

Exercice 1 : Équations avec un quotient

Pour chacune des équations suivantes, préciser les valeurs interdites éventuelles puis résoudre l'équation :

1. $\frac{3x-7}{-3x} = -5$.

2. $\frac{x^2+1}{4x-16} = 0$.

3. *BONUS* : $\frac{4}{9x+1} = \frac{4}{3x-2}$.

1. Déterminer les valeurs interdites revient à déterminer les valeurs qui annulent le dénominateur du quotient, puisque la division par 0 n'existe pas.

Or $-3x = 0 \iff x = 0$. Donc l'ensemble des valeurs interdites est $\{0\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{3x-7}{-3x} = -5 &\iff \frac{3x-7}{-3x} = \frac{-5}{1} \\ &\iff 3x-7 = -5 \times (-3x) \quad \text{car les produits en croix sont égaux.} \\ &\iff 3x-7 = 15x \\ &\iff -12x = 7 \\ &\iff x = -\frac{7}{12} \end{aligned}$$

Le nombre $-\frac{7}{12}$ n'est pas une valeur interdite, donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{12}\right\}$.

2. $4x-16=0 \iff x=4$. Donc l'ensemble des valeurs interdites est $\{4\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$,

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{4x-16} = 0 &\iff x^2+1=0 \quad \text{car} \quad \frac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff A(x)=0 \text{ et } B(x) \neq 0 \\ &\iff x^2 = -1 \end{aligned}$$

Puisque $-1 < 0$, cette équation n'a pas de solution, donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \emptyset$.

3. $9x+1=0 \iff x=-\frac{1}{9}$ et $3x-2=0 \iff x=\frac{2}{3}$.

Donc l'ensemble des valeurs interdites est $\left\{-\frac{1}{9}; \frac{2}{3}\right\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{9}; \frac{2}{3}\right\}$,

$$\begin{aligned} \frac{4}{9x+1} = \frac{4}{3x-2} &\iff 4 \times (9x+1) = 4 \times (3x-2) \quad \text{car les produits en croix sont égaux.} \\ &\iff 36x+4 = 12x-8 \\ &\iff 24x = -12 \\ &\iff x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$-\frac{1}{2}$ n'est pas une valeur interdite, donc l'ensemble des solutions de cette équation est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.