Решение уравнения теплопроводности по схеме Кранка-Николсон

Формальная постановка задачи

Дано:
$$\frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$
 – дифференциальное уравнение в частных производных,

D>0 – коэффициент температуропроводности (число),

h – шаг пространственной переменной x,

[0; 1] – интервал значений пространственной переменной х,

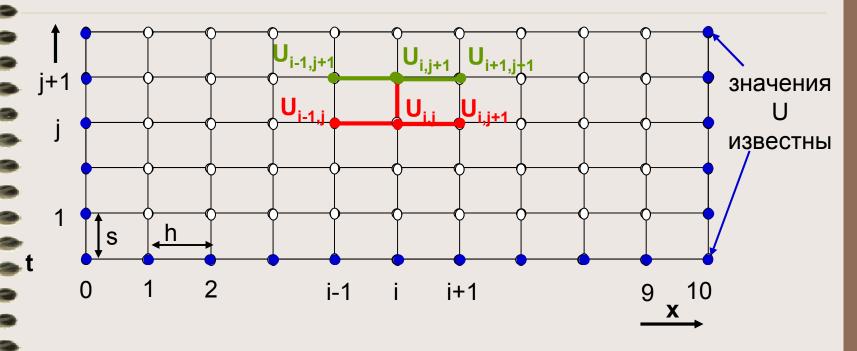
U(x,0)=f(x) – функция, описывающая распределение температуры по длине бруса в начальный момент времени,

 $U(0,t)=p_0(t)$ — функция, описывающая температуру левого конца бруса в зависимости от времени,

 $U(1,t)=p_1(t)$ — функция, описывающая температуру правого конца бруса в зависимости от времени,

Найти: построить таблицу значений температуры U при заданных значениях x и t

Шеститочечный шаблон



Рассматриваем шаблон **из 6 точек** для 3 значений x и 2 значений t

Схема Кранка-Николсон

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{s} = aD \left[\frac{U_{i-1,j+1} - 2U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1}}{h^2} \right] + (1-a)D \left[\frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2} \right]$$
 смешанная схема -

усреднение **неявной** схемы (с весом а) и **явной** (с весом 1-а) При а=0,5 это схема Кранка-Николсон

$$\begin{split} U_{i,j} + 0.5qD(U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}) = \\ = -0.5qDU_{i-1,j+1} + (1+qD)U_{i,j+1} - 0.5qDU_{i+1,j+1} \\ \text{где} \quad q = \frac{s}{h^2} \end{split}$$

Схема **безусловно устойчива** (при любом соотношении s и h).

Вычисление значений U_{і,ј}

Если известны значения U в момент j, для того чтобы найти значения функции в момент (j+1) нужно решить систему линейных уравнений A*U=B, где

	1	0	0	0		0	0	0
	-qD/2	1+qD	-qD/2	0		0	0	0
A =	0	-qD/2	1+qD	-qD/2	•••	0	0	0
, ,								
	0	0	0	0		-qD/2	1+qD	-qD/2
	0	0	0	0	• • •	0	0	1

B = [U_{i,j}+0,5qD(U_{i-1,j} -2U_{i,j} + U_{i+1,j})] зависит от U при t=j Решение U=A⁻¹*B

Пример

Дано:
$$\frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

- уравнение теплопроводности

D=1

h=0,1

 $x \in [0; 1]$

 $U(0,t)=p_0(t)=100,$

 $U(1,t)=p_1(t)=70$,

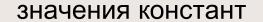
U(x,0)=f(x)=35 при x≠0 и x≠1.

