Corrigé - Premier degré

Premier degré

Exercice 1

1.
- $$\begin{aligned} & 2x+8=0 \\ \iff & 2x=-8 \\ \iff & \frac{2x}{2}=-\frac{8}{2} \\ \iff & x=-4 \end{aligned}$$
  $\mathcal{S}=\{-4\}$
- $$\begin{aligned} & -3x+18=0 \\ \iff & -3x=-18 \\ \iff & \frac{-3x}{-3}=\frac{-18}{-3} \\ \iff & x=6 \end{aligned}$$
  $\mathcal{S}=\{6\}$
- $$\begin{aligned} & -\frac{12}{7}x+\frac{4}{21}=0 \\ \iff & -\frac{12}{7}x=-\frac{4}{21} \\ \iff & -\frac{7}{12}\times\left(-\frac{12}{7}\right)x=-\frac{7}{12}\times\left(-\frac{4}{21}\right) \\ \iff & x=\frac{7\times 4}{12\times 21} \\ \iff & x=\frac{1}{9} \end{aligned}$$
  $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{9}\right\}$
- $$\begin{aligned} & \sqrt{2}x-1=0 \\ \iff & \sqrt{2}x=1 \\ \iff & x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \iff & x=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$
  $\mathcal{S}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

2. $$\begin{aligned} & ax+b=0 \\ \iff & ax=-b \\ \iff & \frac{ax}{a}=\frac{-b}{a} \\ \iff & x=-\frac{b}{a} \end{aligned}$$
   $\mathcal{S}=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$

Exercice 2

Partie A

1. $A\,(1\,;\,6)$; $B\,(6\,;\,4)$
2. $$\begin{aligned} m &= \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \\ &= \frac{4-6}{6-1} \\ &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

3. On peut lire $p \approx 6,5$.

4. La droite (AB) a pour équation réduite $\quad y = -\frac{2}{5}x + p \quad$ avec p un réel à déterminer.
Le point A appartient à la droite (AB) donc ses coordonnées vérifient l'équation précédente.

$$\begin{aligned}
& y_A = -\frac{2}{5}x_A + p \\
\iff \; & 6 = -\frac{2}{5} \times 1 + p \\
\iff \; & 6 + \frac{2}{5} = p \\
\iff \; & \frac{30}{5} + \frac{2}{5} = p \\
\iff \; & p = \frac{32}{5}
\end{aligned}$$

La droite (AB) a donc pour équation réduite $\quad y = -\frac{2}{5}x + \frac{32}{5}$.

Partie B On considère les 2 fonctions affines f et g définies sur **R** par : $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ et $g(x) = -3x + 6$.

1. $$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{3} \times 0 - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
& f(x) = 0 \\
\iff \; & \frac{1}{3}x - 2 = 0 \\
\iff \; & \frac{1}{3}x = 2 \\
\iff \; & 3 \times \frac{1}{3}x = 3 \times 2 \\
\iff \; & x = 6
\end{aligned}$$
$\mathcal{S} = \{6\}$

3. f est une fonction affine, $\mathcal{C}_f$ est donc une droite.

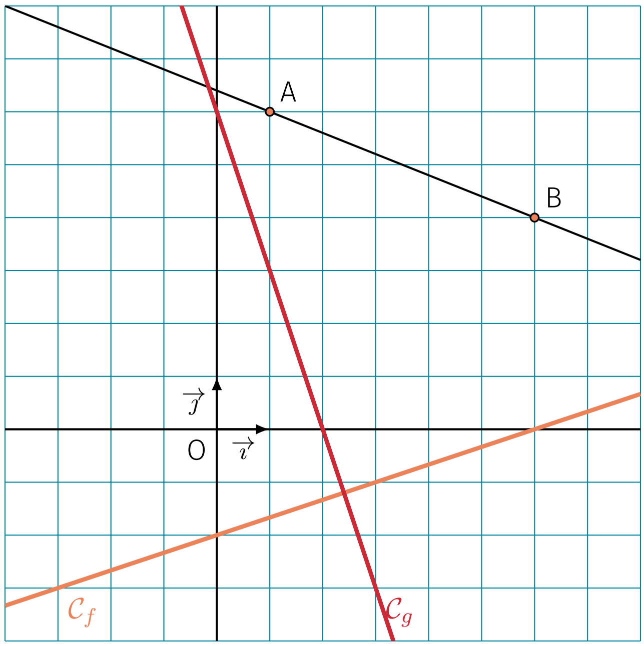
4. $\mathcal{C}_f$ est représentée en orange dans le repère.

