Chapitre 11

Fonction exponentielle

1 Définition de la fonction exponentielle

Propriété

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur **R** vérifiant :

$$\text{pour tout nombre réel } x \quad f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Preuve

L'existence de cette fonction est admise.
La démonstration de l'unicité pourra être faite en exercice.

Définition

La **fonction exponentielle** est la fonction, notée exp, définie et dérivable sur **R** telle que $\exp(0) = 1$ et $\exp' = \exp$.

Méthode

Déterminer la fonction f définie et dérivable sur R telle que $f' = f$ et $f(0) = 3$.
On pose : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 3\exp(x)$.
Cette égalité définit la fonction f qui est bien définie et dérivable sur **R**.
Pour $x \in \mathbf{R}$, $\quad f'(x) = 3\exp'(x) = 3\exp(x) = f(x)$.

2 Propriétés algébriques

Propriété

La fonction exponentielle est **strictement positive** : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(x) > 0$.

Preuve

La démonstration pourra être faite en exercice.

Propriété : Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels x et y, $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$.

Preuve

Soit y un nombre réel fixé.
On définit la fonction f par : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.
f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ et, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{[\exp(x)]^2} = 0$$

On en déduit que f est une fonction **constante**. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(0) = \exp(y)$.
On a donc montré que $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$. Ainsi $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Propriété

Pour tout nombre réel x, $\quad \exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad$ et $\quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Preuve

Soit x un nombre réel.
On applique le théorème précédent à x et $-x$. On obtient :

$$\begin{aligned}\exp(x) \times \exp(-x) &= \exp(x-x)\\ &= \exp(0)\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(x)$ et $\exp(-x)$ sont inverses l'un de l'autre. Donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Propriété

Pour tous nombres réels x et y, $\quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Preuve

En exercice

Propriété (admise)

Pour tout réel x et tout entier relatif n, $\quad \boxed{[\exp(x)]^n = \exp(nx)}$.

Exemples

- $\begin{aligned}\exp(3) \times \exp(7) &= \exp(3+7)\\ &= \exp(10)\end{aligned}$
- $\begin{aligned}(\exp(2))^4 &= \exp(4 \times 2)\\ &= \exp(8)\end{aligned}$
- $\exp(-5) = \dfrac{1}{\exp(5)}$

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\exp(5) \times \exp(8) \times [\exp(2)]^3$
2. $\exp(5) \times (\exp(5))^{-1} \times \exp(10)$

3 Le nombre e

Définition

On note $\exp(1) = e$

Remarques

- e est un nombre réel irrationnel.
- $e \approx 2,718$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n = e^n$.

Notation

Par extension, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on notera : $\exp(x) = e^x$.

Propriété

Avec cette notation, les propriétés vues précédemment s'écrivent :
Pour tous x, y réels et tout n entier relatif,

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^x \times e^{-x} = 1$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

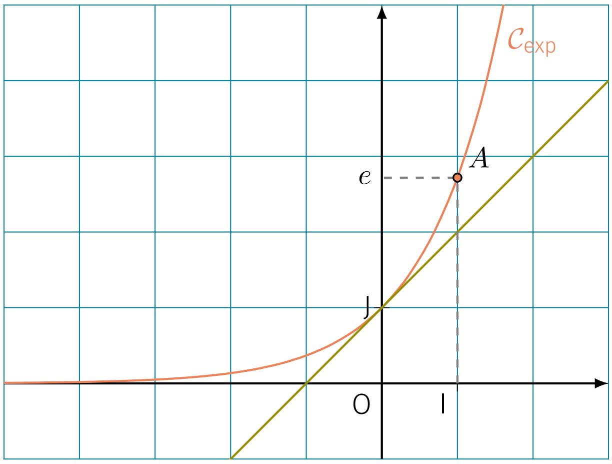
Exemple

$$\begin{aligned}\frac{(e^7)^4 \times e^3}{e^4} &= \frac{e^{7\times 4} \times e^3}{e^4} \\ &= \frac{e^{28} \times e^3}{e^4} \\ &= e^{28+3-4} \\ &= e^{27}\end{aligned}$$

4 La fonction exponentielle

Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Preuve

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$.
la fonction dérivée de la la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a\, e^{ax+b}$.

Preuve

Soient a et b deux nombres réels.
On a vu dans le chapitre 8 que la dérivée de f définie par $f(x) = g(ax+b)$ était donnée par :
$f'(x) = a\, g'(ax+b)$.
On applique cette propriété avec $g = \exp$ et on obtient le résultat.

