

En 1798, Thomas Malthus publie *An essay on the principle of population* dans lequel il émet l'hypothèse suivante : l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine.

En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes.

Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir 400 000 personnes de plus chaque année.

Pour tout entier naturel n , on note p_n la population (en millions) en $1800+n$ et a_n le nombre de personnes (en millions) pouvant être nourries par l'agriculture la même année. Ainsi $p_0 = 8$ et $a_0 = 10$.

On arrondira si besoin les réponses à 0,001.

1. Donner la relation de récurrence permettant d'exprimer p_{n+1} en fonction de p_n pour $n \in \mathbf{N}$.
En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
2. Donner la relation de récurrence permettant d'exprimer a_{n+1} en fonction de a_n pour $n \in \mathbf{N}$.
En déduire l'expression de a_n en fonction de n .
3. Calculer p_{50} et a_{50} . Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.
4. Calculer les limites des suites (p_n) et (a_n) .
5. Représenter graphiquement les termes des suites p et a pour $n = 0, 10, \dots, 50$.
Vers quelle année la situation semble-t-elle devenir critique ?
6. À l'aide de la calculatrice, déterminer précisément en quelle année, selon ce modèle, la situation aurait dû devenir critique.
7. Que s'est-il réellement passé en Angleterre ? *Faire des recherches*.
Quelles critiques peut-on faire du modèle proposé par Malthus ?