

UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
INSTITUT FOURIER

Le théorème d'André-Chudnovsky-Katz

Gabriel LEPETIT

Mémoire de Master 2 réalisé sous la direction de Tanguy RIVOAL

JANVIER – JUIN 2018

Table des matières

Introduction	2
1 Opérateurs différentiels nilpotents	6
1.1 Généralités sur les opérateurs fuchsien	6
1.1.1 Opérateurs différentiels	6
1.1.2 Points singuliers réguliers	7
1.1.3 Polynôme indicel et exposants d'un opérateur	9
1.1.4 Théorème de Frobenius	11
1.2 Opérateurs nilpotents et théorème de Katz-Honda	12
1.3 Cas global : le théorème de Katz	15
1.3.1 Valeur absolue de Gauss	15
1.3.2 Opérateurs globalement nilpotents et théorème de Katz	16
2 G-fonctions et condition de Galochkin	21
2.1 Présentation et exemples	21
2.2 Le théorème des Chudnovsky	25
2.2.1 Condition de Galochkin	26
2.2.2 Démonstration du théorème 14	28
2.3 Lemme de Shidlovskii pour les approximants de Padé de type II	35
2.3.1 Lemmes techniques	36
2.3.2 Démonstration du théorème 15	39
3 Lien entre la nilpotence et la condition de Galochkin	41
3.1 Systèmes différentiels nilpotents	41
3.1.1 Nilpotence locale	41
3.1.2 Nilpotence globale	42
3.2 Rayon de convergence p -adique	42
3.3 Estimations sur le rayon de convergence	46
3.3.1 Formule de Hadamard	46
3.3.2 Théorème de Dwork-Robba	49
3.4 Le théorème d'André-Bombieri	53
3.4.1 Rayon de convergence global	53
3.4.2 Taille d'un système différentiel	54
3.4.3 Théorème d'André-Bombieri	56
3.5 Démonstration du théorème 5	60
Annexe : le théorème de Chebotarev	61
Références	65

Introduction

Une G -fonction est une série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ telle que

- a) Il existe une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ dont $f(z)$ est solution ;
- b) il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs absolues des conjugués au sens de Galois des a_n sont bornées par C_1^{n+1} ;
- c) il existe $C_2 > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on puisse trouver un entier $d_n \geq 1$ vérifiant

$$d_n a_0, \dots, d_n a_n \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}} \quad \text{et} \quad d_n \leq C_2^{n+1}.$$

Les G -fonctions constituent une classe importante de fonctions spéciales, dont l'étude s'est développée ces dernières années parallèlement à celle des E -fonctions, qui sont les séries $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ solutions d'une équation différentielle sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et telles que les a_n vérifient les conditions **b)** et **c)** ci-dessus. En effet, un certain nombre de fonctions usuelles, telles que les polylogarithmes $\text{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$ – dont les évaluations en 1 valent $\zeta(s)$ – ou des fonctions hypergéométriques (voir section 2.1), font partie de cette famille. Initialement, le terme de G -fonction, introduit par Siegel en 1929 dans [28], provient de l'exemple simple de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, de même que l'appellation E -fonction vient de la série exponentielle $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Du point de vue de l'approximation diophantienne, le but de l'étude des E - et G -fonctions est de savoir si leurs valeurs en des points algébriques sont irrationnels, voire transcendants.

Concernant les E -fonctions, cette question a obtenu une réponse satisfaisante avec des raffinements successifs du théorème de Siegel-Shidlovskii (voir [26, p. 139]), dûs à Nestorenko et Shidlovskii (cf [22]), puis finalement à Beukers dans [9], qui a utilisé la théorie des E -opérateurs d'André (cf [4] et [3]).

Théorème 1 (Siegel–Shidlovskii, 1929–1956)

Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1(z), \dots, f_n(z)) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]^n$ un vecteur de E -fonctions vérifiant $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$, avec $G \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$, soit $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ tel que $T(z)G(z) \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$.

Alors le degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de $(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$ est égal au degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de $(f_1(z), \dots, f_n(z))$.

Le théorème 1 est précisé¹ par le :

Théorème 2 (Beukers, 2006)

Sous les hypothèses du théorème précédent, on a ; pour tout polynôme homogène $P \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{Q}[Z, X_1, \dots, X_n]$ homogène en les variables X_1, \dots, X_n tel que $Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n)$ et $Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0$.

Tout récemment, et à la suite des travaux précédents, Adamczewski et Rivoal ont trouvé dans [1] un algorithme permettant de déterminer les points algébriques auxquels une E -fonction prend des valeurs algébriques.

1. voir toutefois la remarque à la fin de cette introduction

Théorème 3 (Adamczewski, Rivoal, 2018)

Il existe un algorithme effectuant les tâches suivantes. Prenant une E -fonction $f(z)$ en entrée, il dit si $f(z)$ est transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ ou non. Si elle est transcendante, il donne la liste finie des nombres algébriques α tels que $f(\alpha)$ est algébrique, ainsi que la liste correspondante des valeurs $f(\alpha)$.

Malheureusement, aucun résultat diophantien similaire n'a été prouvé concernant les G -fonctions. Un des théorèmes majeurs dans ce domaine est celui de Galochkin, conséquence du résultat prouvé dans [15, p. 387].

Théorème 4 (Galochkin, 1974)

Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1(z), \dots, f_n(z)) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]^n$ un vecteur de G -fonctions vérifiant $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$, avec $G \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$, tel que $(f_1(z), \dots, f_n(z))$ est libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, et satisfaisant la condition de Galochkin :

« si $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ est tel que $T(z)G(z) \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$, et si pour tout $s \in \mathbb{N}$, q_s est le plus petit entier tel que tous les coefficients des coefficients des matrices $TG, T^2 \frac{G_2}{2}, \dots, T^s \frac{G_s}{s!}$ sont des entiers algébriques, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbb{N}$, $q_s \leq C^{s+1}$. »

Alors il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de \mathbf{f} et de G telle que pour tout $b \in \mathbb{Z}$ vérifiant $c < |b|$, la famille $\left(f_1\left(\frac{1}{b}\right), \dots, f_n\left(\frac{1}{b}\right)\right)$ est libre sur \mathbb{Q} .

Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on a le même type de résultat sur les $f_i\left(\frac{a}{b}\right)$ pourvu que $0 < c_1|a|^{c_2} < |b|$, avec c_1, c_2 des constantes.

La condition de Galochkin dans ce théorème illustre le fait que la nature des équations différentielles satisfaites par les G -fonctions influence de manière essentielle les propriétés de leurs valeurs en des points algébriques. C'est pourquoi le but de ce mémoire est de présenter la démonstration du théorème suivant (cf [4, pp. 718–719]), qui étudie les caractéristiques de l'équation différentielle minimale d'une G -fonction.

Théorème 5 (André-Chudnovsky-Katz)

Soit $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ une G -fonction, et $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$ un opérateur différentiel non nul d'ordre minimal pour f tel que $L(f(z)) = 0$. Alors l'opérateur différentiel L est globalement nilpotent. En particulier, tout point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un point singulier régulier de L et les exposants de L en tout point sont dans \mathbb{Q} . De plus, la condition de Galochkin est satisfaite pour $(f, f', \dots, f^{(\mu-1)})$, où μ est l'ordre de L .

Comme L est à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, on verra que les points finis non algébriques sont des points réguliers, donc à exposants entiers. Par ailleurs, comme l'explique André dans [4, p. 719], si $u \in \overline{\mathbb{Q}}$, il existe une base de solutions de l'équation différentielle $L(g(z)) = 0$ au voisinage de u s'écrivant $(f_1(z-u), \dots, f_n(z-u))(z-u)^{C_u}$, où $C_u \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ est triangulaire supérieure, et les $f_i(z)$ sont des G -fonctions. Si $u = \infty$, on a une base similaire en remplaçant $z-u$ par $1/z$. Si u est un point régulier, alors on peut prendre $C_u = I_n$, de sorte qu'autour de ce point, on peut trouver une base de solutions composées de G -fonctions uniquement.

Le théorème des Chudnovsky proprement dit, dû à G. et D. Chudnovsky dans [12], affirme que la condition de Galochkin introduite dans le théorème ci-dessus est automatiquement satisfaite par une famille de G -fonctions libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, ce qui est une avancée remarquable.

De plus, le théorème d'André-Chudnovsky-Katz est crucial dans la démonstration du théorème 2 ci-dessus sur les E -fonctions. En effet la théorie d'André consiste à déduire des propriétés des équations différentielles des G -fonctions celles des équations différentielles des E -fonctions, via la transformée de Fourier-Laplace des opérateurs de $\overline{\mathbb{Q}} \left[z, \frac{d}{dz} \right]$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}: \overline{\mathbb{Q}} \left[z, \frac{d}{dz} \right] & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}} \left[z, \frac{d}{dz} \right] \\ z & \longmapsto & -\frac{d}{dz} \\ \frac{d}{dz} & \longmapsto & z, \end{array}$$

en faisant le parallèle avec le fait que la transformée de Laplace d'une E -fonction est une G -fonction en la variable $1/z$.

Dans le même article, les Chudnovsky ont obtenu le résultat diophantien suivant, qui est essentiellement le meilleur connu à ce jour (cf [12, p. 17]).

Théorème 6

Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1(z), \dots, f_n(z)) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]^n$ un vecteur de G -fonctions vérifiant $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$, avec $G \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ telle que $1, f_1(z), \dots, f_n(z)$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors pour tout $t \geq 1$, il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant de \mathbf{f} et de t telle que pour tout nombre algébrique ξ de degré inférieur ou égal à t , et vérifiant

$$0 < |\xi| \leq \exp \left(-c_0 (\log H(\xi))^{\frac{4n}{4n+1}} \right),$$

les nombres $1, f_1(\xi), \dots, f_n(\xi)$ ne sont pas liés par une relation algébrique de degré inférieur ou égal à t sur $\mathbb{Q}(\xi)$.

Ici, $H(\xi)$ est la hauteur naïve de ξ , c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme minimal normalisé de ξ sur \mathbb{Q} .

Les preuves de ces théorèmes diophantiens ne seront pas abordées dans ce mémoire dans lequel nous nous concentrerons sur la démonstration du théorème d'André-Chudnovsky-Katz. Néanmoins, les techniques des Chudnovsky (partie 2.2) servent également à démontrer le théorème 6.

Nous prouverons le théorème 5 selon le plan suivant : on se donne $f \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ une G -fonction et $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$ un opérateur d'ordre minimal pour f tel que $L(f(z)) = 0$.

- Dans la partie 1, nous nous intéresserons aux opérateurs différentiels nilpotents et au théorème de Katz (théorème 12) affirmant que tout opérateur nilpotent sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est singulier régulier en tout point de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ et que ses exposants en tout point sont rationnels.
- La partie 2 sera consacrée à la preuve du théorème des Chudnovsky (théorème 14) affirmant que la matrice compagnon associée A_L associée à L vérifie la condition de Galochkin (définition 13).
- Dans la partie 3, nous démontrerons, à l'aide d'estimations sur le rayon de convergence p -adique, le théorème d'André-Bombieri (théorème 19) montrant que la condition de Galochkin implique que L est un opérateur différentiel globalement nilpotent. Ainsi, le théorème de Katz nous assure que L est singulier régulier en tout point et que ses exposants en tout point sont rationnels.

Une annexe sera consacrée au théorème de Chebotarev qui est crucial dans la preuve du théorème de Katz.

Remarque

Dans son article [28], Siegel a défini les E -fonctions « au sens large », la condition de croissance géométrique sur les coefficients et sur les dénominateurs étant remplacée par une condition de domination, pour tout $\varepsilon > 0$, par $(n!)^\varepsilon$ à partir d'un certain rang dépendant de ε . Il est clair qu'une E -fonction « au sens strict » (c'est-à-dire telle que définie au début de l'introduction) est une E -fonction au sens large. Il est conjecturé que ces deux définitions

sont en fait équivalentes, mais cela n'a pas été prouvé à ce jour. Le théorème 1 a été prouvé pour des E -fonctions au sens large, mais pas les théorèmes 2 et 3. En ce sens, le théorème 2 n'est pas précisément une généralisation du théorème de Siegel-Shidlovskii.

Notations

- On note \mathbb{Z}_- l'ensemble des entiers relatifs négatifs.
- $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne le corps des nombres algébriques, \mathcal{O} l'anneau des entiers algébriques. Si \mathbb{K} est un corps de nombres, $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathcal{O} \cap \mathbb{K}$.
- Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, on note $|\overline{\alpha}|$ la *maison* de α , c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues des conjugués de α au sens de Galois.
- Si \mathbb{K} est un corps de nombres, on note $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ le spectre de \mathbb{K} , c'est-à-dire l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau de Dedekind $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Si $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ est tel que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$, $p \in \text{Spec}(\mathbb{Z})$, on note $\mathfrak{p} | p$.
- Si \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} , on note $\mathbb{K}\{z\}$ l'ensemble des séries entières de rayon de convergence non nul autour de 0 à coefficients dans \mathbb{K} .
- Si \mathbb{K} est un corps et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la comatrice de M sera notée $\text{com}(M) = ((-1)^{i+j} \Delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, où $\Delta_{i,j}$ est le mineur d'ordre i, j de M .

1 Opérateurs différentiels nilpotents

1.1 Généralités sur les opérateurs fuchsien

Dans cette section, nous reprenons quelques éléments de la théorie des point singuliers réguliers des équations différentielles dans le plan complexe. Pour davantage de détails, on pourra se référer à [17], [23] ou [31].

1.1.1 Opérateurs différentiels

Définition 1

Un corps différentiel est un couple (H, D) , où H est un corps et $D : H \rightarrow H$ est une dérivation, c'est-à-dire une application vérifiant

- $\forall x, y \in H, D(x + y) = D(x) + D(y)$ (additivité);
- $\forall x, y \in H, D(xy) = xD(y) + yD(x)$ (règle de Leibniz).

On dit que (H_2, D_2) est une extension différentielle de (H_1, D_1) si $H_1 \subset H_2$ et $D_2|_{H_1} = D_1$.

On se donne H un corps différentiel muni d'une dérivation D . Alors $H_0 := \{x \in H : D(x) = 0\}$ est le corps des constantes de H . Typiquement, on prendra $H = \mathbb{K}(z)$ muni de la dérivation usuelle des fractions rationnelles $D = \frac{d}{dz}$, avec \mathbb{K} un corps fini ou un corps de nombres.

On note $H[D] = \left\{ \sum_{i=0}^N a_i D^i, a_i \in H, N \in \mathbb{N} \right\}$ l'anneau non commutatif des opérateurs différentiels sur H .

Définition 2

L'ordre de $L \in H[D]$, noté $\text{ord}(L)$ est le degré de L en tant que polynôme en D .

On remarque immédiatement que si $L_1, L_2 \in H[D]$, $\text{ord}(L_1 L_2) = \text{ord}(L_1) + \text{ord}(L_2)$.

L'anneau $H[D]$ est euclidien à droite et à gauche pour le stathme ord . En particulier, tout idéal à droite ou à gauche est principal.

Proposition 1

Si $L \in H[D]$ et E est une extension différentielle de H , alors L peut être vu comme un endomorphisme H_0 -linéaire de E via $x \mapsto L(x)$. En particulier, l'ensemble des solutions dans E , $\text{Sol}(L, E) := \{x \in E : L(x) = 0\}$, est un H_0 -espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $\text{ord}(L)$.

Définition 3

On dit que $L \in H[D]$ est trivial sur H si $\dim_{H_0} \text{Sol}(L, H) = \text{ord}(L)$.

Proposition 2

Si $L_1, \dots, L_m \in H[D]$ et $L_1 \dots L_m$ est trivial sur H , alors pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, L_i est trivial sur H .

Démonstration de la proposition 2. Montrons d'abord que si $L = L_1 L_2$, alors

$$\dim_{H_0} \text{Sol}(L, H) \leq \dim_{H_0} \text{Sol}(L_1, H) + \dim_{H_0} \text{Sol}(L_2, H).$$

On a $\text{Sol}(L_2) \subset \text{Sol}(L)$. Fixons un supplémentaire S du H_0 -espace vectoriel $\text{Sol}(L_2)$ dans $\text{Sol}(L)$. Si $u \in S$, $L_1(L_2(u)) = 0$, donc L_2 envoie S sur $\text{Sol}(L_1)$. De plus $L_2|_S$ est injectif car si $u \in S$ et $u \neq 0$, alors $L_2(u) \neq 0$. Par suite,

$$\dim_{H_0} \text{Sol}(L, H) \leq \dim_{H_0} \text{Sol}(L_1, H) + \dim_{H_0} \text{Sol}(L_2, H).$$

Supposons que $L = L_1 \dots L_m$ est trivial. Alors en généralisant le résultat précédent par récurrence, on a $\text{ord } L = \dim \text{Sol}(L) \leq \sum_{i=1}^m \dim \text{Sol}(L_i) \leq \sum_{i=1}^m \text{ord}(L_i) = \text{ord } L$, d'où pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\dim \text{Sol}(L_i) = \text{ord } L_i$. En d'autres termes, L_i est trivial. \square

Remarque. La réciproque est fausse : si $H = \mathbb{F}_p(z)$ et $L = z \frac{d}{dz}$, alors L^2 est d'ordre 2 et a un noyau de dimension 1. En effet, on peut montrer que $H_0 = \mathbb{F}_p(z^p)$, donc $1, z, \dots, z^{p-1}$ est une base de H sur H_0 .

De plus, si $1 \leq k \leq p-1$, $L^2(z^k) = k^2 z^k \neq 0$, donc $\text{Sol}(L^2, H) = \mathbb{F}_p(z^p)$ est de dimension 1.

On rappelle le résultat suivant (voir [14, p. 80]).

Théorème 7

Si $L \in H[D]$, il existe une extension différentielle E de H telle que L est trivial sur E .

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note $\text{Sol}(L) := \text{Sol}(L, E)$.

1.1.2 Points singuliers réguliers

Soit \mathbb{K} un corps, on note $\delta = z \frac{d}{dz}$, qui est une dérivation sur $\mathbb{K}((z))$. Considérons un opérateur

$$L = \delta^n + A_1(z)\delta^{n-1} + \dots + A_n(z) \in \mathbb{K}((z)) \left[\frac{d}{dz} \right]. \quad (1)$$

On écrit pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $A_j(z) = \sum_{i=m}^{\infty} a_{i,j} z^i$, avec $m \in \mathbb{Z}_-$.

On peut alternativement noter L sous la forme

$$L = B_0(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^n + B_1(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} + \dots + B_n(z), \quad B_j(z) \in \mathbb{K}((z)) \left[\frac{d}{dz} \right]. \quad (2)$$

Le passage de la forme (1) à la forme (2) se fait grâce au lemme suivant :

Lemme 1

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$z^m \left(\frac{d}{dz} \right)^m = \delta(\delta-1) \dots (\delta-m+1) \quad \text{et} \quad \delta^m = z^m \left(\frac{d}{dz} \right)^m + \sum_{k=1}^{m-1} a_{m,k} z^k \left(\frac{d}{dz} \right)^k,$$

où les $a_{m,k}$ sont des entiers naturels.

Théorème 8 (Fuchs)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a)** *Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{B_j}{B_0}$ admet un pôle d'ordre au plus j en 0.*
- b)** *Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $A_j(z)$ n'a pas de pôle en 0.*

Dans ce cas, on dit que 0 est un point singulier régulier de L .

