Corrigé de l'évaluation-bilan 3 bis

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $I = [0\ ;\ 40]$ par $\quad f(x) = (10x - 10)e^{-0,1x}$.

   a. Calculer $f(0)$ et $f(40)$.

   b. Démontrer que pour tout $x \in I$, $\quad f'(x) = (11 - x)e^{-0,1x}$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $I = [0\ ;\ 40]$.

   d. Démontrer que l'équation $f(x) = 20$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[0\ ;\ 40]$.

a. $$\begin{aligned} f(0) &= (10 \times 0 - 10)e^{-0,1\times 0} \\ &= -10 \times 1 \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(40) &= (10 \times 40 - 10)e^{-0,1\times 40} \\ &= (400 - 10)e^{-4} \\ &= 390e^{-4} \\ &\approx 7,14 \end{aligned}$$

b. Soit $x \in [0\ ;\ 40]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10e^{-0,1x} + (10x - 10) \times (-0,1)e^{-0,1x} \\ &= 10e^{-0,1x} + (-x + 1)e^{-0,1x} \\ &= (10 - x + 1)e^{-0,1x} \\ &= (11 - x)e^{-0,1x} \end{aligned}$$

c. Pour tout $x \in [0\ ;\ 40]$, $e^{-0,1x} > 0$.
Donc $f'(x)$ est du signe de $(11 - x)$.

$$\begin{aligned} f(11) &= (10 \times 11 - 10)e^{-0,1\times 11} \\ &= 100e^{-1,1} \\ &\approx 33,287 \end{aligned}$$

x	0		11		40
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-10	$\nearrow$	$100e^{-1,1}$	$\searrow$	$390e^{-4}$

d. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 11]$, la fonction f est continue et strictement croissante.
De plus $f(0) = -10 < 20$ et $f(11) = 100e^{-1,1} > 20$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 20$ admet une unique solution α_1 sur l'intervalle $[0\ ;\ 11]$.
Sur l'intervalle $[11\ ;\ 40]$, la fonction f est continue et strictement décroissante.
De plus $f(11) = 100e^{-1,1} > 20$ et $f(40) = 390e^{-4} < 20$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 20$ admet une unique solution α_2 sur l'intervalle $[11\ ;\ 40]$.
On en déduit que l'équation $f(x) = 20$ admet (exactement) deux solutions α_1 et α_2 sur

l'intervalle I.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha_1 \approx 3,98$ et $\alpha_2 \approx 24,74$.

2. Une entreprise fabrique x centaines d'ordinateurs, où x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 40]$. On suppose que toute la production de l'entreprise est vendue et que le bénéfice, en milliers d'euros, de cette entreprise peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0\ ;\ 40]$ par $f(x) = (10x - 10)e^{-0,1x}$.

   a. Déterminer la perte de l'entreprise lorsqu'il n'y a pas de production.

   b. Déterminer le bénéfice maximal de l'entreprise. À quel nombre d'ordinateurs produits cela correspond-il ?

   c. L'entreprise souhaite réaliser un bénéfice d'au moins 20 000 euros. Pour quel nombre d'ordinateurs produits cela est-il possible ?

   a. La perte de l'entreprise lorsqu'il n'y a pas de production est $f(0) = -10$ milliers d'euros.

   b. D'après le tableau de variations de la fonction f, le maximum de la fonction f sur $[0\ ;\ 40]$ est atteint en 11.
   Le bénéfice maximal de l'entreprise est $f(11) = 100e^{-1,1} \approx 33,287$ milliers d'euros.
   Cela correspond à la production de 1100 ordinateurs.

   c. L'entreprise souhaite réaliser un bénéfice d'au moins 20 000 euros.
   On cherche donc l'intervalle solution de l'inéquation $f(x) \geqslant 20$.
   D'après la question **1.d**, l'intervalle solution est $[\alpha_1\ ;\ \alpha_2]$.
   Donc l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 20 000 € pour un nombre d'ordinateurs produits compris entre 398 et 2474.

Exercice 2

On définit la fonction g sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

1. Montrer que pour tout $x \in\ ]1\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

2. Calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.

3. Calculer la limite de la fonction g en 1.

4. Étudier le signe de $x^2 - 2x - 3$ pour x appartenant à $]1\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de g.

1. Soit $x \in\ ]1\ ;\ +\infty[$

   $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 3$ et $v(x) = x - 1$

   $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}\\ &= \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}\\ &= \frac{2x^2-2x-x^2-3}{(x-1)^2}\\ &= \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

2. Soit $x \in]1\ ;\ +\infty[$

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{x^2+3}{x-1}\\ &= \frac{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}\\ &= \frac{x\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}{1-\dfrac{1}{x}}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{3}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
Donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right) = +\infty$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1$
Donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\to1} x^2+3 = 4$ et $\lim\limits_{x\to1+} x-1 = 0+$
Donc par quotient $\lim\limits_{x\to1} g(x) = +\infty$

4. On calcule le discriminant de x^2-2x-3 :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4\times1\times(-3)\\ &= 4+12\\ &= 16\end{aligned}$$

On a $\Delta > 0$, donc x^2-2x-3 admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{+2-\sqrt{16}}{2\times1} \qquad\text{et}\qquad & x_2 &= \frac{+2+\sqrt{16}}{2\times1}\\ &= \frac{2-4}{2} & &= \frac{2+4}{2}\\ &= -1 & &= 3\end{aligned}$$

Donc $x^2-2x-3 > 0$ pour $x \in]3\ ;\ +\infty[$ et $x^2-2x-3 < 0$ pour $x \in]1\ ;\ 3[$.

Pour $x \in]1\ ;\ 3[$, $(x-1)^2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de x^2-2x-3.
On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	1		3		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$