Exo - Fonction logarithme népérien

Capacités attendues :

❏ Utiliser l'équation fonctionnelle du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.

❏ Utiliser la relation $\ln q^n = n \ln q$ pour déterminer un seuil.

❏ Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser le calcul des limites, l'allure des courbes représentatives de la fonction logarithme.

Définition de la fonction logarithme népérien

Exercice 1

1. Pour quelles valeurs de x, $\ln(x)$ est-il défini ?
2. Donner la valeur de $e^{\ln 7}$.
3. Donner la valeur de $\ln(e^5)$ et de $\ln(e^{-3})$.
4. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
   a. $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.
   b. $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(1, 0)$.

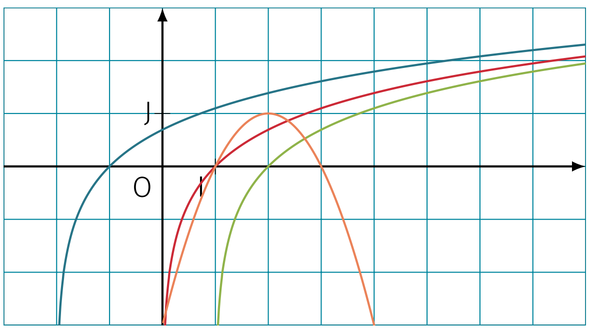
Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{\ln\left(e^{-2}\right)}{\ln\left(e^{4}\right)}$
2. $\ln\left(e^9\right) \times \ln\left(e^{-2}\right)$
3. $\ln(e) + \ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$

Exercice 3

Parmi les courbes suivantes, quelle est la représentation graphique de la fonction ln ?



Exercice 4

Sans les calculer, déterminer le signe de chacun des nombres suivants :

1. $\ln(8)$
2. $\ln(0,1)$
3. $\ln\left(\frac{1}{6}\right)$
4. $\ln(1,9)$
5. $\ln(100)$
6. $\ln\left(2 \times 10^{-3}\right)$

Exercice 5

Dans chaque cas, pour quelles valeurs de x, les expressions suivantes sont-elles définies ?

1. $\ln(x-5)$
2. $\ln(6-3x)$
3. $\ln(x) + \ln(4-x)$

Résoudre des équations et des inéquations

Exercice 6

1. On sait que $e^x = 5$. Que vaut x ?
2. On sait que $\ln(x) = 0$. Que vaut x ?
3. On sait que $\ln(x) = 9$. Que vaut x ?
4. On sait que $\ln(x) = -3$. Que vaut x ?

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes dans $]0\,;\,+\infty[$:

1. $\ln(x) = 1$
2. $\ln(x) = 7$
3. $\ln(x) = -2$
4. $\ln(x) = -1$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes dans $]0\,;\,+\infty[$:

1. $\mathrm{e}^x = 10$
2. $3e^x + 5 = 14$
3. $\ln(2x) + 1 = 0$
4. $\ln(x) = \ln(2x+1)$

Exercice 9

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des nombres réels x pour lesquels les expressions sont bien définies puis résoudre l'inéquation :

1. $\ln(x) \leqslant 2$
2. $\ln(3x) \geqslant \ln(6)$
3. $\ln(1-x) > 0$
4. $\ln(3-2x) \leqslant 1$
5. $\ln(x-4) \leqslant \ln(1+2x)$
6. $\ln(x^2-9) > \ln(2)$
7. $3e^x - 1 < 8$
8. $e^{2x} - 3e^x \geqslant 0$

Exercice 10 ★

On veut résoudre l'équation $e^{2x} - 2e^{x} = 8$ (E).

1. On pose $y = e^{x}$. Montrer que l'équation précédente est équivalente à $y^2 - 2y - 8 = 0$ (E').
2. Résoudre l'équation (E').
3. En déduire les solutions de l'équation initiale (E).

Propriétés algébriques du logarithme népérien

Exercice 11

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

1. $\ln 4$
2. $\ln 8$
3. $\ln \frac{1}{2}$
4. $\ln \frac{1}{8}$
5. $\ln(8e)$
6. $\ln\left(4e^2\right)$
7. $\ln \sqrt{2}$
8. $\ln \sqrt{32}$

Exercice 12

Écrire les nombres suivants en utilisant une seule fois le symbole ln.

