Corrigé du DL - Modèle de Malthus

En 1798, Thomas Malthus publie *An essay on the principle of population* dans lequel il émet l'hypothèse suivante : l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine.

En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes.
Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir 400 000 personnes de plus chaque année.

Pour tout entier naturel n, on note p_n la population (en millions) en 1800+n et a_n le nombre de personnes (en millions) pouvant être nourries par l'agriculture la même année. Ainsi $p_0 = 8$ et $a_0 = 10$.

On arrondira si besoin les réponses à 0,001.

1. Donner la relation de récurrence permettant d'exprimer p_{n+1} en fonction de p_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $$\begin{aligned} p_{n+1} &= \left(1 + \frac{2,8}{100}\right) p_n \\ &= 1,028\ p_n \end{aligned}$$

   (p_n) est donc une suite géométrique de premier terme $p_0 = 8$ et de raison $1,028$.
   D'où $p_n = 8 \times 1,028^n$.

2. Donner la relation de récurrence permettant d'exprimer a_{n+1} en fonction de a_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

   $400\ 000 = 0,4$ millions.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + 0,4$.

   (a_n) est donc une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 10$ et de raison $0,4$.
   D'où $a_n = 0,4n + 10$.

3. Calculer p_{50} et a_{50}. Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

   $$\begin{aligned} p_{50} &= 8 \times 1,028^{50} \\ &\approx 31,8 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} a_{50} &= 0,4 \times 50 + 10 \\ &= 30 \end{aligned}$$

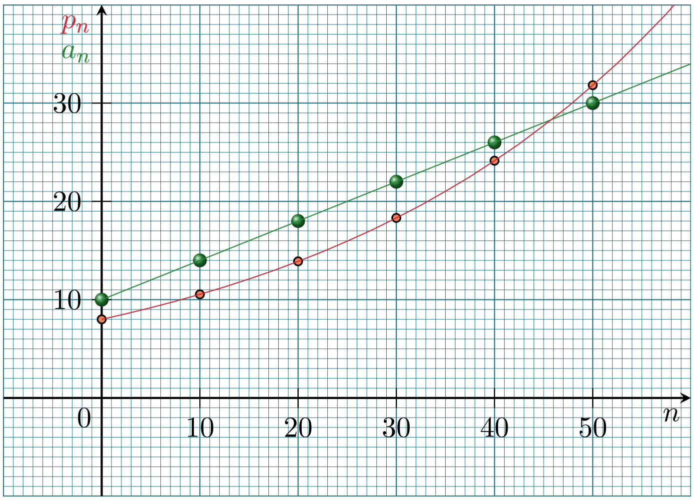
   D'après ce modèle, en 1850, la population de l'Angleterre aurant du être de 31,8 millions de personnes environ et l'agriculture n'aurait pu nourrir que 30 millions de personnes.

4. Calculer les limites des suites (p_n) et (a_n).

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,028^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 8 \times 1,028^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,4\ n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,4\ n + 10 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

5. Représenter graphiquement les termes des suites p et a pour $n = 0, 10, ..., 50$.
Vers quelle année la situation semble-t-elle devenir critique ?



La situation devient critique lorsque les termes de la suite (p_n) deviennent supérieurs à ceux de la suite (a_n). On lit graphiquement que ce phénomène a lieu autour pour $n \approx 45$ soit en 1845 environ.

6. À l'aide de la calculatrice, déterminer précisément en quelle année, selon ce modèle, la situation aurait dû devenir critique.

À l'aide de la calculatrice, on a :

$$p_{45} \approx 27,72 \quad \text{et} \quad a_{45} = 28 \qquad \text{mais} \qquad p_{46} \approx 28,5 \quad \text{et} \quad a_{46} = 28.4.$$

D'après ce modèle, la population dépasse les ressources disponibles au cours de l'année 1845.

7. Que s'est-il réellement passé en Angleterre ? *Faire des recherches.*
Quelles critiques peut-on faire du modèle proposé par Malthus ?

Thomas Malthus était partisan du contrôle des naissances pour éviter une croissance trop forte de la population. Son modèle sert d'argument en faveur de la mise en place de cette politique.
En 1850, la population de l'Angleterre était d'environ 16,5 millions d'habitants. Le modèle de Malthus prévoyait une population d'environ 32 millions d'habitants ; il projetait une croissance bien plus forte que la croissance réelle.