Chapitre 4

Probabilités conditionnelles

1 Exemple d'introduction

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B.
Le tableau suivant présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

1. On choisit au hasard un patient et on considère les évènements suivants :
   A : « Le patient a pris le médicament A »
   G : « Le patient est guéri ».

   On a alors :

   - La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est :
   - La probabilité qu'un patient soit guéri est :
   - La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité avec le médicament A est :
   - La probabilité qu'un patient ne soit pas guéri et qu'il soit traité avec le médicament A est :

2. On choisi maintenant au hasard un **patient guéri**.

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

- La probabilité que le patient ait pris le médicament A sachant qu'il est guéri se note $P_G(A)$. Elle est égale à :

- La probabilité que le soit guéri sachant qu'il a pris le médicament B se note $P_B(G)$. Elle est égale à :

Dans tout le cours, on considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω et P une probabilité sur Ω. A, B et C sont des évènements de Ω tels que $P(A) \neq 0$.

2 Notion de probabilité conditionnelle

2.1 Probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé

Définition

La **probabilité conditionnelle** que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé est le nombre

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P_A(B)$ se lit « *probabilité de B sachant A* ».

Propriété

La fonction P_A, définie sur Ω est une loi de probabilité appelée **loi de probabilité conditionnelle sachant** A.

Preuve

Pour que P_A soit une loi de probabilité sur Ω, elle doit vérifier :

- $P_A(\Omega) = 1$ et $P_A(\varnothing) = 0$;
- $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$;
- Si B et C sont disjoints, $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$.

Vérifions chacun des ces points :

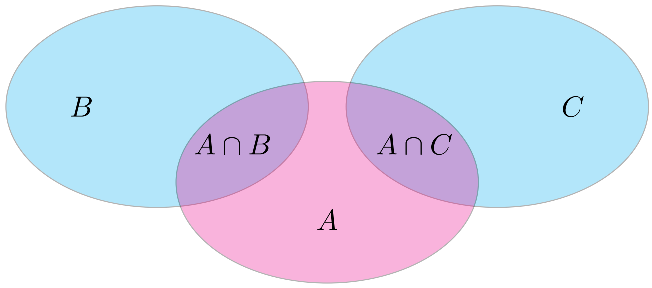
1. $$\begin{aligned} P_A(\Omega) &= \frac{P(A\cap\Omega)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A)}{P(A)} \quad \text{car } A \text{ est inclus dans } \Omega \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_A(\varnothing) &= \frac{P(A\cap\varnothing)}{P(A)} \\ &= \frac{P(\varnothing)}{P(A)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $A\cap B$ est inclus dans A donc $0 \leqslant P(A\cap B) \leqslant P(A)$.

   Ainsi $\quad 0 \leqslant \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \leqslant \dfrac{P(A)}{P(A)}$ c'est-à-dire $\quad 0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$.

3. Soient B et C deux évènements disjoints.



$$\begin{aligned} P_A(B\cup C) &= \frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(A)} \\ &= \frac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{P(A)} \\ &= \frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(A)} \quad \text{car } A\cap B \text{ et } A\cap C \text{ sont disjoints} \\ &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} + \frac{P(A\cap C)}{P(A)} \\ &= P_A(B)+P_A(C) \end{aligned}$$

Propriété

Si A et B sont deux évènements de probabilité non nulle, alors

$$P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = P(B)\times P_B(A)$$

Exercice 1

Dans un classe de première, 55 % des élèves sont des filles et 40 % des élèves sont des filles demi-pensionnaires.
On choisit au hasard un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité que cet élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille ?

2.2 Utilisation de tableaux

Les tableaux à double entrée permettent un présentation claire de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Exercice 2

Un club sportif rassemble 180 membres répartis en junior et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les juniors.
En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une juniore.

