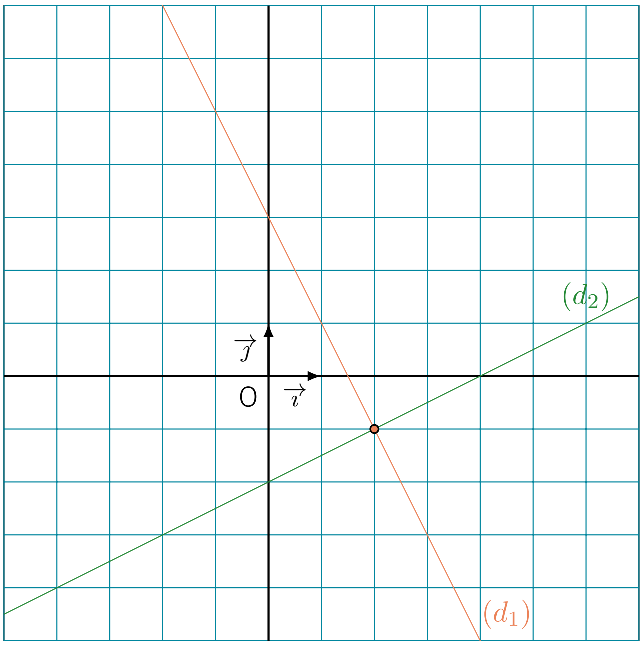
Corrigé de l'interro 2 - A

1ère spé

Exercice 1

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x - 2y = 4 \quad &\Longleftrightarrow \quad -2y = -x + 4 \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{-1}{-2}x + \frac{4}{-2} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - 2 \end{aligned}$$

On trace (d_1) la droite d'équation $y = -2x + 3$ et (d_2) la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$.
(d_1) et (d_2) sont séantes au point de coordonnées $(2\,;-1)$.
Donc le couple solution du système est $(2\,;-1)$.

Exercice 2

Sophia a travailé durant l'été 45 jours dans deux entreprises. Dans la première, elle a gagné 85 € par jour et dans la deuxième, 72 € par jour. Au total, elle a gagné 3487 €.
On cherche à savoir le nombre de jours pendant lesquels Sophia a travaillé dans chaque entreprise.

Modéliser cette situation par un système. *On ne demande pas de le résoudre*

On appelle x le nombre de jours pendant lesquels Sophia a travaillé dans la première entreprise et y le nombre de jours pendant lesquels elle a travaillé dans la deuxième.

Sophia a travailé 45 jours dans deux entreprises; donc $x + y = 45$.

Au total, Sophia a gagné 3487 €; donc $85x + 72y = 3487$.

Cette situation peut donc être modélisée par le système :

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 85x + 72y = 3487 \end{cases}$$

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant par substitution : $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ -2x + 3y = -10 \end{cases}$

Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\left\{\begin{array}{l}3x+y=4\\-2x+3y=-10\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}y=4-3x\\-2x+3y=-10\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=4-3x\\-2x+3(4-3x)=-10\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=4-3x\\-2x+12-9x=-10\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=4-3x\\-11x=-22\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=4-3x\\x=2\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=4-3\times 2\\x=2\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}y=-2\\x=2\end{array}\right.$$

D'où $\mathcal{S}_1=\{(2\,;-2)\}$.

2. Résoudre le système suivant par combinaison linéaire : $\left\{\begin{array}{l}3x-4y=6\\-5x+2y=4\end{array}\right.$

Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\left\{\begin{array}{l}3x-4y=6\\-5x+2y=4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}3x-4y=6\\2(-5x+2y)=2\times 4\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}3x-4y=6\\-10x+4y=8\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}3x-4y=6\\3x-10x-4y+4y=6+8\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}3x-4y=6\\-7x=14\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}3x-4y=6\\x=-2\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}3\times(-2)-4y=6\\x=-2\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l}-6-4y=6\\x=-2\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} -4y = 12 \\ x = -2 \end{cases}$$

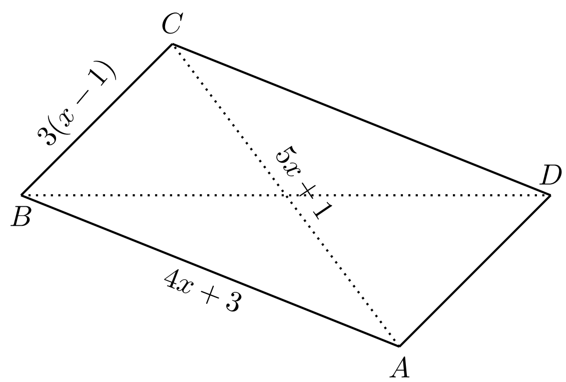
$$\iff \begin{cases} y = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{S}_2 = \{(-2\,;-3)\}$.

