Corrigé de l'évaluation-bilan 3

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $I = [0\ ;\ 12]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$.

a. Démontrer que pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$.

Soit $x \in [0\ ;\ 12]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-x} + 2x \times (-1)e^{-x} \\ &= 2e^{-x} - 2xe^{-x} \\ &= 2(1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $I = [0\ ;\ 12]$.

Pour tout $x \in [0\ ;\ 12]$, $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$.
On a $f(0) = 0$; $f(1) = e^{-1} \approx 0,74$ et $f(12) = 24e^{-12} \approx 0,0001$.

x	0		1		12
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$	$24e^{-12}$

c. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,2$ admet deux solutions sur l'intervalle I.
Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, la fonction f est continue et strictement croissante.
De plus $f(0) = 0 < 0,2$ et $f(1) = e^{-1} > 0,2$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
Sur l'intervalle $[1\ ;\ 12]$, la fonction f est continue et strictement décroissante.
De plus $f(1) = e^{-1} > 0,2$ et $f(12) = 24e^{-12} < 0,2$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ 12]$.
On en déduit que la fonction f admet (exctement) deux solutions α_1 et α_2 sur l'intervalle I.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha_1 \approx 0,11$ et $\alpha_2 \approx 3,57$.

2. Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures qui suivent la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f.

- x représente le temps écoulé (en heures) depuis la consommation d'alcool.
- $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang).

a. Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.

La première heure, le taux d'alcoolémie augmente. Il diminue ensuite les 11 heures suivantes.

b. À quel moment le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.

Le taux d'alcoolémie est maximal à l'instant où la fonction f admet un maximum. Le tableau de variations de la fonction f montre que le maximum est atteint en $x = 1$.
Cela signifie que le taux d'alcoolémie est maximal une heure après la consommation d'alcool.
Sa valeur est $f(1) = e^{-1}$ soit environ 0,74 g/L.

c. Le code de la route fixe le taux d'alcoolémie maximal autorisé à 0,2 g/L pour les jeunes conducteurs. Combien de temps après la consommation d'alcool cette personne jeune conductrice est-elle autorisée à prendre le volant ? Donner la réponse en heures et minutes.

On cherche à résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0,2$.
D'après la question **1.c.**, on sait que l'ensemble des solutions de cette inéquation est la réunion des intervalles $[0\ ;\ \alpha_1]$ et $[\alpha_2\ ;\ 12]$.
La personne peut donc prendre le volant environ 3,57 heures soit 3 heures et 34 minutes après la consommation d'alcool.

Exercice 2

Un supermarché souhaite acheter des pommes à un fournisseur qui propose des prix au kilogramme dégressifs en fonction de la masse commandée.
Pour une commande de x kilogrammes de pommes, le prix $p(x)$, en euros, pour un kilogramme de fruit est donné par :

$$p(x) = \frac{x+300}{x+100} \quad \text{pour } x \in [100\ ;\ +\infty[\,.$$

Partie A : Étude du prix p proposé par le fournisseur

1. Montrer que pour tout $x \in [100\ ;\ +\infty[$, $\quad p(x) = \dfrac{1+\dfrac{300}{x}}{1+\dfrac{100}{x}}$.

Soit $x \in [100\ ;\ +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x+300}{x+100} \\ &= \frac{x\left(1+\dfrac{300}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{100}{x}\right)} \\ &= \frac{1+\dfrac{300}{x}}{1+\dfrac{100}{x}} \end{aligned}$$

2. En déduire la limite de la fonction p en $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{300}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{100}{x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = \dfrac{1+0}{1+0} = 1$.

3. Calculer $p'(x)$ pour tout $x \in [100\ ;\ +\infty[$ puis dreser le tableau de variations de la fonction p.

   Soit $x \in [100\ ;\ +\infty[$, on a :

   $$p(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = x + 300 \quad \text{et} \quad v(x) = x + 100.$$
   $$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = 1.$$

   $$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(x+100) - (x+300)}{(x+100)^2} \\ &= \frac{-200}{(x+100)^2} \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $x \in [100\ ;\ +\infty[$, $p'(x) < 0$.
   La fonction p est donc strictement décroissante sur $[100\ ;\ +\infty[$.

x	100	$+\infty$
signe de $p'(x)$	$-$	
variations de p	2 ↘	1

4. Interpréter économiquement les variations de la fonction p.

   Plus la quantité de pommes commandée est importante, plus le prix au kilogramme est faible. Le prix maximal est de 2 euros pour un kilogramme de pommes, il est atteint pour une commande de 100 kilogrammes. La limite du prix est de 1 euro pour un kilogramme de pommes.