Méthode

1. On définit les évènements :
   - H : La personne choisie au hasard est un homme ;
   - J : La personne choisie au hasard appartient à la catégorie junior.
2. On construit un tableau à double entrée que l'on complète à l'aide des informations de l'énoncé.

	J	$\overline{J}$	Total
H			
$\overline{H}$			
Total			

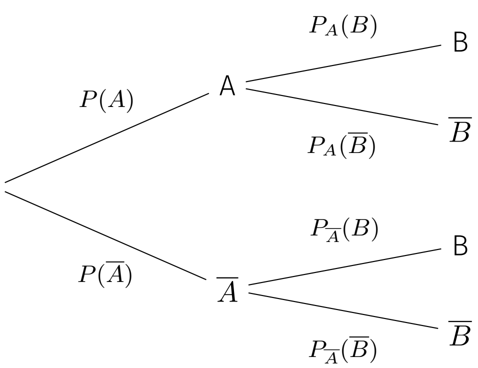
3. On détermine $P_{\overline{H}}(J)$ en calculant $\dfrac{P(\overline{H} \cap J)}{P(\overline{H})}$.

3 Formule des probabilités totales

3.1 Arbre pondéré

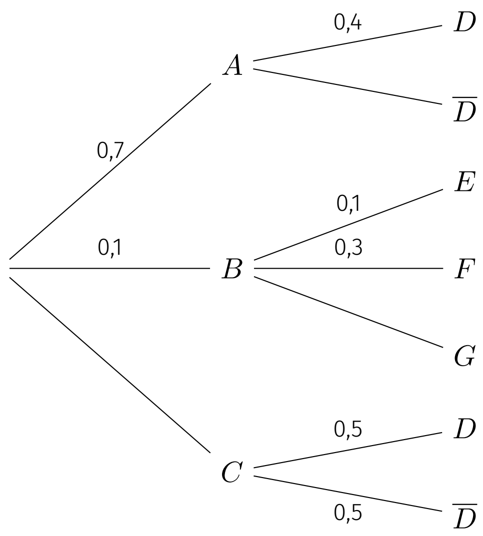
Propriétés (admises)

1. La somme des probabilités des branches issues d'un nœud est égale à 1.
2. La probabilité de l'évènement à l'extrémité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches composant ce chemin.
3. La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins conduisant à cet évènement.



Exemple

On considère l'arbre pondéré ci-dessous :



- D'après la première propriété :
  $P(A)+P(B)+P(C)=1,\quad P_A(D)+P_A(\overline{D})=1$ et $P_B(E)+P_B(F)+P_B(G)=1$

- D'après la deuxième propriété, $P(A\cap D)=P(A)\times P_A(D)$ d'où :

- D'après la troisième propriété, $P(D)=P(A\cap D)+P(C\cap D)$ d'où :

Exercice 3 : Calculer des probabilités conditionnelles à l'aide d'un arbre

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- sachant qu'un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- sachant qu'un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On note les événements :

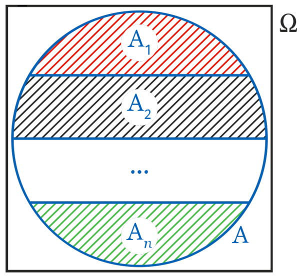
- M : « Être porteur de la maladie »
- T : « Avoir un test positif ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.
2. Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
3. Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

3.2 Probabilités totales

Définition

On considère un événement A ainsi que les n événements non vides $A_1, A_2, ..., A_n$ tels que :



- pour tous entiers distincts i et j compris entre 1 et n, A_i et A_j sont **incompatibles** : $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A$

On dit alors que la famille des événements $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ forme une **partition** de A.

Remarque

A et $\overline{A}$ forment toujours une partition de Ω.

