Las opciones europeas aplicado al modelo Black - Scholes

Glenn Nicolás Rico Linares[1]

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
e-mail: glennn.ricol@konradlorenz.edu.co

28 de Noviembre 2020

ABSTRACT

La ecuación diferencial parcial asociada al modelo Black - Scholes es una herramienta basas en la teoría de procesos estocásticos y modela en particular variaciones de los precios de opciones europeas. Debido a que actualmente el mundo se rige mediante operaciones bancarias o movimientos bursátiles que hacen que los activos incrementen o disminuyan, es importante tener la certeza de las decisiones que se tomen al momento de realizar una operación, para esto existen algunas herramientas que nos permiten saber de 'opción' en función del tiempo y del valor de la moneda que se maneje. Se planteará la solución analítica del dicho modelo y los elementos que llevan a plantear el modelo, por ultimo, ilustrar con un activo bursátil que se negocie con las opciones europeas exhibiendo el comportamiento del mismo.

Key words. Opción, Black - Scholes

1. Introducción

El escrito mostrará los conocimiento que se necesita para formar la ecuación diferencial parcial asociada del modelo Black - Scholes, dado a un marco teórico que muetra diferentes ramas de la matemática y gracias a la teoría de opciones podemos aplicar cada uno de esos conocimientos. Por lo que hacemos la deducción del modelo como es que podemos generar el modelo y como es la dinámica de un portafolio, después de esto se realizamos la solución de dicha ecuación para lograr un resultado teórico y compararlo gráficamente con una simulación de Monte-Carlo y ver un comportamiento computacional.

2. Marco teórico

2.1. Probabilidad

Definición 2.1.1 ($\sigma-$Álgebra)**.**

El modelo matemático básico de la teoría de la probabilidad es el espacio de la probabilidad que consta de una terna ordenada (Ω, F, P)*, donde* Ω *es el espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados o estados de la naturaleza de un experimento aleatorio; F es una colección no vacía de subconjuntos de* Ω *llamada* σ*-Álgebra de* Ω*, una* σ*-Álgebra es un conjunto que tiene cómo elementos a aquellos eventos que contienen información relevante para el experimentador y por ultimo* $P : F \Longrightarrow [0,1]$ *denominada medida de la probabilidad la cual satisface los siguientes tres axiomas (12) :*

i) $P(A) \geq 0$ *para todo* $A \in F$.

ii) $P(\Omega) = 1$.

iii) *Sean* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *es una sucesión de eventos disjuntos dos a dos, por lo tanto:*

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Definición 2.1.2 (Espacio medible)**.**

A la pareja (Ω, F) *se le llama* ***Espacio medible*** *y a*

$$Z : \Omega \Longrightarrow \mathbb{R},$$

se le denomina variable aleatoria la cual es una función que transforma a los elementos de Ω *en números reales.*

Definición 2.1.3 (Espacio de probabilidad)**.**

A la terna (Ω, F, P) *se llama un espacio de probabilidad si* Ω *es un conjunto cualquiera, F una* σ*-Álgebra de conjunto de* Ω *y P es una medida de probabilidad en F*

2.2. Ecuaciones diferenciales parciales

Una ecuación diferencial parcial es una ecuación que contiene una función multivariable desconocida y sus derivadas parciales. Este tipo de ecuaciones describen varios fenómenos físicos como el calor, el sonido, dinámica de fluidos entre otras.

Definición 2.2.1 (Ecuación diferencial parcial)**.**

Se llama ecuación diferencial parcial a una ecuación de la forma

$$F\Big(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}\Big) = 0,$$

donde $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^p \Longrightarrow \mathbb{R}$*, siendo* $p \in \mathbb{N}$*,* $n > 1$ *y* $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$*, son las variables independientes y* $u \equiv u(x_1, \ldots, x_n)$ *es la variable dependiente y siendo* $k_1 + \cdots + k_2 = m$*.*

La ecuación diferencial parcial estará definida y planteada en la región abierta (finita o infinita) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *(11).*

Definición 2.2.2 (Ecuación de calor)**.**

Sea $(x, y, z) in \mathbb{R}^3$ *y la variable del tiempo t, además, no existe una fuente de energía*

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\Big) = 0,$$

donde α es la difusividad térmica[1]*, que es propiedad del material (9).*

2.3. Cálculo estocástico

Definición 2.3.1 (Proceso estocástico)**.**

Un proceso estocástico es un modelo matemático del comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio. La aleatoriedad del fenómeno se captura a través de un espacio medible (Ω, F). En este contexto, un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias $\{x_t\}_{t\in\tau}$ donde τ es un conjunto, finito o infinito, de tiempos. Cada una de estas variables aleatorias $\{x_t\}$ está definida sobre un espacio medible (Ω, F) y toma valores en otro espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, en donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-Álgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$ (13) (5).

Sea $\{x_t\}$ un proceso estocástico entonces (3):

1. *Sea A un evento. Basados en observaciones de la trayectoria $\{X(t), 0 \leq s \leq t\}$ es posible saber si ha ocurrido el evento $A \in F(t)^*$, donde $F(t)^*$ es información generada por el proceso $\{x_t\}$ en $[0, t]$.*
2. *Sea Z una variable aleatoria. Si, se puede determinar el valor de Z basados en observaciones a la trayectoria si $Z \in F(t)^*$*
   Los procesos estocásticos son útiles para describir el comportamiento aleatorio de las variables financieras en el tiempo: los precios de los activos, las tasas de interés, los tipos de cambio, los índices bursátiles, entre otras.