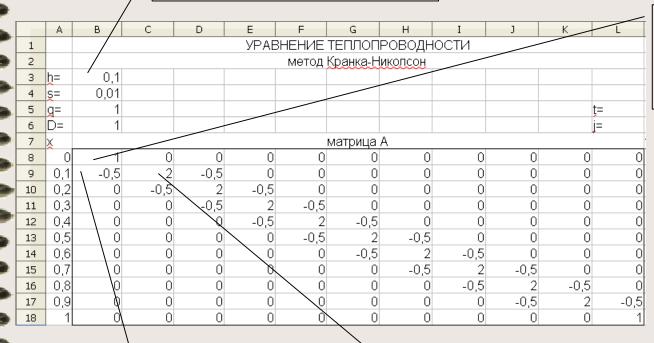
Найти: построить таблицу значений температуры U при t=0,1 и t=0,2

Выберем шаг s: s=0,01

Найдем константу q: q=1

Пример. Ввод констант, вычисление матрицы **А**





в ячейках В8 и L18 **единицы**

копируем формулы из ячеек В9:D9 вниз со сдвигом вправо

формула в ячейках В9 и D9 -qD/2 формула в ячейке С9 =1+qD

Пример. Вычисление вектора В

35

35

35 35

35

35 52.5 70



в 5-й строке значения t, в 6-й – значения j

в диапазоне M8:M18 значения U при t=0

в ячейке М20 ссылка на М8

в ячейке M21

U_{i,j}+0,5qD(U_{i-1,j} -2U_{i,j} + U_{i+1,j})

на D и q абсолютные ссылки
на U – относительные ссылки
формула копируется
в диапазон M22:M29

в ячейке M30 ссылка на M18

Пример. Вычисление значений U

	Α	В	С	D	Е	F	G	Н	I	J	К	L	М	N
1				УΡА	BHEH	ИЕTЕ	ПЛОГ	IPOB0	ДНОС	ти				
2					мет	год Қра	анка-Н	Іиколс с	OH.					
3	h=	0,1												
4	s=	0,01												
5	g=	1										ţ=	0	0,01
6	D=	1										j=	0	1
7	X						трица						t=0	
8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		100
9	0,1	-0,5	2	-0,5	0	0	0	0	0	0	0	0		69,834
10	0,2	0	-0,5	2	-0,5	0	0	0	0	0	0	0		44,335
11	0,3	0	0	-0,5	2	-0,5	0	0	0	0	0	0	35	37,508
12	0,4	0	0	0	-0,5	2	-0,5	0	0	0	0	0	35	35,696
13	0,5	0	0	0	0	-0,5	2	-0,5	0	0	0	0		35,276
14	0,6	0	0	0	0	0	-0,5	2	-0,5	0	0	0	35	35,409
15	0,7	0	0	0	0	0	0	-0,5	2	-0,5	0	0		
16	0,8	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	2	-0,5	0		40,029
17	0,9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	2	-0,5	35	53,757
18	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70	70
19													B /	400
20	H												100	100
21	H		d bo	ומכ	ЛVГ	ia N	<i>n</i> ac	ССИ	ва	В				72,168
23	H				-									53,671 40,016
24	H		Л	иа	паз	ВОН	e N	18:1	V18	3				36,392
25	+								•					35,552
26	+					A-1	*B							35,818
27														37,719
28														45,058
29														55,015
30													70	70
20													, , ,	

Порядок действий:

- заполняем диапазон N8:N18 с помощью формулы массива
- копируем диапазон M20:M30 в соседние столбцы
- копируем диапазон N8:N18 в соседние столбцы с помощью Копировать-Вставить

