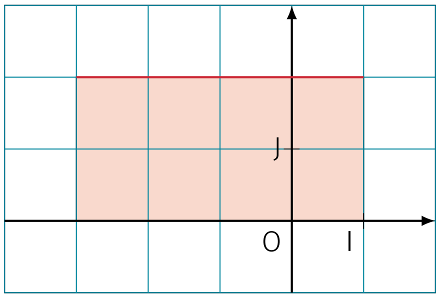
Exercices - Intégration

Capacités attendues :

❏ Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
❏ Calculer une intégrale, une valeur moyenne
❏ Calculer l'aire sous une courbe ou entre deux courbes.
❏ Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

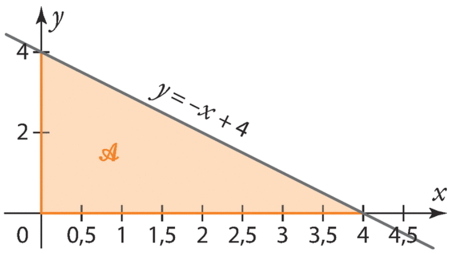
Intégrale comme aire sous une courbe

Exercice 1



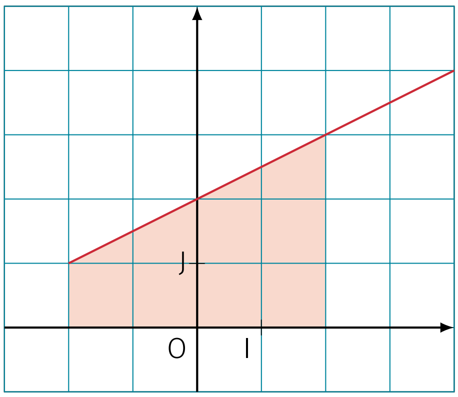
Sur le graphique ci-contre sont données la droite représentant une fonction f ainsi qu'une surface colorée.
Déterminer par lecture graphique la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$.

Exercice 2



Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{4} (-x+4)\,dx$.

Exercice 3



Sur le graphique ci-contre sont représentées la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2\ ;\ 4]$ ainsi qu'une surface colorée.

1. Déterminer par lecture graphique l'expression de $f(x)$.
2. Déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

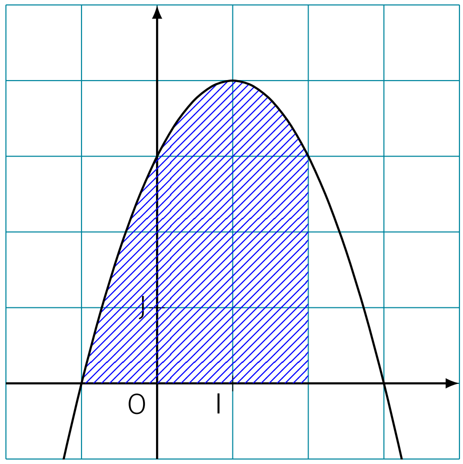
Exercice 4

Calculer chaque intégrale :

1. $\displaystyle\int_{0}^{2} 3\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{4} 2\,dx$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\,dx$
4. $\displaystyle\int_{0}^{5} (t+1)\,dt$
5. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-u)\,du$

Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

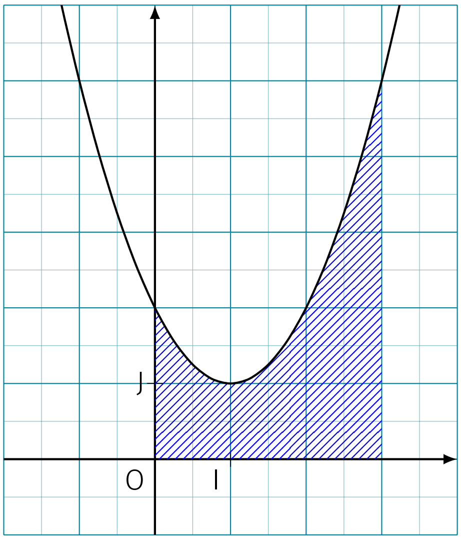
Exercice 5



Voici la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormal $(O ; I ; J)$.
On note

$$I = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$$

Encadrer I par 2 entiers.



