Corrigé des exercices - Fonction ln

Définition de la fonction logarithme népérien

Exercice 1

1. Pour quelles valeurs de x, $\ln(x)$ est-il défini ?
2. Donner la valeur de $e^{\ln 7}$.
3. Donner la valeur de $\ln(e^5)$ et de $\ln(e^{-3})$.
4. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé.
   Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
   a. $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.
   b. $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(1, 0)$.

1. $\ln(x)$ est défini pour $x > 0$.
2. $e^{\ln 7} = 7$.
3. $\ln(e^5) = 5$ et $\ln(e^{-3}) = -3$.
4. a. Faux, $\mathcal{C}$ est en-dessous de l'axe des abscisses pour sur $]0\ ;\ 1[$.
   b. Vrai, $\ln(1) = 0$. $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(1, 0)$.

Exercice 2

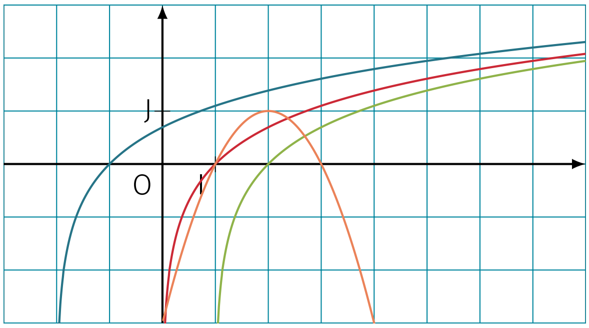
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{\ln\left(e^{-2}\right)}{\ln\left(e^4\right)}$
2. $\ln\left(e^9\right) \times \ln\left(e^{-2}\right)$
3. $\ln(e) + \ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$

1. $\dfrac{\ln\left(e^{-2}\right)}{\ln\left(e^4\right)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.
2. $\ln\left(e^9\right) \times \ln\left(e^{-2}\right) = 9 \times (-2) = -18$.
3. $\ln(e) + \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \ln(e^1) + \ln(e^{-1}) = 1 + (-1) = 0$.

Exercice 3

Parmi les courbes suivantes, quelle est la représentation graphique de la fonction ln ?



La courbe rouge est la représentation graphique de la fonction ln.

Exercice 4

Sans les calculer, déterminer le signe de chacun des nombres suivants :

1. $\ln(8)$
2. $\ln(0,1)$
3. $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$
4. $\ln(1,9)$
5. $\ln(100)$
6. $\ln\left(2 \times 10^{-3}\right)$

1. $\ln(8) > 0$.
2. $\ln(0,1) < 0$.
3. $\ln\left(\frac{1}{6}\right) < 0$.
4. $\ln(1,9) > 0$.
5. $\ln(100) > 0$.
6. $\ln\left(2 \times 10^{-3}\right) < 0$.

Exercice 5

Dans chaque cas, pour quelles valeurs de x, les expressions suivantes sont-elles définies ?

1. $\ln(x-5)$
2. $\ln(6-3x)$
3. $\ln(x) + \ln(4-x)$

1. $\ln(x-5)$ est défini pour $x - 5 > 0$ soit $x > 5$.
2. $\ln(6-3x)$ est défini pour $6 - 3x > 0$ soit $x < 2$.
3. $\ln(x) + \ln(4-x)$ est défini pour $x > 0$ et $4 - x > 0$ soit $0 < x < 4$.

Résoudre des équations et des inéquations

Exercice 6

1. On sait que $e^x = 5$. Que vaut x ?
2. On sait que $\ln(x) = 0$. Que vaut x ?
3. On sait que $\ln(x) = 9$. Que vaut x ?
4. On sait que $\ln(x) = -3$. Que vaut x ?

1. $e^x = 5$ donc $x = \ln(5)$.
2. $\ln(x) = 0$ donc $x = e^0 = 1$.
3. $\ln(x) = 9$ donc $x = e^9$.
4. $\ln(x) = -3$ donc $x = e^{-3}$.

