Corrigé de l'évaluation-bilan 6

Exercice 1

(E) est l'équation différentielle :

$$y' = -5y + 7$$

1. Déterminer la solution constante de (E).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = -5y$.
3. En déduire toutes les solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 2$.

1. Soit y_0 une solution particulière constante de (E).
   On a donc : $y_0' = 0$ et $-5y_0 + 7 = 0$.
   On en déduit : $y_0 = \dfrac{7}{5}$.
2. On résout l'équation différentielle $y' = -5y$:
   Les solution de cette équation homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = ke^{-5x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $$y(x) = ke^{-5x} + \frac{7}{5}$$

   avec $k \in \mathbb{R}$.
4. Soit f la solution de (E) telle que $f(0) = 2$.

   $$\begin{aligned} f(0) = 2 \quad &\iff \quad ke^{-5\times 0} + \frac{7}{5} = 2 \\ &\iff \quad k + \frac{7}{5} = 2 \\ &\iff \quad k = 2 - \frac{7}{5} \\ &\iff \quad k = \frac{10}{5} - \frac{7}{5} \\ &\iff \quad k = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

   Donc la solution f de (E) telle que $f(0) = 2$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = \frac{3}{5}e^{-5x} + \frac{7}{5}$$

Exercice 2

(E) est l'équation différentielle :

$$y' = 2x^3 - 4x + 1$$

Déterminer la solution g de (E) telle que $g(0) = 2$.

Les solutions de (E) sont les primitives de la fonction $x \mapsto 2x^3 - 4a + 1$.
On a donc :

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur R par : $f(x) = \frac{2}{4}x^4 - \frac{4}{2}x^2 + x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$$= \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + C$$

Soit g la solution de (E) telle que $g(0) = 2$.

$$\begin{aligned} g(0) = 2 \quad & \iff \quad \frac{1}{2} \times 0^4 - 2 \times 0^2 + 0 + C = 2 \\ & \iff \quad C = 2 \end{aligned}$$

Donc la solution g de (E) telle que $g(0) = 2$ est la fonction définie sur R par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + 2$$

Exercice 3

Afin de chauffer un liquide, on fait passer un courant électrique dans une résistance.
La température, en °C, du liquide à l'instant t, en secondes, est noté $T(t)$.
On admet que la fonction T, définie sur $[0\ ;\ 80]$, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad T' = -0{,}02T + 1$$

1. Interpréter l'information $T(0) = 20$.

2. Résoudre (E) sur $[0\ ;\ 80]$.

3. Déterminer la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $T(0) = 20$.

4. Déterminer l'instant t_0, en s, à partir duquel la température du liquide dépasse 40 °C. *On arrondira au dixième de seconde.*

1. La température du liquide à l'instant $t = 0$ est de 20 °C.

2. On résout l'équation différentielle (E) :

   - **Recherche d'une solution particulière constante :**
     Soit T_0 une solution particulière constante de (E).
     On a donc : $T_0' = 0$ et $-0{,}02T_0 + 1 = 0$.
     On en déduit : $T_0 = \frac{1}{0{,}02} = 50$.

- **Recherche des solutions de l'équation homogène :**
  On résout l'équation différentielle $T' = -0{,}02T$:
  Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions définies sur $[0\ ;\ 80]$ par :
  $$T(t) = ke^{-0{,}02t}$$
  avec $k \in \mathbb{R}$.
- **Conclusion :**
  Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $[0\ ;\ 80]$ par :
  $$T(t) = ke^{-0{,}02t} + 50$$
  avec $k \in \mathbb{R}$.

3. Soit T la solution de (E) telle que $T(0) = 20$.

$$\begin{aligned}
T(0) = 20 \quad &\iff \quad ke^{-0{,}02\times 0} + 50 = 20\\
&\iff \quad k + 50 = 20\\
&\iff \quad k = 20 - 50\\
&\iff \quad k = -30
\end{aligned}$$

Donc la solution T de (E) telle que $T(0) = 20$ est la fonction définie sur $[0\ ;\ 80]$ par :
$$T(t) = -30e^{-0{,}02t} + 50$$

4. On cherche l'instant t_0, en s, à partir duquel la température du liquide dépasse 40 °C.
On résout donc l'inéquation : $T(t) > 40$

$$\begin{aligned}
T(t) > 40 \quad &\iff \quad -30e^{-0{,}02t} + 50 > 40\\
&\iff \quad -30e^{-0{,}02t} > 40 - 50\\
&\iff \quad -30e^{-0{,}02t} > -10\\
&\iff \quad e^{-0{,}02t} < \frac{1}{3}\\
&\iff \quad -0{,}02t < \ln\left(\frac{1}{3}\right)\\
&\iff \quad t > -\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{0{,}02}\\
&\iff \quad t > 50\ln(3)
\end{aligned}$$

La valeur approchée de $t_0 = 50\ln(3)$ est $t_0 \approx 54{,}9$ s.
Donc la température du liquide dépasse 40 °C à partir de l'instant $t_0 \approx 54{,}9$ s.

Exercice 4

Déterminer l'expression de la fonction dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $(1\,;\,3)$ et telle qu'en chaque point M de cette courbe, le coefficient directeur de la tangente est égal au double de l'ordonnée du point M.

Soit f la fonction dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $(1\,;\,3)$ et telle qu'en chaque point M de cette courbe, le coefficient directeur de la tangente est égal au double de l'ordonnée du point M.
On a donc : $f'(x) = 2f(x)$.

- On résout l'équation différentielle $f'(x) = 2f(x)$:
  Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ke^{2x}$$

  avec $k \in \mathbb{R}$.

- Soit f la solution de (E) telle que $f(1) = 3$.

$$\begin{aligned} f(1) = 3 \quad &\iff \quad ke^{2\times 1} = 3 \\ &\iff \quad ke^{2} = 3 \\ &\iff \quad k = 3e^{-2} \end{aligned}$$

  Donc la fonction dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $(1\,;\,3)$ et telle qu'en chaque point M de cette courbe, le coefficient directeur de la tangente est égal au double de l'ordonnée du point M est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3e^{-2}e^{2x}$$