Definición 2.3.2 (Gaussiano)**.**

Los procesos gaussianos se definen como una distribución de probabilidad sobre ´ funciones aleatorias. De hecho son sobre colecciones infinitas de variables (funciones), tal que, cualquier subconjunto de variables aleatorias finitas tiene una distribución gaussiana multivariable.
La distribución Gaussiana está definida por:

$$\begin{aligned} p(y|\mu, \sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma 2}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \mathcal{N}(y|\mu, \sigma^2), \end{aligned}$$

donde,

1. *El valor esperado es: $E\{x\} = \mu$*
2. *La varianza es: $Var(x) = \sigma^2$*
3. *La desviación estandar es: σ*

Definición 2.3.3 (Movimiento Browniano)**.**

El Movimiento Browniano, $\{B(t) : t \geq 0\}$ ó $W \equiv \{W(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ es un proceso estocástico que cumple (10):

MB.1. *Comienza en el origen con probabilidad $1 : P[B(0) = 0] = 1$.*

MB.2. *Los incrementos del Browniano dados por,$B(t) - B(s)$, son variables aleatorias independientes:*

$B(t_1) - B(t_0); B(t_2) - B(t_1); \ldots B(t_{n+1}) - B(t_n)$,

con $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{n+1} \leq +\infty$.

MB.3. *Tiene incrementos estacionarios:*

$$B(t+\Delta t) - b(t_0)d{=}B(s+\Delta t) - B(s), \quad \forall s, t : 0 \leq s \leq t \in [0, +\infty],$$

donde el símbolo d= denota que la igualdad anterior es en distribución.

MB.4. *Los incrementos del proceso son gaussianos de media 0 y varianza $t - s$:*

$B(t) - B(s) \sim N(o; \sqrt{t-s}), \quad \forall s, t : 0 \leq s \leq t.$

Considerando la propiedad 4, en el caso particular en que $s = 0$, se deduce que

$B(t) \sim N(0; \sqrt{t})$,

es decir, que fijado t, la variable aleatoria $B(t)$ sigue una distribución normal o gaussiana de media 0 y desviación típica $\sqrt{t}$.

Si se tiene que W_t es una variable aleatoria que representa la posición de una partícula en el instante t, las condiciones exigidas para el movimiento Browniano se justifican de la siguiente manera: la partícula sufre pequeños cambios en su posición, se puede suponer que W_t se distribuye de manera normal, el movimiento entre t y $t + s$ depende solo de los choques y no de la posición en que se encuentra la partícula. Lo anterior tal cual como lo observó Robert Brown en el movimiento de un grano de polen suspendido sobre la superficie de un vaso con agua notando que la trayectoria que describía el grano era continua. Luego se demostró que los movimientos ocurrían debido a los choques continuos entre las moléculas del líquido. Posteriormente Albert Einstein demostró que el movimiento a través del tiempo de dicha partícula se poda modelar por medio de una distribución normal, originándose así el movimiento Browniano (13) (2).

Definición 2.3.4 (Movimiento browniano geométrico)**.**

El movimiento browniano geométrico es un proceso estocástico en tiempo continuo que resulta de una transformación de un movimiento browniano. Tiene como particularidad el no permitir que los precios de los activos tomen valores negativos.

Sea $\{P_t\}_{t\geq 0}$, el precio de un activo financiero[2] *en un tiempo t. Usando la notación diferencial, el movimiento browniano geométrico se define como*

$$dP_t = \mu P_t + \sigma P_t \, dW_t, \tag{2.1}$$

donde $p_0 > 0$, y $\mu \in \mathbb{R}$ es un derivado financiero[3] *y $\sigma > 0$ es un parámetro que mide la volatilidad del precio.*

Definición 2.3.5 (Lema de Itō)**.**

Sea un proceso estocástico X_t que satisface $dX = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dW$ y $f(X, t)$ una función no aleatoria con derivadas parciales continuas, entonces la variable $Y_t = f(X, t)$ sigue un proceso estocástico que viene dado por (14):

$$dY = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(X, t)\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2}(\sigma(X, t))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 X}\right] dt + \sigma(X, t)\frac{\partial f}{\partial X} dW \tag{2.2}$$

[1] La Difusividad Térmica (a con unidades mm^2/s) es una propiedad específica de cada material para caracterizar conducción de calor en condiciones no estacionarias

[2] Un activo financiero es un instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho a recibir ingresos futuros por parte del vendedor.

[3] Un derivado financiero o instrumento derivado es un producto financiero cuyo valor se basa en el precio de otro activo

2.4. Black - Scholes

El Modelo de Black-Scholes intenta responder a la pregunta:

¿Cuál es el precio de una opción?

El éxito que ha tenido al responder esta pregunta parece reflejar su apego a situaciones reales; sin embargo, como todo modelo matemático, éste es simplificado por algunos supuestos. En este caso es natural preguntarse si la volatilidad y la tasa de retorno son constantes, si el cambio en los precios sigue una distribución log-normal o no considerar costos de transacción, entre otros (4).

La ecuación que modela cualquier derivado financiero en la forma continua está dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial^2 S} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \tag{2.3}$$

Observación 2.4.1.