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes dans $]0\ ;\ +\infty[$:

1. $\ln(x) = 1$
2. $\ln(x) = 7$
3. $\ln(x) = -2$
4. $\ln(x) = -1$

1. $\ln(x) = 1 \iff x = e^1 \iff x = e$

   $\mathcal{S}_1 = \{e\}$

2. $\ln(x) = 7 \iff x = e^7$

   $\mathcal{S}_2 = \{e^7\}$

3. $\ln(x) = -2 \iff x = e^{-2} \iff x = \dfrac{1}{e^2}$

   $\mathcal{S}_3 = \left\{\dfrac{1}{e^2}\right\}$

4. $\ln(x) = -1 \iff x = e^{-1} \iff x = \dfrac{1}{e}$

   $\mathcal{S}_4 = \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes dans $]0\ ;\ +\infty[$:

1. $e^x = 10$
2. $3e^x + 5 = 14$
3. $\ln(2x) + 1 = 0$
4. $\ln(x) = \ln(2x + 1)$

1. $e^x = 10 \iff x = \ln(10)$

   $\mathcal{S}_1 = \{\ln(10)\}$

2. $$\begin{aligned} 3e^x + 5 = 14 &\iff 3e^x = 9 \\ &\iff e^x = 3 \\ &\iff x = \ln(3) \end{aligned}$$

   $\mathcal{S}_2 = \{\ln(3)\}$

3. $$\begin{aligned} \ln(2x) + 1 = 0 &\iff \ln(2x) = -1 \\ &\iff 2x = e^{-1} \\ &\iff x = \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

   $\mathcal{S}_3 = \left\{\frac{1}{2e}\right\}$

4. $$\begin{aligned} \ln(x) = \ln(2x+1) &\iff x = 2x + 1 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

   $\mathcal{S}_4 = \{-1\}$

Exercice 9

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des nombres réels x pour lesquels les expressions sont bien définies puis résoudre l'inéquation :

1. $\ln(x) \leqslant 2$
2. $\ln(3x) \geqslant \ln(6)$
3. $\ln(1-x) > 0$
4. $\ln(3-2x) \leqslant 1$
5. $\ln(x-4) \leqslant \ln(1+2x)$
6. $\ln(x^2-9) > \ln(2)$
7. $3e^x - 1 < 8$
8. $e^{2x} - 3e^x \geqslant 0$

1. $\ln(x)$ est bien défini pour $x > 0$.

   $$\ln(x) \leqslant 2 \iff x \leqslant e^2$$

   $\mathcal{S}_1 =]0\ ;\ e^2]$

2. $\ln(3x)$ est bien défini pour $3x > 0$ soit $x > 0$.

   $$\begin{aligned} \ln(3x) \geqslant \ln(6) &\iff 3x \geqslant 6 \\ &\iff x \geqslant 2 \end{aligned}$$

   $\mathcal{S}_2 = [2\ ;\ +\infty[$

3. $\ln(1-x)$ est bien défini pour $1-x > 0$ soit $x < 1$.

   $$\begin{aligned} \ln(1-x) > 0 &\iff \ln(1-x) > \ln(1) \\ &\iff 1 - x > 1 \\ &\iff x < 2 \end{aligned}$$

   $\mathcal{S}_3 =]0\ ;\ 1[$

4. $\ln(3-2x)$ est bien défini pour $3 - 2x > 0$ soit $x < \frac{3}{2}$.

   $$\begin{aligned} \ln(3-2x) \leqslant 1 &\iff \ln(3-2x) \leqslant \ln(e) \\ &\iff 3 - 2x \leqslant e \\ &\iff x \geqslant \frac{3-e}{2} \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_4 = \left[\dfrac{3-e}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right[$

5. $\ln(x-4)$ est bien défini pour $x-4>0$ soit $x>4$.
   $\ln(1+2x)$ est bien défini pour $1+2x>0$ soit $x>-\dfrac{1}{2}$.
   Les deux expressions sont donc bien définies pour $x>4$.

$$\begin{aligned} \ln(x-4) \leqslant \ln(1+2x) &\iff x-4 \leqslant 1+2x \\ &\iff -4 \leqslant 1+x \\ &\iff x \geqslant -5 \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_5 =]4\ ;\ +\infty[$

6. $\ln(x^2-9)$ est bien défini pour $x^2-9>0$ soit $x \in \left]-\infty;-3\right[\cup \left]3;+\infty\right[$.

$$\begin{aligned} \ln(x^2-9) > \ln(2) &\iff x^2-9>2 \\ &\iff x^2>11 \\ &\iff x \in \left]-\infty;-\sqrt{11}\right[\cup \left]\sqrt{11};+\infty\right[\end{aligned}$$

