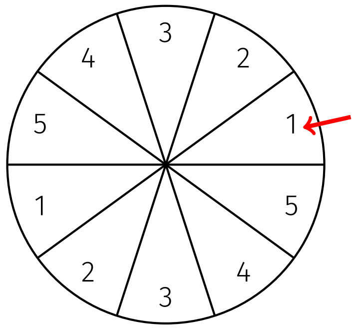
Corrigé de l'éval-bilan 4

Exercice 1



Dans une kermesse, on fait tourner la roue de loterie équilibrée ci-contre où tous les secteurs ont le même angle.
Le joueur gagne le nombre de points indiqué par le secteur désigné par la flèche.
X est la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2. Combien de points un joueur peut-il espérer gagner en moyenne lors d'une partie ?
3. Pour pouvoir tourner la roue, le joueur doit payer 1 euro. Un point rapporte 0,30 €. Le jeu est-il équitable ?

Correction

1. X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
2. L'espérance de X est $\dfrac{1+2+3+4+5}{5} = 3$. Un joueur peut donc espérer gagner 3 points en moyenne lors d'une partie.
3. Le joueur doit payer 1 euro pour jouer. Il peut espérer gagner $3 \times 0,3$ € soit 0,90 €. Le jeu n'est donc pas équitable.

Exercice 2 Au casino

On suppose que la probabilité de gagner une partie à une machine à sous est de 0,001.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes et on appelle X la variable aléatoire qui donne le rang de la première partie gagnée lorsqu'on joue plusieurs parties successives.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser le ou les paramètres.
2. En combien de parties peut-on espérer gagner pour la première fois avec cette machine à sous ?
3. Calculer $P(X > 500)$ puis interpréter ce résultat.
4. La mise de cette machine à sous est de 2 €.
   Quelle est la probabilité que l'on gagne avant de ne plus avoir d'argent si on dispose de 2000 € ?

Correction

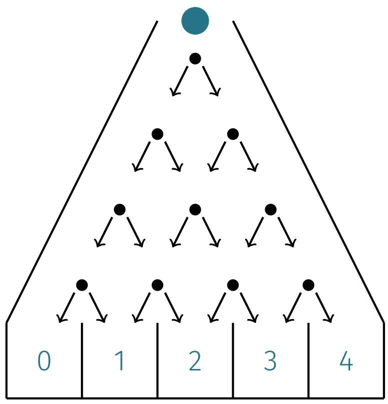
1. Cette expérience consiste à répéte une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,001$.
   La variable aléatoire X donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le premier succès (gagner une partie) dans le schéma de Bernoulli de paramètre $p = 0,001$.
   X suit donc une loi géométrique de paramètre $p = 0,001$.

2. L'espérance de X est $\dfrac{1}{0,001} = 1000$. On peut donc espérer gagner pour la première fois en moyenne au bout de 1000 parties.

3. $P(X > 500) = (1 - 0,001)^{500} = 0,999^{500} \approx 0,6064$.
   La probabilité de gagner pour la première fois après plus de 500 parties est d'environ 60,64%.
   Autrement dit, la probabilité de ne pas gagner au cours des 500 premières parties est d'environ 60,64%.

4. On dispose de 2000 € qui permettent de jouer 1000 fois.
   La probabilité de gagner avant de ne plus avoir d'argent est $P(X \leqslant 1000) = 1 - P(X > 1000) = 1 - (1 - 0,001)^{1000} \approx 0,6321$.
   La probabilité de gagner avant de ne plus avoir d'argent si on dispose de 2000 € est d'environ 63,21%.

Exercice 3 Planche de Galton



Dans une fête foraine, on fait glisser un palet le long d'une planche cloutée comme ci-contre.
À chaque étage, le palet rencontre un clou et va à gauche ou à droite avec la même probabilité. Après 4 étages, le palet arrive dans un des cinq bacs de réception numérotés de 0 à 4.

1. **a.** Dans quel bac le palet arrivera-t-il s'il va à gauche puis à droite, puis à gauche, puis à gauche ?
   b. Dans quel bac le palet arrivera-t-il s'il va à droite puis à droite, puis à gauche, puis à droite ?

2. On appelle X la variable aléatoire qui donne le numéro du bac de réception du palet.
   a. Expliquer pourquoi la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.
   b. Calculer l'espérance de X.
   c. Le gros lot est gagné si le palet arrive dans le bac 4.
   Quelle est la probabilité de gagner le gros lot ?

Correction

1. **a.** Le palet arrive dans le bac 1.
   b. Le palet arrive dans le bac 3.

2. **a.** À chaque clou rencontré, on considère que l'on obtient un succès si le palet va à droite et un échec s'il va à gauche.
   La variable aléatoire X donne le nombre de succès dans une suite de $n = 4$ épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.
   X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \dfrac{1}{2}$.
   b. L'espérance de X est $np = 4 \times \dfrac{1}{2} = 2$.
   c. La probabilité de gagner le gros lot est $P(X = 4) = \dbinom{4}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$.

Exercice 4 Loi de refroidissement de Newton

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C. On la laisse refroidir dans une pièce à température ambiante de 10°C.
On va étudier à l'aide d'une suite le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton.

Pour tout entier naturel n, on note t_n la température du café (en °C) au bout de n minutes.
On a ainsi $t_0 = 80$. Entre deux minutes consécutives n et $n+1$, on a $t_{n+1} - t_n = -0,2(t_n - 10)$.

1. Conjecturer d'après le contexte le sens de variation de la suite (t_n).
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $t_{n+1} = 0,8t_n + 2$.
3. Exprimer t_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (t_n).
5. Combien de temps faut-il pour que la température du café soit inférieure à 20°C ?

Correction

1. On étudie le refroidissement d'un café. La température du café devrait donc diminuer et la suite (t_n) devrait donc être décroissante.
2. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n - 0,2(t_n - 10) \\ &= t_n - 0,2t_n + 2 \\ &= 0,8t_n + 2. \end{aligned}$$

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 0,8t_n + 2$ et $t_0 = 80$.
   (t_n) est une suite arithmétique de premier terme $t_0 = 80$ et de raison $q = 0,8$.

   Suite constante vérifiant la relation de récurrence :

   Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad x = 0,8x + 2 \iff x - 0,8x = 2$
   $$\iff 0,2x = 2$$
   $$\iff x = 10.$$

   La suite constante (c_n) égale à 10 vérifie donc la relation $c_{n+1} = 0,8c_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Suite géométrique auxiliaire :

   On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = t_n - c_n$.
   Montrons que (v_n) est une suite géométrique :

   Soit $n \in \mathbb{N}$
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= t_{n+1} - c_{n+1} \\ &= 0,8t_n + 2 - (0,8c_n + 2) \\ &= 0,8t_n + 2 - 0,8c_n - 2 \\ &= 0,8(t_n - c_n) \\ &= 0,8v_n. \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = t_0 - c_0 = 80 - 10 = 70$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times 0,8^n = 70 \times 0,8^n$.

Terme général de la suite (t_n) :

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, t_n = c_n + v_n = 10 + 70 \times 0,8^n$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$.

   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 10 + 70 \times 0,8^n = 10$.

   La température du café tend donc vers 10°C.

5. On cherche le plus petit entier n tel que $t_n < 20$.
   On a $t_8 \approx 21,7$ et $t_9 \approx 19,4$.
   Il faut donc 9 minutes pour que la température du café soit inférieure à 20°C.