Exercice 4

Soit x un nombre réel strictement supérieur à 1.
A, B et C sont trois points tels que $AB = 4x + 3,$ $BC = 3(x - 1)$ et $AC = 5x + 1.$
On considère le point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

1. Faire un schéma codé.



2. Résoudre l'équation $25x^2 + 10x + 1 = 25x^2 + 6x + 18.$

Soit $x \in \,]1\,;\,+\infty[$.

$$\begin{aligned} 25x^2 + 10x + 1 = 25x^2 + 6x + 18 &\iff 10x + 1 = 6x + 18 \\ &\iff 4x = 17 \\ &\iff x = \frac{17}{4} \\ &\iff x = 4,25 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{17}{4}\right\}$

3. Démontrer que le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle si, et seulement si $x = \dfrac{17}{4}$.
Raisonner par équivalences.

$$\begin{aligned} ABCD \text{ est un rectangle} &\iff ABC \text{ est rectangle en } B \\ &\iff AC^2 = AB^2 + BC^2 \\ &\qquad \textit{d'après le théorème de Pythagore et sa réciproque} \\ &\iff (5x+1)^2 = (4x+3)^2 + (3(x-1))^2 \\ &\iff (5x)^2 + 2 \times 5x \times 1 + 1^2 = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2 + (3x-3)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iff \quad & 25x^2+10+1 = 16x^2+24x+9+(3x)^2-2\times 3x\times 3+3^2 \\
\iff \quad & 25x^2+10+1 = 16x^2+24x+9+9x^2-18x+9 \\
\iff \quad & 25x^2+10+1 = 25x^2+6x+18 \\
\iff \quad & x = \frac{17}{4} \quad \textit{d'après la question précédente.}
\end{aligned}
$$

4. Quelle est alors la longueur BD ?

Si $x = \dfrac{17}{4}$, alors $ABCD$ est une rectangle et ses diagonales sont de même longueur. On a donc :

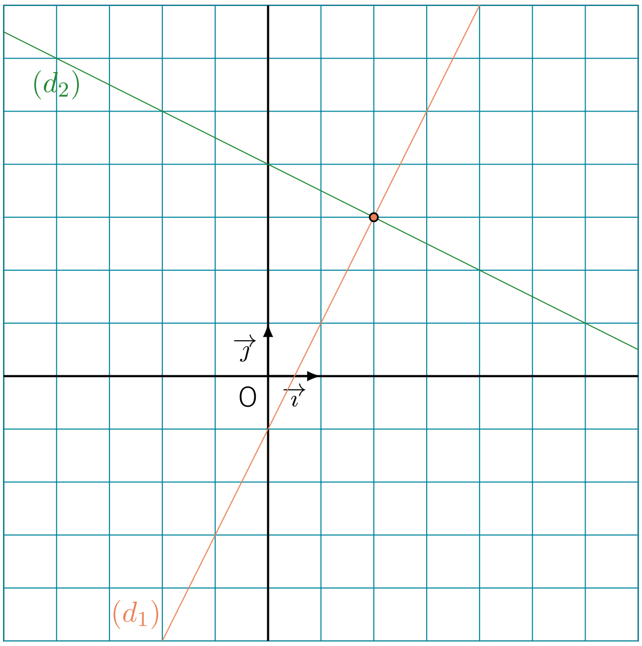
On a donc :
$$
\begin{aligned}
BD &= AC \\
&= 5\times\frac{17}{4}+1 \\
&= \frac{85}{4}+\frac{4}{4} \\
&= \frac{89}{4} \\
&= 22,25
\end{aligned}
$$

Corrigé de l'interro 2 - B

Exercice 1

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x + 2y = 8 \quad &\iff \quad 2y = -x + 8 \\ &\iff \quad y = \frac{-1}{2}x + \frac{8}{2} \\ &\iff \quad y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{aligned}$$

On trace (d_1) la droite d'équation $y = 2x - 1$ et (d_2) la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 4$.
(d_1) et (d_2) sont séantes au point de coordonnées $(2\,;3)$.
Donc le couple solution du système est $(2\,;3)$.

Exercice 2

Sophia a travailé durant l'été 52 jours dans deux entreprises. Dans la première, elle a gagné 65 € par jour et dans la deuxième, 82 € par jour. Au total, elle a gagné 3652 €.
On cherche à savoir le nombre de jours pendant lesquels Sophia a travaillé dans chaque entreprise.