$\mathcal{S}_6 = \left]-\infty;-\sqrt{11}\right[\cup \left]\sqrt{11};+\infty\right[$

7. $3e^x-1$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3e^x-1<8 &\iff 3e^x<9 \\ &\iff e^x<3 \\ &\iff x<\ln(3) \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_7 =]-\infty\ ;\ \ln(3)[$

8. $e^{2x}-3e^x$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} e^{2x}-3e^x \geqslant 0 &\iff e^{2x} \geqslant 3e^x \\ &\iff e^x \times e^x \geqslant 3e^x \\ &\iff e^x \geqslant 3 \\ &\iff x \geqslant \ln 3 \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_8 = [\ln 3\ ;\ +\infty[$

Exercice 10 ★

On veut résoudre l'équation $\quad e^{2x}-2e^x=8\ (E)$.

1. On pose $y=e^x$. Montrer que l'équation précédente est équivalente à $y^2-2y-8=0\ (E')$.

2. Résoudre l'équation (E').

3. En déduire les solutions de l'équation initiale (E).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} e^{2x} - 2e^x = 8 &\iff e^x \times e^x - 2e^x = 8 \\ &\iff (e^x)^2 - 2e^x - 8 = 0 \\ &\iff y^2 - 2y - 8 = 0 \end{aligned}$$

2. $y^2 - 2y - 8 = 0$ est une équation du second degré.

   $\Delta = 4 + 32 = 36$ et $y_1 = \dfrac{2+6}{2} = 4$ et $y_2 = \dfrac{2-6}{2} = -2$.

   Les solutions de l'équation (E') sont $y_1 = 4$ et $y_2 = -2$.

3. $$\begin{aligned} e^{2x} - 2e^x = 8 &\iff e^x = 4 \quad \text{ou} \quad \underbrace{e^x = -2}_{\text{impossible}} \\ &\iff x = \ln 4 \end{aligned}$$

   L'équation (E) a donc une seule solution : $\ln 4$.

Propriétés algébriques du logarithme népérien

Exercice 11

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

1. $\ln 4$
2. $\ln 8$
3. $\ln \dfrac{1}{2}$
4. $\ln \dfrac{1}{8}$
5. $\ln(8e)$
6. $\ln\left(4e^2\right)$
7. $\ln \sqrt{2}$
8. $\ln \sqrt{32}$

1. $\ln 4 = 2\ln 2$
2. $\ln 8 = 3\ln 2$
3. $\ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$
4. $\ln \dfrac{1}{8} = -3\ln 2$
5. $\ln(8e) = \ln 8 + \ln e = 3\ln 2 + 1$
6. $\ln\left(4e^2\right) = \ln 4 + \ln e^2 = 2\ln 2 + 2$
7. $\ln \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\ln 2$
8. $\ln \sqrt{32} = \dfrac{1}{2}\ln 32 = \dfrac{1}{2} \times 5\ln 2 = \dfrac{5}{2}\ln 2$

Exercice 12

Écrire les nombres suivants en utilisant une seule fois le symbole ln.

1. $A = 5\ln 2 + \ln 8 - \ln 4$
2. $B = 2\ln 3 + \ln 81 - \ln 9$
3. $C = \ln 3 - \ln 2 + \ln 5$
4. $D = \ln 14 - \ln 19$

1. $A = 5\ln 2 + \ln 8 - \ln 4$
$= 5\ln 2 + \ln 2^3 - \ln 2^2$
$= 5\ln 2 + 3\ln 2 - 2\ln 2$
$= 6\ln 2$

2. $B = 2\ln 3 + \ln 81 - \ln 9$
$= 2\ln 3 + \ln 3^4 - \ln 3^2$
$= 2\ln 3 + 4\ln 3 - 2\ln 3$
$= 4\ln 3$

3. $C \ln 3 - \ln 2 + \ln 5$
$= \ln \dfrac{3 \times 5}{2}$
$= \ln \dfrac{15}{2}$

4. $D \ln 14 - \ln 19$
$= \ln \dfrac{14}{19}$

Exercice 13

1. Écrire le réel $\ln 7 + \ln 2$ en utilisant une seule fois le symbole ln.
2. En déduire les solution de l'équation $\ln x = \ln 7 + \ln 2$ dans $]0\ ;\ +\infty[$.