Пример. Результат вычислений

	Α	М	N	0	Р	Q	R	S	Т	U	٧	W	
3	h=												
4	s=												
5	g=	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	
6	D=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
7	X	ţ=0										t=0,1	
8	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
9	0,1	35	69,834	75,227	79,671	82,158	84,067	85,544	86,776	87,829	88,748	89,559	
10	0,2	35	44,335	56,572	62,113	66,517	69,749	72,425	74,68	76,636	78,355	79,88	
11	0,3	35	37,508	43,72	49,833	54,408	58,364	61,726	64,672	67,268	69,576	71,638	
12	0,4					46,627							
13	0,5	35	35,276	36,595	39,349	42,917	46,561	50,025	53,24	56,182	58,863	61,299	
14	0,6	35	35,409	37	39,746	42,922	46,133	49,234	52,14	54,833	57,307	59,571	
15	0,7	35				46,154							
16	0,8					52,249				59,433	60,896	62,248	
17	0,9	35	53,757	56,667	59,084	60,487	61,636	62,611	63,5	64,321	65,082	65,786	
18	1	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	
19		В											
20		100				100	100	100					
21						83,259							
22						68,283							
23						56,572	-		-			72,612	
24				· ·	-	48,663	· ·			_ ·		66,468	
25						44,775						62,458	
26				· ·	-	44,535			-	_ ·		60,652	
27						47,586					59,101	60,909	
28						53,32						62,896	
29		52,5	55,015	58,319	59,849	61,124	62,147	63,075	63,926	64,716	65,448	66,124	
30		70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	

столбцы В:К и строки 1-2 скрыты

значения U при t=0,1 в диапазоне W8:W18

Пример. Диаграмма значений функции U

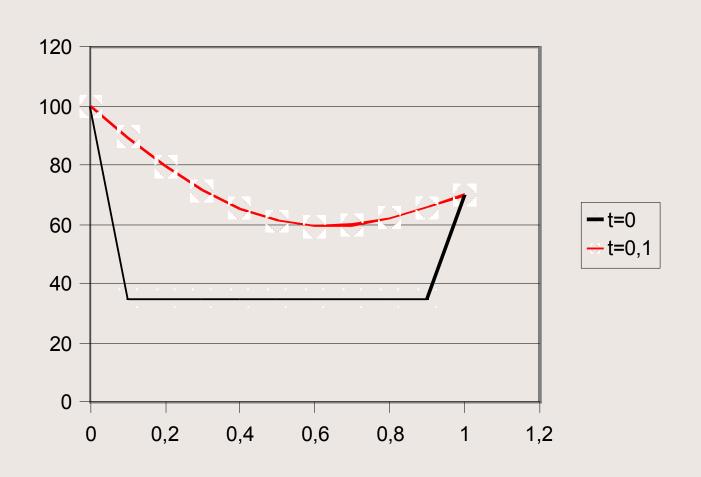


Схема Кранка-Николсон с учетом неоднородной среды

Если материал бруса, в котором распространяется тепло, **неоднороден**, коэффициент температуропроводности **D** зависит от пространственной координаты х.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

Схема Кранка-Николсон:

$$-0.5qP_{i-1}U_{i-1,j+1}+(1+0.5qP_i)U_{i,j+1}-0.5qP_{i+1}U_{i+1,j+1}=$$

$$=U_{i,j}+0.5q(P_{i-1}U_{i-1,j}-P_iU_{i,j}+P_{i+1,j})$$
 где

$$P_{i-1} = 0.5(D_{i-1} + D_i) \quad P_{i+1} = 0.5(D_i + D_{i+1}) \quad P_i = P_{i-1} + P_{i+1}$$

$$q = \frac{s}{h^2}$$

Пример. D зависит от x

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

- уравнение теплопроводности

$$D(x) = 1 - \frac{x}{2}$$

- монотонно убывает на [0; 1]

$$h=0,1$$

$$x \in [0; 1],$$

$$U(0,t)=p0(t)=100,$$

$$U(1,t)=p1(t)=70$$
,

$$U(x,0)=f(x)=35$$
 при х≠0 и х≠1.

