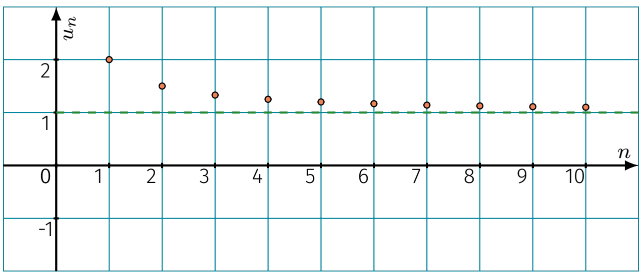
Définition : Limite réelle d'une suite

Soient (u_n) une suite et l un nombre réel.
La suite (u_n) a pour **limite** l lorsque n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent aussi proches de l que l'on veut quand n est suffisamment grand.

On dit que (u_n) **converge vers** l et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Exemple

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n} + 1$.



Il semble que u_n est aussi proche de 1 que l'on veut lorsque n est suffisamment grand.
La suite (u_n) a pour limite 1. On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

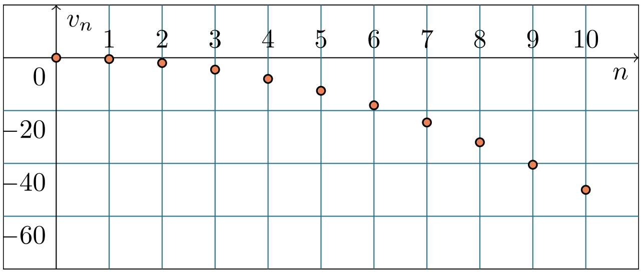
Définition : Limite infinie d'une suite

Soit (u_n) une suite.
La suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent aussi grands (respectivement petits) que l'on veut quand n est suffisamment grand.

On dit que (u_n) **diverge** et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Exemple

(v_n) est la suite définie sur **N** par $v_n = -0,5n^2$.



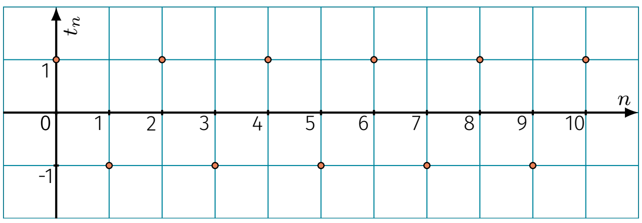
Il semble que v_n est aussi petit que l'on veut lorsque n est suffisamment grand.
La suite (v_n) a pour limite $-\infty$. On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Remarque

Une suite **diverge** lorsqu'elle n'a pas de limite finie.
Une suite **divergente** n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Exemple

La suite (t_n) définie sur **N** par $t_n = (-1)^n$ n'a pas de limite : ses termes valent alternativement 1 et -1.



(t_n) est une suite divergente.

Limite des suites de référence

Propriété

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Les suites $(\sqrt{n})$, (n) et (n^k) ont pour limite $+\infty$.
- Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ ont pour limite 0.

4 Propriétés des limites

Propriété : Limite d'une somme

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et l et l' deux nombres réels.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \dots$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Dans le cas noté **FI** (forme indéterminée), on ne peut pas conclure.

Exemple

On veut déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Propriété : Limite d'un produit

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et l et l' deux nombres réels.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \dots$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans le cas noté **FI** (forme indéterminée), on ne peut pas conclure.

Exemple

On veut déterminer la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -5\sqrt{n} - n^3$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n} = -\infty$

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Propriété : Limite d'un quotient

Soient (u_n) et (v_n) deux suites avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ et l et l' deux nombres réels.

- Cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \neq 0$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dots$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**

- Cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**

Dans les cas notés **FI** (forme indéterminée), on ne peut pas conclure.

Exemple

On veut déterminer la limite de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{2}{3n+5}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n+5 = +\infty$ (par produit et par somme).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Méthode : Lever une forme indéterminée

On veut calculer la limite de la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = n^2 - n$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

On obtient donc une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».

Pour lever l'indétermination, on écrit le terme t_n sous forme **factorisée**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = n(n-1)$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ (par produit).

5 Limites et comparaisons

Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple d'application

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $\quad u_n = n + 2\sin(n)$.
On cherche à calculer la limite de (u_n).

Pour tout réel x, $\quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad -1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad -2 \leqslant 2\sin(n) \leqslant 2$ et $n - 2 \leqslant n + 2\sin(n) \leqslant n + 2$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad u_n \geqslant n - 2$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$.

Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème des gendarmes

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites et l un nombre réel.

Si :

- il existe un entier naturel n_0 tel que tout tout entier $n \geqslant n_0, \quad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$;
- les suites (v_n) et (w_n) convergent vers l.

Alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Exemple d'utilisation

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $\quad v_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.
On cherche à déterminer la limite de (v_n).

On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (v_n) en utilisant les propriétés car la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.
On encadre la suite (v_n) par deux suites dont on peut déterminer les limites.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant v_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-\dfrac{1}{n} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{1}{n} = 3.$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3.$

6 Limites et suites géométriques

Propriété : Limite de q^n

Soit q un nombre réel positif ou nul.

- Si $0 \leqslant q < 1,$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0.$
- Si $q > 1,$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty.$
- Si $q = 1,$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1.$

Exemple

$0 \leqslant \dfrac{1}{2} < 1,$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0.$

Propriété : Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \geqslant 0$ et de premier terme u_p avec $p \in \mathbf{N}$.

- Si $0 \leqslant q < 1,$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$
- Si $q > 1$ et $u_p > 0,$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$
- Si $q > 1$ et $u_p < 0,$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$
- Si $q = 1,$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_p.$

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n}{3} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$

(u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Or $0 \leqslant \dfrac{1}{3} < 1,$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Propriété : Limite de la somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p avec $p \in \mathbf{N}$ et de raison q avec $0 \leqslant q < 1$.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on appelle S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{u_p}{1-q}.$

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_n &= u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n-1} \\ &= u_p + u_p \times q + u_p \times q^2 + \ldots + u_p \times q^{n-1} \\ &= u_p \times \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) \\ &= u_p \times \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

On a $\quad 0 \leqslant q < 1, \quad$ donc $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0.$

Donc $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - q^n = 1 \quad$ et $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}.$

Ainsi $\quad \begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} S_n &= u_p \times \frac{1}{1-q} \\ &= \frac{u_p}{1-q} \end{aligned}$

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{3} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On a vu précédemment que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme des n premiers termes consécutifs de la suite (u_n).

$0 \leqslant \dfrac{1}{3} < 1$ donc suite (S_n) converge.

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} S_n &= \frac{5}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{5}{\frac{2}{3}} \\ &= 5 \times \frac{3}{2} \\ &= 7,5 \end{aligned}$$

7 Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = a\, u_n + b.$

Remarques

Soient a et b deux réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a\, u_n + b$.

- Si $a = 0$, la suite (u_n) est constante à partir du rang 1.
- Si $a = 1$, la suite (u_n) est arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, la suite (u_n) est géométrique de raison a.

Propriété : Suite géométrique associée à une suite arithmético-géométrique

Soient a et b deux nombres réels avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$) telle que pour tout $n \geqslant p$, $u_{n+1} = a\, u_n + b$.
Soit l le réel tel que $l = al + b$.

La suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant p$ par $v_n = u_n - l$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_p = u_p - l$.

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant p$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - l \\ &= a\, u_n + b - (al + b) \\ &= a\, u_n + b - al - b \\ &= a(u_n - l) \\ &= a\, v_n \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison a.

Méthode : Étudier une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 &= 6 \\ u_{n+1} &= 3u_n - 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
On cherche à déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

(u_n) est une suite arithmético-géométrique (ici $a = 3$ et $b = -4$).

- **On commence par déterminer la suite constante vérifiant la relation de récurrence :**
  On résout l'équation $x = ax + b$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$

  $$\begin{aligned} x = 3x - 4 &\iff -2x = -4 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

  La suite constante (c_n) égale à 2 vérifie la relation $c_{n+1} = 3c_n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **On étudie la suite géométrique auxiliaire :**
  On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - c_n$.

Montrons que (v_n) est une suite géométrique :

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - c_{n+1} \\ &= 3u_n - 4 - (3c_n - 4) \\ &= 3\,(u_n - c_n) \\ &= 3\ v_n \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 6 - 2 = 4$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times 3^n \\ &= 4 \times 3^n \end{aligned}$$

- **On exprime u_n en fonction de n :**

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_n &= v_n + c_n \\ &= 4 \times 3^n + 2 \end{aligned}$$

- **On peut en déduire la limite de (u_n)**

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (d'après les propriétés sur les limites)