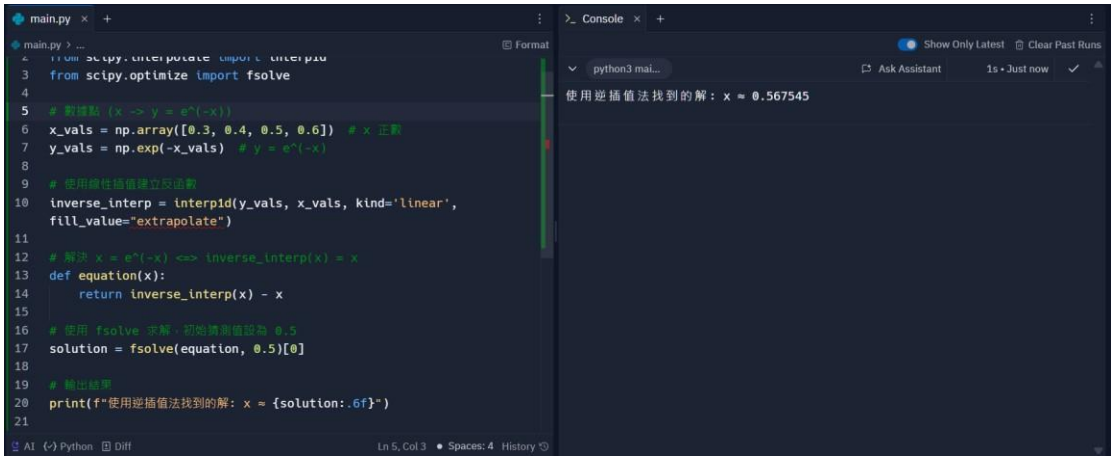
1.

```python
import numpy as np
import math
from scipy.interpolate import lagrange

def lagrange_interpolation(x_values, y_values, x_target):
    """
    使用 SciPy 的 lagrange 函式做拉格朗日插值，
    回傳在 x_target 的近似值。
    """
    poly = lagrange(x_values, y_values)
    return poly(x_target)

def error_bound(x_values, x_target):
    """
    使用插值誤差公式的上界：
        E_n(x) <= ( max|f^(n+1)(ξ)| ) * Π|x - x_i| / (n+1)!
    理論上 max|f^(n+1)(ξ)| 是在包含所有插值點與目標點的區間內 f^(n+1)(x) 的最大值，
    但對於 f(x)=cos(x) 而言，cos 或 sin 的絕對值最大均不超過 1，
    故直接取 1 作為保守估計。
    """
```

```
實際 cos(0.750) = 0.7316889

1 次插值：
  近似值          = 0.7320771
  誤差上界        = 4.4200000e-04
  真實誤差(參考) = 3.8827398e-04

2 次插值：
  近似值          = 0.7317163
  誤差上界        = 2.6520000e-06
  真實誤差(參考) = 2.7457657e-05

3 次插值：
  近似值          = 0.7317040
  誤差上界        = 3.5139000e-08
  真實誤差(參考) = 1.5086811e-05

注意：給定的點數不足，無法進行四次插值。
```

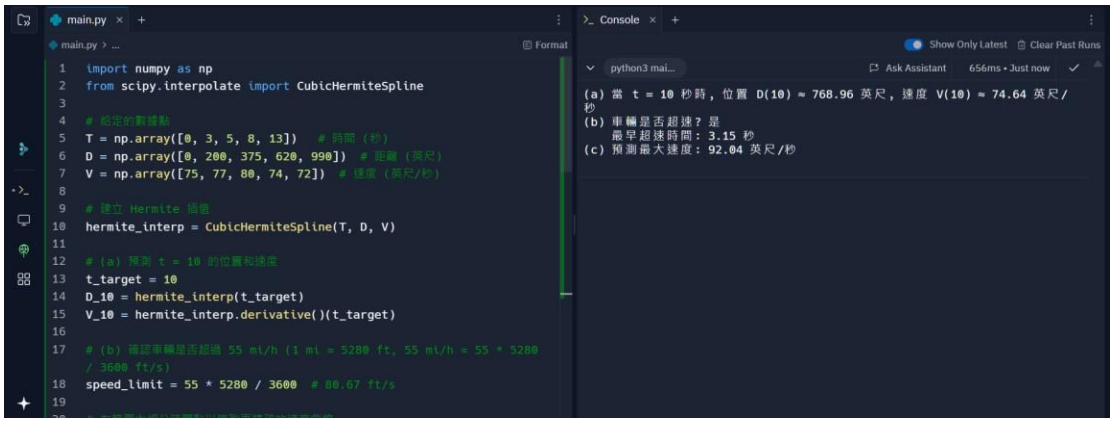
2.



```python
from scipy.optimize import fsolve

# 數據點 (x -> y = e^(-x))
x_vals = np.array([0.3, 0.4, 0.5, 0.6])  # x 正數
y_vals = np.exp(-x_vals)  # y = e^(-x)

# 使用線性插值建立反函數
inverse_interp = interp1d(y_vals, x_vals, kind='linear',
fill_value="extrapolate")

# 解決 x = e^(-x) <=> inverse_interp(x) = x
def equation(x):
    return inverse_interp(x) - x

# 使用 fsolve 求解，初始猜測值設為 0.5
solution = fsolve(equation, 0.5)[0]

# 輸出結果
print(f"使用逆插值法找到的解: x ≈ {solution:.6f}")
```

```
使用逆插值法找到的解: x ≈ 0.567545
```

3.



```python
import numpy as np
from scipy.interpolate import CubicHermiteSpline

# 給定的數據點
T = np.array([0, 3, 5, 8, 13])   # 時間 (秒)
D = np.array([0, 200, 375, 620, 990])  # 距離 (英尺)
V = np.array([75, 77, 80, 74, 72])  # 速度 (英尺/秒)

# 建立 Hermite 插值
hermite_interp = CubicHermiteSpline(T, D, V)

# (a) 預測 t = 10 的位置和速度
t_target = 10
D_10 = hermite_interp(t_target)
V_10 = hermite_interp.derivative()(t_target)

# (b) 確認車輛是否超過 55 mi/h (1 mi = 5280 ft, 55 mi/h = 55 * 5280 / 3600 ft/s)
speed_limit = 55 * 5280 / 3600  # 80.67 ft/s
```

```
(a) 當 t = 10 秒時，位置 D(10) ≈ 768.96 英尺，速度 V(10) ≈ 74.64 英尺/秒
(b) 車輛是否超速？是
    最早超速時間：3.15 秒
(c) 預測最大速度：92.04 英尺/秒
```