Unos supuestos de partida que el modelo tiene en cuenta y que mostraremos a continuación (4):

- *No hay costes de transacción o impuestos*[4].
- *La tasa de interés libre de riesgo es constante para todos los vencimientos.*
- *La acción no paga dividendos*[5].
- *La volatilidad se mantiene constante.*
- *Se permite la venta en corto.*
- *No hay oportunidades de arbitraje*[6] *sin riesgo.*
- *Asume que la distribución de probabilidad de los retornos es una distribución normal.*

2.5. Conceptos necesarios de la teoría de opciones

"Las opciones son uno de los derivados financieros más importantes, su uso data de mucho tiempo atrás, sin embargo hace varias décadas eran herramientas financieras poco conocidas, puesto que no había un procedimiento para determinar un precio justo de la opción. Los derivados financieros, como su nombre lo indica, son instrumentos cuyo valor se deriva de la evolución de precios de otros activos llamados activos subyacentes[7]. Los derivados pueden subdividirse en contratos adelantados (forwards[8] , futuros financiero[9]), swaps[10] y como se mencionó anteriormente en opciones" (12).

Definición 2.5.1 (Opción)**.**

"Una opción es un acuerdo entre dos personas para vender o comprar un activo en una fecha futura a un precio establecido. La persona que compra la opción tiene derecho a comprar o vender el activo subyacente, mientras el emisor de la opción tiene la obligación de cumplir el contrato, independientemente si le conviene o no; es decir, cuando llega la fecha de vencimiento el comprador de la opción decide si el trato se lleva acabo o no" (7)

"A simple vista, el acuerdo puede ser desventajoso para el que emite la opción, para compensar esto, el que adquiere la opción debe pagar una cantidad llamada prima[11] *al vendedor, con el pago de la prima el comprador adquiere derechos y ninguna obligación" (1).*

"Las opciones pueden ser clasificadas de acuerdo al derecho que otorgan o en función del momento en que pueden ejercerse" (13).

Cuando las opciones son clasificadas dependiendo el tiempo en que pueden ser cobradas, resaltan dos tipos de opciones:

Definición 2.5.2 (Opción europea)**.**

Es aquella que sólo puede ser ejercida en la fecha de vencimiento.

Definición 2.5.3 (Opción americana)**.**

Es aquella que puede ejercerse en cualquier momento, a partir de la fecha en que se realiza el acuerdo hasta la fecha del vencimiento.

Definición 2.5.4 (Volatilidad)**.**

"El cambio de tendencia o variabilidad de algo respecto a su media en un cierto periodo concreto. En el ámbito financiero está centrada en el precio de las acciones, índices bursátiles " (8)

La volatilidad se puede clasificar en tres tipos:

1. **Volatilidad histórica:** "Si un operador pretende utilizar un modelo teórico de precios a realizar la estimación más acertada sobre la volatilidad futura. Un punto de partida para ello es calcular sobre la base de la información pasada" (13).
2. **Volatilidad futura:** "Es el dato que a cualquier operador en opciones le gustaría conocer. Con él, se puede valorar correctamente las opciones y ganar dinero aprovechando los errores en las expectativas de otros agentes. En teoría este es el dato de volatilidad que se ingresa en el modelo teórico de precio. Los operadores raramente hablan de volatilidad futura, ya que es imposible saber lo que depara el destino" (13).
3. **Volatilidad implícita:** "A diferencia de la volatilidad futura e histórica que están asociadas a un contrato subyacente, la volatilidad implícita se asocia con una opción. La volatilidad implícita es una conjunción de las expectativas sobre la volatilidad futura que poseen los operadores del mercado. Esta se vería reflejada en el precio de las opciones, es decir, en su prima" (13).

[4] El impuesto es un tributo o carga que las personas están obligadas a pagar a alguna organización (gobierno, rey, etc.) sin que exista una contraprestación directa.

[5] El dividendo es la proporción de ganancias o beneficios que una compañía reparte entre sus accionistas.

[6] El arbitraje es una estrategia financiera que consiste en aprovechar la diferencia de precio entre diferentes mercados sobre un mismo activo financiero para obtener un beneficio económico, normalmente sin riesgo.

[7] Un activo subyacente es aquel activo financiero sobre el que caen contratos financieros, es decir, el valor de referencia de determinados derivados financieros.

[8] Un forward o contrato a plazo es un acuerdo firme entre dos partes mediante el que se adquiere un compromiso para intercambiar un bien físico o un activo financiero en un futuro, a un precio determinado hoy (liquidación).

[9] Un futuro financiero es un derivado financiero, que se caracteriza por ser un acuerdo por el que dos inversores se comprometen en el presente a comprar o vender en el futuro un activo (denominado activo subyacente). En la operación se fijan las condiciones básicas de la operación, entre ellas fundamentalmente el precio.

[10] Un swap es un derivado financiero por el que dos partes acuerdan intercambiar durante un periodo establecido, dos flujos financieros (ingresos y pagos) de intereses en la misma divisa (swap de tipo de interés) o en distinta divisa (swap de tipo de cambio) sobre un nominal determinado y especificando una fecha de vencimiento

[11] La prima es una cantidad de dinero dada a un individuo, respondiendo a criterios de recompensa o incentivo para una acción en particular.

3. Deducción ecuación Black - Scholes

"La ecuación de Black-Sholes es una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólica y lineal cuando el precio del activo subyacente (una acción) es conducida por un movimiento geométrico Browniano, su solución determina el precio de una opción financiera cuando la condición final es el valor intrínseco del instrumento. Representa la base para valuar muchos y muy diversos productos derivados, ya que las diferentes condiciones representan los precios de los distintos derivados financieros" (12), los supuestos fueron mencionados anteriormente.