Démonstration. Selon le lemme 1, il existe une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, dont les éléments diagonaux valent tous 1, telle que

$${}^t(\delta^{n-1}, \dots, \delta, 1) = T^t(z^{n-1} D^{n-1}, ; zD, 1) \quad \text{avec} \quad D = \frac{d}{dz}.$$

Donc L est égal, à multiplication à gauche par un élément de $\mathbb{K}(z)$ près, à

$$L = z^n D^n + z^{n-1} \tilde{B}_1(z) D^{n-1} + \cdots + \tilde{B}_n(z), \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les $A_j(z)$ sont dans $\mathbb{K}[[z]]$ si et seulement si les $\tilde{B}_j(z)$ n'ont pas de pôle en 0, c'est à dire si $\frac{z^{n-j}}{z^n} \tilde{B}_j(z)$ a un pôle d'ordre au plus j en 0.

En comparant avec l'écriture (2), on voit que pour tout j , $\frac{B_j(z)}{B_0(z)} = \frac{z^{n-j}}{z^n} \tilde{B}_j(z)$ et le théorème 8 s'ensuit. \square

On suppose dans toute la suite que $L \in \mathbb{K}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$.

Pour $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, on définit l'opérateur $L_a \in \mathbb{K}(u) [d/du]$, obtenu par changement de variable $u = z - a$, tel que pour toute fonction f , $L(f(z)) = 0$ si et seulement si $L_a(f_a(u)) = 0$, où $f_a(u) = f(u - a)$ si $a \neq \infty$ et $f_\infty(u) = g(u^{-1})$. Notons que L_a est bien défini à multiplication à gauche par un élément de $\mathbb{K}(u)$ près. On a alors, en posant $\delta_u = u \frac{d}{du}$,

$$L_a = B_0(u+a) \left(\frac{d}{du} \right)^n + B_1(u+a) \left(\frac{d}{du} \right)^{n-1} + \cdots + B_n(u+a) = \delta_u^n + A_1(u+a) \delta_u^{n-1} + \cdots + A_n(u+a) \quad (3)$$

et

$$L_\infty = \delta_u^n - A_1 \left(\frac{1}{u} \right) \delta_u^{n-1} + \cdots + (-1)^n A_n \left(\frac{1}{u} \right). \quad (4)$$

Définition 4

On dit que $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ est un point singulier régulier de L si 0 est un point singulier régulier de L_a .

L'opérateur L est dit fuchsien si tous les points de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ sont singuliers réguliers.

On peut donc réécrire le théorème de Fuchs en tout point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. En un point fini a , l'expression (3) montre qu'on peut simplement remplacer 0 par a dans le théorème 8. En l'infini, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) L'opérateur L admet ∞ pour point singulier régulier.
- b) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $A_j(u^{-1}) \in \mathbb{K}[[u]]$.
- c) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{B_j(u^{-1})}{B_0(u^{-1})}$ admet un zéro d'ordre au moins j en 0.
- d) En supposant que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $B_j(z) \in \mathbb{K}[z]$, alors $\deg(B_j) \leq \deg(B_0) - j$.
En particulier, $\deg(B_0) = \max_{1 \leq j \leq n} \deg(B_j)$.

Démonstration. L'équivalence entre **a)** et **b)** découle de l'équation (4).

Pour montrer l'équivalence entre **b)** et **c)**, on reprend les notations de la preuve du théorème 8. On a

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \vdots \\ \tilde{B}_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix},$$

donc les $A_j(u^{-1})$ sont dans $\mathbb{K}[[u]]$ si et seulement si les $\tilde{B}_j(u^{-1})$ sont dans $\mathbb{K}[[u]]$, c'est à dire si, pour tout j , $\frac{B_j(u^{-1})}{B_0(u^{-1})} = u^j \tilde{B}_j(u^{-1})$ a un zéro d'ordre au moins j en 0 (ou autrement dit un pôle d'ordre au plus $-j$ en 0).

Pour finir, pour prouver que **c)** et **d)** sont équivalents, on remarque que si $B_j(z) \in \mathbb{K}[z]$, l'ordre du pôle en 0 de $B_j(u^{-1})$ est $\deg(B_j)$, de sorte que $\frac{B_j(u^{-1})}{B_0(u^{-1})}$ a un pôle d'ordre $\deg(B_j) - \deg(B_0)$ en 0. \square

1.1.3 Polynôme indiciel et exposants d'un opérateur

Soit L écrit sous la forme (1). Intéressons-nous maintenant à la notion de polynôme indiciel et d'exposants, qui permettent de préciser la structure de l'espace des solutions de l'équation $L(y(z)) = 0$ autour de 0. On vérifie que pour tout $q \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{Z}$, $\delta^q z^s = s^q z^s$, donc, en étendant la dérivation D à $\mathbb{K}((z))$, pour tout $s \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} L(z^s) &= s^n z^s + \sum_{i=m}^{\infty} a_{i,1} z^i s^{n-1} z^s + \cdots + \sum_{i=m}^{\infty} a_{i,n} z^i z^s \\ &= s^n z^s + z^{m+s} \left(\sum_{i=m}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} s^{n-j} \right) z^{i-m} \right) \\ &= z^{m+s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(s) z^k \right), \end{aligned} \tag{5}$$

où les ϕ_k sont des polynômes de degrés inférieurs à l'ordre n de L .

Définition 5

- Supposons que 0 est un point singulier régulier de L , alors $m = 0$ et

$$\phi_{0,L}(x) := x^n + \sum_{j=1}^n a_{0,j} x^{n-j}$$

est appelé polynôme indiciel de L en 0. On le note simplement ϕ_0 quand il n'y a pas d'ambiguïté.

- Les racines de $\phi_{0,L}(x)$ dans la clôture algébrique de \mathbb{K} sont appelés les exposants de L en 0.
- Si $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ est un point singulier régulier de L , le polynôme indiciel $\phi_{a,L}(x)$ de L en a est défini comme le polynôme indiciel de L_a en 0.

Remarque. Si 0 est un point régulier singulier de L , alors le polynôme indiciel s'écrit

$$\phi_0(x) = x^n + A_1(0)x^{n-1} + \cdots + A_n(0).$$

Plus généralement, les équations (3) et (4) montrent que si $a \in \mathbb{K}$ est un point singulier régulier, alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $A_j(u+a) \in \mathbb{K}[[u]]$, et le polynôme indiciel en a est

$$\phi_a(x) = x^n + A_1(a)x^{n-1} + \cdots + A_n(a),$$

et si ∞ est une singularité régulière, alors

$$\phi_{\infty}(x) = x^n - A_1(\infty)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n A_n(\infty),$$

où, par abus de notation, on note $A_j(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} A_j(z)$.

A l'aide du lemme 1, on peut déterminer en pratique rapidement l'équation indiciale d'une équation différentielle écrite sous la forme (2).

Proposition 4

Soit $L = \left(\frac{d}{dz}\right)^n + B_1(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} + \cdots + B_n(z)$, $B_j(z) \in \mathbb{K}(z)$, supposons que $a \in \mathbb{K}$ est un point singulier régulier de L . Alors

$$\phi_{a,L}(x) = x(x-1)\cdots(x-n+1) + a_1x(x-1)\cdots(x-n+2) + \cdots + a_n, \quad a_i = \lim_{z \rightarrow a} z^i B_i(z)$$

et si ∞ est un point singulier régulier de L , on a

$$\phi_{\infty,L}(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1) - a_1x(x+1)\cdots(x+n-2) + \cdots + (-1)^n a_n, \quad a_i = \lim_{z \rightarrow \infty} z^i B_i(z)$$

Exemple. Si $a \in \mathbb{K}$ est un point ordinaire de L , alors l'équation indiciale en a s'écrit $x(x-1)\cdots(x-n+1) = 0$ (si $a = \infty$, $x(x+1)\cdots(x+n-1) = 0$), donc ses exposants sont $0, 1, \dots, n-1$ (si $a = \infty$, ses exposants sont $0, -1, \dots, -(n-1)$).

Pour finir, la proposition suivante montre que le changement de variable et la notion de polynôme indicel sont compatibles avec la multiplication dans $\mathbb{K}(z)\left[\frac{d}{dz}\right]$.

Proposition 5

Soient $M, L \in \mathbb{K}(z)\left[\frac{d}{dz}\right]$. Soit $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, supposons que a est une singularité régulière de M et de L . Alors

- a) Les opérateurs M_a et L_a obtenus par changement de variable $u = z - a$ vérifient $(ML)_a = M_a L_a$. En d'autres termes, l'application

$$\begin{array}{ccc} \Psi_a: \mathbb{K}(z)\left[\frac{d}{dz}\right] & \longrightarrow & \mathbb{K}(u)\left[\frac{d}{du}\right] \\ L & \longmapsto & L_a \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux.

- b) Si de plus, a est un point singulier régulier de M et de L , alors c'est une singularité régulière de ML .
- c) Sous les mêmes hypothèses que dans le point précédent, on a

$$\phi_{a,ML}(x) = \phi_{a,M}(x)\phi_{a,L}(x).$$

Ainsi, l'ensemble des exposants en a de ML est l'union de l'ensemble des exposants en a de M et de l'ensemble des exposants en a de L .

Ainsi, pour connaître les exposants d'un opérateur différentiel, il peut être utile de le factoriser en produit d'opérateurs différentiels plus simples.

Remarque. Le point c) montre en particulier que la multiplication d'un opérateur différentiel par un élément de $\mathbb{K}(z)$ ne change pas les exposants.

Démonstration. a) Si $a \neq \infty$, c'est clair au vu de la formule (3).

Pour $a = \infty$, écrivons $M = \sum_{j=0}^m b_j(z)\delta^j$ et $L = \sum_{i=0}^n a_i(z)\delta^i$. Alors

$$\begin{aligned} ML &= \left(\sum_{j=0}^m b_j(z)\delta^j \right) \left(\sum_{i=0}^n a_i(z)\delta^i \right) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n b_j(z)\delta^j (a_i(z)\delta^i) \\ &\stackrel{\text{Leibniz}}{=} \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n b_j(z) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \delta^{j-k}(a_i(z)) \delta^{i+k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{m+n} \sum_{i+j=\ell} b_j(z) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \delta^{j-k}(a_i(z)) \delta^{i+k} \end{aligned} \quad (6)$$

et de même

$$\begin{aligned} \Psi_\infty(M)\Psi_\infty(L) &= (-1)^{m+n} \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n (-1)^j b_j\left(\frac{1}{u}\right) (-1)^i \delta_u^j \left(a_i\left(\frac{1}{u}\right) \delta_u^i \right) \\ &= (-1)^{m+n} \sum_{\ell=0}^{m+n} (-1)^\ell \sum_{i+j=\ell} b_j\left(\frac{1}{u}\right) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \delta_u^{j-k} \left(a_i\left(\frac{1}{u}\right) \right) \delta_u^{i+k}. \end{aligned}$$

On montre par récurrence que si $a(z) \in \mathbb{K}(z)$, alors

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \delta^s(a(z))|_{z=u^{-1}} = (-1)^s \delta_u^s \left(a\left(\frac{1}{u}\right) \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \Psi_\infty(ML) &= (-1)^{m+n} \sum_{\ell=0}^{m+n} \sum_{i+j=\ell} b_j\left(\frac{1}{u}\right) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \left(\delta^{j-k}(a_i(z)) \right)|_{z=u^{-1}} (-1)^{i+k} \delta_u^{i+k} \\ &= (-1)^{m+n} \sum_{\ell=0}^{m+n} (-1)^\ell \sum_{i+j=\ell} b_j\left(\frac{1}{u}\right) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \delta_u^{j-k} \left(a_i\left(\frac{1}{u}\right) \right) \delta_u^{i+k} = \Psi_\infty(M)\Psi_\infty(L). \end{aligned} \quad (7)$$

- b)** Les formules (6) et (7) montrent que si 0 (resp. ∞) est un point singulier régulier de M et L alors 0 (resp. ∞) est un point singulier régulier de ML . Par translation, il en va de même en tout point de \mathbb{K} .
- c)** Grâce au point **a)**, il suffit de montrer le résultat en 0. Supposons que 0 est un point singulier régulier de M et de L . Selon l'équation (5), si $s \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (ML)(z^s) &= M \left(\sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k,L}(s) z^{k+s} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} M(\phi_{k,L}(s) z^{k+s}) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k,L}(s) M(z^{k+s}) \quad \text{car } \phi_{k,L}(s) \in \mathbb{K} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k,L}(s) \sum_{\ell=0}^{\infty} \phi_{\ell,M}(k+s) z^{k+\ell+s} \in \phi_{0,L}(s) \phi_{0,M}(s) z^s + z^{s+1} \mathbb{K}[[z]], \end{aligned}$$

si bien que, par définition, le polynôme indiciel de ML en 0 est $\phi_{0,L}(x)\phi_{0,M}(x)$. □

1.1.4 Théorème de Frobenius

Le théorème suivant donne la structure des solutions d'une équation différentielle autour d'un point singulier régulier en fonction des exposants de cette équation différentielle. On pourra trouver une preuve dans [17, p. 349].

Théorème 9 (Frobenius)

Soit $L = \left(\frac{d}{dz}\right)^n + B_1(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} + \dots + B_n(z) \in \mathbb{K}(z)\left[\frac{d}{dz}\right]$ un opérateur d'ordre n et $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ un point singulier régulier de L . Notons $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de \mathbb{K} . Alors

- a) Il existe une base de solutions au voisinage du a de l'équation $L(y(z)) = 0$ de la forme $(f_1(z-a), \dots, f_n(z-a))(z-a)^B$, où $(z-a)^B := \exp(B \log(z-a))$, étant donnée une détermination du logarithme complexe, $f_i(z) \in \mathbb{K}[[z]]$ et $B \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{K}})$.
- b) Supposons que les séries de Laurent définissant les $B_j(z)$ autour de 0 ont un rayon de convergence au moins R . Alors le rayon de convergence des $f_i(z)$ est au moins R .
- c) Si ρ est une valeur propre de B , alors ρ est un exposant de L en a , c'est le minimum des exposants de la forme $\rho + k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- d) Si les exposants ρ_1, \dots, ρ_n de L en a sont tels que $\forall i \neq j, \rho_i - \rho_j \notin \mathbb{Z}$, alors il existe une base de solutions de la forme $((z-a)^{\rho_1} f_1(z-a), \dots, (z-a)^{\rho_n} f_n(z-a))$, où $f_i(u) \in \overline{\mathbb{K}}[[u]]$.

Concrètement, en remarquant que B est semblable à une matrice sous forme de Jordan, on voit que les solutions de l'équation $L(y(z))$ seront des *séries Nilsson-Gevrey*, c'est à dire de la forme

$$y(z) = \sum_{\alpha, k} z^\alpha (\log^k(z)) f_{\alpha, k}(z), \quad f_{\alpha, k}(z) \in \overline{\mathbb{K}}[[z]]$$

et les α apparaissant dans la somme sont des exposants de L en a .

1.2 Opérateurs nilpotents et théorème de Katz-Honda

La référence principale pour cette section et la suivante est [14, pp. 77–100]

On se donne dans cette section un corps \mathbb{K} (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$) de caractéristique $p > 0$, $\mathcal{F} = \mathbb{K}(z)$ muni de la dérivation $D = \frac{d}{dz}$. On note \mathcal{F}_0 le corps des constantes de $\mathbb{K}(z)$. Par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$, on vérifie que $\mathcal{F}_0 = \mathbb{F}_p(z^p)$. Le but de cette section est d'étudier les exposants d'un opérateur différentiel sur $\mathbb{K}(z)$, le théorème de Katz-Honda (théorème 11 ci-dessous) affirmant qu'ils sont nécessairement à coefficients dans \mathbb{F}_p .

Définition 6

L'opérateur différentiel $L \in \mathbb{K}(z)[D]$ est dit nilpotent lorsque $L = L_1 \dots L_m$, où les $L_i \in \mathbb{K}(z)[D]$ sont triviaux sur $\mathbb{K}(z)$.

Théorème 10

Soit $L \in \mathbb{K}(z)[D]$ d'ordre n , alors

- a) Si L est nilpotent, alors $D^{pn} \in \mathbb{K}(z)[D]L$.
- b) S'il existe $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $D^{p\mu} \in \mathbb{K}(z)[D]L$, alors L est nilpotent.

Démonstration du théorème 10. **a) Premier cas :** L est trivial sur $\mathbb{K}(z)$. Effectuons la division euclidienne de D^p par L : $D^p = AL + B$, où $\text{ord } B < \text{ord } L$. Soit (u_1, \dots, u_n) une base de solutions sur \mathcal{F}_0 de l'équation $L(u) = 0$, alors pour tout i , $D^p(u_i) = B(u_i) = 0$, donc $B = 0$ car $\dim_{\mathcal{F}_0} \text{Sol}(B) \leq \text{ord } B$. Donc $D^p \in \mathbb{K}(z)[D]L$.

Second cas : L est non trivial sur $\mathbb{K}(z)$. Prouvons le résultat par récurrence sur $n = \text{ord } L$. C'est évident pour $n = 1$. Si $n > 1$, L est nilpotent donc on peut écrire $L = L_1 L_2$, avec L_i

nilpotent sur $\mathbb{K}(z)$ et $n_i = \text{ord } L_i < n$. Donc il existe $B_1, B_2 \in \mathbb{K}(z)[D]$ tels que $D^{pn_1} = B_1 L_1$ et $D^{pn_2} = B_2 L_2$.

Remarquons que si $M \in \mathbb{K}(z)[D]$, alors $D^p M = M D^p$. En effet, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geq p$, $D^p(z^j) = p! \times \binom{j}{p} z^{j-p} = 0$, donc, par linéarité, $D^p(u) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{K}[z]$, d'où $D^p(u) = 0$ pour $u \in \mathbb{K}(z)$. Donc par la règle de Leibniz, D^p est $\mathbb{K}(z)$ -linéaire, ce qui autorise la commutation annoncée.

Par conséquent, ici,

$$B_2 B_1 L = B_2 (B_1 L_1 L_2) = B_2 D^{pn_1} L_2 = D^{pn_1} B_2 L_2 = D^{pn_1} D^{pn_2} = D^{pn},$$

ce qui conclut la preuve de **a**).

Passons au point **b**). On procède par récurrence sur $\text{ord } L$. Prenons L tel que $\text{ord } L > 0$.

On choisit $\mu \in \mathbb{N}$ minimal tel que $D^{p\mu} \in \mathbb{K}(z)[D]L$. On considère, dans $\mathbb{K}(z)[D]$, l'idéal à gauche (D^p, L) qui est principal, donc on peut fixer $L_1 \in \mathbb{K}(z)[D]$ tel que $(D^p, L) = (L_1)$.

Si $1 \in (D^p, L)$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}(z)[D]$ tels que $1 = \alpha D^p + \beta L$, donc

$$D^{p(\mu-1)} = \alpha D^{p\mu} + \beta D^{p(\mu-1)} L \in \mathbb{K}(z)[D]L,$$

ce qui contredit la minimalité de μ .

Ainsi, $\text{ord } L_1 > 0$ et $L = A_1 L_1$ pour un certain $A_1 \in \mathbb{K}(z)[D]$. Comme $D^p \in \mathbb{K}(z)[D]L_1$ et D^p est trivial sur $\mathbb{K}(z)$ – une base de $\text{Sol}(D^p, \mathbb{K}(z))$ étant donnée par $1, z, \dots, z^{p-1}$ –, L_1 est trivial sur $\mathbb{K}(z)$. Il reste à montrer que A_1 est nilpotent.