5. $$\begin{aligned} g(0) &= -3 \times 0 + 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g(x) = 0 \\
\iff \; & -3x + 6 = 0 \\
\iff \; & -3x = -6 \\
\iff \; & \frac{-3x}{-3}x = \frac{-6}{-3} \\
\iff \; & x = 2
\end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \{2\}$

$\mathcal{C}_g$ est représentée en rouge dans le repère.



6.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 3

1. $f_1 : x \mapsto -2x + 1$
   f_1 est affine de taux d'accroissement -2 et d'ordonnée à l'origine 1.

2. $f_2 : x \mapsto (2 + x)(2x - 1)$

   $$\begin{aligned} f_2(x) &= 2 \times 2x - 2 \times 1 + x \times 2x - x \times 1 \\ &= 4x - 2 + 2x^2 - x \\ &= 2x^2 + 3x - 2 \end{aligned}$$

   f_2 n'est pas une fonction affine.

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{2x}{3}$
   $f_3(x) = \dfrac{2}{3}x + 0$
   f_3 est affine de taux d'accroissement$\dfrac{2}{3}$ et d'ordonnée à l'origine 0.

4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1 - 2x}{3}$
   $f_4(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$
   f_4 est affine de taux d'accroissement $-\dfrac{2}{3}$ et d'ordonnée à l'origine $\dfrac{1}{3}$.

5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{2}{3x}$
   f_5 n'est pas une fonction affine.

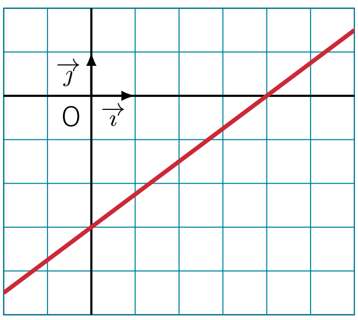
6. $f_6 : x \mapsto x - (2x + 1)$

   $$\begin{aligned} f_6(x)&x - 2x - 1 \\ &= -x - 1 \end{aligned}$$

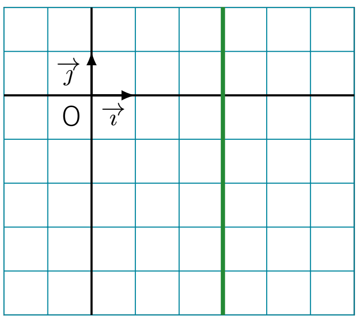
   f_6 est affine de taux d'accroissement -1 et d'ordonnée à l'origine -1.

Exercice 4

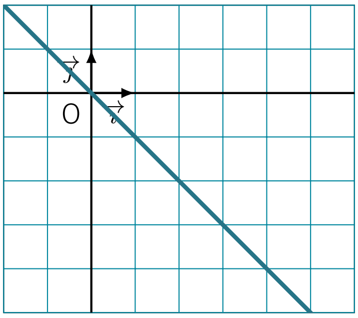
1. f_1 est affine.
   $f_1(x) = \dfrac{3}{4}x - 3$



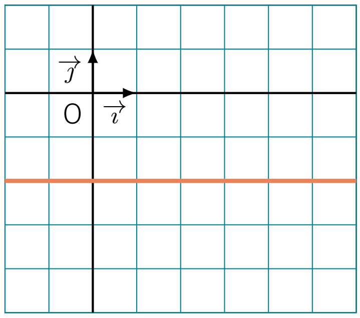
2. Cette droite ne représente pas une fonction.