1. $\ln 7 + \ln 2 = \ln(2 \times 7) = \ln 14$.
2. $$\begin{aligned} \ln x = \ln 7 + \ln 2 &\iff \ln x = \ln 14 \\ &\iff x = 14 \end{aligned}$$
Donc l'équation $\ln x = \ln 7 + \ln 2$ a une seule solution dans $]0\ ;\ +\infty[$: 14.

Exercice 14

On considère l'équation (E) : $\ln(x) + \ln(2x) = \ln(18)$ pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $x^2 = 9$ pour $x > 0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

1. Soit $x > 0$.
$$\begin{aligned} \ln(x) + \ln(2x) = \ln(18) &\iff \ln(x \times 2x) = \ln(18) \\ &\iff \ln(2x^2) = \ln(18) \\ &\iff 2x^2 = 18 \\ &\iff x^2 = 9 \end{aligned}$$
2. Les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ sont 3 et -3.
Seule la solution 3 appartient à $]0\ ;\ +\infty[$ donc l'équation (E) admet une seule solution dans $]0\ ;\ +\infty[$: 3.

Exercice 15 ★

On veut résoudre l'équation $\quad (\ln x)^2 + 4\ln\dfrac{1}{x} - 5 = 0 \ (E)$.

1. On pose $y = \ln x$. Montrer que l'équation précédente est équivalente à $y^2 - 4y - 5 = 0 \ (E')$.
2. Résoudre l'équation (E').
3. En déduire les solutions de l'équation initiale (E).

1. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}(\ln x)^2 + 4\ln\frac{1}{x} - 5 = 0 &\iff (\ln x)^2 + 4(-\ln x) - 5 = 0\\ &\iff y^2 + 4(-y) - 5 = 0\\ &\iff y^2 - 4y - 5 = 0\end{aligned}$$

2. $y^2 - 4y - 5 = 0$ est une équation du second degré.

   $\Delta = 16 + 20 = 36 \quad$ et $\quad y_1 = \dfrac{4+6}{2} = 5 \quad$ et $\quad y_2 = \dfrac{4-6}{2} = -1.$

   Les solutions de l'équation (E') sont $y_1 = 5$ et $y_2 = -1$.

3. $$\begin{aligned}(\ln x)^2 + 4\ln\frac{1}{x} - 5 = 0 &\iff \ln x = 5 \quad \text{ou} \quad \ln x = -1\\ &\iff x = e^5 \quad \text{ou} \quad x = e^{-1}\end{aligned}$$

   Les solutions de l'équation (E) sont e^5 et e^{-1}.

Exercice 16

Dans chaque cas, utiliser la fonction logarithme népérien pour résoudre les équations suivantes dans $]0\ ;\ +\infty[$:

1. $x^5 = 100$
2. $x^7 = 42$
3. $x^6 = 1,5$

1. $$\begin{aligned}x^5 = 100 &\iff \ln\left(x^5\right) = \ln 100\\ &\iff 5\ln x = \ln 100\\ &\iff \ln x = \frac{1}{5}\ln 100\\ &\iff x = e^{\frac{1}{5}\ln 100}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}x^7 = 42 &\iff \ln x^7 = \ln 42\\ &\iff 7\ln x = \ln 42\\ &\iff \ln x = \frac{1}{7}\ln 42\\ &\iff x = e^{\frac{1}{7}\ln 42}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}x^6 = 1,5 &\iff \ln x^6 = \ln 1,5\\ &\iff 6\ln x = \ln 1,5\\ &\iff \ln x = \frac{1}{6}\ln 1,5\\ &\iff x = e^{\frac{1}{6}\ln 1,5}\end{aligned}$$

Exercice 17

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $1,5$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer par le calcul le rang n à partir duquel $u_n > 1000$.

1. $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times 1,5^n$.
2. $4 > 0$ et $q = 1,5 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3. $$\begin{aligned} u_n > 1000 \quad &\iff \quad 4 \times 1,5^n > 1000 \\ &\iff \quad 1,5^n > 250 \\ &\iff \quad \ln 1,5^n > \ln 250 \\ &\iff \quad n \ln 1,5 > \ln 250 \\ &\iff \quad n > \frac{\ln 250}{\ln 1,5} \\ &\iff \quad n \geqslant 14 \end{aligned}$$

   (u_n) dépasse 1000 à partir du rang 14.