Soit E extension de $\mathbb{K}(z)$ sur laquelle L est triviale. Alors selon la proposition 2, A_1 est triviale sur E et par ailleurs, en reprenant la preuve de cette proposition, on a $L_1(\text{Sol}(L, E)) = \text{Sol}(A_1, E)$.

Si $u \in \text{Sol}(L, E)$, alors $D^{p\mu}(u) = 0$ car $D^{p\mu} \in \mathbb{K}(z)[D]L$ et comme $D^{p\mu}$ commute avec L_1 (cf point **a**)), on a $0 = L_1(D^{p\mu}(u)) = D^{p\mu}(L_1(u))$, donc $D^{p\mu}_{|L_1(\text{Sol}(L, E))} = 0 = D^{p\mu}_{|\text{Sol}(A_1, E)}$.

Écrivons

$$D^{p\mu} = A_2 A_1 + B, \quad \text{ord } B < \text{ord } A_1$$

la division euclidienne de $D^{p\mu}$ par A_1 . En évaluant l'égalité en $u \in \text{Sol}(A_1, E)$, on voit que $B = 0$. Donc $D^{p\mu} \in \mathbb{K}(z)[D]A_1$. De plus, $\text{ord } A_1 < \text{ord } L$ car $\text{ord } L_1 > 0$. Par hypothèse de récurrence, A_1 est nilpotent, d'où comme L_1 est trivial sur $\mathbb{K}(z)$, L est nilpotent. \square

Soit Ω une extension de $\mathbb{K}(z)$ telle que D^{p^s} est trivial sur Ω pour un certain $s \in \mathbb{N}$. On note $\Omega_s = \text{Sol}(D^{p^s}, \Omega)$ et Ω_0 le corps des constantes de Ω .

Proposition 6

L'ensemble Ω_s est un Ω_0 -espace vectoriel qui est aussi un corps différentiel.

Démonstration. Soient $y, z \in \Omega_s$. Par la formule de Leibniz,

$$D^{p^s}(yz) = \sum_{i=0}^{p^s} \binom{p^s}{i} D^i(y) D^{p^s-i}(z).$$

Or si $1 \leq i \leq p^s - 1$, $\binom{p^s}{i}$ est divisible par p donc nul dans Ω de caractéristique p . D'où $D^{p^s}(yz) = y D^{p^s}(z) + z D^{p^s}(y) = 0$, si bien que $yz \in \Omega_s$.

Par le même raisonnement, si $y \in \Omega_s$ et $yz = 1$, alors $0 = y D^{p^s}(z) + z \times 0$, de sorte que $z \in \Omega_s$ car $y \neq 0$. \square

Proposition 7

Si $L \in \mathbb{K}(z)[D]$ est d'ordre n et $p^{s-1} \geq n$, alors L est nilpotent si et seulement si L est trivial sur Ω_s .

Démonstration. • Si L est nilpotent, alors selon le théorème 10, $D^{pn} \in \mathbb{K}(z)[D]L$, donc, pour $p^s \geq pn$, $D^{p^s} \in \mathbb{K}(z)[D]L$. On note $D^{p^s} = AL$, $A \in \mathbb{K}(z)[D]$. Sur Ω_s , D^{p^s} est trivial car $\text{Sol}(D^{p^s}, \Omega_s)$ contient $\text{Sol}(D^{p^s}, \Omega)$ qui est de dimension p^s sur Ω_0 . Par conséquent, L est trivial sur Ω_s .

• Réciproquement, si L est trivial sur Ω_s pour $p^s \geq pn$, on écrit $D^{p^s} = AL + B$, avec $\text{ord } B < \text{ord } L$.

Donc comme L est trivial sur Ω_s , on obtient, en évaluant sur une base de solutions de $L(u) = 0$, $B = 0$, de sorte que $D^{p^s} \in \mathbb{K}(z)[D]L$. \square

Théorème 11 (Katz-Honda)

Soit $L = \delta^n + A_1 \delta^{n-1} + \dots + A_n \in \mathbb{K}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$. Si L est nilpotent, alors

- a) 0 est un point singulier régulier de L .
- b) Tous les exposants de L en 0 sont dans \mathbb{F}_p .

Démonstration. Procédons par récurrence sur $n = \text{ord}(L)$.

• Si $n = 1$, alors L est trivial sur $\mathbb{K}(z)$, donc on peut fixer $u \in \mathbb{K}(z) \setminus \{0\}$ tel que $L(u) = 0$, de sorte que $L = \delta - \frac{\delta(u)}{u}$. On écrit $u = z^\ell v$, avec $v \in \mathbb{K}[[z]]^\times$ et $\ell \in \mathbb{N}$. Donc

$$\frac{\delta(u)}{u} = \frac{z(\ell z^{\ell-1} v + z^\ell D(v))}{u} = \frac{\ell z^\ell v + z^\ell \delta(v)}{z^\ell v} = \ell + \frac{\delta(v)}{v}.$$

Par suite, $L = \delta - \ell - \frac{\delta(v)}{v}$ et $\frac{\delta(v)}{v} \in \mathbb{K}[[z]]$, donc 0 est un point singulier régulier de L .

De plus, si $s \in \mathbb{N}$,

$$L(z^s) = \delta z^s - \ell z^s - \frac{\delta(v)}{v} z^s = (s - \ell) z^s - \frac{\delta(v)}{v} z^s.$$

Mais comme v est inversible dans $\mathbb{K}[[z]]$, $\frac{1}{v} \in \mathbb{K}[[z]]$ et $\frac{\delta(v)}{v} = z \frac{D(v)}{v} \in z\mathbb{K}[[z]]$. D'où $\phi_0(x) = x - \ell$, de racine $\ell \in \mathbb{F}_p$.

• Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai pour tout $m < n$. Alors comme L est nilpotent, on peut écrire $L = L_1 L_2$, avec L_1 trivial d'ordre 1 sur $\mathbb{K}(z)$ et L_2 nilpotent d'ordre $n - 1$ (car un opérateur trivial est produit d'opérateurs triviaux d'ordre 1).

Par hypothèse de récurrence, L_1 et L_2 admettent 0 comme point singulier régulier, donc, selon le point **b)** de la proposition 5, 0 est une singularité régulière de L . De plus, le point **c)** de la même proposition affirme que tout exposant de L en 0 est un exposant de L_1 en 0 ou un exposant de L_2 en 0. Par hypothèse de récurrence, les exposants de L en 0 sont donc dans \mathbb{F}_p . \square

Remarque. Via un changement de variable $u = z - a$ ou $u = 1/z$, on voit que si L est nilpotent, tous les points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sont singuliers réguliers avec exposants dans \mathbb{F}_p . En effet, on vérifie que si $M \in \mathbb{K}(z)[d/dz]$ et $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, M est trivial sur $\mathbb{K}(z)$ si et seulement si l'opérateur $M_a \in \mathbb{K}(u)[d/du]$, obtenu par changement de variable $u = z - a$, est trivial sur $\mathbb{K}(u)$. Ainsi, selon la définition 6 et le point **a)** de la proposition 5, L est nilpotent si et seulement si L_a est nilpotent. Le théorème 11 s'applique donc à L_a , donc 0 est un point singulier régulier de L_a à exposants dans \mathbb{F}_p , de sorte que a est un point singulier régulier régulier de L à exposants dans \mathbb{F}_p .

Exemple. L'opérateur $L = D - 1$ n'est pas nilpotent car ∞ n'est pas un point régulier.

1.3 Cas global : le théorème de Katz

Soit \mathbb{K} un corps de nombres. Le but de cette partie est de démontrer, à l'aide du théorème de Katz-Honda, le théorème de Katz (théorème 12) affirmant que les exposants en tout point de $\overline{\mathbb{Q}}$ d'un opérateur différentiel $L \in \mathbb{K}(z)[d/dz]$ globalement nilpotent sont rationnels. Un opérateur globalement nilpotent est un opérateur qui définit un opérateur nilpotent quand il est localisé en presque tout premier de \mathbb{K} . Pour bien définir cette opération de localisation, il nous faut étudier la valeur absolue de Gauss associée à une valeur absolue non-archimédienne sur \mathbb{K} .

1.3.1 Valeur absolue de Gauss

Définition 7

Soient \mathbb{K} un corps, et $|\cdot|$ une valeur absolue non archimédienne sur \mathbb{K} . La valeur absolue de Gauss associée à $|\cdot|$ sur $\mathbb{K}(z)$ est définie par

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n a_i z^i}{\sum_{j=1}^m b_j z^j} \right|_{\text{Gauss}} = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |a_i|}{\max_{1 \leq j \leq m} |b_j|}.$$

Proposition 8

La valeur absolue de Gauss est bien définie et est une valeur absolue au sens usuel sur $\mathbb{K}(z)$.

Démonstration. Commençons par définir la valeur absolue de Gauss sur $\mathbb{K}[z]$.

- Les conditions d'homogénéité et d'inégalité triangulaire découlent immédiatement du fait que $|\cdot|$ est une valeur absolue sur \mathbb{K} .
- Vérifions la condition de multiplicativité. Si $f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ et $g(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^j$, alors

$$h(z) = f(z)g(z) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k, \quad \text{où } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

On a donc pour tout k , comme $|\cdot|$ est non archimédienne,

$$|c_k| \leq \max_{0 \leq i \leq k} (|a_i| |b_{k-i}|) \leq |f|_{\text{Gauss}} |g|_{\text{Gauss}}.$$

Soient i_0 et j_0 tels que $|a_{i_0}| = |f|_{\text{Gauss}}$, $|b_{j_0}| = |g|_{\text{Gauss}}$, et

$$\forall i < i_0, |a_i| < |a_{i_0}|, \quad \forall j < j_0, |b_j| < |b_{j_0}|.$$

Alors

$$c_{i_0+j_0} = a_0 b_{i_0+j_0} + a_1 b_{i_0+j_0-1} + \cdots + a_{i_0} b_{j_0} + \cdots + a_{i_0+j_0} b_0.$$

Si $i < i_0$, $|a_i b_{i_0+j_0-i}| < |a_{i_0}| |b_{i_0+j_0-i}| \leq |a_{i_0}| |b_{j_0}|$ et de même si $i > i_0$. Donc $|c_{i_0+j_0}| = |a_{i_0} b_{j_0}|$, de sorte que

$$|fg|_{\text{Gauss}} = |f|_{\text{Gauss}} |g|_{\text{Gauss}}.$$

La condition de multiplicativité sur $\mathbb{K}[z]$ implique immédiatement que si $f = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \in \mathbb{K}(z)$, avec $A, B, C, D \in \mathbb{K}[z]$, alors $|A|_{\text{Gauss}} |D|_{\text{Gauss}} = |C|_{\text{Gauss}} |B|_{\text{Gauss}}$, donc la valeur absolue de Gauss est bien définie sur $\mathbb{K}(z)$ et vérifie évidemment les conditions d'homogénéité et de multiplicativité.

De plus, si $f = \frac{A}{B}$ et $g = \frac{C}{D}$ sont deux éléments de $\mathbb{K}(z)$, alors $f + g = \frac{AD + BC}{BD}$, donc

$$\begin{aligned} |f + g|_{\text{Gauss}} &= \frac{|AD + BC|_{\text{Gauss}}}{|B|_{\text{Gauss}}|D|_{\text{Gauss}}} \leq \frac{\max(|A|_{\text{Gauss}}|D|_{\text{Gauss}}, |B|_{\text{Gauss}}|C|_{\text{Gauss}})}{|B|_{\text{Gauss}}|D|_{\text{Gauss}}} \\ &\leq \max\left(\frac{|A|_{\text{Gauss}}}{|B|_{\text{Gauss}}}, \frac{|C|_{\text{Gauss}}}{|D|_{\text{Gauss}}}\right), \end{aligned}$$

si bien que l'inégalité triangulaire est vérifiée. \square

Remarque. Soient \mathbb{K} corps de nombres, \mathfrak{p} idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ et $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ la valeur absolue sur \mathbb{K} associée.

Soit $R = \{f \in \mathbb{K}(z) \mid |f|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq 1\}$ l'anneau de valuation associé à $|\cdot|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}$. Montrons que $R = \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]_{\mathfrak{p}[z]}$, le localisé de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ en la partie multiplicative $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z] \setminus \mathfrak{p}[z]$.

D'abord, remarquons que $R \cap \mathbb{K}[z] = \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ et que $\mathfrak{p}[z]$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ car $\mathfrak{p}[z] = \{P \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z] : |P|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} < 1\}$.

De plus, si

$$f = \frac{P}{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i z^i}{\sum_{j=1}^m b_j z^j} \in \mathbb{K}(z)$$

et $|f|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq 1$, alors en fixant j_0 tel que $|b_{j_0}|_{\mathfrak{p}} = |P|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}$, on peut écrire $f = \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$, avec $\tilde{P}, \tilde{Q} \in R$

et $|\tilde{Q}|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} = 1$, de sorte que $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]_{\mathfrak{p}[z]}$.

Par conséquent, cela donne un sens à l'opération de réduction modulo \mathfrak{p} :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]_{\mathfrak{p}[z]} \twoheadrightarrow \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]_{\mathfrak{p}[z]}}{\mathfrak{p}[z]\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]_{\mathfrak{p}[z]}} \simeq (\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})(z),$$

ce dernier isomorphisme étant issu du morphisme surjectif de réduction modulo \mathfrak{p} coefficient par coefficient

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{p}} : \quad \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]_{\mathfrak{p}[z]} &\longrightarrow (\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})(z) \\ \frac{P}{Q}, Q \notin \mathfrak{p}[z] &\longmapsto \frac{\bar{P}}{\bar{Q}} \end{aligned}$$

de noyau $\mathfrak{p}[z]\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]_{\mathfrak{p}[z]}$.

1.3.2 Opérateurs globalement nilpotents et théorème de Katz

Définissons à présent la notion d'opérateur globalement nilpotent. Soit \mathbb{K} un corps de nombres et $L \in \mathbb{K}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$ de la forme $L = \delta^n + A_1 \delta^{n-1} + \dots + A_n$, où $A_i \in \mathbb{K}(z)$ et $\delta = z \frac{d}{dz}$.

Selon le théorème d'Ostrowski, les valuations non archimédiennes sur \mathbb{K} sont équivalentes à $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ pour \mathfrak{p} idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. On peut donc définir la valuation de Gauss correspondante sur $\mathbb{K}(z)$, notée $|\cdot|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}$. On note

$$\mathcal{S} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) / \exists j \in \{1, \dots, n\} : |A_j|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} > 1\}.$$

L'ensemble \mathcal{S} est fini car pour $\alpha \in \mathbb{K}$, les premiers \mathfrak{p} tels que $|\alpha|_{\mathfrak{p}} \neq 1$ sont les premiers intervenant dans la décomposition en facteurs premiers de l'idéal fractionnaire (α) , qui sont en nombre fini.

Si $\mathfrak{p} \notin \mathcal{S}$, on note $\overline{\mathbb{K}}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}$ et $L_{\mathfrak{p}} \in \overline{\mathbb{K}}_{\mathfrak{p}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$ la réduction de L modulo \mathfrak{p} :

$$L_p = \delta^n + \overline{A_1} \delta^{n-1} + \dots + \overline{A_n}.$$

Définition 8

Soit $T \subset \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$. On dit que T admet $d \geq 0$ pour densité de Dirichlet lorsque

$$\frac{-1}{\log(s-1)} \sum_{p \in T} \frac{1}{N(p)^s} \longrightarrow d$$

quand s tend vers 1 pour s réel, $s > 1$.

Notons en particulier qu'un ensemble fini est de densité de Dirichlet nulle. En annexe, d'autres notions de densité (naturelle et polaire) et leur lien avec la densité de Dirichlet sont présentées.

Définition 9

On dit qu'une propriété est valable pour presque tout premier p d'un corps de nombres (relativement à la densité de Dirichlet) si elle vaut pour un ensemble de premiers de densité de Dirichlet 1. Ceci est vrai en particulier, si elle vaut pour tous les premiers sauf un nombre fini.

Définition 10

L'opérateur L est dit globalement nilpotent lorsque pour presque tout p , L_p est nilpotent.

Proposition 9

Considérons une valeur absolue $|\cdot|$ non archimédienne sur \mathbb{K} . Alors si $\xi \in \mathbb{K}(z)$ n'a pas de pôle dans $D_{|\cdot|}(0, 1) \setminus \{0\}$, où $|\cdot|$ désigne une extension fixée de la valeur absolue considérée à un corps de décomposition de ξ , et $\xi = \sum_{j=-m}^{\infty} c_j z^j$ dans $\mathbb{K}((z))$, alors $|\xi|_{\text{Gauss}} = \sup_{j \geq -m} |c_j|$.

Démonstration. **Étape 1 :** Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où $\xi = \frac{f(z)}{g(z)}$, avec $g(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_\ell z^\ell$ et pour tout j , $|a_j| \leq 1$.

On a $\xi = P(z)/Q(z)$, avec Q sans pôle dans $D_{|\cdot|}(0, 1) \setminus \{0\}$ par hypothèse. Donc dans un corps de décomposition de Q , on a

$$Q(z) = r z^q (z - b_1) \dots (z - b_\ell),$$

où $q \in \mathbb{N}$ et $|b_j| \geq 1$. On peut donc écrire $\xi = \frac{f(z)}{g(z)}$, avec

$$f(z) = \frac{(-1)^\ell P(z)}{r b_1 \dots b_\ell z^q} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{(-1)^\ell (z - b_1) \dots (z - b_\ell)}{b_1 \dots b_\ell} = 1 + a_1 z + \dots + a_\ell z^\ell.$$

Si $j \in \{1, \dots, \ell\}$, a_j s'exprime comme somme symétrique de b_1, \dots, b_ℓ :

$$a_j = \frac{(-1)^j}{b_1 \dots b_\ell} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{\ell-j} \leq \ell} b_{i_1} \dots b_{i_{\ell-j}} = (-1)^j \sum_{i_1 < \dots < i_{\ell-j}} \prod_{k \notin \{i_1, \dots, i_{\ell-j}\}} \frac{1}{b_k}.$$

Il s'ensuit que les a_j sont bien de valeur absolue inférieure ou égale à 1 car $|\cdot|$ est non-archimédienne.

De plus, on peut supposer que $q = 0$, car la multiplication par z^{-q} est un simple décalage d'indice dans l'écriture en série formelle.

