

La simulation de Monte Carlo des processus de diffusion

Les méthodes stochastiques dans les sciences de la gestion
6-640-93

Geneviève Gauthier

Dernière mise à jour : 23 juin 2003

Plan de la présentation

- La simulation de Monte Carlo
- La simulation du mouvement brownien
- Simulation Excel et Simulation Matlab
- La simulation d'un mouvement brownien multidimensionnel
- La simulation d'une équation différentielle stochastique

La simulation de Monte Carlo

Soit X , une variable aléatoire construite sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) . Nous pouvons déterminer la loi de X en considérant sa fonction de répartition :

$$F_X(x) = P[X \leq x], \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nous voulons estimer l'espérance de $g(X)$:

$$E[g(X)]. \quad (2)$$

Exemple: S_T représente le prix d'un actif risqué au temps T . Nous voulons déterminer le prix d'une option d'achat dont le prix d'exercice est K et la date d'échéance est T . Nous savons que ce prix est

$$E_Q[\max(S_T - K, 0)]$$

où Q est la mesure neutre au risque.

Dans ce cas, notre variable aléatoire est S_T et la fonction est $g(x) = \max(x - K, 0)$.

La simulation de Monte Carlo (suite)

À l'aide d'un ordinateur, nous allons réaliser une suite de tirages de la variable aléatoire X selon la loi F_X en utilisant le générateur de nombres pseudo-aléatoires. Si X_i représente le résultat du i ième tirage et que l'on effectue n tirages, alors

$$g(X_1), g(X_2), \dots, g(X_n) \quad (3)$$

représente un échantillon aléatoire simple.

Supposons que

$$\text{Var}[g(X)] < \infty.$$

Dans ce cas, la loi forte des grands nombres nous permet de conclure que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \rightarrow E[g(X)] \text{ presque sûrement lorsque } n \rightarrow \infty.$$

La simulation de Monte Carlo (suite)

De plus, le théorème central limite stipule que la loi de

$$(n)^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - E[g(X)]}{\text{Var}[g(X)]} \quad (4)$$

converge vers une distribution normale centrée et réduite lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous sommes donc en mesure de calculer un intervalle de confiance pour $E[g(X)]$:

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\text{Var}[g(X)]}{n} \right)^{\frac{1}{2}} ; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) + z_{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\text{Var}[g(X)]}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

pourvu que le nombre de trajectoires simulées soit suffisamment grand.

Lorsque $\text{Var}[g(X)]$ n'est pas connue, ce qui est généralement le cas, nous l'estimons par la variance échantillonnale.

La simulation du mouvement brownien

Définition. Un *mouvement brownien standard* $\{W_t : t \geq 0\}$ est un processus stochastique adapté construit sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, P)$ tel que

$$(MB1) \quad \forall \omega \in \Omega, W_0(\omega) = 0,$$

$$(MB2) \quad \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k, \text{ les variables aléatoires } W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \text{ sont indépendantes,}$$

$$(MB3) \quad \forall s, t \geq 0 \text{ tels que } s < t, \text{ la variable aléatoire } W_t - W_s \text{ est de distribution } N(0, t - s).$$

$$(MB4) \quad \forall \omega \in \Omega, \text{ la trajectoire } t \rightarrow W_t(\omega) \text{ est continue.}$$

En général, la filtration utilisée est $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ où $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$ est la plus petite tribu pour laquelle les variables aléatoires $\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$ sont mesurables.

La simulation du mouvement brownien (suite)

La discrétisation du temps. Pour simuler le mouvement brownien qui est un processus à temps continu, il faut d'abord discrétiser le temps. Soit Δt la longueur d'une période de temps. Nous simulerons le mouvement brownien au temps 0, Δt , $2\Delta t$, $3\Delta t$, ...

La propriété (MB2) de la définition du mouvement brownien implique que

$$\{W_{k\Delta t} - W_{(k-1)\Delta t} : k \in \mathbb{N}\}$$

est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi $N(0, \Delta t)$.

La simulation du mouvement brownien (suite)

Pour simuler une trajectoire du mouvement brownien jusqu'à l'instant $m\Delta t$, il suffit de générer m variables aléatoires indépendantes

$$\{Z_k : k \in \{1, 2, \dots, m\}\}$$

de loi normale centrée et réduite. Puisque

$$W_0 \equiv 0 \text{ et } W_{k\Delta t} \stackrel{\mathcal{L}}{=} W_{(k-1)\Delta t} + (\Delta t)^{\frac{1}{2}} Z_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (5)$$

Nous simulerons

$$\widehat{W}_0 \equiv 0 \text{ et } \widehat{W}_{k\Delta t} \equiv \widehat{W}_{(k-1)\Delta t} + (\Delta t)^{\frac{1}{2}} Z_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (6)$$

Nous pouvons montrer par induction que

$$\widehat{W}_{k\Delta t} = (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^k Z_i, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (7)$$

Évidemment, plus la longueur de l'intervalle de temps Δt est petite, meilleure sera notre approximation.

