Aula 4 – Teoria de Conjuntos

Objetivo da Aula

Compreender e aplicar a Teoria de Conjuntos, além de conhecer a interação entre eles, que pode ser expressa por uniões, interseções e complementos.

Apresentação

Teoria de Conjuntos é um subtema da disciplina lógica matemática. Como o nome implica, é o estudo de conjuntos. A melhor forma de descrever um conjunto é uma coleção de indivíduos ou elementos que possuem alguma característica em comum. É de fundamental importância a cardinalidade dos conjuntos, ou seja, a quantidade de elementos que ali estão.

Ao definir os conjuntos, podemos começar a estudar a interação entre eles, que pode ser expressa por uniões, interseções e complementos. Com essas interações, podemos analisar dados dos elementos, o que auxilia e afirma a tomada de decisões informada baseada em lógica matemática.

1. Introdução a Teoria de Conjuntos

Um conjunto pode ser representado de várias formas, como uma lista, uma propriedade ou um gráfico.

EXEMPLO

Para tornar este conceito menos abstrato, vamos considerar uma sacola cheia de frutas como um conjunto. Uma lista das compras que formaram aquela sacola pode ser o conjunto, assim como a sacola em si.

Imagine que nessa sacola (de tamanho enorme!) tenha:

5 maças.

8 bananas.

10 limões.

1 melancia.

2 mamões.

5 laranjas lima.

1 abacaxi.

Essa lista representa o conjunto “sacola de frutas”. Se pararmos para analisar as frutas ali dentro, podemos perceber que existem conjuntos distintos com elementos diferentes. O que une todos os elementos neste conjunto é o fato de todos serem frutas, porém podemos fazer um conjunto que envolva somente frutas vermelhas, de forma que apenas as maçãs seriam consideradas participantes. Podemos formar então um conjunto que considere somente frutas amarelas e esse conjunto incluiria as bananas, mamões, laranja lima e o abacaxi. Podemos também separar um conjunto somente de frutas cítricas, que envolveria os limões, a laranja lima e o abacaxi. Basta encontrarmos coisas em comum entre os elementos que podemos criar um conjunto, por exemplo, podemos estabelecer um conjunto que aceite somente as bananas, que possuem em comum a característica de ser uma banana!

Repare como esses subconjuntos do conjunto “sacola de fruta” muitas vezes se unem, intersectam e complementam. Esta é a observação original que inicia todo o processo de estudo da teoria de conjuntos, a compreensão de que elementos distintos podem ser analisados em conjuntos de acordo com suas características iguais e comparados a outros conjuntos com características diferentes. Note também como a cardinalidade, ou a quantidade de elementos, de cada subconjunto varia conforme utilizamos parâmetros diferentes para determinar os conjuntos relevantes.

A compreensão da teoria dos conjuntos possibilita que suas ferramentas e axiomas sejam aplicados em diversas áreas da matemática, como análise matemática, álgebra, topologia e até mesmo teoria da computação.

2. Conceitos Básicos

Para começar a compreender a teoria dos conjuntos, é necessário que se conheça os conceitos básicos que a formam. Apenas assim podemos vir a compreender os axiomas e tudo mais que a forma.

O conceito mais básico de todos dentro da teoria de conjuntos é o próprio **conjunto**. Este pode ser definido como uma coleção de elementos. Os **elementos**, por sua vez, são objetos que pertencem a um conjunto. No exemplo de conjunto $A=\{1,2,3,4\}$, “A” é um conjunto que possui os elementos “1, 2, 3 e 4”.

Pertinência é a relação entre um elemento e um conjunto que indica se tal elemento pertence, ou não, a um determinado conjunto. Essa relação é representada pelos símbolos pertence “$\in$” e não pertence “$\notin$”. Utilizando o exemplo de conjunto “A” acima, podemos afirmar que: $1 \in A$, o elemento 1 pertence ao conjunto A; $5 \notin A$, o elemento 5 não pertence ao conjunto A.

Um **subconjunto** é um conjunto contido dentro de outro conjunto. Ainda considerando o conjunto A={1,2,3,4}, podemos fazer o subconjunto de números ímpares B={1,3} como exemplo. **Conjunto Vazio** é o nome que se dá a um conjunto que não possui nenhum elemento, este é representado de duas formas: X={} ou X=ø.

Uma **união** de conjuntos é um conjunto que contém todos os elementos de dois conjuntos distintos, é representada pelo símbolo "∪". Já a **interseção** é o conjunto que possui os elementos em comum de dois conjuntos distintos e é representada pelo símbolo "∩".

EXEMPLO

Considere os conjuntos X={0,2,4,6,8,9,10} e Y={0,1,3,5,7,9,10}. A sua união seria o conjunto (X∪Y) ={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} e a sua interseção seria o conjunto (X∩Y)={0,9,10}.

No lado contrário do espectro, são denominados conjuntos **disjuntos** aqueles que não possuem elementos em comum.

A **diferença de conjuntos** é demostrada desta maneira: X/Y, em que se forma um conjunto que possui os elementos de X que não são membros de Y. O contrário também pode ser feito. Utilizando os conjuntos X e Y do exemplo acima, o conjunto X/Y={2,4,6,8}, enquanto o conjunto Y/X={1,3,5,7}. Existe também a **diferença simétrica**, um conjunto composto pelos elementos que estão em um dos conjuntos, porém não em ambos. Em outras palavras, os elementos que eles não possuem em comum. Pode ser representado como a diferença da união e a interseção da seguinte forma: (X∪Y)/(X∩Y)={1,2,3,4,5,6,7,8}.

Produto cartesiano de X e Y é denotado como X×Y e é o conjunto cujos membros são todos os possíveis pares ordenados (x,y), em que x é um membro de X e y um membro de Y.

Por fim, o **conjunto de partes** é um conjunto em que seus elementos são todos os possíveis subconjuntos de outro elemento. Considere o conjunto P={1,2}, o seu conjunto de partes seria ={ø, {1}, {2}, {1,2}}.

Existem alguns conjuntos básicos que são especialmente importantes, tais como o conjunto vazio, que não contém elementos, o conjunto de números naturais e o conjunto de números reais.

3. Axiomas de Zermelo-Fraenkel

Há muito tempo que o estudo do conceito do infinito é um tema de consideração de vários matemáticos. Por muitos séculos, esse conceito foi bem vago e sem muita definição, a compreensão do que é o conceito do infinito moderno surgiu somente na metade do século XIX quando o matemático russo Georg Cantor publicou o artigo intitulado "***Ueber eine Eigenschaft***

des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" ("Sobre uma Propriedade da Coleção de Todos os Números Algébricos Reais") no ano 1874. Com esse artigo, Cantor conseguiu provar pela primeira vez, utilizando conjuntos, que existia mais de um tipo de infinito.

Cantor provou isso utilizando construções próprias de argumentação, chamada de **argumento de diagonalização de Canto**r. Esse argumento pode ser resumido, e extremamente simplificado, da seguinte forma:

- Considere o conjunto infinito que possua todos os números inteiros, chamado de X.
  - Estes são 1, 2, 3,...
- Considere o conjunto infinito que possua todos os números reais, chamado de Y.
  - Estes são 1, 1.1, 1.11, π, 4.1,...
  - Composto de todos os números inteiros e fracionais.

Observe como ambos os conjuntos descritos acima são verdadeiramente infinitos. Observe também que o conjunto X está contido no conjunto Y. Ora, se o conjunto Y possui todos os elementos do conjunto X e infinitos mais elementos, o infinito do conjunto Y é infinitamente maior que o infinito do conjunto X!

Esse artigo de Cantor foi revolucionário como poucos artigos matemáticos, porém, algum tempo depois foram reparadas algumas contradições em algumas coisas que ele afirmava. Essas contradições formaram paradoxos. O mais famoso ficou conhecido como **paradoxo de Russel**, em homenagem ao matemático Bertrand Russel que o descobriu em 1901. Para compreender o paradoxo de Russel, considere o cenário descrito abaixo:

- Considere o Conjunto M o conjunto de todos os conjuntos que não possuam eles mesmos como elementos.

Se todos os conjuntos formam o conjunto M, o conjunto M não pode existir, pois este é o critério que exclui elementos do conjunto M. Em outras palavras, esse paradoxo chega à conclusão de que não pode existir um conjunto que contenha todos os conjuntos, pois ele não pode vir a se conter como um elemento de si próprio.

Como exercício didático, vamos analisar o que é chamado de Paradoxo do Barbeiro, um paradoxo popular utilizado pelo próprio Russel como uma ilustração de seu paradoxo para facilitar a compreensão.

EXEMPLO

Suponha que uma cidade possui apenas um único barbeiro do sexo masculino.
Nesta cidade, todos os homens **devem se manter bem barbeados** e só podem fazer isso de duas maneiras:

> Barbeando-se;
> Frequentando o barbeiro.
> O barbeiro é um homem da cidade que faz a barba de todos aqueles, e somente daqueles homens que não barbeiam a si mesmos.

Considerando o cenário descrito acima, tudo parece perfeitamente aceitável e lógico, até que nós fazemos a pergunta: **quem barbeia o barbeiro?** Essa questão gera um paradoxo porque, de acordo com as definições acima, essa pergunta só pode ter duas respostas: ele pode ser barbeado por ele mesmo ou pelo barbeiro (que é ele mesmo). Isso faz com que nenhuma das respostas seja válida pois:

- Se o barbeiro barbear a si mesmo, então o barbeiro (o próprio) **não** deve barbear a si mesmo.
- Se o barbeiro não barbear a si mesmo, então ele (o barbeiro) deve barbear a si mesmo.

Repare que nenhuma das duas repostas satisfaz as condições dos conjuntos "se barbeia" e "frequenta o barbeiro". Esse paradoxo mais uma vez ilustra como não pode existir um conjunto que possua todos os conjuntos, pois ele não pode ter a si mesmo como um elemento. O barbeiro não pode frequentar o barbeiro, pois ele é o barbeiro e, caso ele decida se barbear, é o próprio barbeiro que está barbeando-o.

Após toda essa confusão lógica de paradoxos, os matemáticos Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel definiram **axiomas** que são muito comumente utilizados na área de teoria dos conjuntos. Um axioma é uma proposição, ou até mesmo um conjunto de proposições, fundamental tida como verdade absoluta. É utilizada para formar regras básicas de um sistema formal, neste caso, o sistema de teoria de conjuntos. Esses axiomas de Zermelo-Fraenkel costumam ser chamada de **"axiomas ZFC com o axioma de escolha"**.

Abaixo vou listar estes axiomas brevemente em suas formas semânticas para que fique claro como as regras da teoria de conjuntos foram estabelecidas. Ocasionalmente, vou dar algumas explicações onde achar necessário para que fique mais claro o entendimento dos axiomas.

- **Axioma da Extensão**
  - Dois conjuntos são iguais se eles possuírem exatamente os mesmos elementos.
- **Axioma da Regularidade**, ou da fundação
  - Todo conjunto não-vazio possui ao menos um elemento que não seja ele mesmo.
    - Caso um conjunto venha a ter somente ele mesmo como elemento, esse conjunto é, na verdade, vazio.

- **Axioma da separação**, ou da compreensão
  - Para qualquer conjunto A e qualquer propriedade P, existe um conjunto B que contém apenas os elementos de A que satisfazem a propriedade B.
    - Retorne ao exemplo da sacola de frutas, seria equivalente a escolher uma propriedade e, assim, definir um novo conjunto dentro da sacola de frutas a partir desta característica relevante.
- **Axioma do Par**
  - Para quaisquer dois conjuntos A e B, existe um conjunto que contém exatamente A e B como seus elementos.
- **Axioma da União**
  - Para qualquer conjunto A, existe um conjunto B. Dessa forma, todo elemento que pertence a A é um elemento de B.
- **Axioma da Substituição**
  - Para qualquer conjunto A e uma relação R, existe um conjunto B que possui os elementos formados pela função do relacionamento.

EXEMPLO

Considere o conjunto A = [1,2,3] e a relação R(A) como uma função que adiciona 2 a todos os elementos.

R seria (1,3), (2,4), e (3,5)

O conjunto B seria = {3,4,5}, formado pelos elementos oriundos da função R(A).

- **Axioma do Infinito**
  - Existe um conjunto infinito que contém todos os números naturais.
    - Também demonstrado pela formalidade "existe um conjunto A que tem o conjunto vazio como seu elemento e que, para todo elemento ***y***, contém também seu sucessor".
- **Axioma da Potência**
  - Para todo conjunto A, existe um conjunto B que tem como elementos todo subconjunto de A.
- **Axioma da Escolha**
  - Para todo conjunto A, existe uma relação binaria R que torna A bem ordenado. Isso significa que R é uma relação de ordem em A e que todo subconjunto não-vazio de A tem um elemento que é mínimo nessa relação R.

- Em outras palavras, dada uma família de conjuntos não vazios {A_i}, em que i é um índice que varia em um conjunto I, existe um conjunto B que contém exatamente um elemento de cada A_i.

Estes axiomas são as regras fundamentais da teoria de conjuntos que formalizam as possibilidades relacionadas a conjuntos. Esses axiomas são utilizados para a formação de muitas outras teorias, teoremas, equações e hipóteses matemáticas.

Considerações Finais da Aula

Essa aula introdutória sobre a teoria de conjuntos busca pavimentar o caminho para que torne a continuação dos estudos mais suave. Os conjuntos são elementos centrais na matemática e que possibilitaram a criação de diversos teoremas, hipóteses e soluções de problemas.

Conjuntos como os produtos cartesianos possibilitam a plotagem de gráficos utilizados em diversas outras áreas de estudos científicos. Áreas como estatística são extremamente importantes, tendo em vista os seus conceitos de população e amostra.

Por esse motivo, a teoria de conjuntos possibilita que a tomada de decisões seja mais informada e lógica de acordo com as necessidades do problema em questão.

Materiais Complementares

Vídeo

Método Telles: Raciocínio Lógico Estratégico Operações com Conjuntos Prof Luis Telles
2017, Luis Telles.
Este vídeo apresenta operações com conjuntos de uma forma simples e direta.
Link para acesso: https://www.youtube.com/watch?v=v60s8no5PPo

Vídeo

IDECAN – Operações com Conjuntos/Problemas #2
2017, Luis Telles.
Este vídeo apresenta operações com conjuntos de uma forma simples e direta.
Link para acesso: https://www.youtube.com/watch?v=7pj-5KairJA

Referências

ABDALLA, Samuel L. ***Raciocínio lógico para concursos***. São Paulo: Editora Saraiva, 2018. E-book. ISBN 9788553604074. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788553604074/. Acesso em: 10 mar. 2023.

BENZECRY, Vera Syme J.; RANGEL, Kleber A. ***Como Desenvolver o Raciocínio Lógico - Soluções Criativas na Teoria dos Conjuntos***, 3ª edição. São Paulo: Grupo GEN, 2008. E-book. ISBN 978-85-216-1991-8. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/978-85-216-1991-8/. Acesso em: 10 mar. 2023.