Étape 2 : Supposons que $\xi = \frac{f(z)}{g(z)}$, avec $g(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_\ell z^\ell$ et pour tout j , $|a_j| \leq 1$, de sorte que $|f|_{\text{Gauss}} = |\xi|_{\text{Gauss}}$. Écrivons $\xi = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$. Alors en développant en série formelle, on a

$$\xi = f(z) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (a_1 z + \dots + a_\ell z^\ell)^s = f(z) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \sum_{i_1 + \dots + i_\ell = s} \binom{s}{i_1, \dots, i_\ell} a_1^{i_1} \dots a_\ell^{i_\ell} z^{i_1 + 2i_2 + \dots + \ell i_\ell}$$

De plus, comme $|\cdot|$ est non archimédienne, par hypothèse sur les a_j , on a

$$\forall (i_1, \dots, i_\ell) \in \mathbb{N}^\ell, \left| \binom{s}{i_1, \dots, i_\ell} a_1^{i_1} \dots a_\ell^{i_\ell} \right| \leq 1,$$

d'où $\frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$, avec $|g_k| \leq 1$. En effectuant le produit avec $f(z)$ et en identifiant terme à terme, il vient que $\forall j \in \mathbb{N}, |c_j| \leq |f|_{\text{Gauss}}$. En particulier, $\sup_{j \in \mathbb{N}} |c_j| < \infty$ et $\sup_{j \in \mathbb{N}} |c_j| \leq |f|_{\text{Gauss}}$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f(z) &= g(z) \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} a_1 c_j z^{j+1} + \dots + \sum_{j=0}^{\infty} a_\ell c_j z^{j+\ell} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (c_j + a_1 c_{j-1} + \dots + a_\ell c_{j-\ell}) z^j \end{aligned}$$

en posant $c_j = 0$ pour $j < 0$. Donc

$$|f|_{\text{Gauss}} \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} (\max(|c_j|, |a_i c_{j-i}|, 1 \leq i \leq \ell)) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |c_j|.$$

Comme $|f|_{\text{Gauss}} = |\xi|_{\text{Gauss}}$, on a le résultat voulu. \square

On utilisera la conséquence suivante du théorème de Chebotarev (voir l'annexe pour la démonstration de cette proposition).

Proposition 10

Soit \mathbb{K} un corps de nombres et $\alpha \in \mathbb{K}$. Si pour tout premier \mathfrak{p} de \mathbb{K} dans un ensemble de densité 1, $|\alpha|_{\mathfrak{p}} \leq 1$ et $\alpha \pmod{\mathfrak{p}} \in \mathbb{F}_p$, où $(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$, alors $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Le théorème suivant est le résultat principal de cette sous-section (cf [18, Theorem 8.1 p. 223])

Théorème 12 (Katz)

- a) Si $L_{\mathfrak{p}}$ est nilpotent pour un nombre infini de premiers \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, alors tout point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ est une singularité régulière.
- b) Si L est globalement nilpotent, alors le point a) est vrai et de plus les exposants de L en tout point sont rationnels.

Démonstration. a) Montrons l'assertion pour le point 0 (par changement de variable, cela vaudra pour tous les points).

Il existe un nombre fini de premiers \mathfrak{p} tels que au moins un $A_j \pmod{\mathfrak{p}}$ a un pôle dans $D_{|\cdot|_{\mathfrak{p}}}(0, 1) \setminus \{0\}$. En effet, étendons la valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ en une valeur absolue non archimédienne $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ sur l'extension finie \mathbb{L} de \mathbb{K} engendrée par les pôles dans $\overline{\mathbb{Q}}$ de A_1, \dots, A_n . Écrivons

pour tout j ,

$$A_j = U_j \prod_{i=1}^{\ell_j} (z - \alpha_{i,j})^{-1}, \quad \text{avec } \alpha_{i,j} \in \mathbb{L}, \quad U_j \in \overline{\mathbb{Q}}[z].$$

Alors il n'y a qu'un nombre fini de premiers \mathfrak{p} de \mathbb{K} tels qu'il existe j vérifiant, pour tout $i \in \{1, \dots, \ell_j\}$, $|\alpha_{i,j}|_{\mathfrak{p}} < 1$.

Par conséquent, selon la proposition 9, quitte à ajouter un nombre fini de premiers à l'ensemble \mathcal{S} , on a pour $\mathfrak{p} \notin \mathcal{S}$,

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad |A_j|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} = \sup_{\substack{1 \leq \ell \leq m \\ \ell \in \mathbb{N}}} (|A_{j,k}|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}, |B_{j,\ell}|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}) \leq 1,$$

où $A_j = \sum_{k=1}^m \frac{A_{j,k}}{z^k} + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{j,\ell} z^{\ell}$. Si $\mathfrak{p} \notin \mathcal{S}$ et $L_{\mathfrak{p}}$ est nilpotent alors par le théorème 11, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $A_j \pmod{\mathfrak{p}}$ n'a pas de pôle en 0. Comme les opérations de réduction modulo \mathfrak{p} dans $\mathbb{K}(z)$ et dans $\mathbb{K}((z))$ coïncident, on a pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, $A_{j,k} \pmod{\mathfrak{p}} = 0$. Puisque cela vaut pour une infinité de premiers \mathfrak{p} , on a pour tout k , $A_{j,k} = 0$, donc $A_j \in \mathbb{K}[[z]]$, de sorte que 0 est une singularité régulière pour L .

b) Supposons que L est globalement nilpotent. Selon le premier point, 0 est une singularité régulière de L . Soit $\phi_0(x) \in \mathbb{K}[x]$ le polynôme indiciel de L en 0.

Si pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $A_j = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} z^k$, alors la définition 5 donne

$$\phi_0(x) = x^n + \sum_{j=1}^n A_{j,0} x^{n-j}.$$

Cette expression montre que si $\mathfrak{p} \notin \mathcal{S}$, le polynôme indiciel $\phi_{0,\mathfrak{p}}$ de $L_{\mathfrak{p}}$ est la réduction modulo \mathfrak{p} de ϕ_0 .

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de ϕ_0 . Quitte à ajouter un nombre fini de premiers à \mathcal{S} , on peut supposer que $|\alpha|_{\mathfrak{p}} \leq 1$. De plus, $0 = \phi_0(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}} = \phi_{0,\mathfrak{p}}(\alpha \pmod{\mathfrak{p}})$, de sorte que, par le théorème 11, $\alpha \pmod{\mathfrak{p}} \in \mathbb{F}_p$, où $(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$. Ainsi, puisque cela vaut pour un ensemble de premiers de densité 1, par la proposition 10, on a $\alpha \in \mathbb{Q}$. Ceci conclut la preuve de **b)**. \square

Remarques. *i)* En réalité, si $L \in \mathbb{K}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$ est globalement nilpotent, alors les exposants de L en tout point de $\overline{\mathbb{Q}}$ (et non pas seulement de \mathbb{K}) sont rationnels.

En effet, soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Notons $\mathbb{K}' = \mathbb{K}(\alpha)$, et prenons $\mathfrak{p}' \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}'})$. Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap \mathbb{K}$, alors comme L est à coefficients dans $\mathbb{K}(z)$, on a $L_{\mathfrak{p}'} = L_{\mathfrak{p}}$.

De plus, si T est l'ensemble de densité nulle (prenons par exemple la densité de Dirichlet, voir définition 26) des premiers $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ tels que $L_{\mathfrak{p}}$ n'est pas nilpotent, et T' est l'ensemble des premiers $\mathfrak{p}' \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}'})$ au dessus des éléments de T , alors

$$\begin{aligned} \forall s > 1, \quad \frac{-1}{\log(s-1)} \sum_{\mathfrak{p}' \in T'} \frac{1}{N_{\mathbb{K}'/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}')^s} &\leq \frac{-1}{\log(s-1)} \sum_{\mathfrak{p} \in T} \sum_{\mathfrak{p}' | \mathfrak{p}} \frac{1}{N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^s} \\ &\leq \frac{-[\mathbb{K}' : \mathbb{K}]}{\log(s-1)} \sum_{\mathfrak{p} \in T} \frac{1}{N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{[\mathbb{K}' : \mathbb{K}]s}} \end{aligned}$$

car il y a au plus $[\mathbb{K}' : \mathbb{K}]$ premiers au-dessus de $\mathfrak{p} \in T$. Donc comme le terme de droite tend vers 0 quand s tend vers 1 par valeurs supérieures, il en va de même du terme de

gauche, si bien que T' est de densité de Dirichlet nulle. Or, T' contient tous les premiers \mathfrak{p}' de \mathbb{K}' tels que $L_{\mathfrak{p}'}$ n'est pas nilpotent, donc $L \in \mathbb{K}'(z)[d/dz]$ est globalement nilpotent. Selon le théorème de Katz, $\alpha \in \mathbb{K}'$ est une singularité régulière de L en laquelle ses exposants sont rationnels.

ii) Comme le remarque Dwork [14, p. 100], le théorème de Katz peut encore être raffiné de la manière suivante : soit L un opérateur différentiel et \mathcal{S} un ensemble de premiers de \mathbb{K} tel que

- L'ensemble de premiers de \mathbb{Z}

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}} := \{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}, \mathfrak{p} \in \mathcal{S}\}$$

est de densité de Dirichlet strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

- L'opérateur $L_{\mathfrak{p}}$ est nilpotent pour tout premier \mathfrak{p} dans \mathcal{S} .

Alors le théorème de Katz est vérifié pour un tel L . Ceci est une conséquence du corollaire 3 de l'annexe.

2 G-fonctions et condition de Galochkin

2.1 Présentation et exemples

Le but de cette section est d'introduire la définition des G -fonctions de Siegel [28]. Elles constituent une classe de fonctions spéciales incluant de nombreux exemples.

Définition 11

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. La maison de α est le maximum des modules des conjugués (au sens de Galois) de α , on la note $|\overline{\alpha}|$.

Le dénominateur de α est $\text{den}(\alpha)$, plus petit entier $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $d\alpha$ est un entier algébrique.

Le dénominateur de $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ est $\text{den}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{ppcm}(\text{den}(\alpha_1), \dots, \text{den}(\alpha_n))$.

Définition 12

Une G -fonction est une série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ telle que

- a) f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.
- b) Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |\overline{a_n}| \leq C_1^{n+1}$.
- c) Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \text{den}(a_0, \dots, a_n) \leq C_2^{n+1}$.

Remarque. En réalité, la condition de croissance géométrique sur les coefficients de f implique que f est une fonction holomorphe autour de 0.

Cette définition concerne une large classe de fonctions « intéressantes » pour lesquelles on recherche des résultats de transcendance.

Proposition 11

Les fonctions suivantes sont des G -fonctions :

- a) La fonction logarithme complexe $-\log(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, et plus généralement, les fonctions polylogarithmes $\text{Li}_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$ pour $s \in \mathbb{N}^*$.
- b) Toute fonction $f \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et holomorphe en 0.
- c) Les fonctions hypergéométriques : si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_-)^n$,

$${}_nF_{n-1}(\alpha; \beta; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m \dots (\alpha_n)_m}{(\beta_1)_m \dots (\beta_{n-1})_m m!} z^m,$$

où pour $x \in \mathbb{C}$ et $m \geq 1$, $(x)_m = x(x+1)(x+2) \dots (x+m-1)$, et $(x)_0 = 1$.

On aura besoin pour la preuve du point **b)** du théorème suivant, dont une preuve peut être trouvée dans [11, pp. 28-30].

Théorème 13 (Eisenstein)

Soit $y(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $y(cz) \in \mathcal{O}[[z]]$.

Pour la preuve du point **c)**, un point clef est le résultat suivant prouvé dans [27, p. 57].

Proposition 12

Si $u, v \in \mathbb{Q}$ et $v \notin \mathbb{Z}_-^*$, alors le dénominateur commun des $\frac{(u)_k}{(v)_k}$, $k \in \{0, \dots, n\}$ a une crois-

| sance géométrique avec n .

Démonstration. • On a $((1-z)\text{Li}'_1(z))' = 0$ et si $s \geq 2$, $z\text{Li}'_s(z) = \text{Li}_{s-1}(z)$, donc on obtient par récurrence une équation différentielle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaite par Li_s . La condition sur la taille des coefficients de Li_s étant trivialement satisfaite, il reste à vérifier celle sur le dénominateur. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$. Alors

$$\text{den}\left(1, \frac{1}{2^s}, \dots, \frac{1}{n^s}\right) = \text{ppcm}(1, 2^s, \dots, n^s),$$

qui divise d_n^s . Mais si p est un premier inférieur à n , et $k \in \mathbb{N}$, alors

$$p^k \leq n \Leftrightarrow k \log p \leq \log n \Leftrightarrow k \leq \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor,$$

donc $d_n \leq \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} p^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor}$, d'où

$$\log D_n \leq \sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor \log p \leq \sum_{p \leq n} \log n = (\log n) \pi(n),$$

où π est la fonction de comptage des nombres premiers. Mais selon le théorème des nombres premiers, $\pi(n) \sim n \log n$, donc on peut trouver $c > 0$ tel que $\log d_n \leq cn$, de sorte que $d_n \leq e^{cn}$, ce qui est la condition voulue.

• Soit $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et holomorphe en 0. On admet que f est solution d'une équation différentielle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors comme $f(z)$ est holomorphe en 0, par la formule de Hadamard sur le rayon de convergence, on peut trouver $C_1 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq C_1^{n+1}$. De plus, f vérifie $p_d(z)f^{(d)}(z) + \dots + p_0(z) = 0$, avec $p_i(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, de sorte qu'en identifiant de part et d'autre de l'égalité les coefficients du développement en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{K}$, où \mathbb{K} est le corps de nombres engendré sur \mathbb{Q} par les coefficients des $p_i(z)$ et a_0, \dots, a_d . Quitte à remplacer \mathbb{K} par sa clôture galoisienne, on peut supposer que \mathbb{K}/\mathbb{Q} est normale. Soit $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$. En appliquant le morphisme d'anneaux (injectif car σ l'est)

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma : \quad \mathbb{K}[[z]] &\longrightarrow \mathbb{K}[[z]] \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(b_n) z^n \end{aligned}$$

à l'équation algébrique satisfaite par f sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, on obtient que $\varphi_\sigma(f)$ est algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Par suite, on peut trouver une constante $C_\sigma > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |\sigma(a_n)| \leq C_\sigma^{n+1}$. Cela nous fournit une constante $C_2 > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\overline{a_n}| \leq C_2^{n+1}$.

La condition de croissance géométrique sur les dénominateurs découle du théorème 13. En effet, fixons c tel que $f(cz) \in \mathcal{O}[z]$, alors si $n \in \mathbb{N}$, $c^n a_0, \dots, c^n a_n \in \mathcal{O}$, donc $\text{den}(a_0, \dots, a_n) \leq c^n$.

• L'existence d'une équation différentielle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaite par une série hypergéométrique est expliquée plus loin, voir l'équation (8) après la proposition 13. De plus, proposition 12 nous assure que la condition sur les dénominateurs est satisfaite.

On vérifie pour finir la condition sur la taille des coefficients. Si $\alpha = \frac{p}{q}, \beta = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$, on a pour

tout $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha)_n = \frac{1}{q^n} p(p+q) \dots (p+(n-1)q)$ et de même $(\beta)_n = \frac{1}{v^n} u(u+v) \dots (u+(n-1)v)$, de sorte qu'on peut supposer p et v positifs puisque $p+kq \geq 0$ pour k assez grand.

De plus, si $m \in \mathbb{N}$ est tel que $p \leq mq$,

$$p(p+q) \dots (p+(n-1)q) \leq n! \times \binom{m+n}{m} q^{n-1} \leq n! 2^{m+n} q^n.$$

Puisque $u \geq 0$, on a par ailleurs $u(u+v) \dots (u+(n-1)v) \geq v \times (2v) \times \dots \times ((n-1)v) \geq v^{n-1} (n-1)!$, ce qui donne l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n} \leq c 2^n.$$

C'est bien la borne géométrique désirée, ce qui conclut la preuve du point c). \square

Remarque. Le point **b)** de la proposition 11 exhibe une classe importante de G -fonctions prenant une infinité de valeurs algébriques à des points algébriques.

On peut également citer les deux exemples suivants (cf [8, p. 19]) :

$${}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; \frac{1323}{1331}\right) = \frac{3}{4} (11)^{\frac{1}{4}}.$$

$${}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}; \frac{2}{3}; \frac{64000}{64009}\right) = \frac{2}{3} (253)^{\frac{1}{6}}.$$

Tous les exemples « célèbres » de G -fonctions sont en réalité à coefficients rationnels, en particuliers ceux qui sont issus de la physique. A ce sujet, on pourra consulter [5].

Exemple. Les fonctions suivantes ne sont pas des G -fonctions :

- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, car $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut être bornée par une suite géométrique.
- les E -fonctions qui ne sont pas polynomiales. On rappelle qu'une E -fonction est une série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ vérifiant la condition **a)** de la définition 12 et où $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions **b)** et **c)** de la définition 12.

En effet, soit \mathbb{K} un corps de nombres et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{K}[[z]]$ qui est à la fois une G -fonction et une E -fonction. L'existence d'un tel corps \mathbb{K} est assurée par celle d'une équation différentielle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaite par f . On peut donc trouver $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{b_n} \leq C^{n+1}$ et $d_n \leq C^{n+1}$, où $d_n a_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}, d_n \in \mathbb{N}$. Donc en passant à la norme, on peut trouver $\tilde{C} > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\tilde{C}^{2n+2}}{n!} \geq \frac{\tilde{C}^{n+1} d_n}{n!} \geq \left| N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}} \left(\frac{d_n b_n}{n!} \right) \right|.$$

La suite d'entiers $\left(N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}} \left(\frac{d_n b_n}{n!} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend donc vers 0, donc est nulle à partir d'un certain rang n_0 , si bien que $\forall n \geq n_0, b_n = 0$. Ainsi, $f(z) \in \mathbb{K}[z]$. Le résultat voulu s'ensuit par contraposée.

Dans le cas hypergéométrique, la caractérisation suivante a été prouvée par Galochkin dans [16, p. 8].

Proposition 13 (Galochkin)

Soit $F(z) = {}_n F_{n-1}(\alpha, \beta; z)$, avec $\alpha \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-)^n, \beta \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-)^{n-1}$ tels que $\forall i, j, \alpha_i \neq \beta_j$. Alors F est une G -fonction si et seulement les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ et $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}^{n-1}$;
- Les α_i et β_j qui ne sont pas rationnels peuvent être regroupées en paires (α_i, β_j) telles que $\alpha_i - \beta_j \in \mathbb{N}$.

En particulier, dès que $\alpha \in \mathbb{Q}^n$ et $\beta \in \mathbb{Q}^{n-1}$, on retrouve le fait que ${}_nF_{n-1}(\alpha, \beta; z)$ est une G -fonction. Rappelons (cf [10, p. 3]) que l'équation différentielle d'ordre n satisfaite par $F(z) = {}_nF_{n-1}(\alpha, \beta; z)$ est

$$[\delta(\delta + \beta_1 - 1) \dots (\delta + \beta_{n-1} - 1) - z(\delta + \alpha_1) \dots (\delta + \alpha_n)](y(z)) = 0, \quad (8)$$

avec $\delta = z \frac{d}{dz}$. Ses singularités sont 0, 1 et ∞ et les exposants

- en 0 sont $0, 1 - \beta_1, \dots, 1 - \beta_{n-1}$;
- en 1 sont $0, 1, \dots, n - 2, -\alpha_n + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i - \alpha_i$;
- en ∞ sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

En substance, l'exemple suivant illustre le seul cas générique de fonction hypergéométrique de paramètres non rationnels qui est une G -fonction (comme somme de G -fonctions) :

$${}_2F_1 \left[\sqrt{2} + 1, \frac{1}{2}; \sqrt{2}; z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} z^n + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} z^n$$

$$\text{car } \frac{(\sqrt{2} + 1)_n}{(\sqrt{2})_n} = 1 + \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

On peut voir « à la main » que l'équation différentielle minimale sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaite par cette fonction est fuchsienne à exposants rationnels. En effet, si $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $a > 1$, l'équation différentielle minimale sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ vérifiée par

$$f_0(z) := {}_2F_1 \left[a + 1, \frac{1}{2}; a; z \right] = \frac{1}{\sqrt{1-z}} + \frac{z}{2a(1-z)^{3/2}}$$

est

$$2(1-z)((1-2a)z + 2a)f_0'(z) = ((1-2a)z + 2a + 2)f_0(z).$$

Ses points singuliers sont :

- 1 avec pour exposant $-\frac{3}{2}$;
- ∞ avec pour exposant $\frac{1}{2}$:
- $\frac{2a}{2a-1} \in]1, 2[$ qui est une singularité apparente puisque (f_0) constitue une base de solutions holomorphes au voisinage de ce point.

