Corrigé du contrôle continu 3

Exercice 1. *(14,5 points)*

Soient $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+3z=0\}$ et $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z\right\}$. On **admet** que P et D sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1) *Calculer une base de P et une base de D. Quelle est la dimension de P ? De D ? De quels objets géométriques s'agit-il ? (2,5 points)*

- On a

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+3z=0\} = \{(-2y-3z,y,z), y,z \in \mathbb{R}\} = \{y.(-2,1,0)+z.(-3,0,1), y,z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

où $\mathscr{F} = \big((-2,1,0),(-3,0,1)\big)$ est une famille libre, car ses deux composantes sont non colinéaires.
Donc $\mathscr{F}$ est une famille génératrice et libre de P, donc $\underline{\mathscr{F}\text{ est une base de }P}$.
Comme $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 2$, $\underline{P\text{ est de dimension 2, c'est donc un plan de }\mathbb{R}^3}$.

- De la même manière, on a

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z\right\} = \{(3z,2z,z), z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((3,2,1))$$

donc comme $(3,2,1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\underline{D\text{ est une droite, de dimension 1, de base }((3,2,1))}$.

2) *Montrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$. (3 points)*

On a $P \oplus D = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow P \cap D = \{0\}$ et $P + D = \mathbb{R}^3$.

- Soit $u = (x,y,z) \in P \cap D$. Puisque $u \in D = \mathrm{Vect}((3,2,1))$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = (3\lambda, 2\lambda, \lambda)$. Or, $u \in P$, donc
$$0 = x+2y+3z = 10\lambda$$
de sorte que $\lambda = 0$. D'où $u = (0,0,0)$. Ainsi, comme $0_{\mathbb{R}^3} \in P \cap D$ (ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$), on a $\underline{P \cap D = \{0\}}$.
- On sait que $\dim(P+D) = \dim(P) + \dim(D) - \dim(P \cap D)$ donc selon la question **1)** d'une part, et le point précédent d'autre part, on a $\dim(P+D) = 2+1-0 = 3$. Or, $P+D$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc $\underline{P+D = \mathbb{R}^3}$.

Selon ces deux points, $\underline{\text{on a }P \oplus D = \mathbb{R}^3}$.

3) *Soient $(v_1,\dots,v_{\dim P})$ et $(u_1,\dots,u_{\dim D})$ les bases respectives de P et D calculées à la question **1)**. Montrer que*
$$\mathscr{B} = (v_1,\dots,v_{\dim P},u_1,\dots,u_{\dim D})$$
est une base de $\mathbb{R}^3$. (2 points)

Il y a plusieurs manières de faire cette question. D'une part, on peut remarquer qu'il s'agit d'un résultat du cours, ce qui est accepté à condition de citer précisément ce résultat. D'autre part, on peut simplement écrire concrètement la base $\mathscr{B}$ dans ce cas précis, qui est donc une famille à 3 éléments de $\mathbb{R}^3$, et montrer qu'il s'agit d'une famille libre ou génératrice de $\mathbb{R}^3$, selon la méthode habituelle.

4) *Soit f la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D et $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $f(x,y,z)$. (3 points)*

Pour pouvoir calculer $f(x,y,z)$, il faut décomposer u sous la forme $u = v+w$, où $v \in P$ et $w \in D$. On a alors $f(u) = v$ par définition de la projection.

Supposons trouvés de tels v et w.

On a donc $w = (3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, $v = u - w \in P$ donc

$$0 = x - 3\lambda + 2(y - 2\lambda) + 3(z - \lambda) = x + 2y + 3z - 10\lambda,$$

si bien que $\lambda = \dfrac{x+2y+3z}{10}$. Ainsi,

$$w = \left(\frac{3x+6y+9z}{10}, \frac{2x+4y+6z}{10}, \frac{x+2y+3z}{10}\right) \tag{1}$$

et

$$v = (x,y,z) - w = \left(\frac{7x-6y-9z}{10}, \frac{-2x+6y-6z}{10}, \frac{-x-2y+7z}{10}\right) \tag{2}$$

Réciproquement, en remontant les calculs, on vérifie que si v et w sont donnés par (1) et (2), $(v, w) \in P \times D$ et $u = v + w$.

