Préparation de l'évaluation-bilan 7

Exercice 1

Afin de chauffer un liquide, on fait passer un courant électrique dans une résistance.
La température, en °C, du liquide à l'instant t, en secondes, est noté $T(t)$.
On admet que la fonction T, définie sur $[0\ ;\ 80]$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad T' = -0{,}02T + 1$$

1. Interpréter l'information $T(0) = 20$.
2. Résoudre (E) sur $[0\ ;\ 80]$.
3. Déterminer la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $T(0) = 20$.
4. Déterminer l'instant t_0, en s, à partir duquel la température du liquide dépasse 40 °C. *On arrondira au dixième de seconde.*

1. La température du liquide à l'instant $t = 0$ est de 20 °C.
2. On résout l'équation différentielle (E) :
   - **Recherche d'une solution particulière constante :**
     Soit T_0 une solution particulière constante de (E).
     On a donc : $T_0' = 0$ et $-0{,}02T_0 + 1 = 0$.
     On en déduit : $T_0 = \dfrac{1}{0{,}02} = 50$.
   - **Recherche des solutions de l'équation homogène :**
     On résout l'équation différentielle $T' = -0{,}02T$:
     Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions définies sur $[0\ ;\ 80]$ par :
     $$T(t) = ke^{-0{,}02t}$$
     avec $k \in \mathbb{R}$.
   - **Conclusion :**
     Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $[0\ ;\ 80]$ par :
     $$T(t) = ke^{-0{,}02t} + 50$$
     avec $k \in \mathbb{R}$.
3. Soit T la solution de (E) telle que $T(0) = 20$.

$$\begin{aligned}
T(0) = 20 \quad &\iff \quad ke^{-0{,}02\times 0} + 50 = 20 \\
&\iff \quad k + 50 = 20 \\
&\iff \quad k = 20 - 50 \\
&\iff \quad k = -30
\end{aligned}$$

Donc la solution T de (E) telle que $T(0) = 20$ est la fonction définie sur $[0\ ;\ 80]$ par :

$$T(t) = -30e^{-0,02t} + 50$$

4. On cherche l'instant t_0, en s, à partir duquel la température du liquide dépasse 40 °C.
On résout donc l'inéquation : $T(t) > 40$

$$\begin{aligned}
T(t) > 40 \quad & \iff \quad -30e^{-0,02t} + 50 > 40 \\
& \iff \quad -30e^{-0,02t} > 40 - 50 \\
& \iff \quad -30e^{-0,02t} > -10 \\
& \iff \quad e^{-0,02t} < \frac{1}{3} \\
& \iff \quad -0,02t < \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\
& \iff \quad t > -\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{0,02} \\
& \iff \quad t > 50\ln(3)
\end{aligned}$$

La valeur approchée de $t_0 = 50\ln(3)$ est $t_0 \approx 54,9$ s.
Donc la température du liquide dépasse 40 °C à partir de l'instant $t_0 \approx 54,9$ s.

Dans cet exercice, les questions 1, 2, 3 et 4 peuvent être traitées de façon indépendante les unes des autres.

Un parachutiste est en chute libre dans l'air jusqu'à l'instant $t = 0$ où il ouvre son parachute. Sa vitesse est alors de 50 m.s^{-1}. On admet par la suite que sa vitesse v, en m.s^{-1}, en fonction du temps t, en s, est solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$(E)\ :\quad y' = -5y + 10.$$

Question 1

La fonction constante g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = 2$ est-elle une solution de l'équation différentielle (E) ? Justifier la réponse.

Question 2

Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t) = k\mathrm{e}^{-5t} + 2$, où k est un nombre réel donné.

Question 3

En admettant le résultat de la question précédente, montrer que la fonction v est donnée sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $v(t) = 48\mathrm{e}^{-5t} + 2$.

Question 4

La distance parcourue, en mètre, par le parachutiste pendant les 10 premières secondes après ouverture du parachute est donnée par l'intégrale :

$$\int_0^{10} \left(48\mathrm{e}^{-5t} + 2\right)$$

Calculer cette intégrale (arrondir à 10^{-1}).

Question 1

Soit g la fonction constante définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t)=2$.
$g'(t)=0$ et $-5g(t)+10=-5\times 2+10=0$ donc $g'(t)=-5g(t)+10$.
Donc g est solution de l'équation différentielle (E).

Question 2

D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t)=k\mathrm{e}^{at}$, où k est un nombre réel quelconque, donc les solutions de l'équation différentielle $y'=-5y$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t)=k\mathrm{e}^{-5t}$, où k est un nombre réel quelconque.
Une solution de l'équation différentielle $y'=-5y+10$ est la somme d'une solution de l'équation différentielle $y'=-5y$ et d'une solution constante de l'équation différentielle $y'=-5y+10$, donc les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t)=k\mathrm{e}^{-5t}+2$, où k est un nombre réel quelconque.

Question 3

On sait que v est solution de (E) et que $v(0)=50$; donc $k\mathrm{e}^{0}+2=50$ donc $k=48$.
La fonction v est donc donnée sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $v(t)=48\mathrm{e}^{-5t}+2$.

Question 4

La distance parcourue, en mètre, par le parachutiste pendant les 10 premières secondes après ouverture du parachute est donnée par l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{10}\left(48\mathrm{e}^{-5t}+2\right)$.
Pour calculer cette intégrale, il faut trouver une primitive de la fonction v.
La fonction $t\longmapsto \mathrm{e}^{at}$ avec $a\neq 0$, a pour primitive la fonction $t\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{at}}{a}$, donc la fonction v a pour primitive la fonction V définie par $V(t)=48\dfrac{\mathrm{e}^{-5t}}{-5}+2t$ soit $V(t)=-9,6\mathrm{e}^{-5t}+2t$.

$$\begin{aligned}\int_0^{10}\left(48\mathrm{e}^{-5t}+2\right) &= \Big[V(t)\Big]_0^{10}=V(10)-V(0)=\left(-9,6\mathrm{e}^{-5\times 10}+2\times 10\right)-\left(-9,6\mathrm{e}^{-5\times 0}+2\times 0\right)\\ &= -9,6\mathrm{e}^{-50}+20+9,6=29,6-9,6\mathrm{e}^{-50}\approx 29,6\end{aligned}$$