Dans certains cas, on peut prouver en étudiant les exposants de l'équation (8) qu'une fonction hypergéométrique n'est pas une G -fonction sans utiliser la proposition 13. L'exemple suivant illustre cette technique et l'importance de la condition $\alpha_i - \beta_j \in \mathbb{N}$ dans la proposition 13.

Exemple. Montrons que

$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} {}_2F_1 \left[\sqrt{2}, 1; \sqrt{2} + 1; z \right]$$

n'est pas une G -fonction à l'aide du théorème d'André-Chudnovsky-Katz (théorème 5).

Supposons que l'équation différentielle minimale satisfaite par f_1 sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ soit d'ordre 1, donc de la forme

$$y'(z) = p(z)y(z), p(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z). \quad (9)$$

Selon le théorème 5, cette équation est fuchsienne, donc, selon [17, pp. 145–148], la solution générale de (9) est $y(z) = \exp\left(\int_{[z_0, z]} p(s)ds\right)$, et $p(z)$ n'a que des pôles simples; de plus, on peut écrire

$$p(z) = \sum_{j=1}^m \frac{r_j}{z - a_j},$$

où $a_j \in \overline{\mathbb{Q}}$ et r_j est l'exposant de (9) en a_j . Toujours selon le théorème 5, on sait que $\forall j \in \{1, \dots, m\}, r_j \in \mathbb{Q}$. Par conséquent, en intégrant, on a

$$f_1(z) = C_0 \prod_{j=1}^m (z - a_j)^{r_j},$$

avec $C_0 \in \mathbb{C}^*$ constante, si bien qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f_1(z)^q \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$ (on a bien $C_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$ car $f_1(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ et les a_j sont algébriques) : f_1 est algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Selon le théorème d'Eisenstein (théorème 13), il existe donc $C \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{C^n}{n + \sqrt{2}} \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Donc en passant à la norme dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{C^{2n}}{n^2 - 2} \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire que $n^2 - 2$ divise C^{2n} pour tout n . Ainsi, tout facteur premier de $n^2 - 2$ est également un facteur premier de C . On va montrer que ce n'est pas possible.

En effet, si p est un premier de \mathbb{Z} , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que p divise $n^2 - 2$ si et seulement si 2 est un carré dans \mathbb{F}_p , ce qui est équivalent, selon la loi de réciprocité quadratique faible, à $p \equiv \pm 1 [8]$. Le théorème de Dirichlet nous assurant qu'il existe une infinité de tels premiers, fixons en un qui ne fait pas partie des diviseurs de C et considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que p divise $n^2 - 2$. On obtient ainsi une contradiction.

Donc l'équation différentielle minimale de f_1 est d'ordre 2, et (cf (8) ci-dessus) cette équation est

$$\left[\delta(\delta + \sqrt{2}) - z(\delta + \sqrt{2})(\delta + 1) \right] (f_1(z)) = 0.$$

Ses exposants en 0 sont 0 et $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc par la contraposée du théorème 5, f_1 n'est pas une G -fonction.

Pour finir, citons ce résultat de structure sur les G -fonctions, déjà utilisé dans l'exemple de ${}_2F_1\left[\sqrt{2} + 1, \frac{1}{2}; \sqrt{2}; z\right]$ ci-dessus.

Proposition 14

Les G -fonctions forment un sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ stable par dérivation et primitivation (avec constante d'intégration algébrique) et même une $\overline{\mathbb{Q}}$ -algèbre différentielle.

2.2 Le théorème des Chudnovsky

Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1(z), \dots, f_n(z)) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]^n$ vérifiant $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$, avec $G \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Soit $G_s \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ la matrice telle que $\mathbf{f}^{(s)} = G_s \mathbf{f}$. Un raisonnement par récurrence montre que les G_s , $s \in \mathbb{N}$, sont liées par la relation

$$G_{s+1} = G_s G + G'_s, \tag{10}$$

où G'_s désigne la matrice G_s dérivée coefficient par coefficient. On prend $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ le plus petit dénominateur commun de tous les coefficients de la matrice $G(z)$.

Proposition 15

Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $T^s G_s \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$.

Démonstration. On procède par récurrence sur s :

- C'est la définition de T pour $s = 1$.
- Soit $s \in \mathbb{N}^*$, supposons que $T^s G_s \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$. Alors en utilisant l'équation (10),

$$T^{s+1} G_{s+1} = (T^s G_s)(TG) + T^{s+1} G'_s.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $(T^s G_s)'$ est une matrice à coefficients polynomiaux et

$$(T^s G_s)' = sT' T^{s-1} G_s + T^s G'_s,$$

donc en multipliant cette équation par T , on a $T^{s+1} G'_s \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$, de sorte que $T^{s+1} G_{s+1} \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$, ce qui conclut la preuve. \square

2.2.1 Condition de Galochkin

Définition 13

On note, pour $s \in \mathbb{N}$, q_s le plus petit dénominateur supérieur ou égal à 1 de tous les coefficients des matrices $T(z)^m \frac{G_m(z)}{m!}$, quand $m \in \{1, \dots, s\}$. On dit que le système $y' = Gy$ vérifie la condition de Galochkin si

$$\exists C > 0 : \forall s \in \mathbb{N}, \quad q_s \leq C^{s+1}.$$

Définition 14

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$. On dit que L est un G -opérateur si la matrice compagnon de L vérifie la condition de Galochkin.

La terminologie de G -opérateur est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 16

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z) [d/dz]$ un G -opérateur non nul d'ordre μ . Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ un point ordinaire de L , alors il existe une base de solutions de l'équation $L(y(z)) = 0$ autour de α de la forme $(f_1(z - \alpha), \dots, f_\mu(z - \alpha))$, où les $f_i(u)$ sont des G -fonctions.

Démonstration. Notons $G(z) = A_L(z)$ la matrice compagnon de L . Comme α est un point ordinaire, on sait qu'il existe au voisinage de α une base de solutions $(f_1(z - \alpha), \dots, f_\mu(z - \alpha))$ de l'équation $L(y(z)) = 0$, où les f_i sont holomorphes au voisinage de 0. On sait aussi que la matrice wronskienne de cette base $Y(z) \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[[z]])$ a un rayon de convergence non nul et est telle que $Y(\alpha) \in \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ et $Y'(z) = G(z)Y(z)$, de sorte que $Y^{(s)}(z) = G_s(z)Y(z)$ pour tout entier s .

D'où

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Y^{(n)}(\alpha)(z - \alpha)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n \right) Y(\alpha). \quad (11)$$

Puisque α est un point ordinaire, $G(z)$ n'a pas de pôle en α et la condition de Galochkin implique qu'il existe une suite d'entiers positifs $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \leq n, \quad q_n \frac{G_k(\alpha)}{k!} \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}} \quad \text{et} \quad \exists C_1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, q_n \leq C_1^{n+1}.$$

Ainsi, selon (11), on a $\forall n \in \mathbb{N}, \text{den}(Y(\alpha)) q_n Y^{(n)}(\alpha) \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Ainsi, les $f_i(u)$ vérifient la condition **c)** de la définition 12.

Par ailleurs, soit \mathbb{K} un corps de nombres galoisien contenant α tel que $L \in \mathbb{K}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$. Soit $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$. Si $L = \sum_{k=0}^{\mu} a_k(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^k$, $a_k(z) \in \mathbb{K}[z]$, on définit $L^\sigma = \sum_{k=0}^{\mu} a_k^\sigma(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^k$ en étendant σ à $\overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ par l'action coefficient par coefficient.

Alors pour tout $i \in \{1, \dots, \mu\}$, $L^\sigma(f_i^\sigma(z - \sigma(\alpha))) = 0$. De plus, comme $a_\mu(\alpha) \neq 0$, on a $a_\mu^\sigma(\sigma(\alpha)) = \sigma(a_\mu(\alpha)) \neq 0$, de sorte que $\sigma(\alpha)$ est un point ordinaire de L^σ . Ainsi, f_i^σ est analytique au voisinage de 0. Ceci valant pour tout σ , on en déduit que, si $f_i(u) = \sum_{i=0} b_{i,n} u^n$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |b_{i,n}| \leq C^{n+1}$, ce qui prouve que les $f_i(z)$ vérifient la condition **b)** de la définition 12 \square

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 14 (Chudnovsky, 1984)

Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1(z), \dots, f_n(z)) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]^n$ vérifiant $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$, avec $G \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i(z)$ est une G -fonction et $(f_1(z), \dots, f_n(z))$ est une famille libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, alors G vérifie la condition de Galochkin.

Remarque. Mentionnons une conséquence importante de ce théorème : soit $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ une G -fonction et

$$L = \left(\frac{d}{dz} \right)^n + a_1(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} + \dots + a_n(z) \neq 0$$

un opérateur différentiel de $\overline{\mathbb{Q}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$ d'ordre minimal n tel que $L(f(z)) = 0$. Alors L est un G -opérateur.

En effet, introduisons le vecteur

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_L := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}$$

la matrice compagnon associée à L , de sorte que $\mathbf{f}' = A_L \mathbf{f}$. La condition de minimalité de n impose que $(f, \dots, f^{(n-1)})$ est libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Le théorème des Chudnovsky assure donc la condition de Galochkin est vérifiée pour les $T^m \frac{A_{L,m}}{m!}$ si $T(z)$ est un dénominateur commun des $a_i(z)$. En d'autres termes, L est un G -opérateur.

Le théorème des Chudnovsky permet d'obtenir des résultats d'irrationalité sur les valeurs de G -fonctions, comme le théorème 4, dû à Galochkin, cité en introduction.

Un autre exemple d'application du théorème d'André-Chudnovsky-Katz (théorème 5 en introduction), qui découle, entre autres, du théorème des Chudnovsky, est la description des G -opérateurs d'ordre 1.

Proposition 17

Les G -opérateurs d'ordre 1 sont les

$$L = \frac{d}{dz} - \sum_{j=1}^m \frac{r_j}{z - a_j}, \quad r_j \in \mathbb{Q}, \quad a_j \in \overline{\mathbb{Q}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Les solutions de $L(y(z)) = 0$ sont des G -fonctions algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Démonstration.

• Soit une équation différentielle

$$y'(z) = p(z)y(z), p(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z). \quad (12)$$

vérifiant la condition de Galochkin. Selon le théorème 5, cette équation est fuchsienne, donc $p(z)$ n'a que des pôles simples; de plus, on peut écrire

$$p(z) = \sum_{j=1}^m \frac{r_j}{z - a_j},$$

où $a_j \in \overline{\mathbb{Q}}$ et r_j est l'exposant de (12) en a_j . Toujours selon le théorème 5, on sait que $\forall j \in \{1, \dots, m\}, r_j \in \mathbb{Q}$.

- Soit $L = \frac{d}{dz} - p(z)$ de la forme de l'énoncé. Selon [17, pp. 145–148], les solutions de l'équation $L(y(z)) = 0$ sont les

$$y(z) = C_0 \exp\left(\int_{[z_0, z]} p(s) ds\right) = \prod_{j=1}^m (z - a_j)^{r_j},$$

où $C_0 \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ si bien qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $y(z)^q \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$: y est ainsi algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Donc selon la proposition 11, y est une G -fonction, de sorte que L est un G -opérateur par le théorème 14. \square

Remarque. En revanche, la méthode proposée dans la démonstration ci-dessus ne semble pas permettre de déterminer les G -opérateurs d'ordre 2.

2.2.2 Démonstration du théorème 14

Le résultat suivant, énoncé par Siegel dans [28] (mais prouvé antérieurement par Thue dans [30]), est un outil classique en approximation diophantienne qui nous servira au cours de la démonstration. Une preuve peut être trouvée dans [27, p. 37].

Lemme 2 (Lemme de Siegel)

Soit \mathbb{K} un corps de nombres. Considérons un système de m équations linéaires

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \forall 1 \leq i \leq m, \quad (13)$$

où $\forall i, j, a_{ij} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. On note $A = \max_{i,j} |a_{ij}|$. Alors si $n > m$, (13) a une solution non nulle $(x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^n$ vérifiant

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq c_1 (c_1 n A)^{\frac{m}{n-m}},$$

où $c_1 > 0$ est une constante dépendant uniquement de \mathbb{K} .

Le lemme 2 servira de manière essentielle dans l'étape 7 de la démonstration pour montrer l'existence de certains approximants de Padé.

Passons à présent à la preuve du théorème 14. Nous compléterons l'esquisse donnée par Beukers dans [8, pp. 21–22]. Remarquons tout d'abord que si \mathbb{K} est un corps de nombres contenant les coefficients des coefficients de $G(z)$ et les $f_i(0)$, $1 \leq i \leq \mu$, alors $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$ et $\mathbf{f} \in \mathbb{K}[[z]]^\mu$. En effet, cela découle de l'équation $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$ en écrivant G comme un élément de

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}((z)))$ et identifiant les coefficients du développement en série de Laurent de part et d'autre.

Notations et hypothèses :

On a $T(z) \in \mathbb{K}[z]$, mais quitte à multiplier par un entier adapté, on peut supposer que $T(z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ et $T(z)G(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z])$.

On note $D = \frac{d}{dz}$ la dérivation usuelle sur $\mathbb{K}[[z]]$.

Si $A \in \mathbb{K}[[z]]$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on note $A = O(z^\ell)$ s'il existe $B \in \mathbb{K}[[z]]$ tel que $A = z^\ell B$.

On note $\delta = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ le degré du corps de nombres \mathbb{K} .

Étape 1 : Soient $N, M \in \mathbb{N}$. On introduit des approximants de Padé (Q, \mathbf{P}) de type II de paramètres (N, M) associés à \mathbf{f} dont on laisse les paramètres libres pour l'instant, c'est-à-dire des polynômes $Q, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \in \mathbb{K}[z]$ tels que $\deg(Q) \leq N$, $\max_{1 \leq i \leq n} \deg(\mathbf{P}_i) \leq M$ et si $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$, alors

$$Q\mathbf{f} - \mathbf{P} = O(z^{N+M}).$$

On ne discutera des conditions d'existence de tels approximants de Padé que dans l'étape 7.

On a pour tout $m < N + M$, $\frac{T^m}{m!}(D - G)^m \mathbf{P} \in \mathbb{K}[z]$, ce qui est immédiat en utilisant la formule de Leibniz. De plus, on va montrer par récurrence sur m que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{T^m}{m!} Q^{(m)} \mathbf{f} - \frac{T^m}{m!} (D - G)^m \mathbf{P} = O(z^{N+M-m}). \quad (14)$$

Pour $m = 1$, c'est la définition.

Supposons la relation vraie au rang m . Alors en dérivant (14) et en multipliant par T , on a

$$(mT'T^m Q^{(m)} + T^{m+1} Q^{(m+1)}) \mathbf{f} + T^{m+1} Q^{(m)} \mathbf{f}' - mT'T^m (D - G)^m \mathbf{P} - T^{m+1} D(D - G)^m \mathbf{P} = O(z^{N+M-(m+1)}).$$

Or, $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$, donc en multipliant (14) par la matrice polynomiale TG et en retranchant à l'équation précédente, on obtient

$$(mT'T^m Q^{(m)} + T^{m+1} Q^{(m+1)}) \mathbf{f} - mT'T^m (D - G)^m \mathbf{P} - T^{m+1} (D - G)^{m+1} \mathbf{P} = O(z^{N+M-(m+1)}).$$

Finalement, comme $T^m Q^{(m)} \mathbf{f} - T^m (D - G)^m \mathbf{P} = O(z^{N+M-m})$, on a le résultat voulu.

Étape 2 : Montrons que

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{G_s}{s!} \mathbf{P} = \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s-j} (D - G)^j \mathbf{P}. \quad (15)$$

On procède par récurrence :

- pour $s = 1$, $G_s = G$ et $G\mathbf{P} = D(\mathbf{P}) - (D - G)\mathbf{P}$.
- Soit $s \in \mathbb{N}^*$, supposons la formule (15) vraie pour s .

Alors $G_{s+1} = G_s G + G'_s$, donc $\frac{G_{s+1}}{(s+1)!} = \frac{1}{s+1} \left(\frac{G_s}{s!} G + \frac{G'_s}{s!} \right)$. Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence au vecteur $G\mathbf{P}$, on a

$$\frac{G_{s+1}}{(s+1)!} \mathbf{P} = \frac{1}{s+1} \left(\sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s-j} (D - G)^j (G\mathbf{P}) + \frac{G'_s}{s!} \mathbf{P} \right).$$

Or,

$$\frac{G'_s}{s!} \mathbf{P} = \left(\frac{G_s}{s!} \mathbf{P} \right)' - \frac{G_s}{s!} \mathbf{P}' = \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s+1-j} (D-G)^j \mathbf{P} - \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s-j} (D-G)^j D \mathbf{P}.$$

Donc, en remarquant que $\forall j \in \{0, \dots, s\}$, $(D-G)^j D = (D-G)^{j+1} + (D-G)^j G$, on a

$$\begin{aligned} \frac{G_{s+1}}{(s+1)!} \mathbf{P} &= \frac{1}{s+1} \left(\sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s+1-j} (D-G)^j \mathbf{P} - \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s-j} (D-G)^{j+1} \mathbf{P} \right) \\ &= \frac{1}{s+1} \left(\sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s+1-j} (D-G)^j \mathbf{P} + \sum_{k=1}^{s+1} \frac{(-1)^k}{(s-k+1)!(k-1)!} D^{s+1-k} (D-G)^k \mathbf{P} \right) \\ &= \frac{1}{s+1} \left(\sum_{j=1}^s \frac{(-1)^j (s+1-j) + j}{(s+1-j)!j!} D^{s+1-j} (D-G)^j \mathbf{P} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^{s+1} \frac{(-1)^k}{(s-k+1)!(k-1)!} D^{s+1-k} (D-G)^k \mathbf{P} + \frac{D^{s+1}}{s!} \mathbf{P} + \frac{(-1)^{s+1}}{s!} (D-G)^{s+1} \mathbf{P} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{s+1} \frac{(-1)^j}{(s+1-j)!j!} D^{s+1-j} (D-G)^j \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Cela conclut la récurrence.

Étape 3 : Utilisation du lemme de Shidlovskii.