Par suite, selon (2),

$$\underline{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = \left(\frac{7x-6y-9z}{10}, \frac{-2x+6y-6z}{10}, \frac{-x-2y+7z}{10}\right)}$$

5) *En déduire la matrice A de f dans la base usuelle de* $\mathbb{R}^3$. *(1 point)*

Selon la question précédente,

$$f(1,0,0) = \left(\frac{7}{10}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{10}\right),\ f(0,1,0) = \left(\frac{-3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-1}{5}\right) \text{ et } f(0,0,1) = \left(\frac{-9}{10}, \frac{-3}{5}, \frac{7}{10}\right)$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} 7/10 & -3/5 & -9/10 \\ -1/5 & 3/5 & -3/5 \\ -1/10 & -1/5 & 7/10 \end{pmatrix}$$

6) *Écrire la matrice A′ de f dans* $\mathscr{B}$. *(1 point)*

Je reprends les notations de la question **3)**. On a $\mathscr{B} = (u_1, u_2, v_1)$ où $u_1, u_2 \in P$ et $v_1 \in D$. Donc par définition de la projection sur P parallèlement à D, on a $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$ et $f(v_1) = 0$. Donc

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7) *A l'aide de la formule de changement de base, donnez une équation matricielle reliant A et A′. (2 points)*

Notons e la base usuelle de $\mathbb{R}^3$ et $P = P_e^{\mathscr{B}}$ la matrice de passage de e à $\mathscr{B}$. On a alors par la formule de changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P^{-1}\mathrm{Mat}_e(f)P, \quad \text{soit } A' = P^{-1}AP$$

De plus, avec la base $\mathscr{B}$ trouvée en **1)**,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *(9 points)*
On définit sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

1) *Montrer que* $\langle\cdot,\cdot\rangle : (P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ *est un produit scalaire sur* E*. (2.5 points)*

(*Indication* : on pourra utiliser librement le fait que, si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et positive, alors $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle sur $[0,1]$).

On vérifie les quatre points de la définition de produit scalaire. Soient $P,Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- *Positivité* : On a $\langle P,P\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)^2\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale car $\forall t \in [0,1], P(t)^2 \geqslant 0$.
- *Définie positivité* : Supposons que $\langle P,P\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)^2\mathrm{d}t = 0$. Alors $t \mapsto P(t)^2$ est une fonction continue sur $[0,1]$ et positive sur ce segment, de sorte que selon l'indication, on a $\forall t \in [0,1], P(t)^2 = 0$, soit $P(t) = 0$. En vertu de l'identification entre polynômes et fonctions polynomiales sur un segment, on en déduit que $P = 0$.
- *Symétrie* : On a
$$\langle Q,P\rangle = \int_0^1 Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \langle P,Q\rangle.$$
- *Linéarité à droite.*
Si $Q_1, Q_2 \in E$, on a
$$\begin{aligned}\langle P,\lambda Q_1 + Q_2\rangle &= \int_0^1 P(t)\left(\lambda Q_1(t) + Q_2(t)\right)\mathrm{d}t = \lambda\int_0^1 P(t)Q_1(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 P(t)Q_2(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\langle P,Q_1\rangle + \langle P,Q_2\rangle\end{aligned}$$
par linéarité de l'intégrale.

Selon ces quatre points, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

On note $\|P\| = \sqrt{\langle P,P\rangle}$ pour $P \in E$.

2) **a)** *Rappeler (sans justifier) quelle est la dimension de* E*, donner une base de* E*. (1 point)*
Selon le cours, $\dim E = 3$, une base de E est $(1, X, X^2)$.

b) *Soit* $i \in \{0,\dots,4\}$*. Justifier brièvement que* $\int_0^1 t^i\mathrm{d}t = \dfrac{1}{i+1}$*. (0,5 point)*
On a
$$\int_0^1 t^i\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{i+1}}{i+1}\right]_0^1 = \frac{1}{i+1}.$$

c) On pose $u_1 = 1$. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u_2 := a + bX$ vérifie $\langle u_1, u_2\rangle = 0$ et $\|u_2\| = 1$.
On a $\langle u_1, u_2\rangle = 0 \Leftrightarrow a + \dfrac{b}{2} = 0 \Leftrightarrow b = -2a$ car $\langle 1, X\rangle = 1/2$ selon la question **2)b)**
Supposons donc que $u_2 = a(1-2X)$, et cherchons a tel que $\|u_2\| = 1$. Par linéarité à droite et à gauche du produit scalaire, on a
$$\|u_2\|^2 = a^2\langle 1-2X, 1-2X\rangle = a^2\left(\langle 1,1\rangle + 4\langle X,X\rangle - 4\langle 1,X\rangle\right)$$
puisque $\langle 1,X\rangle = \langle X,1\rangle$ par symétrie.
Donc selon **2)b)**,
$$\|u_2\|^2 = a^2\left(1 + \frac{4}{3} - 2\right) = \frac{a^2}{3}$$
de sorte que $\|u_2\| = 1 \Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}$.
Ainsi, $u_2 = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}X$ vérifie la conclusion voulue.

d) Trouver $c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que $u_3 := c + dX + eX^2$ vérifie $\langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0$ et $\|u_3\| = 1$.
Question quasiment jamais traitée.