1ère

# Corrigé de l'évaluation

27/09/2022

## Exercice 1 (8 points)

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $5x - 2 > 8x + 31$
2. $(2x+1)(3x-2) \geqslant 0$
3. $\dfrac{-5x-2}{-7x+8} \geqslant 0$

## Corrigé de l'exercice 1

1. $5x - 2 > 8x + 31 \Leftrightarrow -3x > 33$
$\Leftrightarrow x < -11$

$\mathcal{S}_1 = ]-\infty\ ;\ -11[$

2. $(2x+1)(3x-2) \geqslant 0$

On a le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $2x + 1$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| signe de $3x - 2$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| signe de $(2x+1)(3x-2)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

D'où $\mathcal{S}_2 = \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

3. $\dfrac{-5x-2}{-7x+8} \geqslant 0$

On a le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{5}$ | | $\frac{8}{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-5x - 2$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| signe de $-7x + 8$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| signe de $\dfrac{-5x-2}{-7x+8}$ | | $+$ | 0 | $-$ | $\|$ | $+$ | |

D'où $\mathcal{S}_3 = \left]-\infty\ ;\ -\frac{2}{5}\right] \cup \left]\frac{8}{7}\ ;\ +\infty\right[$

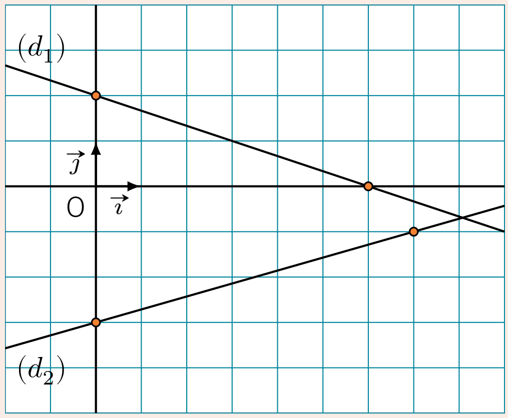
## Exercice 2 (8 points)

1. Donner sans justifier les équations des droites $(d_1)$ et $(d_2)$.

2. On considère $f_1$ et $f_2$ les fonctions représentées par $(d_1)$ et $(d_2)$.
Résoudre graphiquement $f_1(x) = f_2(x)$.

3. On considère la fonction affine $f$ telle que $f(1) = 6$ et $f(7) = 1$.
Déterminer par le calcul une expression algébrique de $f$.

4. Le point $K\,(-10\ ;\ 65)$ appartient-il à $(d)$, la droite représentative de $f$ ?




## Corrigé de l'exercice 2

1. $(d_1) : y = -\dfrac{1}{3}x + 2$ et $(d_2) : y = \dfrac{2}{7}x - 3$.

2. La solution de l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ est l'abscisse du point d'intersection des droites $(d_1)$ et $(d_2)$, soit 8.

3. $f$ est affine. Il existe donc deux réels $m$ et $p$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.

**Déterminons $m$ :**

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} \\ &= \frac{1 - 6}{6} \\ &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{5}{6}x + p$.

**Déterminons $p$ :**

$$\begin{aligned} f(1) = 6 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{6} \times 1 + p = 6 \\ &\Leftrightarrow \quad p = 6 + \frac{5}{6} \\ &\Leftrightarrow \quad p = \frac{41}{6} \end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{41}{6}$.

4. On cherche à vérifier si $f(-10) = 65$.

$$\begin{aligned} f(-10) &= -\frac{5}{6} \times (-10) + \frac{41}{6} \\ &= \frac{50}{6} + \frac{41}{6} \\ &= \frac{91}{6} \\ &\neq \frac{390}{6} = 65 \end{aligned}$$

les coordonnées de $K$ ne sont pas solution de l'équation de $(d)$ donc $K$ n'appartient pas à $(d)$.

## Exercice 3 (8 points)

1. Démontrer que, pour tout $x$ réel différent de 5, $\dfrac{x}{2x-10} - 2 = \dfrac{-3x+20}{2x-10}$.

   En déduire les solutions de $\dfrac{x}{2x-10} \geqslant 2$.

2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{1-4x}{x-3} < 4$.

## Corrigé de l'exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{2x-10} - 2 &= \frac{x}{2x-10} - \frac{2(2x-10)}{2x-10}\\ &= \frac{x}{2x-10} - \frac{4x-20}{2x-10}\\ &= \frac{x-(4x-20)}{2x-10}\\ &= \frac{x-4x+20}{2x-10}\\ &= \frac{-3x+20}{2x-10}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{x}{2x-10} \geqslant 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2x-10} - 2 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-3x+20}{2x-10} \geqslant 0\end{aligned}$$

On peut donc écrire le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $5$ | | $\frac{20}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-3x+20$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| signe de $2x-10$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| signe de $\dfrac{-3x+20}{2x-10}$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

D'où $\mathcal{S}_1 = \left]5\ ;\ \dfrac{20}{3}\right]$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$\begin{aligned}\frac{1-4x}{x-3} < 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-4x}{x-3} - 4 < 0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1-4x}{x-3} - \frac{4(x-3)}{x-3} < 0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1-4x}{x-3} - \frac{4x-12}{x-3} < 0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1-4x-(4x-12)}{x-3} < 0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1-4x-4x+12}{x-3} < 0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-8x+13}{x-3} < 0\end{aligned}$$

On peut donc écrire le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{13}{8}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-8x+13$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| signe de $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| signe de $\dfrac{-8x+13}{x-3}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | |

D'où $\mathcal{S}_2 = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{13}{8}\right[ \cup \left]3\ ;\ +\infty\right[$.

## Exercice 4 (2 points + 4 points bonus)

Soit $f$ une fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
On appelle $f^2$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f^2(x) = f(f(x))$.
On généralise cette notation pour $n \in \mathbb{N}$ : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ et $f^0(x) = x$.

1. Vérifier que pour $n = 1, n = 2$ et $n = 3$, les fonctions $f^n$ sont affines.
2. Quelle conjecture peut-on faire sur le taux d'accroissement et l'ordonnée à l'origine de $f^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ?
3. Déterminer une fonction affine $f$ vérifiant la propriété suivante : « Il existe un entier $n > 1$ tel que $f^n(x) = 2048x - 2047$.