On note pour $h \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}_h = \frac{1}{h!} (D-G)^h \mathbf{P}$ et $R_{(h)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$ la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\binom{h+j-1}{j-1} \mathbf{P}_{h+j-1}$. Alors la formule (15) implique immédiatement que

$$\frac{G_s}{s!} R_{(0)} = \sum_{j=0}^s \frac{(-1)^j}{(s-j)!} D^{s-j} R_{(j)}.$$

Selon le lemme de Shidlovskii (théorème 15) qui sera démontré dans la partie 2.3., la matrice $R_{(0)}$ est inversible pourvu que M soit assez grand ce qui sera réalisé quand on spécifiera M et N dans l'étape 7. Donc

$$T^s \frac{G_s}{s!} = \sum_{j=0}^s (-1)^j T^{s+n-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} (T^{n-1} R_{(0)})^{-1}. \quad (16)$$

Étape 4 : Soit d le dénominateur commun des coefficients d'ordres inférieurs à $N+M$ du développement en série entière de \mathbf{f} . On suppose trouvés des approximants de Padé $Q, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \in \mathbb{K}[X]$ de $d\mathbf{f}$, c'est-à-dire des polynômes tels que $\deg(Q) \leq N$, $\max_{1 \leq i \leq n} \deg(\mathbf{P}_i) \leq N$ et

$$Q(d\mathbf{f}) - \mathbf{P} = O(z^{N+M}),$$

avec $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$. On fait l'hypothèse supplémentaire que Q est un polynôme à coefficients entiers algébriques. On peut alors appliquer les résultats des trois étapes précédentes, dont on conservera les notations, à Q et \mathbf{P} puisque $d\mathbf{f}$ est encore solution du système différentiel $y' = Gy$.

Selon (14), on a

$$\forall m \leq N+M, \quad \frac{T^m}{m!} Q^{(m)}(d\mathbf{f}) - T^m \mathbf{P}_m = O(z^{N+M-m}). \quad (17)$$

On remarque que $\frac{Q^{(m)}}{m!} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ puisque Q est à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. On en déduit que si $N+M-m > \max_{1 \leq i \leq n} \deg(\mathbf{P}_{i,m})$, les coefficients de $T^m \mathbf{P}_m$ sont des éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$.

Montrons par récurrence sur m que

$$\max_{1 \leq i \leq n} \deg(T^m \mathbf{P}_{i,m}) \leq N + tm. \quad (18)$$

- Pour $m = 0$, il s'agit simplement du fait que les composantes de \mathbf{P} sont de degrés inférieurs à N .
- Pour $m = 1$, $T\mathbf{P}' - TG\mathbf{P}$ a des composantes de degrés inférieurs à $N + t$, car les coefficients de $T(z)G$ sont de degrés bornés par t .
- Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai au rang m . Alors

$$\begin{aligned} (D - G)(T^m(D - G)^m \mathbf{P}) &= mT'T^{m-1}(D - G)^m \mathbf{P} + T^m D(D - G)^m \mathbf{P} - T^m G(D - G)^m \mathbf{P} \\ &= mT'T^{m-1}(D - G)^m \mathbf{P} + T^m(D - G)^{m+1} \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Donc

$$T^{m+1}(D - G)^{m+1} \mathbf{P} = (D - G)(T^m(D - G)^m \mathbf{P}) - mT'T^m(D - G)^m \mathbf{P}.$$

Or, en utilisant à la fois l'hypothèse de récurrence et le cas $m = 1$, on voit que $T(D - G)(T^m(D - G)^m \mathbf{P})$ a ses composantes de degrés bornés par $N + mt + t = N + (m + 1)t$; par ailleurs, l'hypothèse de récurrence nous assure que $mT'T^m(D - G)^m \mathbf{P}$ a des composantes de degrés inférieurs à $t + N + mt = N + (m + 1)t$. On en déduit le résultat souhaité (18).

On déduit, à condition que $N + M - m \geq N + tm$, c'est-à-dire

$$m \leq \frac{M}{t+1}, \quad (19)$$

que $T^m \mathbf{P}_m \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]^n$. Ceci implique immédiatement que si j est un entier naturel tel que $j + n - 1 \leq \frac{M}{t+1}$, alors $T^{j+n-1} R_{(j)}$ est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$. En particulier, $T^{n-1} R_{(0)} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z])$.

Montrons à présent que

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad s + n - 1 \leq \frac{M}{t+1}, \quad \forall j \in \{0, \dots, s\}, \quad \frac{T^{s+n-1}}{(s-j)!} D^{s-j} R_{(j)} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]). \quad (20)$$

Rappelons la formule de Leibniz généralisée : si $\ell \in \mathbb{N}^*$ et f_1, \dots, f_ℓ sont l fonctions dérivables k fois, alors

$$(f_1 \dots f_\ell)^{(k)} = \sum_{i_1 + \dots + i_\ell = k} \binom{k}{i_1, \dots, i_\ell} \prod_{1 \leq t \leq \ell} f_t^{(i_t)}.$$

En particulier, considérons un élément quelconque $W \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$. Alors

$$\frac{(W^\ell)^{(k)}}{k!} = \sum_{i_1 + \dots + i_\ell = k} \prod_{1 \leq t \leq \ell} \frac{W^{(i_t)}}{i_t!}.$$

Si $k < \ell$, pour tout (i_1, \dots, i_ℓ) intervenant dans la somme, chaque terme $\prod_{1 \leq t \leq \ell} \frac{W^{(i_t)}}{i_t!}$ contient au moins $\ell - k$ indices de dérivation nuls. Ainsi, comme pour tout entier s , $\frac{W^{(s)}}{s!} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, on a $\frac{(W^\ell)^{(k)}}{k!} \in W^{\ell-k} \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$.

Déduisons de cela par récurrence le résultat (20). Pour $s = 0$, c'est évident.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$, supposons (20) vrai pour $s' \in \{0, \dots, s-1\}$. Par la formule de Leibniz, on a, pour $j \in \{0, \dots, s\}$,

$$\begin{aligned} \frac{D^{s-j}(T^{s+n-1}R_{(j)})}{(s-j)!} &= \sum_{k=0}^{s-j} \binom{s-j}{k} \times \frac{1}{(s-j)!} (T^{s+n-1})^{(k)} D^{s-j-k} R_{(j)} \\ &= T^{s+n-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} + \sum_{k=1}^{s-j} \frac{(T^{s+n-1})^{(k)}}{k!} \frac{D^{s-j-k} R_{(j)}}{(s-j-k)!} \\ &= T^{s+n-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} + \sum_{k=1}^{s-j} U_k T^{s+n-1-k} \frac{D^{s-k-j} R_{(j)}}{(s-k-j)!}, \end{aligned}$$

avec $U_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, en utilisant la remarque précédente.

Or, d'une part,

$$\frac{D^{s-j}(T^{s+n-1}R_{(j)})}{(s-j)!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]),$$

puisque $T^{s+n-1} = T^{s-j} T^{j+n-1} R_{(j)} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z])$, et d'autre part, par hypothèse de récurrence,

$$\forall k \in \{1, \dots, s-j\}, \quad T^{s-k+n-1} \frac{D^{s-k-j} R_{(j)}}{(s-k-j)!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]).$$

Par conséquent,

$$T^{s+n-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Étape 5 : Lien entre q_s et taille des coefficients de $\det(T^{n-1}R_{(0)})$.

Selon (16), on a pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$T^s \frac{G_s}{s!} = \frac{1}{V} \sum_{j=0}^s (-1)^j T^{s+n-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} (\text{com}(T^{n-1}R_{(0)}))^T, \quad (21)$$

où $V = \det(T^{n-1}R_{(0)}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, et selon (20), tous les termes de la somme sont à coefficients entiers algébriques à condition que $s+n-1 \leq \frac{M}{t+1}$.

Prenons pour $s \in \mathbb{N}$, q_s le dénominateur des coefficients des matrices $TG, T^2 \frac{G_2}{2!}, \dots, T^s \frac{G_s}{s!}$, comme dans la définition 13. Pour estimer q_s sous la condition $s+n-1 \leq \frac{M}{t+1}$, il suffit donc d'obtenir une estimation de la maison des coefficients de V_s . C'est ce que permet de faire ce lemme :

Lemme 3

Soient $U \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, $V \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, $W \in \mathbb{K}[z]$ tels que $U = VW$. Notons $V = \sum_{i=0}^{\ell} v_i z^i$, alors pour tout k tel que $v_k \neq 0$, on a $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v_k)W \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$.

Démonstration. Introduisons la valuation de Gauss associée à un premier \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$:

$$v_{\mathfrak{p}} \left(\sum_{i=0}^q a_i z^i \right) := \min_{0 \leq i \leq q} (v_{\mathfrak{p}}(a_i)),$$

où $v_{\mathfrak{p}}$ est la valuation \mathfrak{p} -adique associée à l'idéal premier \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. En utilisant les propriétés de valuation, on a $v_{\mathfrak{p}}(U) = v_{\mathfrak{p}}(V) + v_{\mathfrak{p}}(W)$, donc $v_{\mathfrak{p}}(W) \geq -v_{\mathfrak{p}}(V)$ car, comme U est à coefficients entiers algébriques, $v_{\mathfrak{p}}(U) \geq 0$.

Notons S l'ensemble fini des premiers divisant tous les coefficients de V . Alors si $W = \sum_{i=0}^d w_i z^i$, pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$ et $\mathfrak{p} \in S$, on a $v_{\mathfrak{p}}(w_i) + v_{\mathfrak{p}}(V) \geq v_{\mathfrak{p}}(V) + v_{\mathfrak{p}}(W) \geq 0$, donc $\prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(V)}(w_i) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. En particulier, si $v_k \neq 0$, comme $v_k \in \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(V)} = \text{pgcd}((v_0), \dots, (v_\ell))$, on a

$$\forall i \in \{0, \dots, d\}, \quad (v_k)(w_i) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}.$$

D'où comme $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v_k) \in (v_k) \cap \mathbb{Z}$, on a $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v_k)W \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$. □

Pour $W = \sum_{i=0}^{\ell} w_i z^i \in \mathbb{K}[z]$, on définit $\sigma(W) = \max_{0 \leq i \leq \ell} \overline{w_i}$, la *maison* de W . Selon le lemme 3 appliqué à la formule (21) avec

$$U = \sum_{j=0}^s (-1)^j T^{s+n-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} (\text{com}(T^{n-1} R_{(0)}))^T,$$

$V = \det(T^{n-1} R_{(0)})$ et $W = T^s \frac{G_s}{s!}$, on a donc ici

$$\forall s \in \mathbb{N} \text{ tel que } s+n-1 \leq \frac{M}{t+1}, \quad q_s \leq \sigma(V)^\delta. \quad (22)$$

Étape 6 : Majoration de la taille des coefficients de $\det(T^{n-1} R_{(0)}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ en fonction de la maison de Q .

Par commodité, on s'intéresse à

$$\tilde{V} = \det(\mathbf{P}, T\mathbf{P}_1, \dots, T^{n-1}\mathbf{P}_{n-1}) = T^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(R_{(0)}) = T^{-\frac{n(n-1)}{2}} V.$$

Le lemme suivant nous assure que ce changement n'introduit qu'une constante multiplicative dépendant seulement de G dans la majoration recherchée.

Lemme 4

Soient $A, B \in \mathbb{K}[z]$ et $C = AB$, alors $\sigma(C) \leq (\deg(A) + \deg(B) + 1)\sigma(A)\sigma(B)$.

Démonstration. On écrit $A = \sum_{i=0}^p a_i z^i$ et $B = \sum_{i=0}^q b_i z^i$, de sorte que $C = \sum_{j=0}^{p+q} c_j z^j$, avec, pour

tout $j \in \{0, \dots, p+q\}$, $c_j = \sum_{i=0}^j a_i b_{j-i}$.

Soit $\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ un plongement. Alors

$$|\tau(c_j)| \leq \sum_{i=0}^j |\tau(a_i)| |\tau(b_{j-i})| \leq (j+1)\sigma(A)\sigma(B) \leq (p+q+1)\sigma(A)\sigma(B),$$

si bien qu'en prenant le maximum sur j et sur τ , on obtient l'inégalité voulue. □

Soit $m \in \{0, \dots, n-1\}$. Si $Q = \sum_{i=0}^N q_i z^i$, alors

$$\frac{Q^{(m)}}{m!} = \sum_{i=0}^{N-m} \frac{(i+1) \dots (i+m)}{m!} q_{m+i} z^m = \sum_{i=0}^{N-m} \binom{m+i}{i} q_{m+i} z^m.$$

De la majoration $\binom{m+i}{i} \leq 2^{m+i} \leq 2^N$, il s'ensuit que $\sigma\left(\frac{Q^{(m)}}{m!}\right) \leq 2^N \sigma(Q)$. Selon le lemme 4 appliqué à $A = T^m$ et $B = Q^{(m)}/m!$,

$$\begin{aligned} \sigma\left(T^m \frac{Q^{(m)}}{m!}\right) &\leq 2^N \sigma(Q) \sigma(T^m) (mt + N - m + 1) \\ &\leq 2^N \sigma(Q) \sigma(T^m) ((n-1)(t-1) + N + 1) \leq c_1^N \sigma(Q) \sigma(T^m), \end{aligned}$$

avec c_1 constante dépendant seulement de G pour N suffisamment grand.

En appliquant m fois le lemme 4, on obtient

$$\sigma(T^m) \leq c_2^N \sigma(T) \sigma(T^{m-1}) \leq \dots \leq c_3^N \sigma(T)^m,$$

où c_2 et c_3 sont des constantes. Dans ce qui suit, les c_i désigneront des constantes.

Ainsi, pour N suffisamment grand,

$$\sigma\left(T^m \frac{Q^{(m)}}{m!}\right) \leq c_4^N \sigma(Q) \sigma(T)^m \leq c_5^N \sigma(Q).$$

Soit θ_{N+M} le maximum des maisons des $N+M$ premiers coefficients du développement en série entière des f_i , et d_{N+M} leur dénominateur commun. En répétant le raisonnement de la preuve du lemme 4, on voit que la maison de la partie polynomiale tronquée à l'ordre $N+tm$ de $T^m \frac{Q^{(m)}}{m!} (d_{N+M} f_i)$ est majorée par

$$c_5^N \sigma(Q) (d_{N+M} \theta_{N+M}) (N+tm+1) \leq c_6^N \sigma(Q) (d_{N+M} \theta_{N+M}).$$

Or, si $N+M-(n-1) \geq N+t(n-1)$, selon (17), cette partie polynomiale est $T^m \mathbf{P}_m$, donc, avec une extension de la notation σ aux vecteurs colonnes,

$$\forall m \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \sigma(T^m \mathbf{P}_m) \leq c_7^N \sigma(Q) d_{N+M} \theta_{N+M}.$$

On a $\tilde{V} = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\tau) \prod_{j=0}^{n-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}$. Pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, en appliquant le lemme 4 à $A = \mathbf{P}_{\tau(0),0}$ et $B = \prod_{j=1}^{n-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}$, on a

$$\sigma\left(\prod_{j=0}^{n-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}\right) \leq \sigma(\mathbf{P}_{\tau(0),0}) \sigma\left(\prod_{j=1}^{n-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}\right) (n(N+t(n-1)+1))$$

en utilisant (18). En itérant le procédé, on obtient une constante c_8 telle que

$$\sigma\left(\prod_{j=0}^{n-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}\right) \leq c_7^{nN} \sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n c_8^N \leq c_9^N \sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n.$$

Donc par inégalité triangulaire

$$\sigma(\tilde{V}) \leq c_{10}^N \sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n,$$

si bien que, comme $V = T^{n(n-1)/2} \tilde{V}$, $\sigma(V) \leq c_{11}^N \sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n$. D'où selon (22),

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad s+n-1 \leq \frac{M}{t+1}, \quad q_s \leq \sigma(V)^\delta \leq c_{12}^N \sigma(Q)^{n\delta} d_{N+M}^{n\delta} \theta_{N+M}^{n\delta}. \quad (23)$$

Étape 7 : Conclusion à l'aide du lemme de Siegel.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$, supposé suffisamment grand. Soit $N = 2n(t+1)(s+n-1)$ et $M = \frac{N}{2n} \in \mathbb{N}^*$. Alors l'équation de Padé $Q(d_{N+M}\mathbf{f}) - \mathbf{P} = O(z^{N+M})$ se traduit par un système linéaire de $\frac{nN}{2n} = \frac{N}{2}$ équations à $N+1$ inconnues (les coefficients de Q). Selon le lemme 2, il existe une solution $Q \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ telle que

$$\sigma(Q) \leq c_{10}(c_{10}(N+1)\theta_{N+M})^{\frac{N/2}{N+1-N/2}} \leq c_{11}^N \theta_{N+M}$$

car $\frac{N}{2} \leq N+1 - \frac{N}{2}$. Puisque les composantes de \mathbf{f} sont des G -fonctions, on peut trouver des constantes c_{12} et c_{13} telles que $\theta_{N+M} \leq c_{12}^{N+M}$ et $d_{N+M} \leq c_{13}^{N+M}$.

On a, par définition de M , $\frac{M}{t+1} \geq s+n-1$, donc selon (23),

$$q_s \leq c_9^N (c_{11}^N \theta_{N+M})^{n\delta} d_{N+M}^{\delta n} \theta_{N+M}^{\delta n} \leq c_{14}^N$$

de sorte qu'on peut trouver une constante $c_{15} > 0$ dépendant seulement de G telle que $\forall s \in \mathbb{N}^*$, $q_s \leq c_{15}^s$. Ceci conclut la démonstration du théorème 14

2.3 Lemme de Shidlovskii pour les approximants de Padé de type II

Dans l'étape 3 de la démonstration du théorème des Chudnovsky, nous avons utilisé le lemme de Shidlovskii pour les approximants de Padé de type II (théorème 15), et l'objet de cette partie est de le démontrer.

Soit \mathbb{K} un corps de nombres. Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1(z), \dots, f_n(z)) \in \mathbb{K}[[z]]^n$ vérifiant un système d'équations $\mathbf{y}' = G\mathbf{y}$, $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$. L'hypothèse que les f_i sont des G -fonctions n'est ici pas nécessaire. Supposons de plus que $(f_1(z), \dots, f_n(z))$ constitue une famille libre sur $\mathbb{K}(z)$.

On note $T(z) \in \mathbb{K}[z]$ un dénominateur commun des coefficients de G et on définit t le maximum du degré de T et des degrés des coefficients de TG .

Soient $N, M \in \mathbb{N}$. On se donne Q, P_1, \dots, P_n des approximants de Padé de type II² de \mathbf{f} : $\deg(Q) \leq N$, $\max_{1 \leq i \leq n} \deg(P_i) \leq N$ et

$$Q\mathbf{f} - \mathbf{P} = O(z^{N+M}),$$

où $\mathbf{P} = {}^t(P_1, \dots, P_n)$. Comme on l'a vu dans l'étape 1 de la sous-section 2.2, on a alors pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{T^m}{m!} Q^{(m)} \mathbf{f} - \frac{T^m}{m!} (D - G)^m \mathbf{P} = O(z^{N+M-m}),$$

de sorte qu'en posant

$$Q_m = \frac{T^m}{m!} Q^{(m)} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_m = \frac{T^m}{m!} (D - G)^m \mathbf{P} = {}^t(\mathbf{P}_{1,m}, \dots, \mathbf{P}_{n,m}),$$

$(Q_m, \mathbf{P}_{1,m}, \dots, \mathbf{P}_{n,m})$ est un système d'approximants de Padé de type II de \mathbf{f} .

On pose par convention $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$. On s'intéresse à la matrice $R_{(0)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[z])$ de j -ième colonne \mathbf{P}_{j-1} , et à son déterminant $\Delta(z) = \det(R_{(0)}) \in \mathbb{K}[z]$. Le théorème suivant, qui est un point crucial de la démonstration du théorème 14, a été prouvé dans [12, pp. 42–43], avec une correction issue de [2, pp. 115–119].