Exercice 18

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 100$ et de raison $0,86$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
2. Calculer la limite de la suite (v_n).
3. Déterminer par le calcul le rang n à partir duquel $v_n < 10^{-3}$.

1. $v_n = v_0 \times q^n = 100 \times 0,86^n$.
2. $q = 0,86 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
3. $$\begin{aligned} v_n < 10^{-3} \quad &\iff \quad 100 \times 0,86^n < 10^{-3} \\ &\iff \quad 0,86^n < 10^{-5} \\ &\iff \quad \ln 0,86^n < \ln 10^{-5} \\ &\iff \quad n \ln 0,86 < \ln 10^{-5} \\ &\iff \quad n > \frac{\ln 10^{-5}}{\ln 0,86} \qquad \text{car } \ln 0,86 < 0. \\ &\iff \quad n \geqslant 77 \end{aligned}$$

   (v_n) devient inférieure à 10^{-3} à partir du rang 77.

Exercice 19

Une infographiste simule la croissance d'un bambou d'une taille initiale de 1 m.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on modélise la taille, en cm, qu'aurait le bambou à la fin du n-ième mois par la suite (u_n) définie par $u_n = 500 \times 1,5^n - 400$.

1. Calculer la taille, en cm, du bambou à la fin du 3^e mois. Arrondir au dixième.
2. Résoudre dans **N** l'inéquation $u_n > 300$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Déterminer, en résolvant une inéquation, le nombre de mois nécessaires pour que le bambou dépasse 10 m.

1. $$\begin{aligned} u_3 &= 500 \times 1,5^3 - 400 \\ &= 500 \times 3,375 - 400 \\ &= 1687,5 - 400 \\ &= 1287,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

   La taille du bambou à la fin du 3^e mois est de 1287,5 cm.

2. $$\begin{aligned} u_n > 300 &\iff 500 \times 1,5^n - 400 > 300 \\ &\iff 500 \times 1,5^n > 700 \\ &\iff 1,5^n > \frac{700}{500} \\ &\iff 1,5^n > 1,4 \\ &\iff \ln 1,5^n > \ln 1,4 \\ &\iff n \ln 1,5 > \ln 1,4 \\ &\iff n > \frac{\ln 1,4}{\ln 1,5} \\ &\iff n \geqslant 1 \end{aligned}$$

   Le bambou mesure plus de 3 m à partir du 1^er mois.

3. $$\begin{aligned} u_n > 1000 &\iff 500 \times 1,5^n - 400 > 1000 \\ &\iff 500 \times 1,5^n > 1400 \\ &\iff 1,5^n > \frac{1400}{500} \\ &\iff 1,5^n > 2,8 \\ &\iff \ln 1,5^n > \ln 2,8 \\ &\iff n \ln 1,5 > \ln 2,8 \\ &\iff n > \frac{\ln 2,8}{\ln 1,5} \\ &\iff n \geqslant 3 \end{aligned}$$

   Le bambou mesure plus de 10 m à partir du 3^e mois.

Exercice 20

Le carbone 14 (C_{14}) présent dans l'organisme d'un être vivant se désintègre au fil des années après sa mort. Le nombre d'années N nécessaires à l'observation de la proportion p de C_{14} restante dans l'organisme peut être modélisé par : $N = -8310 \ln p$.

1. Le squelette d'un homme de Cro-Magnon contient 9 % de C_{14} par rapport à un squelette vivant. Combien d'années se sont écoulées depuis sa mort ?

2. Lucy est la plus ancienne hominidé connue. Les paléontologues estiment à au moins 3,5 millions d'années son âge. A-t-on pu dater les fragments de son squelette à l'aide du carbone 14 ? Justifier.

3. Découverte en 1991 en Italie, la momie d'Ötzi contenait 53,3 % (à 1% près) de C_{14} par rapport à un homme vivant. Donner un encadrement de l'âge d'Ötzi.

1. $N = -8310 \ln p \iff N = -8310 \ln 0,09 \iff N \approx 20\,010$

   Le squelette de l'homme de Cro-Magnon date d'environ 20 000 ans.

2. $$\begin{aligned} N = -8310 \ln p &\iff 3,5 \times 10^6 = -8310 \ln p \\ &\iff \ln p = -\frac{3,5 \times 10^6}{8310} \\ &\iff p = e^{-\frac{3,5 \times 10^6}{8310}} \\ &\iff p \approx 10^{-183} \end{aligned}$$

   La proportion de C_{14} restante dans le squelette est de l'ordre de 10^{-183}, ce qui est extrèmement faible. On ne peut donc pas dater les fragments de son squelette à l'aide du carbone 14.

