Mercredi 28/05/2025

NOM, Prénom :

Évaluation-bilan 7

T[ale]Comp

Calculatrice autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

... / 10 pts

Dans cet exercice, les questions 1, 2, 3 et 4 peuvent être traitées de façon indépendante les unes des autres.

Un parachutiste est en chute libre dans l'air jusqu'à l'instant $t = 0$ où il ouvre son parachute. Sa vitesse est alors de 50 m.s^{-1}. On admet par la suite que sa vitesse v, en m.s^{-1}, en fonction du temps t, en s, est solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$(E)\ :\quad y' = -5y + 10.$$

1. La fonction constante g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = 2$ est-elle une solution de l'équation différentielle (E) ? Justifier la réponse.

2. Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t) = k\mathrm{e}^{-5t} + 2$, où k est un nombre réel donné.

3. En admettant le résultat de la question précédente, montrer que la fonction v est donnée sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $v(t) = 48\mathrm{e}^{-5t} + 2$.

4. La distance parcourue, en mètre, par le parachutiste pendant les 10 premières secondes après ouverture du parachute est donnée par l'intégrale :

$$\int_0^{10} \left(48\mathrm{e}^{-5t} + 2\right)\ dt$$

Calculer cette intégrale (arrondir à 10^{-1}).

Exercice 2

... / 10 pts

Le tableau suivant donne l'évolution du prix p_i, en euros, d'une action en Bourse depuis son introduction.

Jour j_i	2	7	12	16	20	25
p_i	13,6	13,8	14,3	14,2	14,9	15,3

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables p et j. *Arrondir au millième.*

2. Peut-on envisager un ajustement affine du nuage ? Si oui, donner l'équation de la droite de régression de p en j. *Arrondir les coefficients au millième.*

3. Peut-on estimer le prix de cette action au 30^{e} jour ? Si oui, donner la valeur estimée.

   Quelle fiabilité peut-on accorder à cette estimation ?

4. Estimer le nombre de jours nécessaires pour que le prix de l'action atteigne 14 euros.

Question 1

Soit g la fonction constante définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = 2$.
$g'(t) = 0$ et $-5g(t) + 10 = -5 \times 2 + 10 = 0$ donc $g'(t) = -5g(t) + 10$.
Donc g est solution de l'équation différentielle (E).

Question 2

D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t) = k\text{e}^{at}$, où k est un nombre réel quelconque, donc les solutions de l'équation différentielle $y' = -5y$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t) = k\text{e}^{-5t}$, où k est un nombre réel quelconque.
Une solution de l'équation différentielle $y' = -5y + 10$ est la somme d'une solution de l'équation différentielle $y' = -5y$ et d'une solution constante de l'équation différentielle $y' = -5y + 10$, donc les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t) = k\text{e}^{-5t} + 2$, où k est un nombre réel quelconque.

Question 3

On sait que v est solution de (E) et que $v(0) = 50$; donc $k\text{e}^0 + 2 = 50$ donc $k = 48$.
La fonction v est donc donnée sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $v(t) = 48\text{e}^{-5t} + 2$.

Question 4

La distance parcourue, en mètre, par le parachutiste pendant les 10 premières secondes après ouverture du parachute est donnée par l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{10} \left(48\text{e}^{-5t} + 2\right)$.
Pour calculer cette intégrale, il faut trouver une primitive de la fonction v.
La fonction $t \longmapsto \text{e}^{at}$ avec $a \neq 0$, a pour primitive la fonction $t \longmapsto \dfrac{\text{e}^{at}}{a}$, donc la fonction v a pour primitive la fonction V définie par $V(t) = 48\dfrac{\text{e}^{-5t}}{-5} + 2t$ soit $V(t) = -9,6\text{e}^{-5t} + 2t$.

$$\begin{aligned}\int_0^{10} \left(48\text{e}^{-5t} + 2\right)\ dt = \Big[V(t)\Big]_0^{10} &= V(10) - V(0) = \left(-9,6\text{e}^{-5\times10} + 2 \times 10\right) - \left(-9,6\text{e}^{-5\times0} + 2 \times 0\right)\\ &= -9,6\text{e}^{-50} + 20 + 9,6 = 29,6 - 9,6\text{e}^{-50} \approx 29,6\end{aligned}$$