Chapitre 10

Produit scalaire

Dans tout le cours, on se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1 Norme d'un vecteur

Définition

Soient $\vec{u}$ un vecteur et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
On appelle **norme** de $\vec{u}$ le réel positif ou nul noté $\|\vec{u}\|$, défini par $\|\vec{u}\| = AB$.

Propriété

Soient λ un réel et $\vec{u}$ un vecteur.
On a $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

Propriété

Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple

Soient $A\,(-1\ ;\ 2)$ et $B\,(3\ ;\ -1)$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ -1-2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$

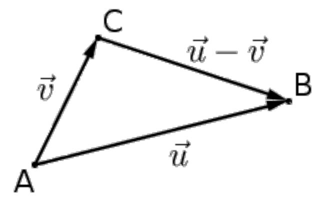
2 Produit scalaire de deux vecteurs

Dans cette partie, on considère trois points A, B et C et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Définition - Avec des normes seulement (1)

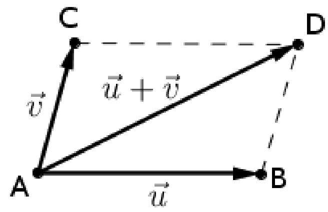
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$



Propriété - Avec des normes seulement (2)

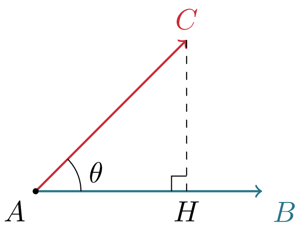
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

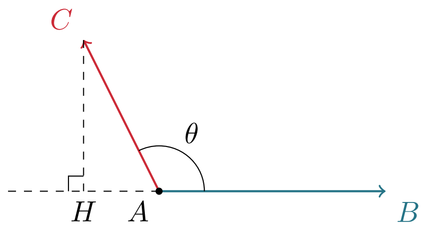


Propriété - Avec le projeté orthogonal

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \\ &= \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}\end{aligned}$$





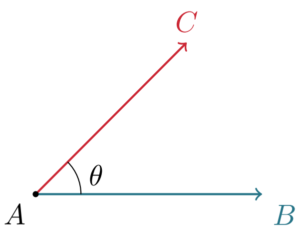
Propriété - Avec les coordonnées

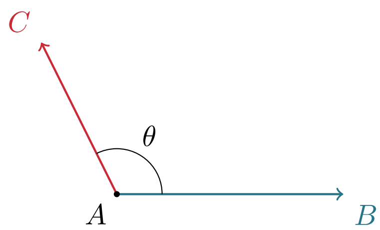
Si, on a : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Propriété - Avec un angle

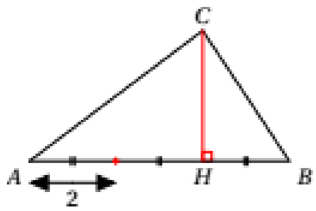
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\theta)$$





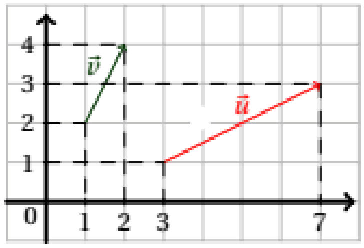
Exemple 1

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\\ &= AB\times AH\\ &= 6\times 4\\ &= 24\end{aligned}$$



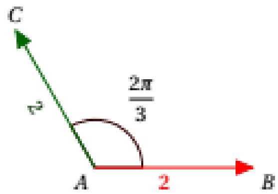
Exemple 2

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 4\times 1+2\times 2\\ &= 8\end{aligned}$$



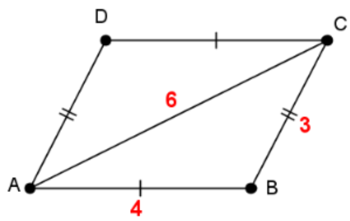
Exemple 3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})\\ &= 2\times 2\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -2\end{aligned}$$



Exemple 4

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-CB^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(4^2+6^2-3^2\right)\\ &= \frac{43}{2}\end{aligned}$$



Remarque : Cas particuliers

- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.
  $\vec{u}\cdot\vec{u}$ se note aussi $\vec{u}^2$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases}\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens}\\ -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens opposés.}\end{cases}$$

Exemple 5

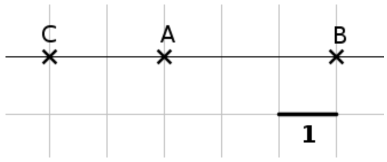
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\\ &= 9\end{aligned}$$

On peut également écrire $\overrightarrow{AB}^2 = 9$.

On a aussi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= -\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\\ &= -3\times 2\\ &= -6\end{aligned}$$



3 Propriétés du produit scalaire

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et k un réel.

- **symétrie** : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$.
- **linéarité** : $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = k\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)$
  $\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$

Propriété - Identités remarquables

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

- $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$
- $\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$
- $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

Preuve (du point 2)

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)^2 &= \left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}\right)-\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)-\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\right)\\ &= \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2\end{aligned}$$

4 Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits **orthogonaux** si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Remarque

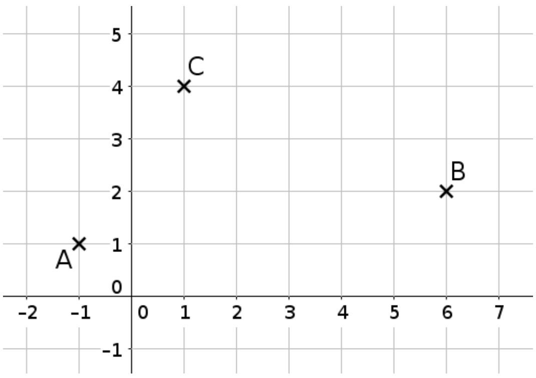
Par convention, on dit que le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Propriété

Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Exemple

Les droites (CA) et (CB) sont-elles perpendiculaires ?



On a : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

On calcule le produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} &= 1\times 4+(-2)\times 2\\ &= 4-4\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires.