Automatismes 2 - Fonctions

Automatisme 1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = 8$
2. $g(x) = 5x - 7$
3. $h(x) = 8x^3 + 7x^2 - 5x - 3$

Corrigé 1

1. $f'(x) = 0$.
2. $g'(x) = 1 \times 5 + 0$.
   On effectue les produits.
   On obtient alors : $g'(x) = 5$.
3. $h'(x) = 3 \times 8x^2 + 2 \times 7x + 1 \times (-5) + 0$.
   On effectue les produits.
   On obtient alors : $h'(x) = 24x^2 + 14x - 5$.

Automatisme 2

1. Donner la dérivée de la fonction f, dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, définie par $f(x) = \sqrt{x}$.
2. Donner la dérivée de la fonction g, dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \frac{x^7}{8}$.
3. Donner la dérivée de la fonction h, dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$, définie par $h(x) = 48 + 20x$.

Corrigé 2

1. L'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est : $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.
2. L'expression de la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^7}{8}$ est : $\boldsymbol{g'(x) = \frac{7}{8}x^6}$.
3. L'expression de la dérivée de la fonction h définie par $h(x) = 48 + 20x$ est : $\boldsymbol{h'(x) = 20}$.

Automatisme 3

1. Donner la dérivée de la fonction f, dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2$.
2. Donner la dérivée de la fonction g, dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, définie par $g(x) = \frac{10}{x}$.
3. Donner la dérivée de la fonction h, dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, définie par $h(x) = \frac{x^7}{5}$.

Corrigé 3

1. L'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^2$ est : $\boldsymbol{f'(x) = 2x}$.
2. L'expression de la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \frac{10}{x}$ est : $\boldsymbol{g'(x) = -\frac{10}{x^2}}$.
3. L'expression de la dérivée de la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^7}{5}$ est : $\boldsymbol{h'(x) = \frac{7}{5}x^6}$.

Automatisme 4

1. Soit n un entier naturel strictement positif.
   Donner la dérivée de la fonction f, dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^n$.
2. Donner la dérivée de la fonction g, dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, définie par $g(x) = \dfrac{-10}{x}$.
3. Donner la dérivée de la fonction h, dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, définie par $h(x) = -7x - 69$.

Corrigé 4

1. L'expression de la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^n$ est : $\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$.
2. L'expression de la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{-10}{x}$ est : $\boldsymbol{g'(x) = \dfrac{10}{x^2}}$.
3. L'expression de la dérivée de la fonction h définie par $h(x) = -7x - 69$ est : $\boldsymbol{h'(x) = -7}$.

Automatisme 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)e^x$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Corrigé 5

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$.
On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I alors leur produit est dérivable sur I et on a la formule :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

Ici $f = u \times v$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x - 3 \qquad \text{et} \qquad & v(x) &= e^x \\ u'(x) &= 2 & v'(x) &= e^x. \end{aligned}$$

On applique la formule rappelée plus haut :

$$f'(x) = \underbrace{2}_{u'(x)} \times e^x + (2x-3) \times \underbrace{e^x}_{v'(x)}.$$

On peut réduire un peu l'expression :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2 + 2x - 3)e^x \\ &= (2x-1)e^x \end{aligned}$$

Automatisme 6

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -9x^2\sqrt{x}$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Corrigé 6

f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonction dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I alors leur produit est dérivable sur I et on a la formule :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

Ici $f = u \times v$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= -9x^2 \qquad \text{et} \qquad & v(x) &= \sqrt{x} \\ u'(x) &= -18x & v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

On applique la formule rappellée plus haut :

$$f'(x) = \underbrace{-18x}_{u'(x)} \times \sqrt{x} + (-9x^2) \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{v'(x)}.$$

On peut réduire un peu l'expression :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -18x\sqrt{x} - \frac{9x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-2 \times 18x\left(\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}} + \frac{-9x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-36x^2 - 9x^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-45x^2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Automatisme 7

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (7 - 2x^2)e^{-x}$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Corrigé 7

f est dérivable sur **R** comme produit de fonction dérivables sur **R**.
On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I alors leur produit est dérivable sur I et on a la formule :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'.$$

Ici $f = u \times v$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 7 - 2x^2 \qquad \text{et} \qquad & v(x) &= e^{-x} \\ u'(x) &= -2 \times 2x & v'(x) &= -e^{-x} \\ &= -4x \end{aligned}$$

