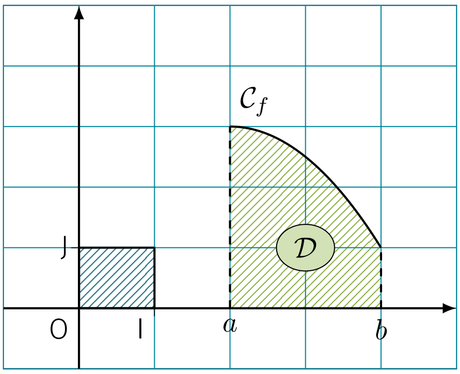
Chapitre 7

Intégration

1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Dans cette partie, on considère une fonction f **continue** et **positive** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f sur $[a\ ;\ b]$ dans un repère orthogonal $(\ O\ ;\ I\ ;\ \ J\ )$.



Définitions

- L'**unité d'aire**, notée u.a., est l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.
- Le **domaine situé sous la courbe** $\mathcal{C}$ est la partie du plan $\mathcal{D}$ délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
- L'**intégrale de** a **à** b **de la fonction** f est l'aire, exprimée en u.a., du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$. On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ (lire « intégrale de a à b de f).

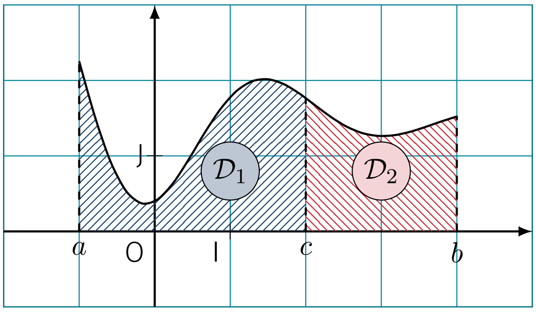
Remarques

- Pour toute fonction continue et positive f sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ est un nombre réel positif.
- On dit que x est une variable muette car elle n'intervient pas dans le résultat de l'intégrale. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(u)\ du = \ldots$.

Propriété : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et c un réel tel que $a < c < b$. Alors, on a la relation suivante :

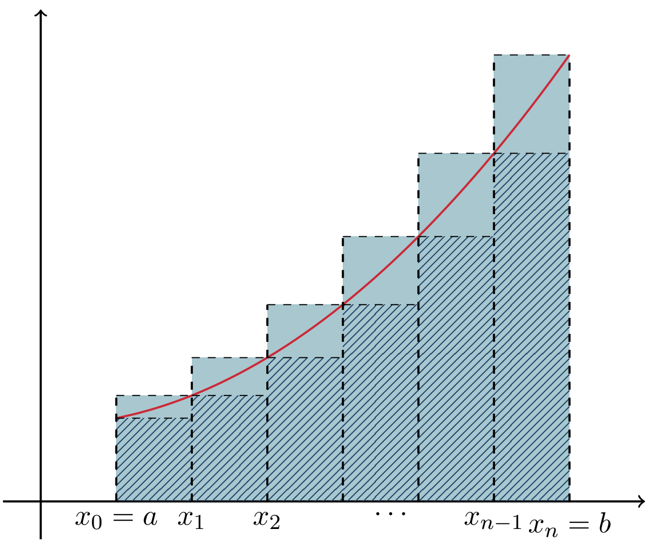
$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$



2 Estimer la valeur d'une intégrale

La métode des rectangles

Pour f une fonction positive, **croissante** et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, on subdivise l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$ et on note $x_k = a + kh$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.
Sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, on construit les rectangles de hauteur $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$.
s_n est la somme des aires, en u.a. des rectangles hachurés contenus dans le domaine sous la courbe $\mathcal{C}_f$.
S_n est la somme des aires, en u.a. des rectangles colorés qui contiennent le domaine sous la courbe $\mathcal{C}_f$.