3. $$\begin{aligned} 0,523 < p < 0,543 &\iff \ln 0,523 < \ln p < \ln 0,543 \\ &\iff -8310 \times \ln 0,523 > -8310 \ln p > -8310 \times \ln 0,543 \\ &\iff 5387 > N > 5074 \end{aligned}$$

   L'âge d'Ötzi est compris entre 5074 et 5387 ans.

Exercice 21

Dans une réserve marine, on a recencé 3000 cétacés au 1er janvier 2020.
Les responsables sont inquiets car le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.
Une étude permet d'élaborer un nodèle selon lequel :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre.

On modélise le nombre de cétacés dans la réserve marine au 1er juin de l'année 2020 $+n$ par le terme u_n. Ainsi $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. La réserve marine fermera-elle ? Si oui, en quelle année ? *Répondre à l'aide d'un calcul.*

1. $u_1 = 0,95 \times (3000 + 80) = 2926$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,95 \times (u_n + 80) \\ &= 0,95 \times u_n + 0,95 \times 80 \\ &= 0,95 \times u_n + 76 \end{aligned}$$

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,95u_n + 76$ et $u_0 = 3000$.
   (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3000$ et de raison $q = 0,95$.

   Suite constante vérifiant la relation de récurrence :

   Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad x = 0,95x + 76 \iff x - 0,95x = 76$
   $$\begin{aligned} &\iff 0,05x = 76 \\ &\iff x = 1520. \end{aligned}$$

   La suite constante (c_n) égale à 1520 vérifie donc la relation $c_{n+1} = 0,95c_n + 76$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Suite géométrique auxiliaire :

   On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = t_n - c_n$.
   Montrons que (v_n) est une suite géométrique :

   Soit $n \in \mathbb{N}$
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - c_{n+1} \\ &= 0,95u_n + 76 - (0,95c_n + 76) \\ &= 0,95u_n + 76 - 0,95c_n - 76 \\ &= 0,95(u_n - c_n) \\ &= 0,95v_n. \end{aligned}$$

   (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - c_0 = 3000 - 1520 = 1480$.
   On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 0,95^n = 1480 \times 0,95^n$.

   Terme général de la suite (u_n) :

   On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = c_n + v_n = 1520 + 1480 \times 0,95^n$.
4. $0 < 0,95 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$.

5. $u_n < 2000 \iff 1520 + 1480 \times 0,95^n < 2000$
$\iff 1480 \times 0,95^n < 480$
$\iff 0,95^n < \dfrac{480}{1480}$
$\iff 0,95^n < \dfrac{12}{37}$
$\iff \ln 0,95^n < \ln \dfrac{12}{37}$
$\iff n \ln 0,95 < \ln \dfrac{12}{37}$
$\iff n > \dfrac{\ln \dfrac{12}{37}}{\ln 0,95}$
$\iff n \geqslant 22$

La réserve marine fermera donc à partir de l'année 2042.

Exercice 22

Une agence bancaire propose un placement à tous ses clients. Ce placement a rapporté 30 % d'intérêts sur les 5 dernières années.
On note t % le taux d'intérêt annuel moyen de ce placement sur ces 5 dernières années.

1. Justifier que le taux d'intérêt annuel moyen t est tel que $1,3 = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5$.
2. Résoudre l'équation précédente en utilisant la fonction logarithme népérien. *Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au centième.*
3. Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de la situation.

1. Soit t le taux d'intérêt annuel moyen de ce placement sur ces 5 dernières années.
Chaque année, le montant du placement est multiplié par $1 + \dfrac{t}{100}$.
Après 5 ans, le montant du placement est multiplié par $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5$.
On a donc $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5 = 1 + \dfrac{30}{100} = 1,3$.