La précision de notre approximation discrète

Cette façon de simuler le mouvement brownien est appelée la *méthode d'Euler aléatoire*.

On peut mesurer la qualité de notre approximation de la façon suivante :

- pour mettre l'emphase sur le fait que notre approximation dépend de Δt , nous la noterons $\widehat{W}^{(\Delta t)}$
- pour définir notre approximation sur tout l'intervalle de temps, nous poserons

$$\widehat{W}_t^{(\Delta t)} \equiv \widehat{W}_{k\Delta t} \text{ pour tout } t \in [k\Delta t; (k+1)\Delta t). \quad (8)$$

•

$$E_P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \widehat{W}_t^{(\Delta t)} - W_t \right|^2 \right] \leq C_T \Delta t \quad (9)$$

C_T étant une constante dépendant uniquement de T .

Lamberton et Lapeyre, pages 149-150.

EXÉCUTER brownien.xls

La simulation du mouvement brownien (suite)

```
%Programme matlab brownien2.m
```

```
%Simulation de plusieurs trajectoires du mouvement brownien
```

```
clear all;
```

```
n = 5      %le nombre de trajectoires simulées
```

```
m = 10000  %le nombre de périodes de temps
```

```
Delta_t = 0.0001 %la longueur d'une période de temps
```

```
Z = normrnd(0,1,m,n); %vecteur colonne composé de m v.a. iid N(0,1)
```

```
W = zeros(m+1,n); %initialisation: trajectoires du mouvement brownien
```

```
temps = zeros(m+1,1);
```

```
for i = 1 : m
```

```
W(i+1,:) = W(i,:) + sqrt(Delta_t)*Z(i,:);
```

```
temps(i+1,1) = temps(i,1) + Delta_t;
```

```
end
```

```
plot(temps,W);
```

EXÉCUTER brownien2.m

Simulation d'un mouvement brownien multidimensionnel

Soit $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(d)})$ un mouvement brownien de dimension d dont les composantes sont indépendantes entre elles. Soit Γ une matrice de corrélations de dimension $d \times d$. Nous voulons construire un mouvement brownien $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$ de dimension d tel que

$$\text{Corr}(B_t^{(i)}, B_t^{(j)}) = \rho_{ij}, \forall t$$

où ρ_{ij} est l'élément de Γ situé à l'intersection de la i ième ligne et de la j ième colonne.

Simulation d'un mouvement brownien multidimensionnel

La décomposition de Choleski. Lorsque la matrice Γ est définie positive, alors il existe une matrice triangulaire supérieure C telle que $C'C = \Gamma$.

La matrice de variances-covariances de vecteurs aléatoires. Si $X_{d \times 1}$ est un vecteur aléatoire dont la matrice de variances-covariances est Σ_X et que $A_{d \times d}$ est une matrice de constantes alors, la matrice Σ_Y de variances-covariances du vecteur aléatoire $Y_{d \times 1} = A_{d \times d}X_{d \times 1}$ est

$$\Sigma_Y = A \Sigma_X A'. \quad (10)$$

Posons $B_{d \times 1} = C'_{d \times d} W_{d \times 1}$. Comme la matrice de corrélations de $W_{d \times 1}$ est la matrice identité, $\Gamma_W = I_{d \times d}$, alors la matrice de corrélations de $B_{d \times 1}$ satisfait

$$\Gamma_B = C'_{d \times d} I_{d \times d} C_{d \times d} = C'_{d \times d} C_{d \times d} = \Gamma_W. \quad (11)$$

La matrice de variances-covariances de B_t est $\Sigma_B = t \Gamma_B$.

Simulation d'un mouvement brownien multidimensionnel

```
clear all;

n = 10000 %le nombre de trajectoires simulées
m =10000 %le nombre de périodes de temps
Delta_t = 0.0001 %la longueur d'une période de temps

d = 3; %dimension du mouvement brownien multidimensionnel
%Matrice de corrélation des mouvements browniens
Gamma = [1 0.2 0.8; 0.2 1 0.5; 0.8 0.5 1];
choleski_G = chol(Gamma);

%Création du vecteur temps
temps = zeros(m+1,1); %initialisation
for i = 1 : m
    temps(i+1,1) = temps(i,1) + Delta_t;
end

%Création d'une matrice qui recueillera les résultats de chaque des trajectoires
resultats = zeros(n,?)
```