Exemple

Étude des variations d'une fonction :
La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -3\, e^{2x-5} + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 \times \left(-3\, e^{2x-5}\right) + 0 \\ &= -6\, e^{2x-5} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x-5} > 0$, donc $h'(x) < 0$.
La fonction h est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

5 Applications : résolutions d'équations et d'inéquations

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b :

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a < e^b \iff a < b$

Exemples

- **Résolution d'équation :**
  Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\quad e^{2x} = \dfrac{1}{e}$
  Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{2x} = \frac{1}{e} &\iff e^{2x} = e^{-1} \\ &\iff 2x = -1 \\ &\iff x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

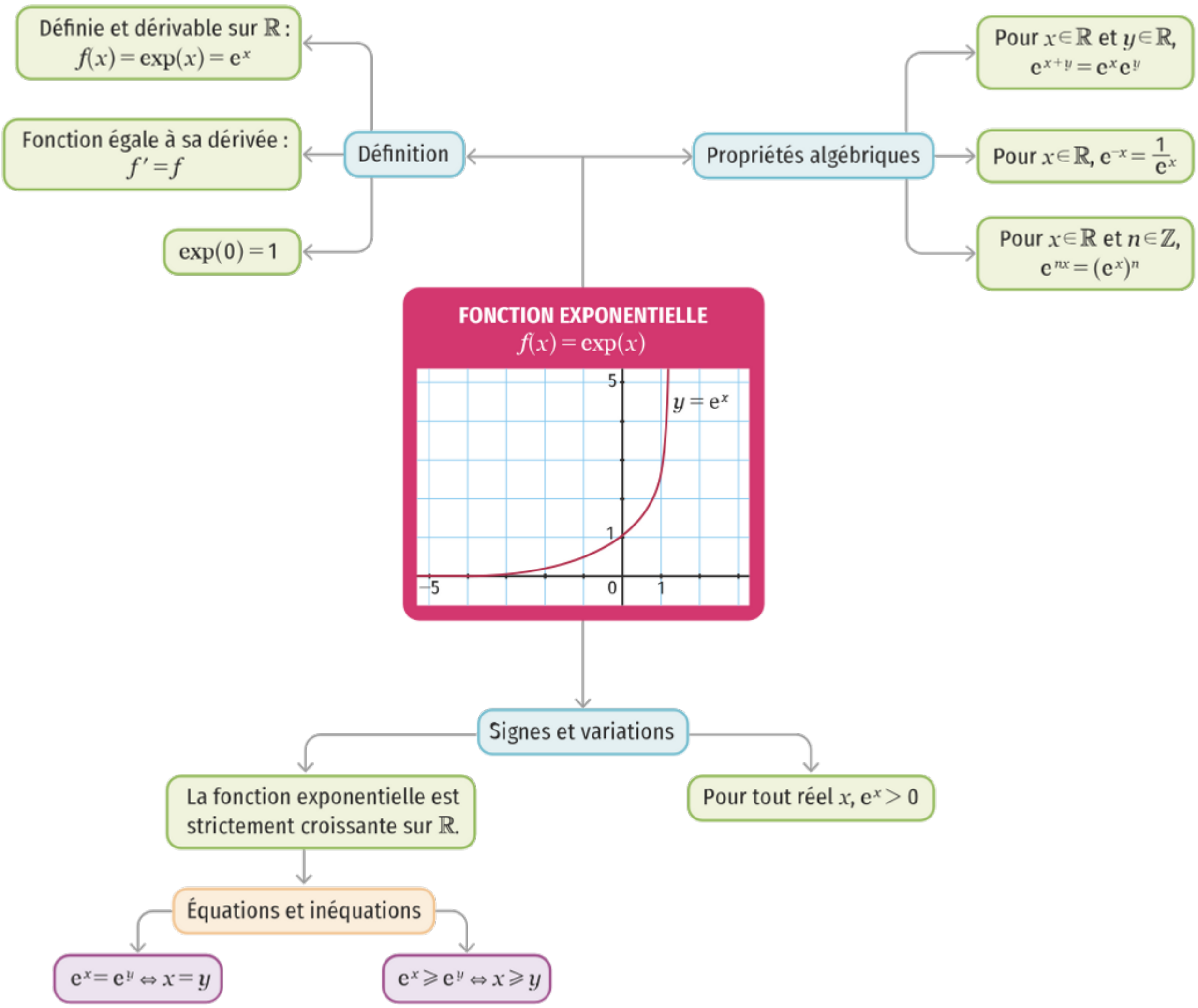
  L'équation $e^{2x} = \dfrac{1}{e}$ a pour unique solution $-\dfrac{1}{2}$.

- **Résolution d'inéquation :**
  Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\quad e^{-3x+4} + 1 \geqslant 2$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} e^{-3x+4} + 1 \geqslant 2 &\iff e^{-3x+4} \geqslant 1 \\ &\iff e^{-3x+4} \geqslant e^0 \\ &\iff -3x + 4 \geqslant 0 \\ &\iff x \leqslant \frac{4}{3} \end{aligned}$$

  L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-3x+4} + 1 \geqslant 2$ est l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{4}{3}\right]$.

À retenir


Définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:
$f(x) = \exp(x) = e^x$
Fonction égale à sa dérivée :
$f' = f$
$\exp(0) = 1$
Définition
Propriétés algébriques
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,
$e^{x+y} = e^x e^y$
Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,
$e^{nx} = (e^x)^n$
FONCTION EXPONENTIELLE
$f(x) = \exp(x)$
5
$y = e^x$
1
-5
0
1
Signes et variations
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $e^x > 0$
Équations et inéquations
$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
$e^x \geqslant e^y \Leftrightarrow x \geqslant y$