Feuille de td 4

Exercice 1 *Calcul de produits*

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Effectuer tous les produits de deux matrices prises parmi A, B, C, L qui ont un sens.

Exercice 2 *Groupe des quaternions*

On considère les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits $M_i M_j$ pour i et j dans $\{0, 1, 2, 3\}$. Synthétiser les résultats sous forme de tableau.

$\times\nearrow$	M_0	M_1	M_2	M_3
M_0				
M_1				
M_2				
M_3				

2. En déduire que $G := \{M_0, M_1, M_2, M_3, -M_0, -M_1, -M_2, -M_3\}$ est un groupe.
3. Pour a, b, c, d dans $\mathbb{R}$, développer et simplifier le produit

$$(aM_0 + bM_1 + cM_2 + dM_3)(aM_0 - bM_1 - cM_2 - dM_3).$$

En déduire que si $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ alors $aM_0 + bM_1 + cM_2 + dM_3$ est inversible.

Exercice 3 *Théorème de Cayley Hamilton en dimension 2*

On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On pose appelle trace de M et déterminant de M les quantités $\mathrm{tr}M = a + d$ et $\det M = ad - bc$.

1. Calculer M^2.
2. Montrer que $M^2 - (\mathrm{tr}M)M + (\det M)I_2$ est la matrice nulle de $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
3. Lorsque $\det M \neq 0$, en déduire l'expression de M^{-1}.

Exercice 4 *Blocs de Jordan*

On considère les matrices

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $M = I_3 + N$.

1. Calculer N^2 et N^3. Que vaut N^k si $k \geq 3$?
2. Développer le produit $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$; en déduire que M est inversible et donner son inverse.
3. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 *Trace et transposition*

On appelle trace d'une matrice carrée $C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la somme des coefficients diagonaux, autrement dit $\mathrm{tr}(C) = c_{1,1} + \cdots + c_{n,n}$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les quantités $\mathrm{tr}(AB)$ et $\mathrm{tr}(BA)$ ont un sens et sont égales.
2. Montrer que $A \times {}^tA$ a un sens, est symétrique, et que $\mathrm{tr}(A \times {}^tA) = 0$ si et seulement si $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exercice 6 *Matrices stochastiques*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On dit que A est stochastique si ses coefficients sont positifs et si sur chaque ligne, la somme des coefficients vaut 1, autrement dit si

— $\forall i \in [\![1, m]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} \geq 0$;

— $\forall i \in [\![1, m]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

On note $\mathrm{Sto}_{m,n}$ l'ensemble des matrices stochastique de taille $m \times n$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $Y_n \in \mathcal{M}_{n,1}$ la matrice colonne à m lignes dont tous les coefficients valent 1.

1. Donner un exemple de matrice stochastique de taille 2×3 et un de taille 3×2.
2. Reformuler la deuxième condition à l'aide du produit AY_n.
3. Montrer que si A et B sont dans $\mathrm{Sto}_{m,n}$, et si α et β sont des réels positifs de somme 1, alors $\alpha A + \beta B$ est dans $\mathrm{Sto}_{m,n}$.
4. Montrer que si $A \in \mathrm{Sto}_{m,n}$ et $B \in \mathrm{Sto}_{m,p}$, alors $AB \in \mathrm{Sto}_{m,n}$.
5. Soit $A \in \mathrm{Sto}_{m,n}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les coefficients de x. Soient j_1 et j_2 des indices tels que $x_{j_1} = \min(x_1, \ldots, x_n)$ et $x_{j_2} = \min(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que les coefficients de AX sont tous compris entre x_{j_1} et x_{j_2}.

Exercice 7 *Multiplication par une matrice diagonale*

On se donne deux matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que D est diagonale, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ce qu'on écrit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

1. Expliciter les coefficients (i, j) des matrices AD et DA.
2. Montrer que si A est diagonale alors $AD = DA$.
3. Montrer la réciproque lorsque les complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous différents.
4. On suppose dans cette question que A commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En s'aidant des questions précédentes, montrer que $A = \lambda I_n$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. On commencera par montrer que A est diagonale.