Найти: построить таблицу значений температуры U при t=0,1 и t=0,2

$$D_{max} = D(0) = 1$$

Зададим шаг для времени t: s=0,01

Найдем константу q=1

Пример. Вычисление D(x) и коэффициентов Р

	Α	В	С	D	Е
1		·			
2					
3	<u>h</u> =	0,1			
4	ș=	0,01			
5	<u>q</u> =	1			
6					
7	X	D(x)	Pi-1	Pi+1	Pi
8	0	1			
9	0,1	0,95	0,975	0,925	1,9
10	0,2	0,9	0,925	0,875	1,8
11	0,3	0,85	0,875	0,825	1,7
12	0,4	8,0	0,825	0,775	1,6
13	0,5	0,75	0,775	0,725	1,5
14	0,6	0,7	0,725	0,675	1,4
15	0,7	0,65	0,675	0,625	1,3
16	8,0	0,6	0,625	0,575	1,2
17	0,9	0,55	0,575	0,525	1,1
18	1	, 0,5	0,525		

в столбце А значения х с шагом h

в столбце С значения P_{i-1} $P_{i-1} = 0.5(D_{i-1} + D_i)$ Формула в ячейке С9 копируется в диапазон C10:C18

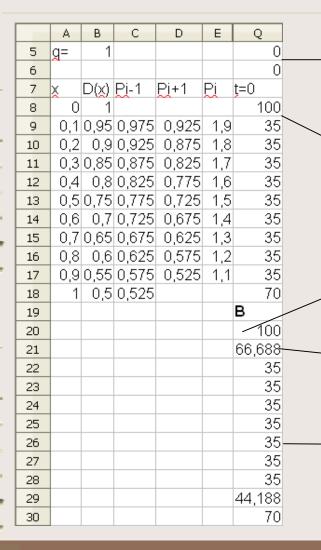
в столбце В значения D(x)

Пример. Вычисление матрицы А

b _																		
		Α	В	С	D	Е	F		G	Н	I	J	K	L	М	N	0	Р
	1									УР	ABHE	HUE TE	ЕПЛОПІ	POBO	дност	И		
١	2										Me	этод Құ	анка-Н	иколсо	J			
	3	h=	0,1															
	4	s=	0,01															
	5	g=	1															ţ=
•	6																	j=
>	7	X	D(x)	Pi-1	Pi+1	Ρį						Ma	атрица .	A				
	8	0	1					1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	9	0,1	0,95	0,975	0,925	1,9	-0,4	188	1,95	-0,463	0	0	0	0	0	0	0	0
1	10	0,2	0,9	0,925	0,875	1,8		0	0,463	1,9	-0,438	0	0	0	0	0	0	0
Þ	11	0,3	0,85	0,875	0,825	1,7		0	0	-0,438	1,85	-0,413	0	0	0	0	0	0
,	12	0,4	0,8	0,825	0,775	1,6		0	0	0	-0,413	1,8	-0,388	0	0	0	0	0
	13	0,5	0,75	0,775	0,725	1,5		0	0	0	0	-0,388	1,75	-0,363	0	0	0	0
	14	0,6	0,7	0,725	0,675	1,4		0	0	0	0	0	-0,363	1,7	-0,338	0	0	0
	15	0,7	0,65	0,675	0,625	1,3		0	0	0	0	0	0	-0,338	1,65	-0,313	0	0
	16	0,8	0,6	0,625	0,575	1,2		0	0	0	0	0	0	0	-0,313	1,6	-0,288	0
	17	0,9	0,55	0,575	0,525	1,1		0	0	0	0	0	0	0	0	-0,288	1,55	-0,263
	18	1	0,5	0,525				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	, 1
•																		

формула в ячейке F9 **-0.5qP**_{i-1} формула в ячейке G9 =1+0.5qP_i в ячейках F8 и P18 **единицы**

Пример. Вычисление вектора В



столбцы F:Р скрыты в 5-й строке значения t, в 6-й – значения j

в диапазоне Q8:Q18 значения U при t=0

в ячейке Q20 ссылка на Q8 в ячейке Q30 ссылка на Q18

в ячейке Q21 $U_{i,j}$ +0,5q($P_{i-1}U_{i-1,j}$ - P_i $U_{i,j}$ + $P_{i+1}U_{i+1,j}$)