Théorème 15 (Shidlovskii pour le type II)

Le déterminant $\Delta(z)$ n'est pas identiquement nul si M est assez grand.

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de ce théorème.

2. Un approximant de Padé de type I et de paramètre N de \mathbf{f} est une fonction $\sum_{i=1}^n P_i(z) f_i(z)$, $\deg(P_i) \leq N$, d'ordre en 0 suffisamment grand par rapport à N . On dispose pour le type I d'un résultat analogue au théorème 15, voir [26, p.100] ou [7, p. 112]

2.3.1 Lemmes techniques

On utilise dans la preuve du théorème 15 deux lemmes techniques, les lemmes 5 et 7 ci-dessous. L'objet de cette partie est de les démontrer.

On commence par introduire la notion de degré total d'une fraction rationnelle :

Définition 15

Le degré total de $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(z)$, où $P, Q \in \mathbb{K}[z]$ sont premiers entre eux est $\deg_t(F) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque. Si $F = \frac{P_1}{Q_1}$, avec $P_1, Q_1 \in \mathbb{K}[z]$ quelconques, alors on voit que

$$\deg_t(F) \leq \deg(P_1) + \deg(Q_1).$$

De plus, si $F_1, F_2 \in \mathbb{K}(z)$, $\deg_t(F_1 F_2) \leq \deg_t(F_1) + \deg_t(F_2)$.

Lemme 5 ([7], pp. 112–113)

Soient $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$ et $\mathbf{P} \in \mathbb{K}(z)^n$, on définit $\tilde{\mathbf{P}}_m = (D - G)^m \mathbf{P}$. Notons ℓ le rang de la famille $(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_{n-1})$. Alors $\tilde{F} = (\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_{\ell-1}) \in \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{K}(z))$ est de rang ℓ . Quitte à renuméroter les composantes de \mathbf{P} , on peut supposer que la matrice $\tilde{R} \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{K}(z))$ formée des ℓ premières lignes de \tilde{F} est inversible. On note $\tilde{S} \in \mathcal{M}_{n-\ell,\ell}(\mathbb{K}(z))$ la matrice formée des $n - \ell$ dernières lignes de \tilde{F} .

Alors les coefficients de $\tilde{S}\tilde{R}^{-1}$ sont des fractions rationnelles de degrés totaux bornés par une constante c_0 ne dépendant que de G .

Le lemme suivant sera utilisé dans la preuve du lemme 5.

Lemme 6 ([26], p. 86)

Soit \mathbb{L} une extension de $\mathbb{K}(z)$ et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_s, \psi_1, \dots, \psi_m$ des éléments de \mathbb{L} tels que les ψ_i ne sont pas tous nuls. Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{C}^s$ et $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{C}^m$ tels que $\sum_{i=1}^m \beta_i \psi_i \neq 0$,

$$\omega = \left(\sum_{i=1}^s \alpha_i \varphi_i \right) \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \psi_i \right)^{-1} \in \mathbb{C}(z) \Rightarrow \deg_t(\omega) \leq N_0.$$

Démonstration. Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ comme dans l'énoncé du théorème. Soit r le rang sur $\mathbb{C}(z)$ de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_s, \psi_1, \dots, \psi_m\}$. On choisit r fonctions extraites de cette famille (g_1, \dots, g_r) formant une famille libre sur $\mathbb{C}(z)$.

Notons pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $\varphi_i = \sum_{j=1}^r A_{ij} g_j$, $A_{ij} \in \mathbb{C}(z)$, et pour $i \in \{1, \dots, m\}$, $\psi_i = \sum_{j=1}^r B_{ij} g_j$, $B_{ij} \in \mathbb{C}(z)$. Notons N le maximum des degrés totaux des A_{ij} et des B_{ij} . C'est un nombre qui dépend uniquement des φ_i et des ψ_i . On a donc

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \alpha_i A_{ij} g_j}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r \beta_i B_{ij} g_j} = \frac{\sum_{j=1}^r C_j g_j}{\sum_{j=1}^r D_j g_j},$$

où $C_j = \sum_{i=1}^s \alpha_i A_{ij}$, $D_j = \sum_{i=1}^m \beta_i B_{ij}$.

Par hypothèse, $\sum_{j=1}^r D_j g_j$ n'est pas nulle donc comme (g_1, \dots, g_r) est libre sur $\mathbb{C}(z)$, il existe $j_0 \in \{1, \dots, r\}$ tel que $D_{j_0} \neq 0$.

De plus, $\omega \in \mathbb{C}(z)$ et $\sum_{j=1}^r (D_j \omega - C_j) g_j = 0$, si bien que $\forall j \in \{1, \dots, r\}, D_j \omega - C_j = 0$. En prenant $j = j_0$, on obtient $\omega = \frac{C_{j_0}}{D_{j_0}}$. Il est clair que $\deg_t(C_{j_0}) \leq 2sN$ et $\deg_t(D_{j_0}) \leq 2mN$, donc $\deg_t(\omega) \leq 2(s+m)N$ est borné par une constante ne dépendant que des φ_i et des ψ_i . \square

Démonstration du lemme 5. Commençons par justifier que \tilde{F} est de rang ℓ en montrant que $(\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{\ell-1})$ est libre sur $\mathbb{K}(z)$. En effet, supposons le contraire et fixons $k \in \{1, \dots, \ell-1\}$ tel que $\mathbf{P}_k \in \text{Vect}_{\mathbb{K}(z)}(\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{k-1})$. Alors on montre par récurrence, en utilisant la formule $\tilde{\mathbf{P}}_m = (D - G)^m \mathbf{P}$ que $\tilde{\mathbf{P}}_{k+s} \in \text{Vect}_{\mathbb{K}(z)}(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_{k-1})$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, de sorte que le rang de $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_{n-1})$ est strictement inférieur à ℓ , ce qui est absurde.

On considère à présent le système, dont l'inconnue est un vecteur ligne y ,

$$y' = y(-{}^t G). \quad (24)$$

On peut trouver une matrice $Q \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{K}(z))$ telle que si $y = (y_1, \dots, y_n)$ est solution de (24), alors le vecteur ligne $Y = yF$ vérifie $Y' = YQ$. En effet, notons $G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_\ell)$. Alors on a, pour $1 \leq j \leq \ell-1$,

$$Y'_j = \left(\sum_{i=1}^n y'_i \tilde{\mathbf{P}}_{i,j-1} \right)' = \sum_{i=1}^n y'_i \tilde{\mathbf{P}}'_{i,j-1} + y_i \tilde{\mathbf{P}}'_{i,j-1} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (-g_{ki}) y_k \tilde{\mathbf{P}}_{i,j-1} + y_i \tilde{\mathbf{P}}'_{i,j-1}.$$

Or, $\tilde{\mathbf{P}}_j = \tilde{\mathbf{P}}'_{j-1} - G\tilde{\mathbf{P}}_{j-1}$, donc

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \tilde{\mathbf{P}}'_{i,j-1} = \tilde{\mathbf{P}}_{i,j} + \sum_{k=1}^n g_{ik} \tilde{\mathbf{P}}_{k,j-1},$$

de sorte que

$$Y'_j = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ki} y_k \tilde{\mathbf{P}}_{i,j-1} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ik} \tilde{\mathbf{P}}_{k,j-1} y_i + \sum_{i=1}^n y_i \tilde{\mathbf{P}}_{i,j} = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{\mathbf{P}}_{i,j} = Y_{j+1}.$$

Le même calcul nous donne $Y'_\ell = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{\mathbf{P}}_{i,\ell}$, donc, comme $\tilde{\mathbf{P}}_\ell \in \text{Vect}_{\mathbb{K}(z)}(\mathbf{P}, \tilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{P}}_{\ell-1})$, Y'_ℓ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}(z)$ (ne dépendant pas de y) des $Y_j, 1 \leq j \leq \ell$.

Soit \mathbb{L} une extension de Picard-Vessiot de $\mathbb{K}(z)$ telle que le système (24) a une base de solutions $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{L}^n$ sur $\mathbb{K}(z)$. Par les propriétés du wronskien, c'est également une base sur \mathbb{K} de ce système (voir [29, pp. 7-9]). On introduit la matrice wronskienne associée

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{L}).$$

Donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la ligne i $Y_i = w_i F$ de WF vérifie $Y'_i = Y_i Q$. Or, le système $Y' = YQ$ n'a que ℓ solutions linéairement indépendantes sur \mathbb{K} . Par suite, en effectuant des opérations à coefficients dans \mathbb{K} sur les lignes et les colonnes de WQ , on obtient une matrice $M \in \mathcal{M}_{n-\ell, n}(\mathbb{K})$ de rang $n - \ell$ telle que $MWQ = 0$.

On note U la matrice formée des ℓ premières colonnes de MW et V la matrice composée des $n - \ell$ dernières colonnes de MW . En écrivant le produit de matrices par blocs, on constate que $U\tilde{R} + V\tilde{S} = 0$, de sorte que $U = -V\tilde{S}\tilde{R}^{-1}$. Donc $M = (-V\tilde{S}\tilde{R}^{-1} \quad V)$.

Si $u = {}^t(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}(z))$, alors

$$Mu = V \left((-\tilde{S}\tilde{R}^{-1}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_\ell \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{\ell+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right) \in \text{Im}(V).$$

Donc le rang sur $\mathbb{K}(z)$ de M est inférieur au rang de V . Or, M est de rang $n - \ell$ sur \mathbb{K} donc également sur $\mathbb{K}(z)$; par suite, V est de rang $n - \ell$ et est donc inversible. De plus, $\tilde{S}\tilde{R}^{-1} = -V^{-1}U$.

Mais si $W = (w_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on voit avec la formule $V^{-1} = \frac{1}{\det V} (\text{com}(V))^T$ (formule de la comatrice) que les coefficients de $V^{-1}U$ sont des fractions rationnelles en les $(w_{i,j})$ de degré total borné par une constante qui ne dépend que de n . De plus, comme $\tilde{S}\tilde{R}^{-1} \in \mathcal{M}_{n-\ell, \ell}(\mathbb{K}(z))$, ces coefficients sont également des éléments de $\mathbb{K}(z)$.

Finalement, le lemme 6 nous fournit une borne supérieure $N_0 > 0$ ne dépendant que de W (donc *in fine* de G) sur les degrés totaux des coefficients de $V^{-1}U$, donc sur ceux des coefficients de $\tilde{S}\tilde{R}^{-1}$. \square

Lemme 7 ([26], p. 85)

Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[[z]]$ tous non nuls et $R_1, \dots, R_n \in \mathbb{C}(z)$ de degrés totaux bornés par $c > 0$. Alors $R \cdot f = \sum_{i=1}^n R_i f_i$ a un zéro d'ordre au plus $d > 0$, où d est une constante dépendant uniquement des f_i et de c .

Démonstration. Étape 1 : réduction au cas où $\forall 1 \leq i \leq n, R_i \in \mathbb{C}[z]$.

Écrivons R_i sous forme réduite $\frac{P_i}{Q_i}$, où $\deg(P_i) + \deg(Q_i) \leq c$. Alors

$$R \cdot f = \frac{1}{Q_1 \dots Q_n} \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} Q_j \right) P_i f_i$$

et pour tout i , $\deg \left(\prod_{j \neq i} Q_j \right) P_i \leq (n-1)c + c = nc$. De plus,

$$\text{ord}_{z=0}(R \cdot f) = \text{ord} \left(\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} Q_j \right) P_i f_i \right) - \text{ord}(Q_1 \dots Q_n) \leq \text{ord} \left(\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} Q_j \right) f_i \right).$$

On peut donc se ramener au cas où $\forall i \in \{1, \dots, n\}, R_i \in \mathbb{C}[z]$.

Étape 2 : réduction au cas où $\forall 1 \leq i \leq n, R_i \in \mathbb{C}$. On écrit donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, R_i = \sum_{j=0}^c r_{j,i} z^j$, avec $r_{j,i} \in \mathbb{C}$. Donc $R \cdot f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^c r_{j,i} z^j f_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq c}} r_{j,i} g_{i,j}$, où $g_{i,j}(z) = z^j f_i(z) \in \mathbb{C}\{z\}$.

On remarque que les $g_{i,j}$ sont tous non nuls car les f_i le sont.

Étape 3 : traitons le cas $\forall 1 \leq i \leq n, R_i \in \mathbb{C}$.

Introduisons \mathcal{E} l'ensemble des $R \in \mathbb{C}^n$ tel que $R \cdot f$ n'est pas identiquement nul. Remarquons que si $g_1, \dots, g_\ell \in \mathbb{C}\{z\}$ ont des ordres d'annulation en 0 deux à deux distincts, alors (g_1, \dots, g_ℓ) est libre sur \mathbb{C} .

En effet, supposons que $\text{ord}(g_1) = n_1 < \text{ord}(g_2) = n_2 < \dots < \text{ord}(g_\ell) = n_\ell$. Supposons sans perte de généralité que $\alpha_1 \neq 0$. Alors, comme ord est une valuation sur $\mathbb{C}[[z]]$,

$$g_1 = - \sum_{i=2}^s \frac{\alpha_i}{\alpha_1} g_i$$

est d'ordre au moins $\min_{i \geq 2, \alpha_i \neq 0} \text{ord}(g_i) \geq n_2$ ce qui est absurde. Donc $\alpha_1 = 0$.

En itérant le procédé, on obtient $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$, donc (g_1, \dots, g_s) est libre sur \mathbb{C} .

Notons ν le maximum des $k \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{E} contient k éléments d'ordre deux à deux distincts. Selon ce qui précède, $\nu \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$. Soient $R_1 \cdot f, \dots, R_\nu \cdot f \in \mathcal{E}$ d'ordres deux à deux distincts.

Si $R \in \mathcal{E}$, $(R \cdot f, R_1 \cdot f, \dots, R_{(\nu)} \cdot f)$ est une famille à $\nu + 1$ éléments, donc elle contient au moins deux éléments d'ordre égal. D'où $\text{ord}(R \cdot f) \in \{\text{ord}(R_{(i)} \cdot f), 1 \leq i \leq \nu\}$. \square

2.3.2 Démonstration du théorème 15

On peut à présent passer à la preuve du théorème 15. On procède par l'absurde.

Supposons que $\Delta(z)$ est identiquement nul. Notons ℓ le rang sur $\mathbb{K}(z)$ de $(\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{n-1})$ et $F = (\mathbf{P}, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{\ell-1}) \in \mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{K}[z])$. Alors en reprenant les notations du lemme 5, on a $\mathbf{P}_m = T^m \tilde{\mathbf{P}}_m$, de sorte que si $D = \text{Diag}(1, T, \dots, T^{\ell-1})$, on a $F = \tilde{F}D$, donc comme \tilde{F} est de rang ℓ , il en va de même de F . Quitte à renuméroter les composantes de \mathbf{f} , on peut supposer que la matrice $R \in \mathcal{M}_{\ell}(\mathbb{K}(z))$ formée des ℓ premières lignes de F est inversible. On note $S \in \mathcal{M}_{n-\ell,\ell}(\mathbb{K}(z))$ la matrice formée des $n - \ell$ dernières lignes de F .

Le lemme 5 ci-dessous nous assure que les degrés totaux des coefficients de SR^{-1} sont bornés par une constante $c_0 > 0$ qui ne dépend que de G . En effet, toujours avec les notations du lemme 5, on a $R = \tilde{R}D$ et $S = \tilde{S}D$, donc $SR^{-1} = \tilde{S}\tilde{R}^{-1}$.

Considérons

$$H = \begin{pmatrix} f_n(z) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -f_1(z) \\ f_2(z) & -f_1(z) & \dots & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & (0) & \\ f_\ell(z) & 0 & \dots & -f_1(z) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $H_0 \in \mathcal{M}_{\ell}(\mathbb{K}(z))$ la matrice composée des ℓ premières colonnes de H et H_1 la matrice de $\mathcal{M}_{\ell,n-\ell}(\mathbb{K}(z))$ formée des $n - \ell$ dernières colonnes de H . Notons $U = HF$. On a

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, \ell\}^2, \quad U_{ij} = \begin{cases} \mathbf{P}_{1,j-1}f_n(z) - \mathbf{P}_{n,j-1}f_1(z) & \text{si } i = 1 \\ \mathbf{P}_{1,j-1}f_i(z) - \mathbf{P}_{i,j-1}f_1(z) & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

Un calcul de matrices par blocs nous montre que $U = H_0R + H_1S$, donc $UR^{-1} = H_0 + H_1SR^{-1}$.

Notons $B = SR^{-1} = (B_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-\ell,\ell}(\mathbb{K}(z))$. La matrice

$$H_1B = (-f_1(z)B_{n-\ell,1}, \dots, -f_1(z)B_{n-\ell,\ell}) = (-b_1f_1(z), \dots, -b_\ell f_1(z)),$$

avec $b_i = B_{n-\ell,i} \in \mathbb{K}(z)$, est de degré total borné par c_0 . Donc

$$UR^{-1} = \begin{pmatrix} f_n(z) - b_1f_1(z) & -b_2f_1(z) & \dots & -b_\ell f_1(z) \\ f_2(z) & -f_1(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_\ell(z) & 0 & \dots & -f_1(z) \end{pmatrix}.$$

Par suite, en effectuant les opérations sur les lignes $L_1 \leftarrow L_1 - b_iL_i$ pour $i \in \{2, \dots, \ell\}$, on ob-

tient

$$\begin{aligned} \det(UR^{-1}) &= \begin{vmatrix} f_n(z) - \sum_{i=1}^{\ell} b_i f_i(z) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(z) & -f_1(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{\ell}(z) & 0 & \dots & -f_1(z) \end{vmatrix} \\ &= \left(f_n(z) - \sum_{i=1}^{\ell} b_i f_i(z) \right) \times \det(-f_1(z) I_{\ell-1}) \end{aligned} \quad (25)$$

en développant selon la première colonne. Donc

$$\det(UR^{-1}) = \left(f_n(z) - \sum_{i=1}^{\ell} b_i f_i(z) \right) \times (-f_1(z))^{\ell-1} \neq 0,$$

car $(f_1(z), \dots, f_n(z))$ est supposée libre sur $\mathbb{K}(z)$.

Pour aboutir à une contradiction, on va minorer puis majorer l'ordre d'annulation en 0 de $\det(UR^{-1})$. D'abord, si $j \in \{1, \dots, \ell\}$ et $i \in \{2, \dots, n\}$, on a

$$\begin{cases} Q_{j-1} f_1(z) - \mathbf{P}_{1,j-1} &= O(z^{N+M-(j-1)}) = O(z^{N+M-\ell}) \\ Q_{j-1} f_i(z) - \mathbf{P}_{i,j-1} &= O(z^{N+M-\ell}). \end{cases}$$

Donc en multipliant la première ligne par $f_i(z)$, la deuxième par $-f_1(z)$ et en les additionnant, on obtient que

$$\mathbf{P}_{i,j-1} f_1(z) - \mathbf{P}_{1,j-1} f_i(z) = O(z^{N+M-\ell}).$$

Or, $\det(U)$ est une somme de produits de n termes de cette forme, donc

$$\det(U) = O(z^{\ell(N+M-\ell)}).$$

Mais comme on l'a montré dans l'étape 4 de la sous-section 2.2, si $j \in \{1, \dots, \ell\}$, les composantes de \mathbf{P}_{j-1} sont de degrés inférieurs à $N + t(j-1) \leq N + t(\ell-1)$. Donc les coefficients de la matrice R sont de degrés inférieurs à $N + t(\ell-1)$. Ainsi, $\det R \in \mathbb{K}[z]$ a un degré inférieur à $\ell(N + t(\ell-1))$, de sorte que $\det(UR^{-1}) = \det U (\det R)^{-1}$ a un ordre d'annulation en 0 au moins

$$\ell(N + M - \ell) - \ell(N + t(\ell-1)) = \ell[M - (t+1)(\ell-1) + 1] \geq M - (n-1)(t+1) + 1$$

car $\ell \geq 1$. D'autre part, comme $b_1, \dots, b_{\ell} \in \mathbb{K}(z)$ sont de degrés totaux bornés par c_0 , le lemme 7 ci-dessous nous assure, puisque les $f_i(z)$ sont tous non nuls, que l'ordre d'annulation en 0 de $f_n(z) - \sum_{i=1}^{\ell} b_i f_i(z)$, donc de $\det(UR^{-1})$ selon (25), est borné par une constante $c_1 > 0$ dépendant uniquement du système $\mathbf{y}' = \mathbf{G}\mathbf{y}$ et de \mathbf{f} .