%Simulation de chaque trajectoire du mouvement brownien multidimensionnel

```
for j = 1 : n
    %Matrice composée de mxd variables aléatoires iid N(0,1)
    %Chaque colonne contient les N(0,1) servant à construire une des composantes du brown-
    ien
    Z = normrnd(0,1,m,d);

    %CRÉATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN AVEC COMPOSANTES INDÉPENDANTES
    %Chacune des colonnes de cette matrice contiendra une composante du mouvement
    brownien
    W = zeros(m+1,d); %initialisation
    for i = 1 : m
        W(i+1,:) = W(i,:) + sqrt(Delta_t)*Z(i,:);
    end
```

%CRÉATION D'UN MOUVEMENT BROWNIEN AVEC COMPOSANTES CORRÉLÉES

```
Wcorr = zeros(m+1,d);
for i = 2 : m+1
Wcorr(i,:) = W(i,:) * choleski_G;
end
```

resultats(j,:) = ...

end

resultats_globaux = fonction(resultats)...

Simulation d'un mouvement brownien multidimensionnel RÉSULTATS brownien3.m

Nous avons simulé 10 000 trajectoires d'un mouvement brownien de dimension 3 dont la matrice de corrélations entre ses composantes est

$$\Gamma_W = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 1 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

La décomposition de Cholevski de cette matrice est

$$C_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0.9798 & 0.3470 \\ 0 & 0 & 0.4895 \end{pmatrix}.$$

Vérification:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.9798 & 0 \\ 0.8 & 0.3470 & 0.4895 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0.9798 & 0.3470 \\ 0 & 0 & 0.4895 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 1.0000 & 0.5000 \\ 0.8 & 0.5000 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

Simulation d'un mouvement brownien multidimensionnel RÉSULTATS brownien3.m

Nous avons calculé les matrices de variances-covariances et de corrélations échantillonnelles de $W_{m\Delta t}$ et de $B_{m\Delta t}$ où la longueur d'un intervalle de temps était $\Delta t = 0,001$ et le nombre de périodes de temps était $m = 1000$. Rappelons que le nombre de trajectoires simulées est de $n = 10000$. Nous avons obtenu

$$\hat{\Sigma}_W = \begin{pmatrix} 1.0140 & -0.0004 & -0.0010 \\ -0.0004 & 0.9758 & 0.0047 \\ -0.0010 & 0.0047 & 0.9903 \end{pmatrix}$$

et

$$\hat{\Sigma}_B = \begin{pmatrix} 1.0140 & 0.2024 & 0.8106 \\ 0.2024 & 0.9758 & 0.4959 \\ 0.8106 & 0.4959 & 0.9903 \end{pmatrix}$$

Simulation d'une équation différentielle stochastique

Considérons une équation différentielle stochastique de la forme

$$dX_t = b(t, X_t) dt + a(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0. \quad (12)$$

La première étape consiste à s'assurer qu'il existe bien une solution à cette équation différentielle stochastique. Que simulerez-vous si cette solution n'existe pas ?

Simulation d'une équation différentielle stochastique

Rappel

$$dX_t = b(t, X_t) dt + a(t, X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0. \quad (13)$$

Nous appliquerons la *méthode d'Euler aléatoire*.

$$\begin{aligned} \widehat{X}_0 &\equiv X_0 \\ \widehat{X}_{(k+1)\Delta t} &\equiv \widehat{X}_{k\Delta t} + b(k\Delta t, \widehat{X}_{k\Delta t}) \Delta t \\ &\quad + a(k\Delta t, \widehat{X}_{k\Delta t}) (\widehat{W}(k+1)\Delta t - \widehat{W}_{k\Delta t}) \end{aligned} \quad (14)$$

La précision de notre approximation discrète méthode d'Euler aléatoire

- pour mettre l'emphase sur le fait que notre approximation dépend de Δt , nous la noterons $\widehat{X}^{(\Delta t)}$
- pour définir notre approximation sur tout l'intervalle de temps, nous poserons

$$\widehat{X}_t^{(\Delta t)} \equiv \widehat{X}_{k\Delta t} \text{ pour tout } t \in [k\Delta t; (k+1)\Delta t).$$

•

$$E_P \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \widehat{X}_t^{(\Delta t)} - X_t \right|^2 \right] \leq C_T \Delta t \quad (15)$$

C_T étant une constante dépendant uniquement de T .

Lamberton et Lapeyre, pages 149-150.

Exemple : le mouvement brownien géométrique

Nous voulons simuler le mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = s_0. \quad (16)$$

Dans ce cas-ci, deux méthodes peuvent être utilisées.