Partie B : Étude de la somme à dépenser

1. Quelle somme devra dépenser le supermarché pour acheter à ce fournisseur 150 kilogrammes de pommes ? 700 kilogrammes de pommes ?

   Pour 150 kilogrammes de pommes, le prix est de $p(150) = \dfrac{150+300}{150+100} = \dfrac{450}{250} = 1,80$ euros par kilogramme.
   Donc le supermarché devra dépenser $150 \times 1,80 = 270$ euros.

   Pour 700 kilogrammes de pommes, le prix est de $p(700) = \dfrac{700+300}{700+100} = \dfrac{1000}{800} = 1,25$ euros par kilogramme.
   Donc le supermarché devra dépenser $700 \times 1,25 = 875$ euros.

2. On appelle $S(x)$ la somme, en euros, que le supermarché devra dépenser pour acheter x kilogrammes de pommes vendues au prix de $p(x)$ euros par kilogramme.

a. Par définition, $S(x) = xp(x)$. Déterminer la limite de la fonction S en $+\infty$.

Soit $x \in [100\ ;\ +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
S(x) &= xp(x)\\
&= x \times \frac{x+300}{x+100}\\
&= \frac{x^2+300x}{x+100}\\
&= \frac{x^2\left(1+\dfrac{300}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{100}{x}\right)}\\
&= \frac{x\left(1+\dfrac{300}{x}\right)}{1+\dfrac{100}{x}}
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{300}{x} = 1$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{300}{x}\right) = +\infty$.

De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{100}{x} = 1$.

Donc par quotient de limites, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

b. Calculer $S'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction S sur $[100\ ;\ +\infty[$.

Soit $x \in [100\ ;\ +\infty[$, on a :

$$S(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = x^2+300x \quad \text{et} \quad v(x) = x+100.$$

$$u'(x) = 2x+300 \qquad v'(x) = 1.$$

Donc
$$\begin{aligned}
S'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}\\
&= \frac{(2x+300)(x+100)-(x^2+300x)}{(x+100)^2}\\
&= \frac{2x^2+500x+30\,000-x^2-300x}{(x+100)^2}\\
&= \frac{x^2+200x+30\,000}{(x+100)^2}
\end{aligned}$$

$S'(x)$ est du signe de $x^2+200x+30000$.
Calculons le discriminant de ce trinôme : $\Delta = 200^2-4\times30\,000 = 40\,000-120\,000 = -80\,000 < 0$.
Donc pour tout $x \in [100\ ;\ +\infty[$, $S'(x)$ est du signe du coefficient dominant du polynôme $x^2+200x+30\,000$.
On a donc $S'(x) > 0$ pour tout $x \in [100\ ;\ +\infty[$.

x	100	$+\infty$
signe de $S'(x)$	$+$	
variations de S	$200 \nearrow$	$+\infty$

3. Le magasin dispose d'un budget de 900 euros pour acheter des pommes. Quelle masse maximale de pommes pourra-t-il acheter chez ce fournisseur ?

   On cherche à résoudre l'équation $S(x) \leqslant 900$.
   Soit $x \in [100\ ;\ +\infty[$.

$$\begin{aligned} S(x) \leqslant 900 &\iff \frac{x^2+300x}{x+100} \leqslant 900 \\ &\iff x^2+300x \leqslant 900(x+100) \\ &\iff x^2+300x \leqslant 900x+90\ 000 \\ &\iff x^2-600x-90\ 000 \leqslant 0 \end{aligned}$$

   On calcule le discriminant de ce trinôme : $\Delta = 600^2 - 4\times 1\times(-90\,000) = 360\,000 + 360\,000 = 720\,000$.
   On calcule les racines de ce trinôme :
   $x_1 = \dfrac{600-\sqrt{720\ 000}}{2} \approx -124$ et $x_2 = \dfrac{600+\sqrt{720\ 000}}{2} \approx 724$.

   On a donc le tableau de signe suivant :

x	100		x_2		$+\infty$
signe de $x^2-600x-90\ 000$		$-$	0	$+$	

   Le magasin pourra donc acheter au maximum 724 kilogrammes de pommes chez ce fournisseur.