3. f_3 est affine (elle est même linéaire).
$f_3(x) = -x$

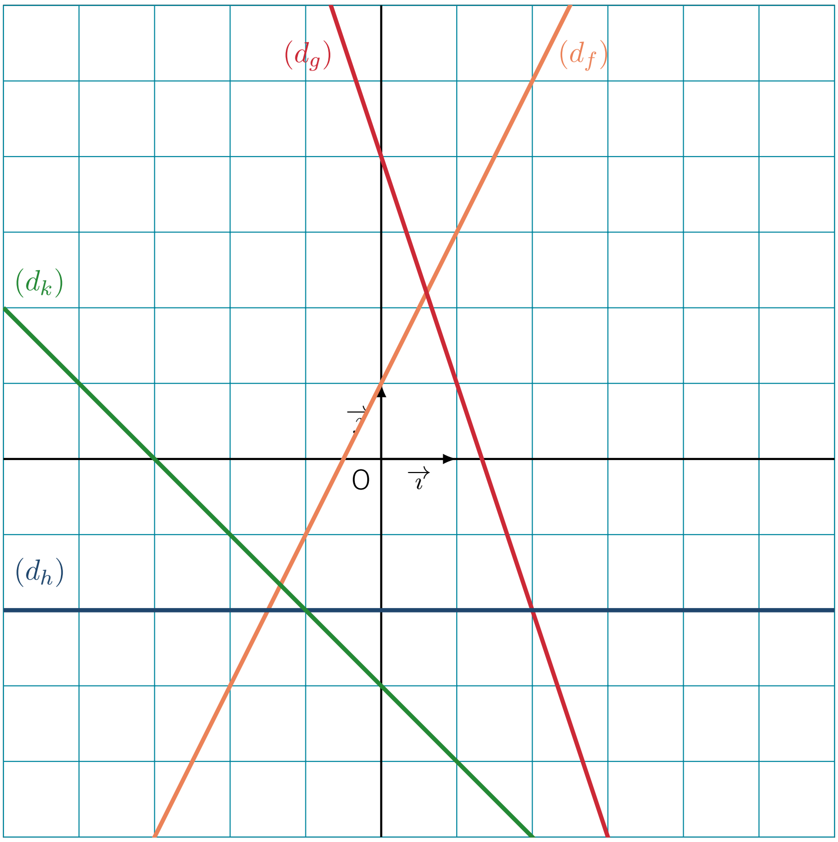


4. f_4 est affine (elle est même constante).
$f_4(x) = -2$



Exercice 5

1. $f : x \mapsto 2x + 1$
2. $g : x \mapsto -3x + 4$
3. $h : x \mapsto -2$
4. $k : x \mapsto -x - 3$



Exercice 6

1. $f : x \mapsto 3x - 7$
   $3 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 9$
   $\dfrac{1}{2} > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $h : x \mapsto -5x - 2$
   $-5 < 0$ donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Vrai ou faux

1. L'ordonnée à l'origine de f est 3 donc $f(0) = 3$.
   f est croissante sur **R** donc $f(2) \geqslant f(0)$.
   On ne peut pas avoir $f(2) = 1$. L'affirmation est FAUSSE.

2. L'ordonnée à l'origine de g est 1 donc $g(0) = 1$.
   g est décroissante sur **R** donc $g(2) \leqslant g(0)$.
   Il est possible de trouver une telle fonction g telle que $g(2) = 0$. L'affirmation est VRAIE.

3. h est croissante sur **R** donc $h(7) \geqslant h(5)$.
   Il est possible de trouver une fonction h croissante telle que $h(5) = 12$ et $h(7) = 15$. L'affirmation est VRAIE.

Exercice 8

Donner le tableau de signes de chacune des fonctions de l'exercice 5.

1. $f : x \mapsto 2x + 1$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

2. $g : x \mapsto -3x + 4$

x	$-\infty$		$\dfrac{4}{3}$		$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

3. $h : x \mapsto -2$

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $h(x)$		$+$	

4. $k : x \mapsto -x - 3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Équations et inéquations

Exercice 9

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+1} + 2 &= \frac{2x-1}{x+1} + \frac{2(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{2x-1}{x+1} + \frac{2x+2}{x+1} \\ &= \frac{4x+1}{x+1}\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $\dfrac{2x-1}{x+1} + 2 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{4x+1}{x+1} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
signe de $4x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{4x+1}{x+1}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signes, $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -1[\cup \left[-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$

Exercice 10

1. a. $2x^2+3x = x(2x+3)$

b. $3(x-1)+(x-1)(x+2) = (x-1)\left(3+(x+2)\right)$
$= (x-1)(x+5)$

2. a. $2x^2+3x < 0 \iff x(2x+3) < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signes, $\mathcal{S} = \left]-\frac{3}{2}\ ;\ 0\right[$.

b. $3(x-1)+(x-1)(x+2) > 0 \iff (x-1)(x+5) > 0$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x-1)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signes, $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -5[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 11

Soit x la longueur, en mètres, de ce carré.
On a : $(x+2)^2 = x^2+20$.