Propriété : formule des probabilités totales

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et un événement B. On note $A_1, A_2, ..., A_n$, n événements non vides formant une partition de l'univers Ω.
On a alors :

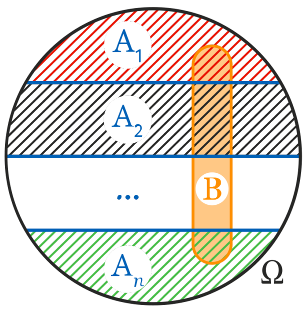
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B).$$

Ce que l'on peut également écrire :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \times P_{A_n}(B).$$

Preuve

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) \\ &= P\left(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)\right) \\ &= P\left((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)\right) \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n) \end{aligned}$$

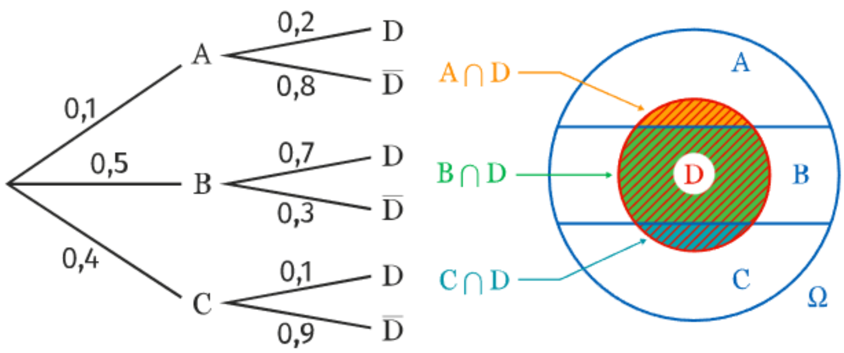


En effet, les événements A_i et A_j sont incompatibles pour tous les entiers $i \neq j$ et donc les événements $B \cap A_i$ et $B \cap A_j$ le sont aussi.

Remarque

On a vu en seconde que : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ où A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
La formule des probabilités totale est une généralisation de cette propriété.

Exemple



Ici, A, B et C forment une partition de l'univers Ω. On a donc :

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D) \\ &= 0,1 \times 0,2 + 0,5 \times 0,7 + 0,4 \times 0,1 \\ &= 0,41\end{aligned}$$

4 Indépendance

Définition

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.
On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.
A et B sont des événements indépendants si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$.

Preuve

$P(A) \neq 0$ donc $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Sens direct :
Supposons que A et B sont des événements indépendants.
On a alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

D'où $P_A(B) = \dfrac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$.

Réciproque :
Supposons que $P_A(B) = P(B)$.
On a donc $P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$.
D'où $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Ainsi on a montré que A et B sont indépendants.

Exemple

Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0,8$ et $P(B) = 0,35$.
Alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,35 = 0,28$.

Propriété

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi deux événements indépendants.

Preuve

En exercice

Exemple d'application

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,8$; $P(B) = 0,35$ et $P(A \cap B) = 0,28$.

1. Montrer que A et B sont indépendants.
2. Déterminer $P(A \cup B)$ puis $P(\overline{A} \cap B)$.

Méthode

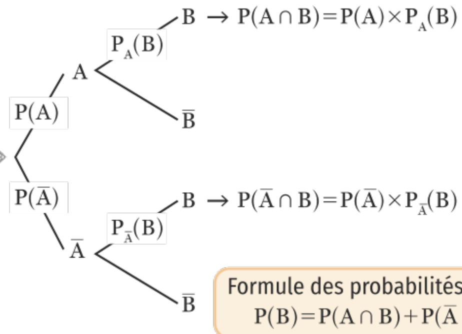
1. On compare $P(A) \times P(B)$ et $P(A \cap B)$:
2. On utilise $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et l'indépendance de $\overline{A}$ et B.

À retenir

	B	$\overline{B}$	Somme
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Somme	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Tableau

Arbre



Formule des probabilités totales : $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Si $P(A)\neq 0$, alors $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B) \Leftrightarrow P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Événements indépendants

Définition : A et B sont indépendants lorsque $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

Propriété : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B)=P(B)$