Chapitre 9
Probabilités

1 Variables aléatoires

Définition : variable aléatoire

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire (Ω est l'ensemble des issues de l'expérience aléatoire).
On appelle **variable aléatoire** sur Ω toute fonction X de Ω dans **R**.

Remarques

- L'ensemble des valeurs prises par X se note $X(\Omega) = \{x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ \ldots \ ; \ x_n\}$.
- L'évènement « X prend la valeur x_i » se note « $X = x_i$ », il est constitué de tous les éléments de Ω qui ont pour image x_i par la fonction X.

Exemple

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et l'on note, après chaque lancer, le côté sorti (P pour Pile, F pour Face). L'ensemble des issues est : $\Omega = \{PP \ ; \ PF \ ; \ FP \ ; \ FF\}$.
On définit un jeu qui consiste à gagner 3 € à chaque fois que Pile sort et à perdre 2 € à chaque fois que Face sort.
On définit ainsi une variable aléatoire X sur Ω qui, à chaque résultat de l'univers, associe le gain relatif (positif ou négatif) :

- au résultat PP est associé 6 €.
- au résultat PF est associé 1 €.
- au résultat FP est associé 1 €.
- au résultat FF est associé -4 €.

Ainsi $X(\Omega) = \{-4 \ ; \ 1 \ ; \ 6\}$.
L'évènement « $X = 1$ » est $\{PF \ ; \ FP\}$. Et cætera.

Exercice 1

Un restaurant propose trois menus dont les prix respectifs sont 10 €, 12 € et 18 €. Il y a actuellement 100 clients dans le restaurant.

1. On choisit une personne au hasard dans ce restaurant et on lui demande le prix de son menu. Quelle variable aléatoire peut-on définir ici ?

2. On choisit un menu au hasard et on s'intéresse au nombre de personnes dans le restaurant ayant choisi ce menu. Quelle variable aléatoire peut-on définir ici ?

Définition : loi de probabilité d'une variable aléatoire

Lorsqu'on associe à chaque valeur x_i de $X(\Omega)$ la probabilité p_i de l'évènement « $X = x_i$ », on définit une loi de probabilité sur $X(\Omega)$. Cette loi est appelée **loi de probabilité de la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$**.

Remarque

On représente souvent la loi de probabilité de la variable aléatoire X à l'aide d'un tableau :

Valeur de $\boldsymbol{X}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On a : $\boldsymbol{P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_n) = 1}$.

Exemple

Dans l'exemple précédent :

- la probabilité de l'évènement « $X = -4$ » est la probabilité de l'évènement $\{FF\}$:

$$\begin{aligned} P(X = -4) &= P(FF) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- la probabilité de l'évènement « $X = 1$ » est la somme des probabilités des issues PF et FP :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(PF)+P(FP) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- la probabilité de l'évènement « $X=6$ » est la probabilité de l'évènement $\{PP\}$:

  $P(X=6)=\dfrac{1}{4}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est résumée dans le tableau ci-dessous :

x_i	-4	1	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2 Espérance, variance et écart-type

Définition : espérance, variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est résumée dans le tableau ci-dessous :

Valeur de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- L'**espérance de X** est le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X)=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$$

  noté aussi $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_ix_i$.

- La **variance de X** le nombre noté $V(X)$ défini par :

$$V(X)=p_1\left(x_1-E(X)\right)^2+p_2\left(x_2-E(X)\right)^2+\ldots+p_n\left(x_n-E(X)\right)^2$$

  noté aussi $V(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i-E(X)\right)^2$.

- L'**écart-type de X** le nombre noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Exemple

Dans l'exemple précédent la loi de probabilité de la variable aléatoire X est résumée dans le tableau ci-dessous :

x_i	-4	1	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{4} \times (-4) + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 6 \\ &= -1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ &= -1 + \frac{4}{2} \\ &= -1 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{4}(-4-1)^2 + \frac{1}{2}(1-1)^2 + \frac{1}{4}(6-1)^2 \\ &= \frac{1}{4} \times (-5)^2 + 0 + \frac{1}{4} \times 5^2 \\ &= \frac{25}{4} + \frac{25}{4} \\ &= \frac{25}{2} \\ &= 12,5 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{12,5} \\ &\approx 3,5. \end{aligned}$$

Propriété

- On a aussi : $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$.
- Soit a et b deux réels. Alors : $\boldsymbol{E(aX+b) = aE(X) + b}$ et $\boldsymbol{V(aX) = a^2 V(X)}$.