On applique la formule rappellée plus haut :

$$f'(x) = \underbrace{-4x}_{u'(x)} \times e^{-x} + (7 - 2x^2) \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v'(x)}.$$

On peut factoriser l'expression :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -4xe^{-x} - (7-2x^2)e^{-x} \\
&= \left(-4x - (7-2x^2)\right) e^{-x} \\
&= \left(-4x - 7 + 2x^2\right) e^{-x} \\
&= \left(2x^2 - 4x - 7\right) e^{-x}
\end{aligned}$$

Automatisme 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{4x^2-3x-10}{2-2x}$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Corrigé 8

On rappelle le cours : si u, v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I, et que v ne s'annule pas sur I alors leur quotient est dérivable sur I et on a la formule :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

Ici $f = \dfrac{u}{v}$ avec :

$$\begin{aligned}
&u(x) = 4x^2 - 3x - 10,\ u'(x) = 8x - 3 \\
&v(x) = 2 - 2x,\ v'(x) = -2.
\end{aligned}$$

Ici la formule ci-dessus est applicable pour tout x tel que $2 - 2x \neq 0$. C'est-à-dire $x \neq 1$.
On obtient alors :

$$f'(x) = \frac{(8x-3)(2-2x) - (4x^2-3x-10)\times(-2)}{(2-2x)^2}.$$

D'où, en développant le numérateur :

$$f'(x) = \frac{-16x^2 + 22x - 6 - (-8x^2 + 6x + 20)}{(2-2x)^2}.$$

On réduit le numérateur pour obtenir : $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{-8x^2 + 16x - 26}{(2-2x)^2}}$.

Remarque : la plupart du temps, on veut le signe de la dérivée. Il serait donc plus logique de factoriser le numérateur si possible, mais cela sort du cadre de cet exercice.

Automatisme 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

Déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Corrigé 9

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad$ avec :

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^x, & u'(x) &= e^x \\
v(x) &= x^2 + 1, & v'(x) &= 2x.
\end{aligned}$$

On applique la propriété de dérivation pour les quotients :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{e^x \left(x^2+1\right) - e^x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{e^x \left(x^2 - 2x + 1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{e^x \left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}
\end{aligned}$$

Automatisme 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2+1}$.

Déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Corrigé 10

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\quad$ avec :

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-2x}, & u'(x) &= -2\,e^{-2x} \\
v(x) &= x^2+1, & v'(x) &= 2x.
\end{aligned}$$

On applique la propriété de dérivation pour les quotients :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{-2\,e^{-2x}\left(x^2+1\right) - e^{-2x} \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{e^{-2x}\left[-2(x^2+1) - 2x\right]}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{e^{-2x}\left(-2x^2 - 2x - 2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}
\end{aligned}$$

Automatisme 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-2x+1}}{-x+3}$.

Déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Corrigé 11

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\quad$ avec :

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-2x+1}, & u'(x) &= -2\,e^{-2x+1} \\
v(x) &= -x+3, & v'(x) &= -1.
\end{aligned}$$

On applique la propriété de dérivation pour les quotients :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{-2\,e^{-2x+1}\,(-x+3) - e^{-2x+1} \times (-1)}{(-x+3)^2} \\
&= \frac{e^{-2x+1}\,[-2(-x+3) - (-1)]}{(-x+3)^2} \\
&= \frac{(2x-6+1)\,e^{-2x+1}}{(-x+3)^2} \\
&= \frac{(2x-5)\,e^{-2x+1}}{(-x+3)^2}
\end{aligned}
$$

Automatisme 12

Soit f la fonction définie sur **R** par $\quad f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$.

1. Déterminer l'expression de sa fonction dérivée.
2. Donner le tableau de signes de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de f sur **R**.

Corrigé 12

1. Pour tout $x \in$ **R**, $\quad f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad$ avec : $\quad u(x) = x^2 + 3x, \quad u'(x) = 2x+3$

   $v(x) = x+1, \quad v'(x) = 1.$

   Ainsi
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x) \times 1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{2x^2+3x+2x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}.
\end{aligned}
$$

2. Pour tout $x \in$ **R**, $\quad f'(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$.
   $(x+1)$ est toujours positif donc $f'(x)$ est du signe de x^2+2x+3.
   Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$.
   Comme $\Delta < 0$, ce polynôme du second degré est toujours du signe de son coefficient dominant.
   Ainsi, x^2+2x+3 est toujours positif.
   Donc $f'(x)$ est toujours positif.

3. On en déduit que f est strictement croissante sur **R**.