1. $A = 5\ln 2 + \ln 8 - \ln 4$
2. $B = 2\ln 3 + \ln 81 - \ln 9$
3. $C = \ln 3 - \ln 2 + \ln 5$
4. $D = \ln 14 - \ln 19$

Exercice 13

1. Écrire le réel $\ln 7 + \ln 2$ en utilisant une seule fois le symbole ln.
2. En déduire les solution de l'équation $\ln x = \ln 7 + \ln 2$ dans $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 14

On considère l'équation (E) : $\ln(x) + \ln(2x) = \ln(18)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $x^2 = 9$ pour $x > 0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 15 ★

On veut résoudre l'équation $(\ln x)^2 + 4\ln \frac{1}{x} - 5 = 0$ (E).

1. On pose $y = \ln x$. Montrer que l'équation précédente est équivalente à $y^2 - 4y - 5 = 0$ (E').
2. Résoudre l'équation (E').
3. En déduire les solutions de l'équation initiale (E).

Exercice 16

Dans chaque cas, utiliser la fonction logarithme népérien pour résoudre les équations suivantes dans $]0\ ;\ +\infty[$:

1. $x^5 = 100$
2. $x^7 = 42$
3. $x^6 = 1,5$

Exercice 17

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $1,5$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer par le calcul le rang n à partir duquel $u_n > 1000$.

Exercice 18

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 100$ et de raison $0,86$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
2. Calculer la limite de la suite (v_n).
3. Déterminer par le calcul le rang n à partir duquel $v_n < 10^{-3}$.

Exercice 19

Une infographiste simule la croissance d'un bambou d'une taille initiale de 1 m.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on modélise la taille, en cm, qu'aurait le bambou à la fin du n-ième mois par la suite (u_n) définie par $u_n = 500 \times 1,5^n - 400$.

1. Calculer la taille, en cm, du bambou à la fin du 3e mois. Arrondir au dixième.
2. Résoudre dans **N** l'inéquation $u_n > 300$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Déterminer, en résolvant une inéquation, le nombre de mois nécessaires pour que le bambou dépasse 10 m.

Exercice 20

Le carbone 14 (C_{14}) présent dans l'organisme d'un être vivant se désintègre au fil des années après sa mort. Le nombre d'années N nécessaires à l'observation de la proportion p de C_{14} restante dans l'organisme peut être modélisé par : $N = -8310 \ln p$.

1. Le squelette d'un homme de Cro-Magnon contient 9 % de C_{14} par rapport à un squelette vivant. Combien d'années se sont écoulées depuis sa mort ?

2. Lucy est la plus ancienne hominidé connue. Les paléontologues estiment à au moins 3,5 millions d'années son âge. A-t-on pu dater les fragments de son squelette à l'aide du carbone 14 ? Justifier.

3. Découverte en 1991 en Italie, la momie d'Ötzi contenait 53,3 % (à 1% près) de C_{14} par rapport à un homme vivant. Donner un encadrement de l'âge d'Ötzi.

Exercice 21

Dans une réserve marine, on a recencé 3000 cétacés au 1er janvier 2020. Les responsables sont inquiets car le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.
Une étude permet d'élaborer un nodèle selon lequel :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre.

On modélise le nombre de cétacés dans la réserve marine au 1er juin de l'année 2020 $+n$ par le terme u_n. Ainsi $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. La réserve marine fermera-elle ? Si oui, en quelle année ? *Répondre à l'aide d'un calcul.*

Exercice 22

Une agence bancaire propose un placement à tous ses clients. Ce placement a rapporté 30 % d'intérêts sur les 5 dernières années.
On note t % le taux d'intérêt annuel moyen de ce placement sur ces 5 dernières années.

1. Justifier que le taux d'intérêt annuel moyen t est tel que $1,3 = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^5$.