El valor de una opción de compra esta con varios parámetros que intervienen en términos o clausula del contrato, por lo que obtenemos

$$C = C(S, t, K, T, \sigma, \mu, r), \tag{3.4}$$

donde:

- C: Valor de la opción.
- S: Precio de la acción.
- t: Fecha de vida del contrato.
- K: Precio del ejercicio.
- T: Fecha de vencimiento.
- σ: Volatilidad.
- μ: Rendimiento esperado.
- r: Tasa de interés anual.

Observemos que S y t son las variables relevantes en el contrato, es decir, el valor de la opción lo denotaremos como $C = C(S, t)$.

Durante el intervalo de tiempo $[t, t+dt]$ el activo subyacente cambia de S a $S + dS$, por lo que también debe cambiar $C(S, t)$ a $C + dC$, donde dC es el cambio marginal[12] en el precio el cual se obtiene mediante el lema de it$\bar{o}$ (2.3.5) teniendo en cuenta que

$$dS = \mu_t \, dt + \sigma_t dW_t, \tag{3.5}$$

y las reglas empíricas de la diferenciación estocástica, obtenemos

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S}\mu(S,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2(S,t)\right) dt + \frac{\partial C}{\partial S}\sigma(S,t)dW_t. \tag{3.6}$$

3.1. Dinámica de un portafolio

Sea w_1 el número de unidades del activo subyacente del precio S y w_2 el número de unidades de opción de compra sobre el subyacente de precio $C(S, t)$.

El valor actual del portafolio esta dado por

$$\Pi_t = w_1 S + w_2 C(S, t). \tag{3.7}$$

Debido a las fluctuaciones[13] propias del mercado, el cambio en el valor del portafolio durante un instante dt esta dado por

$$d\Pi_t = w_1 dS + w_2 dC(S, t), \tag{3.8}$$

si sustituimos dS y dC y agrupamos los términos, obtenemos

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(w_1 + w_2\frac{\partial C}{\partial S}\right)\mu S\, dt + \left(w_1 + w_2\frac{\partial C}{\partial S}\right)\sigma S\, dW_t \\ &\quad + w_2\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt, \end{aligned} \tag{3.9}$$

[12] Marginal se refiere al análisis del margen, esto es, al efecto de un cambio pequeño sobre una determinada variable.
[13] La fluctuación es un conjunto de sucesivos y constantes cambios en los precios o ratios económico.

donde los términos de dt se denominan términos de tendencia y los dw_t los llaman término aleatorio el cual modelo el riesgo del mercado del portafolio, el que se puede eliminar eligiendo adecuadamente las cantidades w_1 y w_2 de tal modo que se anules el termino estocástico de la ecuación (3.9), es decir

$$w_1 + w_2\frac{\partial C}{\partial S} = 0, \tag{3.10}$$

para lo que existen infinitas posibilidades, tomamos por ejemplo $w_2 = 1$ y $w_1 = -\frac{\partial C}{\partial t} = -\delta$, por lo que obtenemos

$$d\Pi_t^{(\delta)} = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt. \tag{3.11}$$

Esta elección particular de $w_2 = 1$ y $w_1 = -\delta$ se le conoce como cobertura delta, la que es una cobertura dinámica, ya que durante el periodo $[t, t+dt]$, la cantidad $\frac{\partial C}{\partial S}$ cambia con S y t, por lo tanto el valor del portafolio se comporta

$$\Pi_t^{(\delta)} = C - \delta S. \tag{3.12}$$

Si la cantidad Π_t^{δ} se deposita en un banco que paga interés r, entonces el cambio en el valor del portafolio, durante dt, es dado por

$$\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(\delta)} \, rdt = (C - \delta S)\, rdt, \tag{3.13}$$

en este caso, dt es el tiempo en el que se aplica la tasa r.

Si existen oportunidades de generar ganancias (oportunidades de arbitraje) libres de riesgo dado a las suposiciones hechas, entonces los mercados no están en equilibrio. Recíprocamente, si los mercados están en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje. Por lo tanto bajo el supuesto de equilibrio general, se tiene:

$$\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(\delta)}, \tag{3.14}$$

sustituimos en la ecuación (3.14) los valores, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt &= \left(C - \frac{\partial C}{\partial S}S\right) rdt, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 &= rC - \frac{\partial C}{\partial S}rS, \end{aligned} \tag{3.15}$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial^2 S} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \tag{3.16}$$

La condiciones de frontera

$$\begin{aligned} &C(0, t) = 0, \\ &C(S, t) \approx S \text{ cuando } S \Longrightarrow \infty, \end{aligned} \tag{3.17}$$

y la condición inicial es

$$C(S, T) = \max(S - K, 0). \tag{3.18}$$

4. Solución ecuación Black - Scholes

Sea la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial^2 S} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0. \tag{4.19}$$

Con las condiciones iniciales dadas por

$$\begin{aligned} &C(0,t) = 0,\\ &C(S,t) \approx S \text{ cuando } S \implies \infty,\\ &C(S,T) = \max(S-K,0). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Realizamos un cambio de variables

$$\begin{aligned} C(S,t) &= f(t)g(u_1,u_2),\\ u_1 &= u_1(S,t),\\ u_2 &= u_2(S,t), \end{aligned}$$

donde $f(t)$ y $g(u_1,u_2)$ son funciones que se determinaran a continuación

$$\frac{\partial C}{\partial t} = f'(t)g(u_1,u_2) \ + \ f(t)\Big[\Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big) + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big)\Big], \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = f(t)\Big[\Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big) + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial S}\Big)\Big], \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = f(t)\Big[&\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2}\Big) + \Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial S}\Big)^2\\ &+ \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S^2}\Big) + 2\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial S}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Esto se realiza por la regla de la cadena, remplazamos las ecuaciones (4.21), (4.22) y (4.23) en la ecuación (4.19), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} &f'(t)g(u_1,u_2) + f(t)\Big[\Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big) + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big)\Big]\\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f(t)\Big[\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2}\Big) + \Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial S}\Big)^2\\ &+ \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S^2}\Big) + 2\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial S}\Big)\Big]\\ &+ rS f(t)\Big[\Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big) + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial S}\Big)\Big] - rf(t)g(u_1,u_2) = 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Suponemos que $f(t) \neq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{f'(t)}{f(t)} - r\Big)g(u_1,u_2)\Big[\Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big) + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big)\Big]\\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Big[\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial S}\Big)\\ &+ \Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2}\Big) + \Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial S}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S^2}\Big)\Big]\\ &+ rS\Big[\Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big) + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)\Big(\frac{\partial u_2}{\partial S}\Big)\Big] = 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Se donde se tiene que $\frac{f'(t)}{f(t)} - r = 0$ y $f'(t) = rf(t)$ y su solución es

$$f(t) = e^{-r(T-t)}, \quad f(T) = 1 \tag{4.26}$$

Sabemos que $f(t)$ representa el valor presente, en t, de una unidad monetaria en T. Si se escoge u_2 de la siguiente forma, obtenemos

$$\begin{aligned} u_2(S,t) &= u_2(t) = B(T-t),\\ u_2(T) &= 0, \end{aligned} \tag{4.27}$$

siendo B una constante por determinar, se simplifica en la ecuación (4.25), se observa que u_2 depende de sólo el tiempo, de lo que inferimos que

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -B \text{ y } \frac{\partial u_2}{\partial S} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial S^2} = 0. \tag{4.28}$$

Por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} &\Big[\Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big) + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)B\Big] + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Big[\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2}\Big)\Big]\\ &+ rS\Big(\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big) = 0, \end{aligned} \tag{4.29}$$

aplicamos álgebra obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial u_1}\Big[\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + rS\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big] + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial g}{\partial u_2}\Big)B = 0 \tag{4.30}$$

suponemos que $\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}$, y obtenemos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\Big[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big)^2 - B\Big] + \frac{\partial g}{\partial u_1}\Big[\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + rS\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big] = 0. \tag{4.31}$$

Suponemos que el primer paréntesis se anula obtenemos

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big)^2 - B, \tag{4.32}$$

de modo que se podemos afirmar que

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma S\Big(\frac{\partial u_1}{\partial S}\Big), \text{ y } B = A^2. \tag{4.33}$$

Lo que significa que A^2 se mantendrá positiva y constante, por lo que, u_2 mide el tiempo hacia atrás, es decir se comienza en T y se termina en cero, entonces tenemos

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + rS\frac{\partial u_1}{\partial S} = 0. \tag{4.34}$$

De la ecuación (4.34) observamos que es muy parecida a la ecuación inicial (4.19), pero el termino rV no esta en esta, lo que se supone que el producto del precio de la opción por la tasa libre de riesgo.

De la expresión $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma S\frac{\partial u_1}{\partial S}$, si despejamos $\frac{\partial u_1}{\partial S}$, obtenemos que

$$\frac{\partial u_1}{\partial S} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma S}, \tag{4.35}$$

si solucionamos esta ecuación(4.35), obtenemos

$$\int du_1 = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\int\frac{dS}{S} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma S}(ln(S) - ln(K)) + D(t), \tag{4.36}$$

donde $ln(k)$ es la constante de integración y $D(t)$ es una función por determinar, la razón por la que se introducimos una nueva constante es la de introducir el precio del ejercicio, por lo que tanto

$$u_1 = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + D(t). \tag{4.37}$$

Determinamos las derivadas parciales de u_1 con respecto a t y S obtenemos

$$\frac{\partial u_1}{\partial S} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma S}\Big(\frac{1}{S}\Big);\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma S}\Big(-\frac{1}{S}\Big)^2;\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = D'(t), \tag{4.38}$$

remplazamos en la ecuación (4.34), la ecuaciones de obtenidas en (4.38), obtenemos

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\Big(-\frac{1}{S}\Big)^2 + r\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} + D'(t) = 0. \tag{4.39}$$

simplificando la ecuación (4.39) obtenemos

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 A\sqrt{2} + r\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} + D'(t) = 0, \tag{4.40}$$

Despejamos $D'(t)$, obtenemos

$$D'(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 A\sqrt{2} - r\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} = -\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big). \tag{4.41}$$

Solucionamos la ecuación (4.41) ya que es una ecuación diferencial ordinal

$$D(t) = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t),\ D(T) = 0. \tag{4.42}$$

Por lo que remplazamos en la ecuación (4.37) por la ecuación (4.42) obtenemos

$$\begin{aligned} u_1(S,t) &= \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\Big[ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)\Big],\\ &= \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}ln\Big(\frac{S}{K}\Big). \end{aligned} \tag{4.43}$$

De donde se cumple que

$$S = Ke^{\frac{u_1 T\sigma}{A\sqrt{2}}},\ \text{ siendo } u_1T = u_1(S,T). \tag{4.44}$$

Teniendo en cuanta que $f(T) = 1$ y $u_2(T) = 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} C(S,T) &= f(T)g(u_1(S,T), u_2(T)) = g(u_1(S,T), 0),\\ &= g\Big(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}ln\Big(\frac{S}{K}\Big), 0\Big). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Considerando los valores iniciales (4.20) de la ecuación (4.19), observamos que

$$C(S,t) = \max(S-k, 0) = g(u_1(S,T), 0) = g\Big(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}ln\Big(\frac{S}{K}\Big), 0\Big). \tag{4.46}$$