2. $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5 = 1,3 \iff \ln\left(\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5\right) = \ln 1,3$
$\iff 5 \ln\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \ln 1,3$
$\iff \ln\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \dfrac{\ln 1,3}{5}$
$\iff 1 + \dfrac{t}{100} = e^{\frac{\ln 1,3}{5}}$
$\iff \dfrac{t}{100} = e^{\frac{\ln 1,3}{5}} - 1$

$$\iff \quad t = 100 \times \left(e^{\frac{\ln 1,3}{5}} - 1 \right)$$

$$\iff \quad t \approx 5,39$$

3. Le taux d'intérêt annuel moyen de ce placement sur ces 5 dernières années est de 5,39%.
   Ce placement a donc rapporté en moyenne 5,39% d'intérêts par an sur les 5 dernières années.

Étude de la fonction logarithme népérien

Exercice 23

Dans chaque cas, donner la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. $f(x) = 5\ln(x)$
2. $f(x) = 3 - 2\ln(x)$
3. $f(x) = x\ln(x) - 1$
4. $f(x) = \ln(2x)$
5. $f(x) = \ln\left(x^2\right)$
6. $f(x) = \ln\left(3x^2 + 1\right)$

1. $f'(x) = 5 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{x}$
2. $f'(x) = -2 \times \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{x}$
3. $f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$
4. $f'(x) = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$
5. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$
6. $f'(x) = \dfrac{3 \times 2x}{3x^2+1} = \dfrac{6x}{3x^2+1}$

Exercice 24

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x + x$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.
   D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.
   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{x+1}{x} > 0$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln x$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer la dérivée de f, en déduire son sens de variation sur $]0\ ;\ +\infty[$ et son signe.

1. $\lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.
   D'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
   D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$
   $= \dfrac{x+1}{x^2} > 0$

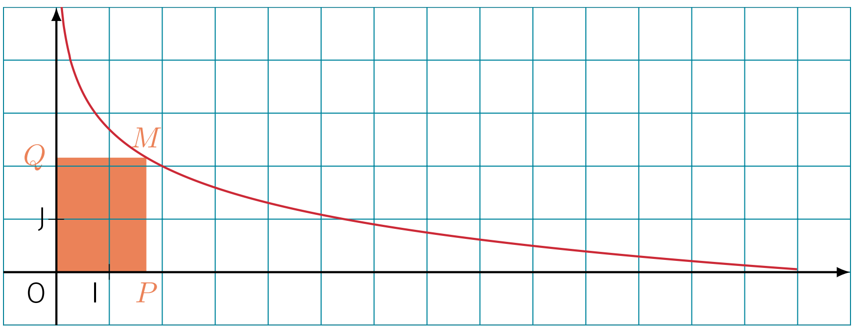
On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Exercice 26

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ 14[$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthonormé ci-dessous.



À tout point M appartenant à $\mathcal{C}_f$, on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto 2x - x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ modélise l'aire du rectangle $OPMQ$.
2. Dresser le tableau de variation de g sur $]0\ ;\ 14[$.
3. En déduire les coordonnées du point M pour lesquelles l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$.

Exercice 27

Un peu d'histoire

Durant la Renaissance, le commerce se développant, les marchands ont été amenés à constituer des tables d'intérêts pour

pour le doubler.

Portrait du mathématicien Luca Pacioli expliquant le théorème d'Euclide (oeuvre attribuée à Jacopo de Barbari, 1495).

Partie A : la règle des 72

t désigne un nombre réel strictement positif et n est un nombre entier naturel non nul.

1. Utiliser la règle de Pacioli pour estimer le nombre n d'années nécessaires pour doubler un capital lorsqu'il est placé à un taux d'intérêts composés de :

   - $t = 1\ \%$
   - $t = 5\ \%$
   - $t = 10\ \%$

2. Au bout de n années de placement au taux d'intérêt de t %, le capital est multiplié par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^n$.

   a. Dans chaque cas, déterminer, en utilisant la fonction ln, le plus petit nombre entier naturel n tel que $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^n \geqslant 2$.

   - $t = 1\ \%$
   - $t = 5\ \%$
   - $t = 10\ \%$

   b. Comparer les résultats obtenus dans les questions 1 et 2.

Partie B : une autre estimation

1. f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x$.

   a. Étudier les variations de f et g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2. Pour des petites valeurs de x, $\dfrac{x^2}{2}$ étant très petit, on choisit d'utiliser l'approximation $\ln(1+x) \approx x$.

   a. Justifier que le nombre de périodes nécessaires au doublement d'un capital placé à un taux d'intérêt annuel de t % est proche de $\dfrac{70}{t}$ (pour des petites valeurs de t).

   b. Que devient cette règle si l'on veut tripler le capital ?