формула копируется в диапазон Q22:Q29

Пример. Вычисление значений U

Г		Α	В	F	G	Н	I	J	К	L	М	N	0	P	Q	R
	5	g=	1	-						_				<u> </u>	0	0,01
	6	ă												į=	0	1
	7	<u>x</u>	D(x)		матрица At=0											
	8	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	100
	9	0,1	0,95	-0,488	1,95	-0,463	0	0	0	0	0	0	0	0	35	69,621
	10	0,2	0,9	0	-0,463	1,9	-0,438	0	0	0	0	0	0	0	35	43,942
	11	0,3	0,85	0	0	-0,438	1,85	-0,413	0	0	0	0	0	0	35	37,236
u	12	0,4	0,8	0	0	0	-0,413		-0,388	0	0	0	0	0	35	35,544
	13		0,75	0	0	0		-0,388		-0,363	0		0	0		35,146
L	14	0,6	0,7	0	0	0	0		-0,363		-0,338		0	0 0 0	35	35,122
L	15		0,65	0	0	0	0	0		-0,338		-0,313	0	0	35	35,46
	16	0,8		0	0	0	0	0	0		-0,313		-0,288			37,297
L	17		0,55	0	0	0	0	0	0	0		-0,288	1,55	-0,263	35	47,281
L	18	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70	70
,	19														В	
L	20														100	
L	21															72,554
L	22															52,885
L	23															39,472
-	24															36,088
L	25															35,292
-	26														35	35,245
-	27														35	35,92
-	28															39,593
-	29														44,188	
	30														/ρ	70

формула **массива** в диапазоне R8:R18 **A**-1*B

Порядок действий:

- заполняем диапазон R8:R18 с помощью формулы массива
- копируем диапазон Q20:Q30 в соседние столбцы
- копируем диапазон R8:R18 в соседние столбцы с помощью Копировать-Вставить

Пример. Результат вычислений

	Α	Q	R	S	Т	U	V	W	Х	Υ	Z	AA
5	g=	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
6		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	X	t= 0										t=0,1
8	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
9	0,1	35	69,621	75,517	79,945	82,494	84,37	85,789	86,935	87,894	88,719	89,443
10	0,2	35	43,942	56,117	61,972	66,39	69,604	72,169	74,283	76,086	77,658	79,052
11	0,3	35	37,236	43	48,964	53,471	57,236	60,392	63,119	65,515	67,649	69,568
12	0,4	35	35,544	37,63	41,083	44,779	48,235	51,433	54,358	57,031	59,477	61,72
13	0,5	35	35,146	35,896	37,625	40,134	42,965	45,839	48,636	51,295	53,796	56,134
14	0,6	35				38,989					51,059	
15	0,7	35	35,46	36,896	38,918	41,034	43,181	45,329	47,446	49,507	51,493	53,392
16	0,8	35	37,297	41,298	44,305	46,664	48,642	50,405	52,042	53,593	55,072	56,486
17	0,9	35	47,281	52,014	54,689	56,46	57,779	58,856	59,799	60,664	61,477	62,25
18	1	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
19		В										
20		100	100			100	100	100	100	100	100	100
21		66,688	72,554	78,48	81,409	83,58	85,16	86,418	87,453	88,335	89,103	89,784
22			52,885			68,186					78,395	79,709
23						55,538					68,657	70,48
24		35	36,088	39,172	-	46,565	-	-	-	-	-	
25				36,501	-	41,519	-	-		-	55,005	
26						40,094						
27		35	35,92	-	-	42,103			-		-	
28			39,593			47,721						
29		44,188			55,723	57,198		59,352	60,247	61,082	61,873	62,627
30		70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70

столбцы В:Р скрыты

Значения U при t=0,1 в столбце AA

Пример. Результат - диаграмма значений функции U

