Préparation de l'évaluation-bilan 7

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^2 \left(10e^{2x}+1\right)\ dx$.

Exercice 2

Afin de chauffer un liquide, on fait passer un courant électrique dans une résistance.
La température, en °C, du liquide à l'instant t, en secondes, est noté $T(t)$.
On admet que la fonction T, définie sur $[0\ ;\ 80]$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad T' = -0{,}02T + 1$$

1. Interpréter l'information $T(0) = 20$.

2. Résoudre (E) sur $[0\ ;\ 80]$.

3. Déterminer la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $T(0) = 20$.

4. Déterminer l'instant t_0, en s, à partir duquel la température du liquide dépasse 40 °C. *On arrondira au dixième de seconde.*

Exercice 3

Lors d'une randonnée dans une région montagneuse, Jenny a mesuré à différentes reprises, l'altitude a_i (en km) à laquelle elle se trouvait et la température t_i (en °C).

a_i	0,4	0,8	1,2	1,6	2
t_i	8,4	6,2	3	0,2	−2

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables a et t. *Arrondir au millième.*

2. Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage de point ?
Si oui, donner l'équation de la droite de régression de t en a.

3. Estimer alors la température à 2500 m d'altitude.

Préparation de l'éval-bilan 7 - Corrigé T^{ale}Comp

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^2 \left(10e^{2x}+1\right)\ dx$.

- On cherche une primitive F de la fonction f définie sur $[0\ ;\ 2]$ par $f(x)=10e^{2x}+1$:

  Pour tout $x \in [0\ ;\ 2]$, $\quad \begin{aligned} f(x) &= 10e^{2x}+1 \\ &= 5\times 2e^{2x}+1 \end{aligned}$

  On pose : pour tout $x \in [0\ ;\ 2]$, $\quad F(x)=5e^{2x}+x$

- On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(10e^{2x}+1\right)\ dx &= F(2)-F(0) \\ &= \left(5e^{2\times 2}+2\right)-\left(5e^{0}+0\right) \\ &= 5e^4+2-5 \\ &= 5e^4-3 \end{aligned}$$

Exercice 2

Afin de chauffer un liquide, on fait passer un courant électrique dans une résistance.
La température, en °C, du liquide à l'instant t, en secondes, est noté $T(t)$.
On admet que la fonction T, définie sur $[0\ ;\ 80]$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad T' = -0{,}02T+1$$

1. Interpréter l'information $T(0)=20$.
2. Résoudre (E) sur $[0\ ;\ 80]$.
3. Déterminer la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $T(0)=20$.
4. Déterminer l'instant t_0, en s, à partir duquel la température du liquide dépasse 40 °C. *On arrondira au dixième de seconde.*

1. La température du liquide à l'instant $t=0$ est de 20 °C.
2. On résout l'équation différentielle (E) :

- **Recherche d'une solution particulière constante :**
  Soit T_0 une solution particulière constante de (E).
  On a donc : $T_0' = 0$ et $-0{,}02T_0 + 1 = 0$.
  On en déduit : $T_0 = \dfrac{1}{0{,}02} = 50$.
- **Recherche des solutions de l'équation homogène :**
  On résout l'équation différentielle $T' = -0{,}02T$:
  Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions définies sur $[0\ ;\ 80]$ par :
  $$T(t) = ke^{-0{,}02t}$$
  avec $k \in \mathbb{R}$.
- **Conclusion :**
  Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $[0\ ;\ 80]$ par :
  $$T(t) = ke^{-0{,}02t} + 50$$
  avec $k \in \mathbb{R}$.

3. Soit T la solution de (E) telle que $T(0) = 20$.

$$\begin{aligned}
T(0) = 20 \quad &\Longleftrightarrow \quad ke^{-0{,}02\times 0} + 50 = 20 \\
&\Longleftrightarrow \quad k + 50 = 20 \\
&\Longleftrightarrow \quad k = 20 - 50 \\
&\Longleftrightarrow \quad k = -30
\end{aligned}$$

Donc la solution T de (E) telle que $T(0) = 20$ est la fonction définie sur $[0\ ;\ 80]$ par :

$$T(t) = -30e^{-0{,}02t} + 50$$

4. On cherche l'instant t_0, en s, à partir duquel la température du liquide dépasse 40 °C.
On résout donc l'inéquation : $T(t) > 40$

$$\begin{aligned}
T(t) > 40 \quad &\Longleftrightarrow \quad -30e^{-0{,}02t} + 50 > 40 \\
&\Longleftrightarrow \quad -30e^{-0{,}02t} > 40 - 50 \\
&\Longleftrightarrow \quad -30e^{-0{,}02t} > -10 \\
&\Longleftrightarrow \quad e^{-0{,}02t} < \frac{1}{3} \\
&\Longleftrightarrow \quad -0{,}02t < \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad t > -\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{0{,}02} \\
&\Longleftrightarrow \quad t > -\frac{-\ln(3)\times 50}{0,02\times 50} \\
&\Longleftrightarrow \quad t > 50\ln(3)
\end{aligned}$$

La valeur approchée de $t_0 = 50\ln(3)$ est $t_0 \approx 54{,}9$ s.
Donc la température du liquide dépasse 40 °C à partir de l'instant $t_0 \approx 54{,}9$ s.

Exercice 3

Lors d'une randonnée dans une région montagneuse, Jenny a mesuré à différentes reprises, l'altitude a_i (en km) à laquelle elle se trouvait et la température t_i (en °C).

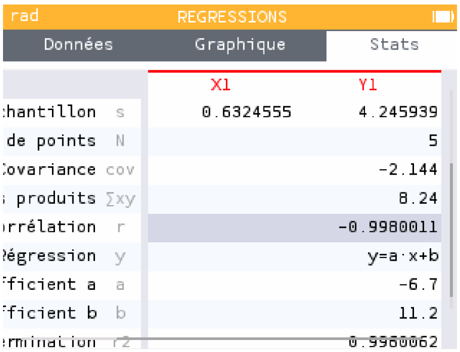
a_i	0,4	0,8	1,2	1,6	2
t_i	8,4	6,2	3	0,2	-2

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables a et t. *Arrondir au millième.*

2. Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage de point ?
   Si oui, donner l'équation de la droite de régression de t en a.

3. Estimer alors la température à 2500 m d'altitude.

1. On utilise la calculatrice pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables a et t :



$$r \approx -0{,}998$$

2. La coefficient de corrélation est proche de -1, on peut envisager un ajustement affine de ce nuage de point.
   L'équation de la droite de régression de t en a est :

$$t = -6,7a + 11,2$$

3. Pour estimer la température à 2500 m (soit 2,5 km) d'altitude, on remplace a par 2,5 dans l'équation de la droite de régression :

$$t = -6,7 \times 2{,}5 + 11,2 = -5{,}55$$

   Donc on peut estimer la température à 2500 m d'altitude à environ $-5{,}55$ °C.