Por lo tanto

$$C(S,t) = \max(S-k, 0) = \begin{cases} K(e^{\frac{u_{1T}\sigma}{A\sqrt{2}}} - 1) & \text{si } u_{1T} \geq 0\\ 0 & \text{si } u_{1T} < 0 \end{cases}. \tag{4.47}$$

Ya que $S > K$ equivalente a la condición:

$$e^{\frac{u_{1T}\sigma}{A\sqrt{2}}} > 1 \tag{4.48}$$

Esto a su vez implica que $u_1T > 0$. Así, $C(S,T)$ representa el valor intrínseco de la opción, es decir, el pago de la opción en la fecha de vencimiento. Ahora, sea la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}, \tag{4.49}$$

con

$$g = g(u_1, u_2),\ -\infty < u_1 < \infty,\ u_2 > 0, \tag{4.50}$$

y

$$g_0(u_1) = \begin{cases} K(e^{\frac{u_{1T}\sigma}{A\sqrt{2}}} - 1) & \text{si } u_{1T} \geq 0\\ 0 & \text{si } u_{1T} < 0 \end{cases}. \tag{4.51}$$

La ecuaciones (4.49) y (4.51) son la ecuación de difusión con sus condiciones iniciales y de frontera cuya solución es dada por

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}}\int_{-\infty}^{\infty} g_0(x)e^{-\frac{(x-u_1)^2}{4u_2}}\ dx. \tag{4.52}$$

Para eliminar la variable temporal u_2 se puede considerar el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{x - u_1}{\sqrt{2u_2}},\ dx = \sqrt{2u_2}\ dy. \tag{4.53}$$

Como $g_0(x) = 0$ para $x \leq 0$. Entonces sustituyendo (4.53) en la ecuación (4.52), obtenemos

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}}\int_0^{\infty} g_0(x)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-u_1}{\sqrt{2u_2}}\right)^2}\ dx,\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}}\int_{-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}}^{\infty} g_0(u_1 + \sqrt{2u_2}y)e^{-\frac{1}{2}y^2}\sqrt{2u_2}\ dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}}^{\infty} g_0(u_1\sqrt{2u_2}y)e^{-\frac{1}{2}y^2}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Gracias a la ecuación (4.51) de la ecuación de difusión, la ecuación anterior se transforma en

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}}^{\infty} K(e^{\frac{u_1 T\sigma}{A\sqrt{2}}} - 1)e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy. \tag{4.55}$$

Busquemos otra expresión para los valores que se expresan en el limite inferior de la integración

$$\begin{aligned}
-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}} &= \frac{\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\Big[ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)\Big]}{\sqrt{2A^2(T-t)}} \\
&= -\frac{ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma}{A\sqrt{2}}(u_1 + \sqrt{2u_2}y) \\
&= \frac{\sigma}{A\sqrt{2}}\Big[\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\Big[ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)\Big] + \sqrt{2A^2(T-t)}y\Big] \\
&= ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Si remplazamos los valores obtenidos de la función $g(u_1, u_2)$ (4.55) obtenemos

$$\begin{aligned}
g(u_1, u_2) &= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} \Big[e^{ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y - 1}\Big] e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy, \\
&= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{ln\Big(\frac{S}{K}\Big)} e^{\Big[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y - 1\Big]} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy, \\
&= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{\Big[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y\Big]} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy, \\
&- \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\Psi &= \Big\{y | y > -\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}\Big\}, \\
&= \left\{y | y > -\frac{ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}, \\
&= \left\{y | -\infty < y < \frac{ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Donde que $C(S, t) = f(t)g(u_1, u_2) = e^{-r(T-t)}g(u_1, u_2)$, entonces

$$\begin{aligned}
C(S, t) &= e^{-r(T-t)}\Big[\frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{\Big[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y\Big]} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy \\
&- \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy\Big] \\
&= \Big[\frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-r(T-t)} e^{(r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy \\
&- \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy\Big] \\
&= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{(-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}y - \frac{1}{2}y^2)}\, dy - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{(T-t)})^2}\, dy - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Si hacemos un cambio de variable $\epsilon = y - \sigma\sqrt{T-t}$ obtenemos

$$C(S, t) = \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}\, dy - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy, \tag{4.61}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Big\{y - \sigma\sqrt{T-t} > -\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}} - \sigma\sqrt{T-t}\Big\}, \\
&= \left\{\epsilon | \epsilon > -\frac{ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}, \\
&= \left\{\epsilon | -\infty < \epsilon < \frac{ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\},
\end{aligned} \tag{4.62}$$

si la función de densidad de probabilidad normal esta data por:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}y^2\, dy}, \tag{4.63}$$

se tiene el valor de la opción en términos de $N(d_1)$ y $N(d_2)$

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{4.64}$$

donde

$$d_1 = \frac{ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r + \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{4.65}$$

$$d_1 = \frac{ln\Big(\frac{S}{K}\Big) + \Big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{4.66}$$

La ecuación (4.64) se puede reescribir de la forma

$$C(S,t) = SN(d) - Ke^{-r(T-t)}N(d - \sigma\sqrt{T-t}), \tag{4.67}$$

con

$$d = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.68}$$

5. Ejemplos

Realizaremos ejemplos tomado como referencia las ecuación (4.64) aplicando la solución.

