Ceinture orange 01 - Corrigé

Exercice 1 : Résoudre une inéquation du second degré

Résoudre dans **R** les inéquations suivantes :

1. $-5x^2 + 10x - 8 \geqslant 0$

2. $-2x^2 - 4x + 16 \geqslant 0$

1. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -5x^2 + 10x - 8$.
   On cherche à résoudre $P(x) \geqslant 0$.
   Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
   $\Delta = 10^2 - 4 \times (-5) \times (-8) = -60$
   $\Delta < 0$ donc le polynôme P n'admet pas de racine.
   Il est toujours du signe de $a = -5 < 0$, donc $P(x) < 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   On en déduit $S = \emptyset$.

2. Soit P le polynôme défini pour tout x de $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^2 - 4x + 16$.
   On cherche à résoudre $P(x) \geqslant 0$.
   Pour cela, on cherche ses racines éventuelles.
   $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-2) \times 16 = 144$
   $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
   $x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{144}}{-4} = 2$
   $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{144}}{-4} = -4$
   On sait qu'un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
   Comme $a = -2 < 0$, on peut dire que $P(x) \geq 0$ sur $S =]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$
   On peut résumer le signe du polynôme dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$-2x^2 - 4x + 16$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Finalement $S = [-4; 2]$.