Exercice 6

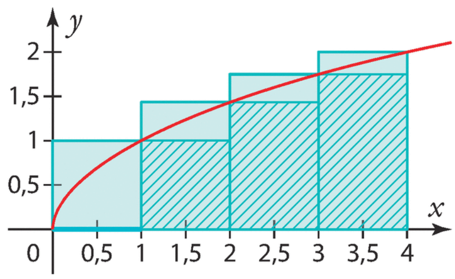
Voici la courbe représentative d'une fonction g dans un repère orthonormal $(O ; I ; J)$.
On note

$$J = \int_{0}^{3} g(x)\mathrm{d}x$$

1. Encadrer J par 2 entiers.
2. Encadrer J par 2 multiples de $0,25$ (compter les petits carreaux).

Exercice 7

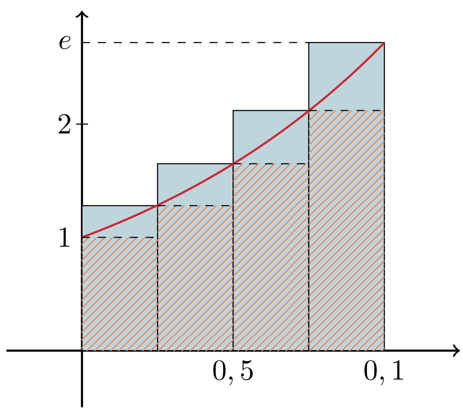
La fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est représentée dans le repère ci-contre.
Utiliser les rectangles représentés pour estimer la valeur de l'intégrale $\int_0^4 f(x)\,dx$.



Exercice 8

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = e^x$.

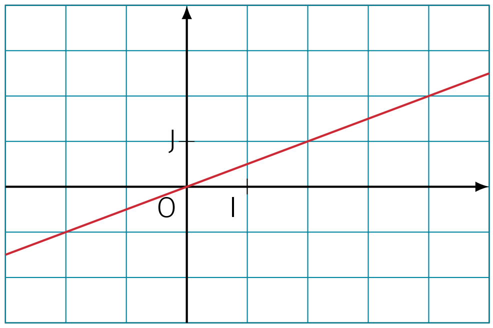
1. Utiliser les rectangles de même largeur largeur représentés ci-contre pour déterminer un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 e^x\,dx$.
2. En quel nombre n d'intervalles de même longueur doit-on subdiviser $[0 ; 1]$ pour obtenir un encadrement de I d'amplitude $0,1$?



Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Exercice 9

Sur le graphique ci-contre est tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$.
2. Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$.

Exercice 10

1. Représenter dans un repère orthogonal la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1$.
2. Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$.

Calculs d'intégrales

Exercice 11 VRAI ou FAUX ?

1. Soit f une fonction continue sur $[-3\ ;\ 4]$ et F une primitive de f sur cet intervalle.

   a. $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = F(-3) - F(4)$

   ❑ VRAI ❑ FAUX

   b. $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx = f(4) - f(-3)$

   ❑ VRAI ❑ FAUX

2. $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$

   ❑ VRAI ❑ FAUX

3. $\int_{-2}^{-1} x^2\,dx < 0$

   ❑ VRAI ❑ FAUX

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 + x^2 + 1$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 8x^3 - 6x^2 + 1$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = 2x^4 - 2x^3 + x - 2$ est une primitive de f sur $\mathbf{R}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.

Exercice 14

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{-3}^{1} x^3\,dx$
2. $J = \displaystyle\int_{-1}^{2} (-3x+5)\,dx$
3. $K = \displaystyle\int_{0}^{1} (3x^2 - 2x + 1)\,dx$

Exercice 15

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{1}^{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\,dx$
2. $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} (x^3 - 5x)\,dx$
3. $K = \displaystyle\int_{-1}^{1} 14x(7x^2+5)\,dx$

Exercice 16

Soient f et F les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = (3x+1)e^{3x} \quad \text{et} \quad F(x) = xe^{3x}.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbf{R}$.
2. Vérifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = e^3 + \frac{1}{e^3}$.

Application au calcul d'aires

Exercice 17

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = x$$

dont on donne les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ci-contre.

1. Justifier que l'aire de la surface colorée est égale, en unités d'aire, à $\displaystyle\int_{0}^{1} (x - x^2)\,dx$.
2. Calculer cette aire.