Ejemplo 5.1. *Se toma como valor actual (en t) la cotización en el día* 3 *de enero de* 2005 *a las* 10 *horas de Londres* $(S = 1.3533)$*, como precio strike* $K = 1.3533$*, aunque estos vencimientos no existen en la práctica se asume un día* $T = 1$*, se supone un diferencial anual entre las tasas libre de riesgo de Estados Unidos y de la Comunidad Europea de* 2% *que llevado a valor diario es igual a* $r = 0.072\%$*. El parámetro más difícil de precisar es la volatilidad del activo. Tres formas de estimarlo son: la desviación estándar de los retornos logarítmicos del registro histórico del precio del activo, la varianza incondicional obtenida mediante los modelos* $GARCH(p,q)$ *y la volatilidad implícita, usando el precio de la call europea dado por el mercado y despejando el valor de s de la ecuación. Usando un* $AR(1)$ *para el nivel de la variable y un* $GARCH(1,1)$ *con una serie diaria de los retornos logarítmicos de diciembre de* 2004 *se estimó un valor de volatilidad diaria* $s = 0.77\%$

- *C Precio de compra del la opción hoy* $(T = 0)$ *en euros.*
- $T = 0.25$.
- $r = 0.072/100$.
- $\sigma = 0.77/100$.
- $K = 1.3533$.
- $S = 1.35333$

Calculemos d_1 *y* d_2*, remplazamos valores en la ecuaciones (4.65) y (4.66) respectivamente, esto se mostrara por medio de un código en python.*

Primero definiremos las funciones y librerías.

Código 5.1.

```
#Librerias
import numpy as np
import scipy
from scipy.integrate import quad as q
import math as m

def funcionerror(x):
    v=((q(lambda t: np.exp(-t**2), 0, x)))[0]
    return 2/np.sqrt(np.pi)*v

def d1(S,K,sigma,T,t,r):
    return (m.log(S/K)
    + (r + ((sigma**2)/(2)))*(T))
    /(sigma*(m.sqrt(T-t)))

def d2(S,K,sigma,T,t,r):
    return d1(S,K,sigma,T,t,r)
    - sigma*np.sqrt(T-t)

def N1(S,K,sigma,T,t,r):
    return (1/2)*(1
    +funcionerror((d1(S,K,sigma,T,t,r))/(np.sqrt(2))))
def N2(S,E,sigma,T,t,r):
    return (1/2)*(1
    +funcionerror((d2(S,K,sigma,T,t,r))/(np.sqrt(2))))
```

Código 5.2.

```
#Valores
S = 1.3533 #Precio actual
K = 1.3533 #Strike
T = 1 #Vencimiento en años
t = 0
r = 0.072/100 #Tasa libre de riego
sigma = 0.77/100 #Volatilidad

CallEuropea = S*(N1(S,K,sigma,T,t,r))
- K*np.exp(-r*T)*N2(S,K,sigma,T,t,r)
CallEuropea

0.004660802494430016
```

Para la call Europea, el resultado es 0.004660802494430016 *que corresponde con el valor (en dólares) de no arbitraje que debe pagarse por ejercer el derecho a comprar euros al precio usd* 1.3533 *el día* 4 *de enero de* 2005 *a las 10 horas de Londres.*

6. Monte-Carlo

Se aplicara el siguiente algoritmo (6) para valuar una opción

Para hallar el valor de una opción al tiempo $t = 0$, es decir $V(0)$, dado $S(0)$, K, r, σ y T se realiza lo siguiente.

i) Se inicializa las variables $S_1 = S_2 = 0$ y se calcula la expresión

$$e^{r-\frac{1}{2}\sigma^2}(T-t) + z_i\sigma\sqrt{(T-t)}, \tag{6.69}$$

con z_i un valor de la distribución normal con media 0 y varianza 1.

ii) Para cada trayectoria i, con $i = 1, 2, \ldots, m$, se realiza los pasos siguientes

a) Se genera una variable aleatoria z_i normal estándar y se calcula

$$xa_i = S(0)e^{r-\frac{1}{2}\sigma^2}(T-t) + z_i\sigma\sqrt{(T-t)},$$
$$xb_i = S(0)e^{r-\frac{1}{2}\sigma^2}(T-t) - z_i\sigma\sqrt{(T-t)}. \tag{6.70}$$

b) Se calcula $\max(xa_i - k, 0)$, $\max(xb_i - k, 0)$ y el promedio de

$$S_1 = \frac{\max(xa_i - k, 0) + \max(xb_i - k, 0)}{2} \tag{6.71}$$

iii) Se calcula $e^{-r(T-t)}\frac{S_1}{m}$.

iv) Se determina el intervalo de confianza del 95%

A continuación se presentan algunos ejemplos en los cuales se dan resultados numéricos para la valuación de opciones call y put, utilizando el algoritmo de Monte-Carlo para distintos valores de m.