Première méthode : Si nous avons seulement besoin de S_T comme cela est le cas lors de la tarification de plusieurs droits contingents, alors nous allons profiter du fait que nous connaissons la solution de cette équation différentielle stochastique :

$$\begin{aligned} S_T &= s_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T \right) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} s_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma T^{1/2} Z \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Nous ne simulerons donc que la valeur de S au temps T et non pas toute sa trajectoire.

Exemple : le mouvement brownien géométrique

Deuxième méthode : Si nous devons connaître la trajectoire de S comme c'est le cas pour la tarification de l'option à barrière, alors nous utiliserons la *méthode d'Euler stochastique* :

$$\begin{aligned} \widehat{S}_0 &\equiv s_0 \\ \widehat{S}_{(k+1)\Delta t} &\equiv \widehat{S}_{k\Delta t} + \mu \widehat{S}_{k\Delta t} \Delta t \\ &\quad + \sigma \widehat{S}_{k\Delta t} (\widehat{W}(k+1)\Delta t - \widehat{W}_{k\Delta t}). \end{aligned} \quad (18)$$

Exemple : le mouvement brownien géométrique

%Simulation de plusieurs trajectoires du mouvement brownien (géométrique méthode 2)

```
clear all;
```

```
n = 80 %le nombre de trajectoires simulées
```

```
m = 10000 %le nombre de périodes de temps
```

```
Delta_t = 0.001 %la longueur d'une période de temps
```

```
mu = 0.1 %taux d'intérêt instantané annuel
```

```
sigma = 0.2 %volatilité
```

```
Szero = 1 %valeur initiale
```

```
Z = normrnd(0,1,m,n); %matrice composée de mxn variables aléatoires iid N(0,1)
```

```
%initialisation de la matrice contenant les trajectoires du mouvement brownien
```

```
%chacune des colonnes de cette matrice contiendra une trajectoire du brownien
```

```
W = zeros(m+1,n); %initialisation
```

```
%initialisation de la matrice contenant les trajectoires de S  
%chacune des colonnes de cette matrice contiendra une trajectoire de S  
S = zeros(m+1,n); %initialisation  
S(1,:) = Szero * ones(1,n); %valeur initiale de S
```

```
temps = zeros(m+1,1); %initialisation du vecteur temps
```

```
%Approximation du mouvement brownien géométrique
```

```
for i = 1 : m
```

```
W(i+1,:)=W(i,:) + sqrt(Delta_t)*Z(i,:);
```

```
S(i+1,:)=S(i,:) + mu*S(i,:)*Delta_t +
```

```
(sigma*S(i,:)).*(W(i+1,:)-W(i,:));
```

```
temps(i+1,1)=temps(i,1) + Delta_t;
```

```
end
```

```
plot(temps,S);
```

EXÉCUTER mbg.m

Exemple : le mouvement brownien géométrique

Tarification d'une option d'achat selon la première méthode

```
clear all;
```

```
n = 100000; %le nombre de trajectoires simulées
```

```
%Paramètres du titre sous-jacent
```

```
r = 0.1; %taux d'intérêt sans risque annuel
```

```
sigma = 0.2; %volatilité
```

```
Szero = 100; %valeur initiale
```

```
%Paramètre de l'option d'achat
```

```
K = Szero*1; %prix d'exercice
```

```
T = 90/365; %temps avant l'échéance, en années
```

```
d1 = (log(Szero/K) + (r+(sigma^2)/2)*T) / (sigma*sqrt(T));
```

```
d2 = d1 - sigma*sqrt(T);
```

```
PrixTheorique = Szero*normcdf(d1,0,1) - K*exp(-r*T)*normcdf(d2,0,1)
```

```
%Simulation du mouvement brownien géométrique à la date T
```

```
Z = normrnd(0,1,1,n); %vecteur ligne n variables aléatoires iid N(0,1)
```

```
ST = Szero*exp( (r-(sigma^2)/2)*T + sigma*sqrt(T)*Z);
```

```
%Calcul de la valeur actualisée du "payoff" de l'option pour chaque trajectoire
```

```
payoffAct = exp(-r*T)*max(ST-K*ones(1,n),zeros(1,n));
```

```
%Les résultats
```

```
PrixSimule = mean(payoffAct')
```

```
%Calcul de l'intervalle de confiance de niveau 95%
```

```
borneInf95 = PrixSimule - 1.96*sqrt(var(payoffAct')/n)
```

```
borneSup95 = PrixSimule + 1.96*sqrt(var(payoffAct')/n)
```

EXÉCUTER mbgCall1.m

EXÉCUTER mbgCall2.m

Références

Damien Lamberton et Bernard Lapeyre (1991). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses.

Peter E. Kloeden, Eckhard Platen et Henri Schurz (1997). *Numerical solution of SDE through computer experiments*, Springer.

fin