Propriété

Si f est une fonction **positive, croissante et continue** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$s_n \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant S_n$$

avec :

- $s_n = h\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right)$ (aire des rectangles hachurés)
- $S_n = h\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right)$ (aire des rectangles colorés)
- $h = \dfrac{b-a}{n}$ (largeur de chaque sous-intervalle)

Remarques

- Lorsque la fonction f est positive **décroissante** et continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, il faut changer le sens des inégalités.
- Plus la la valeur de n augmente, plus les valeurs de s_n et S_n se rapprochent de la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
  En effet, si f est croissante sur $[a\ ;\ b]$, on a :

  $$\begin{aligned} S_n - s_n &= h\left(f(x_n) - f(x_0)\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) \end{aligned}$$

  Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (S_n - s_n) = 0.$

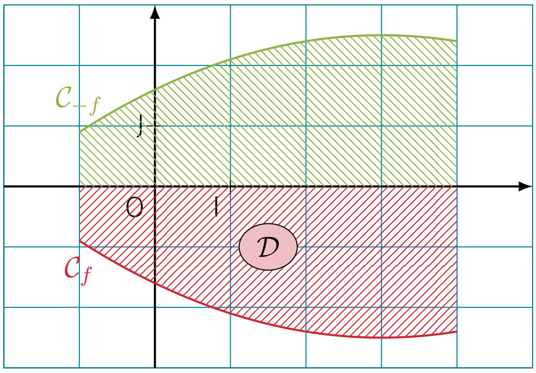
3 Calcul intégral

Intégrale d'une fonction de signe quelconque

On généralise la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ à une fonction de signe quelconque en partageant $[a\ ;\ b]$ en intervalles sur lesquels la fonction f est de signe constant.

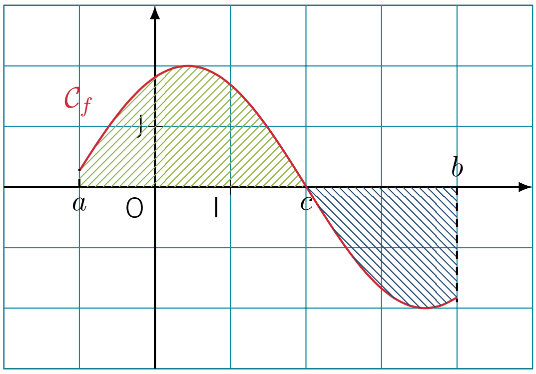
Définition

1. Si f est négative sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, alors l'intégrale de f entre a et b est égale à $\displaystyle -\int_a^b -f(x)\,dx.$



2. Si f est positive sur $[a\ ;\ c]$ et négative sur $[c\ ;\ b]$, avec c un réel compris entre a et b, alors l'intégrale de f entre a et b est égale à :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx - \int_c^b -f(x)\ dx$$



Remarque

Lorsque f est négative, alors $-f$ est positive

Théorème fondamental

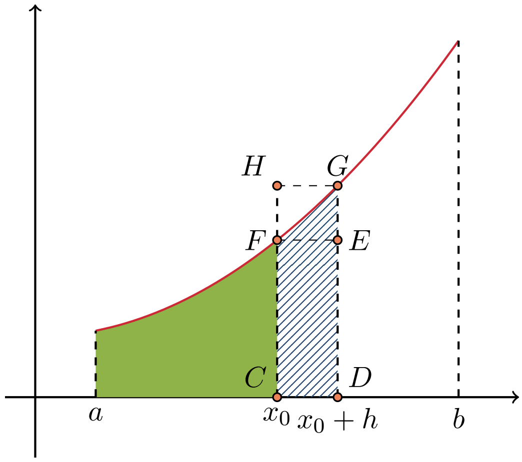
Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
La fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et sa dérivée est la fonction f.
Autement dit, pour tout x de $[a\ ;\ b]$, on a : $F'(x) = f(x)$.
La fonction F est **la primitive** de la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ telle que $F(a) = 0$.

Preuve

On se limite au cas où la fonction f est positive et croissante sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.
Soit x_0 un réel de $[a\ ;\ b]$.
On note h un réel non nul tel que $x_0 + h$ est dans $[a\ ;\ b]$.