Primero definimos la funciones necesarias para ejecutar el modelo

Código 6.1.

```python
import numpy as np
import scipy.integrate as integrate
import scipy.stats as st
import matplotlib.pyplot as plt

def MonteCarloBS(S,K,r,T,t,sigma,m):
    mu = 0
    sigma1 = 1

    m1 = (r - 0.5*(sigma**2))*(T-t)
    m2 = sigma*np.sqrt((T-t))
    disc = (np.exp(-r*(T-t)))
    s1 = 0
    s2 = 0

    for i in range(1,m):
        Z = np.random.normal(mu,sigma1)
        xa = S*np.exp(m1 + m2*Z)
        xb = S*np.exp(m1 - m2*Z)
        payoffa = max(xa - K,0)
        payoffb = max(xb - K,0)
        payoff = (payoffa + payoffb)/2
        s1 = s1 + payoff
        s2 = s2 + payoff**2

    std = disc*np.sqrt( (s2 - ((s1**2)/(m)))
    /m/(m-1)    )
    call = disc*s1/m
    return call, std

    #Valores
S = 1.3533 # Precio actual
K = 1.3533 # Strike
T = 1 # Venimiento en años
t = 0
r = 0.072/100 # Tasa libre de riego
sigma = 0.77/100 # Volatilidad

m=1000 # Iteraciones

valor, error = MonteCarloBS(S,K,r,T,t,sigma,m)
```

Lo que por resultado nos da valor = 0.004902493781523103
error = 9.999883183300006e-05
Intervalo de confianza 95%
(0.004706496071130423,0.005098491491915783)

Haciendo este mismo código 1000 veces y graficamos cada uno de los valores que nos dan, obtenemos

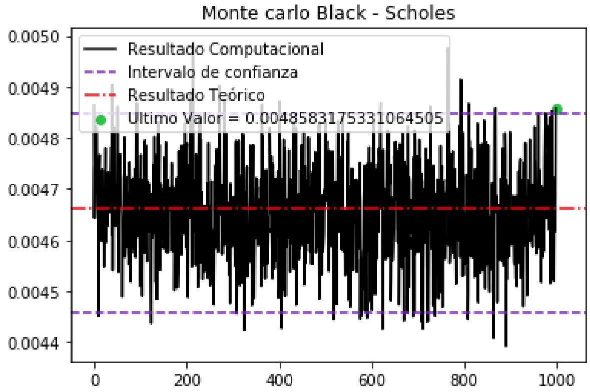

Fig. 1. Simulación Monte - Carlo

Ahora observamos diferentes recorridos de la figura 1 en la siguiente figura.

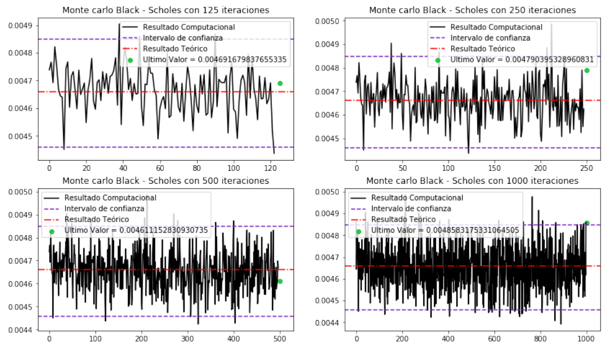

Fig. 2. Monte - Carlo inspección cadena

Todo el código se encuentra en el siguiente repositorio `https://github.com/glennrico12/Proyecto_Simlutation.git`

7. Conclusiones

- El articulo es la base para poder observar como el comportamiento de un portafolio y la ayuda de predecir opciones por medio de Black - Scholes.

- Se infiere que lo mostrado en la la sección 6 tiene una predicción muy buena gracias al algoritmo mostrado.

- Al tomar el código y aplicarlo a cualquier opción europea este tendrá una predicción veraz, además este se podrá aplicar con un tiempo diferente a 0 que este nos ayuda a observar opciones en un mercado bursatil.

References

[1] Roberto Blanco, *Efectos sobre la volatilidad del mercado bursátil de la introducción de los contratos de futuros y opciones sobre el índice ibex-35*, Investigaciones económicas **24** (2000), no. 1, 139–175.

[2] J Bonder and Pablo Groisman, *Explosiones en ecuaciones diferenciales estocásticas*, FCEyN, UBA (2005).
[3] Ulises Cárcamo Cárcamo, *Un curso rápido de cálculo estocástico para aplicaciones a modelos económicos*, Semestre Económico **7** (2004), no. 14, 129–147.
[4] Danae Duana Ávila, *Modelo black-scholes-merton, para la toma de decisiones financieras*, (2008).
[5] Serafín Frache and Gabriel Katz, *Aplicación del cálculo estocástico al análisis de la estructura temporal de las tasas de interés*, Notas Docentes; 13; (2004).
[6] Mónica Aguirre Mastranzo, *Una aplicación del método monte carlo a opciones financieras de tipo europeo*.
[7] Lamothe Prosper-PeRez Somalo Miguel, *Opciones financieras y productos estructurados*, 2006.
[8] Graciela Moguillansky, *Inversión y volatilidad financiera en américa latina*, Revista de la CEPAL (2002).
[9] David Andres Paloma Cruz et al., *Soluciones clásicas a la ecuación de calor lineal*.
[10] Daniel Pérez Fernández, *Cálculo estocástico en finanzas: aplicación del modelo browniano geométrico para la predicción del activo subyacente fcc. mc en el ibex 35*, Ph.D. thesis, 2015.
[11] Adolfo Zamora Ramos, *Ecuaciones diferenciales parciales*, Universidad Autónoma Metropolitana (2011).
[12] Christian Duque Sánchez, *Soluciones analıticas aproximadas de la ecuación de black-scholes mediante el método de lıneas y el método de perturbación homotópica*, Ph.D. thesis, Universidad Tecnológica de Pereira, 2016.
[13] Francisco Venegas-Martínez, Santiago Medina Hurtado, Johanna Alexandra Jaramillo, and Fabián Hernando Ramírez Atehortúa, *Riesgos financieros y económicos*, Universidad de Medellín, 2008.
[14] Jaime Villamil, *Modelos de valoración de opciones europeas en tiempo continuo*, Cuadernos de economía **25** (2006), no. 44, 177–196.