Modéliser cette situation par un système. *On ne demande pas de le résoudre.*

On appelle x le nombre de jours pendant lesquels Sophia a travaillé dans la première entreprise et y le nombre de jours pendant lesquels elle a travaillé dans la deuxième.

Sophia a travailé 52 jours dans deux entreprises; donc $\quad x + y = 52$.

Au total, Sophia a gagné 3652 €; donc $\quad 65x + 82y = 3652$.

Cette situation peut donc être modélisée par le système :

$$\begin{cases} x + y = 52 \\ 65x + 82y = 3652 \end{cases}$$

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant par substitution : $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ 3x+2y=7 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2y+5 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=2y+5 \\ 3(2y+5)+2y=7 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=2y+5 \\ 6y+15+2y=7 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=2y+5 \\ 8y=-8 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=2y+5 \\ y=-1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=2\times(-1)+5 \\ y=-1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{S}_1=\{(3\,;-1)\}$.

2. Résoudre le système suivant par combinaison linéaire : $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ -6x+5y=-4 \end{cases}$

Soit $(x\,;y)$ un couple de réels.

$$\begin{cases} 3x-4y=5 \\ -6x+5y=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(3x-4y)=2\times5 \\ -6x+5y=-4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6x-8y=10 \\ -6x+5y=-4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6x-8y=10 \\ 6x-6x-8y+5y=10-4 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6x-8y=10 \\ -3y=6 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6x-8y=10 \\ y=-2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6x-8\times(-2)=10 \\ y=-2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 6x+16=10 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x = -6 \\ y = -2 \end{cases}$$

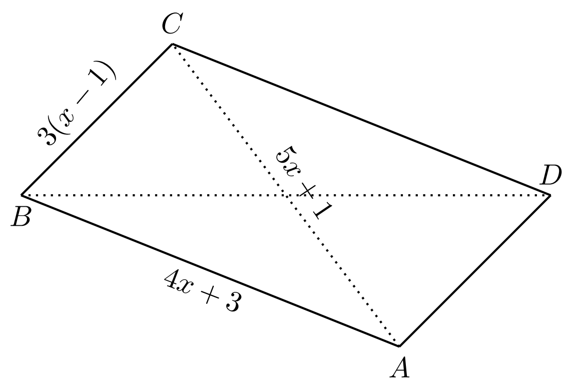
$$\iff \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{S}_2 = \{(-1\,;-2)\}$.

Exercice 4

Soit x un nombre réel strictement supérieur à 1.
A, B et C sont trois points tels que $AB = 4x+3$, $BC = 3(x-1)$ et $AC = 5x+1$.
On considère le point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

1. Faire un schéma codé.



2. Résoudre l'équation $25x^2 + 10x + 1 = 25x^2 + 6x + 18$.

Soit $x \in \,]1\,;\,+\infty[$.

$$\begin{aligned} 25x^2+10x+1 = 25x^2+6x+18 &\iff 10x+1 = 6x+18 \\ &\iff 4x = 17 \\ &\iff x = \frac{17}{4} \\ &\iff x = 4,25 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{17}{4}\right\}$

3. Démontrer que le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle si, et seulement si $x = \dfrac{17}{4}$.
Raisonner par équivalences.

$ABCD$ est un rectangle $\iff$ ABC est rectangle en B

$\iff AC^2 = AB^2 + BC^2$

d'après le théorème de Pythagore et sa réciproque

$\iff (5x+1)^2 = (4x+3)^2 + (3(x-1))^2$

$\iff (5x)^2 + 2\times 5x \times 1 + 1^2 = (4x)^2 + 2\times 4x\times 3 + 3^2 + (3x-3)^2$

$$\begin{aligned}
&\iff \quad 25x^2 + 10 + 1 = 16x^2 + 24x + 9 + (3x)^2 - 2 \times 3x \times 3 + 3^2 \\
&\iff \quad 25x^2 + 10 + 1 = 16x^2 + 24x + 9 + 9x^2 - 18x + 9 \\
&\iff \quad 25x^2 + 10 + 1 = 25x^2 + 6x + 18 \\
&\iff \quad x = \frac{17}{4} \quad \textit{d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

4. Quelle est alors la longueur BD ?

Si $x = \dfrac{17}{4}$, alors $ABCD$ est une rectangle et ses diagonales sont de même longueur. On a donc :

On a donc : $$\begin{aligned}
BD &= AC \\
&= 5 \times \frac{17}{4} + 1 \\
&= \frac{85}{4} + \frac{4}{4} \\
&= \frac{89}{4} \\
&= 22,25
\end{aligned}$$