Exercice 8 *Matrices de rang* 1

On se donne deux matrices colonnes non nulles à ceofficients complexes :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice $U \times {}^tV$ a un sens, donner sa taille la calculer, et montrer que son rang est 1.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'on peut écrire M comme produit d'une matrice colonne par une matrice ligne. On commencera par fixer deux indices i_0 et j_0 tels que le coefficient de M en (i_0, j_0) soit non nul.

Exercice 9 *Matrice et expression d'une application linéaire dans deux bases*

On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ est
$$M = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$
Quelle est l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$?
2. Donner la matrice dans les bases $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_3$ de l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4)$?

Exercice 10 *Exemples d'applications linéaires de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $C = [0,1]^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [0,1] \text{ et } x_2 \in [0,1]\}$.

1. Pour tout u et v dans $\mathbb{R}^2$, on appelle segment $[u, v]$ l'ensemble des vecteurs de la forme $(1 - \theta)u + \theta v$ avec $\theta \in [0, 1]$. Montrer que si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, alors $f([u, v]) = [f(u), f(v)]$.
2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Dessiner le carré $Q = [0,1]^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [0,1] \text{ et } x_2 \in [0,1]\}$ et la lettre F à l'aide des segments $[0, 2e_2]$, $[2e_2, 2e_2 + e_1]$, $[e_2, e_2 + (1/2)e_1]$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$,
3. Dessiner les images de Q et la lettre F par les endomorphismes de matrices
$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_8 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 11 *Multiplication dans* $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{B} = (1, i)$ la base canonique de $\mathbb{C}$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour tout a et b dans $\mathbb{R}$, on note $f_{a,b}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f_{a,b}(z) = (a + ib)z$. et g l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = \overline{z}$. On rappelle que ces applications sont $\mathbb{R}$-linéaires.

1. Donner les matrices $M_{a,b}$ et N des endomorphismes $f_{a,b}$ et g dans $\mathcal{B}$.
2. Pour tout a, b, c, d dans $\mathbb{R}$, calculer de la matrice $M_{a,b}M_{c,d}$ directement. Retrouver ce résultat en déterminant $f_{a,b} \circ f_{c,d}$.
3. Mêmes questions avec le produit $NM_{a,b}N$.
4. Que vaut $M_{a,b}M_{a,-b}$? En déduire que $(a, b) \neq (0, 0)$, alors $M_{a,b}$ est inversible.

Exercice 12 *Dérivation des polynômes*

Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 3 à coefficients réels. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}' = (1, X, X^2/2, X^3/6)$.

1. Pourquoi $\mathcal{B}'$ est-elle encore une base de $\mathbb{R}_3[X]$? Écrire la matrice de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.
2. Montrer que la dérivation est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
3. On note d cette application. Écrire les matrices de d dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Calculer de deux manières différentes les matrices de $d^2 = d \circ d$ et $d^4 = d \circ d \circ d \circ d$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 13 *Opérateurs de translation sur les polynômes*

Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré ≤ 3 à coefficients réels. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Soit a unn réel. Montrer qu'on peut définir une application T_a de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ par $T_a(P)(X) = P(X + a)$ et que cette application est linéaire.
2. Soit M_a la matrice de T_a dans $\mathcal{B}$. Donner l'expression de M_a.
3. Montrer que pour tous réels a et b, $T_a \circ T_b = T_{a+b}$. En déduire le produit $M_a M_b$.
4. Soit G l'ensemble de toutes les matrices M_a pour a dans $\mathbb{R}$. En déduire que G est un sous-groupe de $GL_4(\mathbb{R})$.

Exercice 14 *Image, noyau, changements de bases*

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. À quelle condition un vecteur x est-il dans $\operatorname{Ker} f$? En déduire une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. Trouver une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, puis une base de $\operatorname{Im} f$.
3. Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$.
4. Montrer que le familles $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ et $\mathcal{B}'' = (f(e_1), f(e_2), e_3)$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$, et donner les matrices $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'$ et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}''$.
5. Écrire la matrice A' de f dans les bases $\mathcal{B}'$ (au départ) et $\mathcal{B}''$ (à l'arrivée). Quelle relation y-a-t-il entre A, A', P et Q ?

Exercice 15 *Changement de base et calcul de puissances*

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, 2)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $f(v_1)$ et $f(v_2)$. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Écrire la matrice $P = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2)$ et calculer son inverse (voir exercice 3).
4. Écrire la relation liant A, A' et P.
5. En déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.