Résolvons cette équation : $(x+2)^2 = x^2+20 \iff x^2+4x+4 = x^2+20$
$\iff 4x = 16$
$\iff x = 4$

Ce carré a donc une longueur de 4 m et une aire de $4^2 = 16$ m².

Exercice 12

On appelle n le nombre d'années après lequel l'âge du père sera égal à la somme des âges de ses enfants.
On a $41+n=(6+n)+(9+n)+(12+n)$.

Résolvons cette équation : $41+n=(6+n)+(9+n)+(12+n) \iff 41+n=3n+27$

$$\iff -2n=-14$$
$$\iff n=7$$

Dans 7 ans, l'âge du père sera égal à la somme des âges de ses enfants.

Exercice 13

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\}$.
$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1} &= \frac{1(x-1)}{x(x-1)}+\frac{3x}{x(x-1)}\\ &= \frac{x-1}{x(x-1)}+\frac{3x}{x(x-1)}\\ &= \frac{4x-1}{x(x-1)}\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\}$. $\quad \frac{1}{x}+\frac{3}{x-1} \geqslant 0 \iff \frac{4x-1}{x(x-1)} \geqslant 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
signe de $4x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\frac{4x-1}{x(x-1)}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

D'après le tableau de signes, $\mathcal{S}=\left]0\,;\,\frac{1}{4}\right] \cup \left]1\,;\,+\infty\right[$

Exercice 14

Python

```
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=-b/a
if a>0:
   print("Les solutions de l'inéquation ax+b>0 sont les réels x >",c)
else:
   print("Les solutions de l'inéquation ax+b>0 sont les réels x <",c)
```

Exercice 15

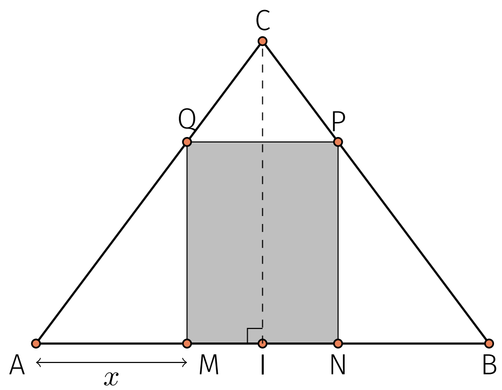
x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
signe de $(x-1)(x-3)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x-2)(x-4)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

D'après le tableau de signes, les solutions de l'inéquation $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \leqslant 0$ sont tous les nombres de $\mathcal{S} = [1\ ;\ 2[\cup [3\ ;\ 4[$.

Un problème du second degré

Exercice 16

L'unité est le centimètre.
Le triangle ABC est isocèle en C, avec AB=12 et AC=10.
I est le milieu de [AB] et M un point de [AI] distinct de A et de I.
On note x la distance AM.
N est le point de [IB] tel que NB=AM.
P et Q sont les points des segments [BC] et [AC] tels que MNPQ soit un rectangle.
On note f la fonction qui à x associe $f(x)$, l'aire du rectangle MNPQ.



1. Quel est l'ensemble de définition (noté $\mathcal{D}_f$) de f ?
2. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a $MN = 12 - 2x$.
3. a. En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que $CI = 8$.
   b. En utilisant le théorème de Thalès, montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $MQ = \frac{4}{3}x$.
   c. En déduire que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a
$$f(x) = \frac{4}{3}x(12-2x)$$
4. Tracer la courbe représentative de f avec la calculatrice et conjecturer les variations de f (conjecturer, c'est émettre une hypothèse sans chercher à la prouver).
5. Développer et réduire l'expression algébrique de $f(x)$.
6. Calculer $f(3)$.
7. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on a
$$f(x) = -\frac{8}{3}(x-3)^2 + f(3)$$

8. ✰ En déduire le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$.

9. ✰ Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?