2. Résoudre l'équation précédente en utilisant la fonction logarithme népérien. *Donner la valeur exacte, puis l'arrondi au centième.*

3. Interpréter le résultat obtenu dans le contexte de la situation.

Étude de la fonction logarithme népérien

Exercice 23

Dans chaque cas, donner la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. $f(x) = 5\ln(x)$
2. $f(x) = 3 - 2\ln(x)$
3. $f(x) = x\ln(x) - 1$
4. $f(x) = \ln(2x)$
5. $f(x) = \ln\left(x^2\right)$
6. $f(x) = \ln\left(3x^2 + 1\right)$

Exercice 24

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x + x$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \ln x$.

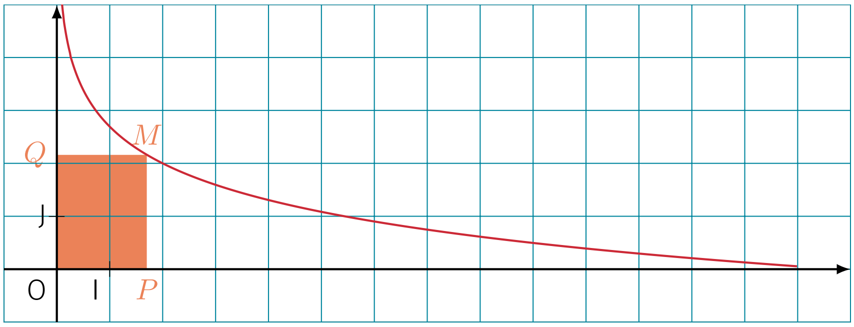
1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Calculer la dérivée de f, en déduire son sens de variation sur $]0\ ;\ +\infty[$ et son signe.

Exercice 26

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ 14[$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthonormé ci-dessous.



À tout point M appartenant à $\mathcal{C}_f$, on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto 2x - x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ modélise l'aire du rectangle $OPMQ$.
2. Dresser le tableau de variation de g sur $]0\ ;\ 14[$.
3. En déduire les coordonnées du point M pour lesquelles l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale. On admettra que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$.

Exercice 27

Un peu d'histoire

> Durant la Renaissance, le commerce se développant, les marchands ont été amenés à constituer des tables d'intérêts pour faciliter les calculs financiers. **Luca Pacioli** (1445-1517), religieux franciscain, mathématicien et fondateur de la comptabilité, présente la règle des 72 en 1494 dans son ouvrage *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*.
> Cette règle est une méthode pour estimer le temps de doublement d'un capital. Luca Pacioli estime que si un capital est placé à un taux d'intérêt annuel de t % alors il faut environ $\dfrac{72}{t}$ années pour le doubler.

Portrait du mathématicien Luca Pacioli expliquant le théorème d'Euclide (oeuvre attribuée à Jacopo de Barbari, 1495).

Partie A : la règle des 72

t désigne un nombre réel strictement positif et n est un nombre entier naturel non nul.

1. Utiliser la règle de Pacioli pour estimer le nombre n d'années nécessaires pour doubler un capital lorsqu'il est placé à un taux d'intérêts composés de :

- $t = 1$ %
- $t = 5$ %
- $t = 10$ %

2. Au bout de n années de placement au taux d'intérêt de t %, le capital est multiplié par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^n$.

   a. Dans chaque cas, déterminer, en utilisant la fonction ln, le plus petit nombre entier naturel n tel que $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^n \geqslant 2$.

   - $t = 1$ %
   - $t = 5$ %
   - $t = 10$ %

   b. Comparer les résultats obtenus dans les questions 1 et 2.

Partie B : une autre estimation

1. f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x$.

   a. Étudier les variations de f et g sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2. Pour des petites valeurs de x, $\dfrac{x^2}{2}$ étant très petit, on choisit d'utiliser l'approximation $\ln(1+x) \approx x$.

   a. Justifier que le nombre de périodes nécessaires au doublement d'un capital placé à un taux d'intérêt annuel de t % est proche de $\dfrac{70}{t}$ (pour des petites valeurs de t).

   b. Que devient cette règle si l'on veut tripler le capital ?