Preuve

- $$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i x_i^2 - 2p_i x_i E(X) + p_i E(X)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\ &= E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + E(X)^2 \times 1 \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$
- Lois de probabilités des variables aléatoires aX et $aX + b$:

$\boldsymbol{X}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\boldsymbol{aX}$	ax_1	ax_2	$\cdots$	ax_n
$\boldsymbol{aX+b}$	ax_1+b	ax_2+b	$\cdots$	ax_n+b
Probabilité	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= p_1(ax_1+b)+p_2(ax_2+b)+\ldots+p_n(ax_n+b) \\ &= a(p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n)+b(p_1+p_2+\ldots+p_n) \\ &= aE(X)+b \quad \text{puisque l'on a} \quad p_1+p_2+\ldots+p_n=1 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} V(aX) &= p_1\left(ax_1-E(aX)\right)^2+p_2\left(ax_2-E(aX)\right)^2+\ldots+p_n\left(ax_n-E(aX)\right)^2 \\ &= a^2p_1\left(x_1-E(X)\right)^2+a^2p_2\left(x_2-E(X)\right)^2+\ldots+a^2p_n\left(x_n-E(X)\right)^2 \\ &= a^2\left[p_1\left(x_1-E(X)\right)^2+p_2\left(x_2-E(X)\right)^2+\ldots+p_n\left(x_n-E(X)\right)^2\right] \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

Interprétation de l'espérance et de l'écart-type

Lors d'un jeu, l'**espérance de gain** représente le **gain moyen** que peut espérer le joueur lors d'un grand nombre de parties.

- Si ce gain moyen est **nul**, on dit que le jeu est **équitable**.
- Si ce gain moyen est **positif**, on dit que le jeu est **favorable** au joueur
- Si ce gain moyen est **négatif**, on dit que le jeu est **défavorable** au joueur.

L'**écart-type du gain** mesure la **dispersion** des gains autour du gain moyen.
Plus l'écart-type est grand, plus la variable aléatoire est dispersée et plus le degré de risque du jeu est grand.

3 Répétition d'expériences identiques et indépendantes

Définition : Expériences indépendantes

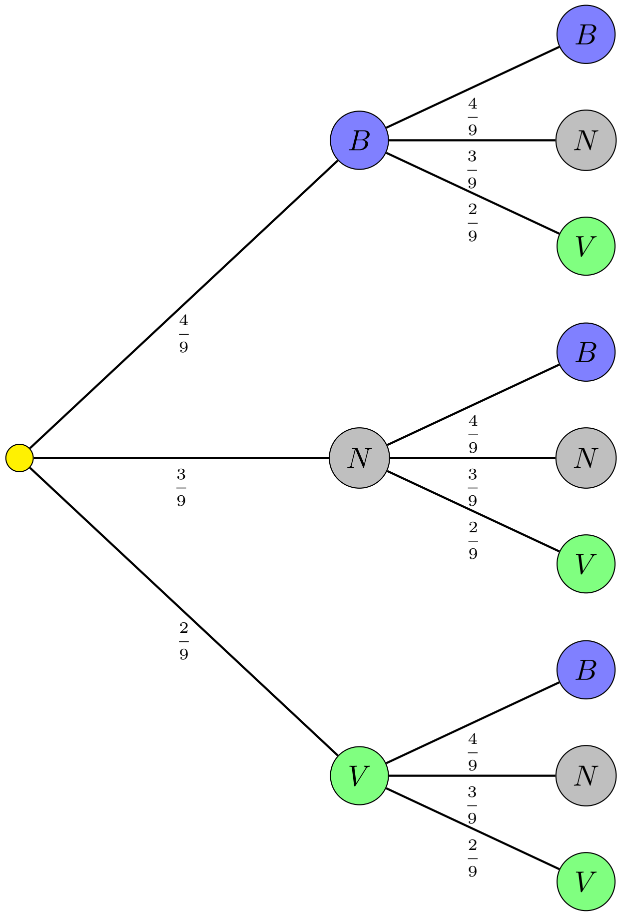
On considère n expériences aléatoires **identiques** successives. Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

Exemple

Une urne contient 4 boules bleues, 3 boules noires et 2 boules vertes. On tire successivement deux boules **avec remise**. Il s'agit donc d'une répétition de deux expériences identiques et indépendantes.

Modélisation à l'aide d'un arbre pondéré

Dans l'exemple précédent, la répétition des deux expériences peut être représentée par un arbre pondéré :



L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 9 couples de résultats correspondants chacun aux 9 chemins de l'arbre :
On fait l'abus de notation consistant à noter par exemple BB à la place du couple $(B;B)$:
$\Omega = \{BB\ ;\ BN\ ;\ BV\ ;\ NB\ ;\ NN\ ;\ NV\ ;\ VB\ ;\ VN\ ;\ VV\}$.

Propriété : choix d'une loi de probabilité

Dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes représentée par un arbre pondéré :
- La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin sur l'arbre est obtenue en multipliant les probabilités portées par les branches.
- La probabilité d'un évènement correspondant à plusieurs chemins est alors obtenue en ajoutant les probabilités des évènements correspondants à chaque chemin, puisque ceux-ci sont incompatibles.

Exemple

Dans l'exemple précédent :
- La probabilité d'obtenir le couple VN est égale au produit $\dfrac{2}{9} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{6}{81} = \dfrac{2}{27}$.

- Si l'on considère l'évènement A : « obtenir au moins une boule noire », alors $A = \{BN; NB; NN; NV; VN\}$. Alors

$$\begin{aligned} P(A) &= P(BN) + P(NN) + P(VN) \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{3}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{12}{81} + \frac{27}{81} + \frac{6}{81} \\ &= \frac{45}{81} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

4 L'essentiel du chapitre

À retenir