Standardisation d'une loi normale

La standardisation d'une variable gaussienne (ou normale) consiste en une transformation permettant de "ramener" cette variable aléatoire à la distribution centrée réduite.

Cela s'effectue donc en deux étape : (1) on centre la variable, ce qui implique que la nouvelle variable transformée aura une espérance nulle, et (2) on réduit cette variable, i.e. la variable transformée aura un écart-type unitaire (et donc une variance unitaire également).

Le but de cette standardisation et de créer des nouvelles variables dont on connaît mieux la distribution (dans la pratique, cela veut dire qu'on pourra par exemple utiliser des tables de distribution).

Proposition : Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Preuve : On sait qu'une variable gaussienne est caractérisée par ces deux premiers moments uniquement, i.e son espérance et sa variance (les moments d'ordres supérieurs étant fixes). De plus, une transformation linéaire d'une variable gaussienne et toujours une variable gaussienne, il y a une sorte de "transmission" de la normalité.

Il nous suffit donc de montrer que les deux premiers moments de $\frac{X-\mu}{\sigma}$ sont 0 et 1.

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\left[E(X) - E(\mu)\right] = \frac{1}{\sigma}\left[E(X) - \mu\right]$$

Or, par définition, nous savons que $\mu = E(X)$. Il est donc direct que :

$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0$$

Pour la variance, on a :

$$V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu)$$

μ est complètement déterministe, elle n'intervient donc pas dans le calcul de la variance, on a alors :

$$V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = 1$$

□