Cas où $h > 0$:
f est positive sur $[a\ ;\ b]$ donc $F(x_0)$ est l'aide en u.a. de la surface colorée verte.
D'après la relation de Chasles, la différence $F(x_0 + h) - F(x_0)$ est l'aire de la surface hachurée bleue.
Comme f est croisssante, on peut encadrer l'aire de cette surface par l'aire, en u.a. des rectangles $CDEF$ et $CDGH$ de largeur h et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$.



On a donc :

$$hf(x_0) \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0) \leqslant hf(x_0 + h)$$

En divisant par h, on obtient :

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$$

Cas où $h < 0$:
De façon analogue, on obtient :

$$f(x_0 + h) \leqslant \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

Conclusion :
f est continue sur $[a\ ;\ b]$ donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
Par suite, F est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $F'(x) = f(x)$.

Calcul d'une intégrale

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle.
On a :

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Preuve

D'après le théorème fondamental, la fonction G définie sur $[a\ ;\ b]$ par $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est une primitive de f sur cet intervalle.

De plus, si F est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$, alors il existe un réel C tel que, pour tout x appartenant à $[a\ ;\ b]$, $F(x) = G(x) + C$.
On a donc : $F(b) - F(a) = G(b) + C - G(a) - C = G(b) - G(a)$.
Or $G(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $G(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\ dt = 0$.
Donc $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.

Notation

Pour effectuer les calculs, on note :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Exemple

On veut calculer l'intégrale de la fonction cube f entre -3 et 1.
On sait qur la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.

On a donc : $$\begin{aligned}\int_{-3}^{1} x^3\ dx &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-3}^{1} \\ &= \frac{1^4}{4} - \frac{(-3)^4}{4} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{81}{4} \\ &= -20\end{aligned}$$

4 Propriétés des intégrales

Propriétés algébriques

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et k un réel.
On a :

- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_a^b kf(x)\ dx = k\int_a^b f(x)\ dx$

Propriété : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et c un réel tel que $a < c < b$.
Alors, on a la relation suivante :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

Propriété : positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Si pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$.
- Si pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leqslant 0$.

Propriété : intégration et inégalités

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Si pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.

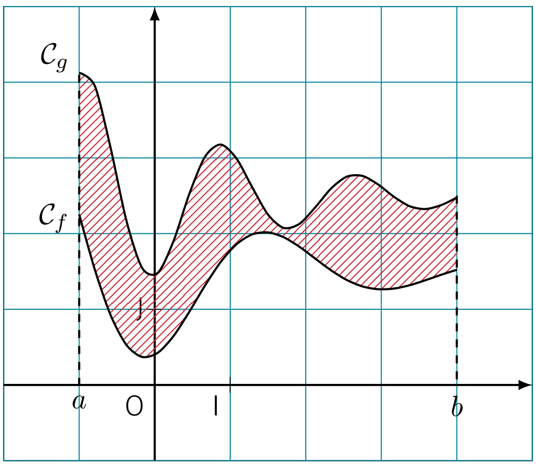
5 Applications du calcul intégral

Calculs d'aires

La définition de l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ permet de calculer l'aire du domaine situé sous sa courbe. Plus généralement, l'intégrale d'une d'une fonction continue de signe quelconque permet de calculer l'aire de certaines surfaces planes délimitées par deux courbes.

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a\ ;\ b]$ et telles que $f \leqslant g$ sur $[a\ ;\ b]$.
Soit A l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



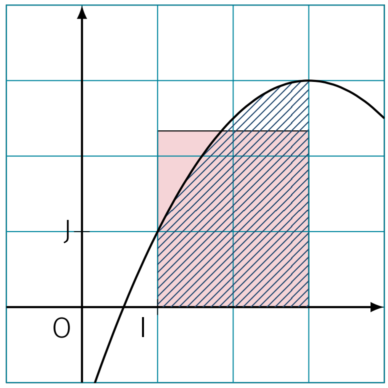
$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\ dx$$

Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ $(a < b)$.
On appelle **valeur moyenne de f sur** $[a\ ;\ b]$ le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$



Dans le cas où la fonction f est positive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, la valeur moyenne de f sur cet intervalle est égale à la hauteur du rectangle de base $b-a$ et d'aire égale à l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.