Par conséquent, si $M - (n-1)(t+1) + 1 > c_1$, on aboutit à une contradiction. Donc $\Delta(z) \neq 0$, ce qui conclut la preuve du théorème 15.

3 Lien entre la nilpotence et la condition de Galochkin

Le but de cette partie est de définir une notion de nilpotence pour les systèmes différentiels, généralisant celle définie pour les opérateurs différentiels dans la sous-section 1.3, que nous caractériserons à l'aide de rayons de convergence p -adiques. Dans un second temps, nous démontrerons que tout système différentiel satisfaisant la condition de Galochkin est nilpotent.

La référence principale pour cette section est [14].

3.1 Systèmes différentiels nilpotents

3.1.1 Nilpotence locale

Dans cette partie, nous allons donner une généralisation de la notion de nilpotence définie dans la sous-section 1.2 et étudier ses propriétés.

Soit H un corps de caractéristique $p > 0$. On note $\mathcal{F} = H(z)$ et $D = \frac{d}{dz}$. On considère $G \in \mathcal{M}_n(H(z))$ et le système différentiel associé $y' = Gy$.

On rappelle qu'on peut définir une suite de matrices $(G_s)_{s \in \mathbb{N}}$ par

$$G_{s+1} = G_s G + G'_s,$$

où G'_s désigne la matrice G_s dérivée coefficient par coefficient, de manière à ce que pour tout y vérifiant $y' = Gy$, on ait $y^{(s)} = G_s y$.

Définition 16

On dit que $y' = Gy$ est un système différentiel nilpotent si G_p est une matrice nilpotente.

Lemme 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_{pn} = (G_p)^n$.

Démonstration. Soit y un vecteur colonne tel que $y' = Gy$. Par définition, $y^{(p)} = G_p y$. Par la formule de Leibniz, on a donc

$$y^{(2p)} = (y^{(p)})^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} G_p^{(k)} y^{(p-k)} = G_p y^{(p)} + G_p^{(p)} y$$

car si $1 \leq k \leq p-1$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p . De plus comme H est de caractéristique p et $G \in \mathcal{M}_n(H(z))$, $(G_p)^{(p)} = 0$, donc $y^{(2p)} = G_p y^{(p)} = G_p^2 y$. Ainsi, $G_{2p} = G_p^2$. On obtient le résultat annoncé par récurrence sur n en écrivant $y^{(np)} = (y^{(n-1)p})^{(p)}$. \square

Proposition 18

Soit Ω une extension de $H(z)$ sur laquelle $y' = Gy$ a une base de solutions (on dit que ce système est trivial sur $H(z)$) et D^{p^s} est trivial, avec $pn \geq p^s$. On note Ω_s le corps $\text{Sol}(D^{p^s}, \Omega)$. Alors $y' = Gy$ est nilpotent si et seulement si $y' = Gy$ est trivial sur Ω_s .

Démonstration. • Supposons que $y' = Gy$ est un système nilpotent. Soit $U \in \text{GL}_n(\Omega)$ une matrice fondamentale de solutions de $y' = Gy$. Alors G_p est nilpotent et classiquement, l'indice de nilpotence de G_p est inférieur à n , donc $U^{(pn)} = G_{pn} U = G_p^n U = 0$, donc comme $p^s \geq pn$, on a $U \in \text{GL}_n(\Omega_s)$.

• Si $y' = Gy$ est trivial sur Ω_s , soit $U \in \text{GL}_n(\Omega_s)$ une matrice fondamentale de solutions.

Alors $G_{p^s} U = U^{(p^s)} = 0$, donc $0 = G_{p^s} = G_p^{p^{s-1}}$, de sorte que G_p est nilpotent. \square

Remarque. La notion de nilpotence ainsi définie généralise bien celle donnée dans la partie 1.2. Selon la proposition 7 et le résultat ci-dessus, un opérateur différentiel $L = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n \in H(z)[D]$ est nilpotent si et seulement si $y' = A_L y$ est un système différentiel nilpotent, où

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}$$

est la matrice compagnon associée à L .

3.1.2 Nilpotence globale

Soit \mathbb{K} un corps de nombres, on considère le système différentiel $y' = Gy$, $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$. Le but de cette partie est de définir une notion de nilpotence globale pour un tel système différentiel selon le procédé employé dans la sous-section 1.3.

Soit \mathfrak{p} un premier de \mathbb{K} définissant une valuation de Gauss sur $\mathbb{K}(z)$. Le lemme suivant est une conséquence de la proposition 25 ci-dessous.

Lemme 9

Si $f \in \mathbb{K}(z)$ est telle que $|f|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq 1$, alors $|f'|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq 1$.

Définition 17

La norme de Gauss d'une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$ est définie par $|H|_{\text{Gauss}} = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |h_{ij}|_{\text{Gauss}}$.

Remarque. On vérifie que si $H_1, H_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$, $|H_1 H_2|_{\text{Gauss}} \leq |H_1|_{\text{Gauss}} |H_2|_{\text{Gauss}}$.

On déduit de la relation $G_{s+1} = G_s G + G'_s$ et du lemme 9 la proposition suivante

Proposition 19

- Si $|G|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq 1$, alors $\forall s \in \mathbb{N}$, $|G_{s+1}|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq |G_s|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}$.
- Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $|G_s|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq \sup(1, |G|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}})^s$.

Si $|G|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq 1$ (ce qui est vérifié pour presque tout premier \mathfrak{p}), alors selon la remarque suivant la proposition 8, on peut réduire G modulo \mathfrak{p} coefficient par coefficient, si bien qu'on obtient une matrice $G \bmod \mathfrak{p} \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{K}}_{\mathfrak{p}}(z))$ définissant un système différentiel $y' = (G \bmod \mathfrak{p})y$. De plus, la proposition 19 montre que pour tout $s \in \mathbb{N}$, $(G \bmod \mathfrak{p})_s = G_s \bmod \mathfrak{p}$.

Définition 18

On dit que $y' = Gy$ est un système globalement nilpotent si pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ dans un ensemble de densité de Dirichlet 1, $y' = (G \bmod \mathfrak{p})y$ est un système différentiel nilpotent.

La définition et les propriétés de la densité de Dirichlet dans $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ sont présentées en annexe.

Remarque. Selon la remarque clôturant la partie 3.1.1 et la définition 10, si $L \in \mathbb{K}(z)[d/dz]$, alors L est globalement nilpotent si et seulement si le système différentiel $y' = A_L y$ est globalement nilpotent, où A_L est la matrice compagnon associée à L .

3.2 Rayon de convergence p -adique

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique 0 muni d'une valeur absolue non archimédienne $|\cdot|$. On note A l'anneau de valuation de \mathbb{K} muni de son unique idéal maximal \mathfrak{p} et $\overline{\mathbb{K}} = A/\mathfrak{p}$ le

corps résiduel de \mathbb{K} , qu'on suppose de caractéristique $p > 0$. Par exemple, on prend \mathbb{K} un corps de nombres, \mathfrak{p} un premier de \mathbb{K} , et $|\cdot| = |\cdot|_{\mathfrak{p}}$.

On s'intéresse au système différentiel $y' = Gy$, avec $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$. Soit t une variable libre indépendante de z sur \mathbb{K} et Ω une extension complète et algébriquement close de \mathbb{K} telle que $t \in \Omega$. Concrètement, Ω est le complété de la clôture algébrique du complété de $\mathbb{K}(t)$ muni de la valuation de Gauss (voir [14, p. 24] pour une preuve de l'existence de Ω). On note B l'anneau de valuation de Ω et $\overline{\Omega}$ son corps résiduel.

Le but de cette section est de démontrer le théorème 16 donnant une caractérisation de la nilpotence du système réduit $y' = (G \bmod \mathfrak{p})y$ à l'aide d'une inégalité sur le rayon de convergence p -adique d'une matrice de solutions au point *générique* t du système $y' = Gy$.

Remarque. La réduction $\bar{t} \in \overline{\Omega}$ est transcendante sur $\overline{\mathbb{K}}$. En particulier, $\overline{\Omega}$ est infini.

En effet, soit $P \in A[x]$ tel que $\bar{P}(\bar{t}) = 0 = \overline{P(t)}$. Alors $|P(t)|_{\text{Gauss}} < 1$, de sorte que, par définition de la valuation de Gauss, $P \in \mathfrak{p}[x]$, donc $\bar{P} = 0$.

En définissant pour $s \in \mathbb{N}$, G_s comme ci-dessus, une matrice fondamentale de solutions $\mathcal{U} \in \text{GL}_n(\Omega((z)))$ au point t de $y' = Gy$ – c'est-à-dire que $\mathcal{U}'(t) = G(t)\mathcal{U}(t)$, avec la dérivation $\left(\sum_{s=0}^{\infty} A_s z^s\right)' = \sum_{s=1}^{\infty} s A_s z^{s-1}$ sur $\Omega[[z]]$ – vérifiant $\mathcal{U}(t) = I_n$ est donnée par

$$\mathcal{U}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{G_s(t)}{s!} (z - t)^s.$$

Définition 19

Le rayon de convergence générique du système $y' = Gy$ est le rayon de convergence dans $\Omega[[z]]$ de la série définissant \mathcal{U} .

Si $|G|_{\text{Gauss}} \leq 1$, alors comme dans la sous-section précédente, on peut définir un système réduit modulo \mathfrak{p} , $y' = \overline{G}y$, en caractéristique p .

Théorème 16

Supposons que $|G|_{\text{Gauss}} \leq 1$. Soit R le rayon de convergence générique du système $y' = Gy$ et π un élément de Ω algébriquement clos tel que $\pi^{p-1} = -p$. Alors le système $y' = \overline{G}y$ est nilpotent si et seulement si $R > |\pi|$.

Notons que $|\pi| = |p|^{\frac{1}{p-1}} = p^{-\frac{1}{p-1}}$. Pour la preuve, on utilisera les deux lemmes suivants. Le premier a été démontré par Kummer dans [19, p. 115] :

Lemme 10

Soit p est un nombre premier et $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_{\ell} p^{\ell} \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq a_i < p - 1$ et $a_{\ell} \neq 0$ un entier écrit en base p . Alors si $S_n = a_0 + \dots + a_{\ell}$, on a

$$v_p(n!) = \frac{n - S_n}{p - 1} = \sum_{k=0}^{\ell} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Démonstration. Pour tout $j \in \{0, \dots, \ell\}$, le nombre de multiples de p^j dans $\{0, \dots, n\}$ est $\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor$. Donc, en comptant j fois les multiples de p^j , il y a

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^{\ell}} \right\rfloor$$

multiples de p « avec multiplicité » dans $\{0, \dots, n\}$. Or, pour tout j ,

$$\frac{n}{p^j} = \frac{a_0}{p^j} + \frac{a_1}{p^{j-1}} + \dots + \frac{a_{j-1}}{p} + a_j + \dots + a_{\ell} p^{\ell-j}$$

et

$$0 \leq \frac{a_0}{p^j} + \frac{a_1}{p^{j-1}} + \cdots + \frac{a_{j-1}}{p} \leq \frac{p-1}{p} \frac{1 - \frac{1}{p^j}}{1 - \frac{1}{p}} = 1 - \frac{1}{p^j} \leq 1,$$

de sorte que $\left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = a_j + a_{j+1}p + \cdots + a_\ell p^{\ell-j}$. Donc

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k=0}^n v_p(k) = \sum_{j=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{\ell} a_j + a_{j+1}p + \cdots + a_\ell p^{\ell-j} \\ &= a_1 + a_2(1+p) + a_3(1+p+p^2) + \cdots + a_\ell(1+p+\cdots+p^{\ell-1}) \\ &= a_1 + a_2 \frac{p^2-1}{p-1} + \cdots + a_\ell \frac{p^\ell-1}{p-1} = \frac{1}{p-1} (pa_1 + \cdots + p^\ell a_\ell + a_0 - S_n) = \frac{n - S_n}{p-1}. \end{aligned}$$

□

On munit $\Omega((z))$ de la dérivation $D = \frac{d}{dz}$.

Lemme 11

Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \in \Omega(z)$, alors si v est la valuation associée à $|\cdot|_{\text{Gauss}}$, $v(D^p f) \geq 1 + v(f)$.

Démonstration. Selon la remarque suivant la proposition 25, on a $|D^p f|_{\text{Gauss}} \leq |p!| |f|_{\text{Gauss}}$, donc $v(D^p f) \geq v_p(p!) + v(f) \geq 1 + v(f)$.

□

Démonstration du théorème 16. En vertu du lemme 8, il faut montrer que $\overline{G}_{pn} = 0$ si et seulement si $R > |\pi|$.

• Supposons que $R > |\pi|$. Soit $R > R_1 > |\pi|$. Alors par définition du rayon de convergence, on a

$$\left| \frac{G_s}{s!} \right|_{\text{Gauss}} R_1^s \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme $\overline{\mathbb{K}}$ est de caractéristique p , par le théorème d'Ostrowski, $|\cdot|_{\mathbb{Q}} = |\cdot|_p$. Donc selon le lemme 10, $|(p^j)!| = p^{-\frac{p^j-1}{p-1}}$.

Comme $R_1 > |\pi|$, on peut trouver $\nu > 1$ tel que $R_1 = \nu|\pi| = \nu p^{-\frac{1}{p-1}}$, d'où

$$\frac{R_1^{p^j}}{|(p^j)!|} \geq p^{\frac{p^j-1}{p-1}} \nu^{p^j} \left(p^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p^j} = \nu^{p^j} p^{-\frac{1}{p-1}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty,$$

de sorte que $|G_{p^j}|_{\text{Gauss}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$. Mais comme $|G|_{\text{Gauss}} \leq 1$, selon la proposition 19, la suite $(|G_s|_{\text{Gauss}})_s$ est décroissante, d'où $|G_s|_{\text{Gauss}} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$.

En particulier, il existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $s \geq s_0$, $|G_s|_{\text{Gauss}} < 1$. Donc si $p\mu > s_0$, la réduction modulo p de $G_{p\mu}$ est nulle. Par suite, selon le lemme 8, le système réduit $y' = \overline{G}y$ est nilpotent.

• Supposons que $y' = \overline{G}y$ est nilpotent. Alors $\overline{G}_{pn} = \overline{G}_p^n = 0$, de sorte que $|G_{pn}|_{\text{Gauss}} < 1$. On peut donc trouver $\sigma \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$v(G_{pn}) := \min_{1 \leq i, j \leq n} \frac{-\log |(G_{pn})_{i,j}|_{\text{Gauss}}}{\log p} \geq \frac{1}{\sigma}.$$

On veut montrer par récurrence sur $s \in \mathbb{N}$ que

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad v(G_{pns}) \geq \frac{s}{\sigma}. \quad (26)$$

Soit $s \in \mathbb{N}$, supposons (26) vrai pour s . Soit \mathcal{U} la matrice fondamentale de solutions générique au point t de $y' = Gy$.

Alors il est immédiat que

$$\begin{aligned} G_{pn(s+1)}(t)\mathcal{U}(t) &= (D^{pn}(G_{pns}\mathcal{U}))(t) \stackrel{\text{Leibniz}}{=} \sum_{i=0}^{pn} \binom{pn}{i} (D^i G_{pns})(t) (D^{pn-i} \mathcal{U})(t) \\ &= \sum_{i=0}^{pn} \binom{pn}{i} (D^i G_{pns})(t) G_{pn-i}(t) \mathcal{U}(t). \end{aligned}$$

Donc comme $\mathcal{U}(t) = I_n$, en substituant z à t dans $\mathbb{K}(z, t)$, on a

$$G_{pn(s+1)} = \sum_{j=0}^n \binom{pn}{pj} (D^{pj} G_{pns}) G_{pn-pj} + \sum_{(p,i)=1} \binom{pn}{i} (D^i G_{pns}) G_{pn-i}.$$

Il s'agit pour conclure d'examiner l'ordre de chacun des termes de la somme :

- Par hypothèse de récurrence, $v(G_{pns}) \geq \frac{s}{\sigma}$ et $v(G_{pn}) \geq \frac{1}{\sigma}$, donc

$$v(G_{pns} G_{pn}) \geq v(G_{pns}) + v(G_{pn}) \geq \frac{s+1}{\sigma}.$$

- Pour $j \neq 0$, selon le lemme 11 ci-dessous, on a $v(D^{pj} G_{pns}) \geq 1 + v(G_{pns})$, donc

$$v((D^{pj} G_{pns}) G_{pn-pj}) \geq 1 + \frac{s}{\sigma} \geq \frac{s+1}{\sigma}.$$

- Si i et p sont premiers entre eux, alors $v_p\left(\binom{pn}{i}\right) \geq 1$, donc

$$v\left(\binom{pn}{i} (D^i G_{pns}) G_{pn-i}\right) \geq 1 + v(G_{pns}) \geq \frac{s+1}{\sigma}.$$

Ces trois arguments impliquent que $v(G_{pn(s+1)}) \geq \frac{s+1}{\sigma}$, ce qui montre (26) par récurrence.

De plus, selon la proposition 19, $(v(G_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc si $\ell \in \mathbb{N}$ est écrit sous la forme $\ell = pns + r, 0 \leq r < pn - 1$, on a

$$v(G_\ell) \geq v(G_{pns}) \geq \frac{s}{\sigma} = \left\lfloor \frac{s}{pn} \right\rfloor \frac{1}{\sigma}.$$

Comme $|\cdot|$ est non-archimédienne, si $x \in \Omega$, $\mathcal{U}(x)$ converge si et seulement si

$$\left| \frac{G_s(t)}{s!} (x-t)^s \right|_{\text{Gauss}} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0,$$

c'est-à-dire si $v(G_s(t)) - v_p(s!) + sv(x-t) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} +\infty$. Mais selon le lemme 10, $v_p(s!) \leq \frac{s}{p-1}$, donc

$$v(G_s(t)) - v_p(s!) + sv(x-t) \geq \left\lfloor \frac{s}{pn} \right\rfloor \frac{1}{\sigma} + sv(x-t) - \frac{s}{p-1} \geq s \left(\frac{1}{\sigma pn} - \frac{1}{p-1} + v(x-t) \right).$$

Pour que $\mathcal{U}(x)$ converge, il suffit donc que $v(x-t) > \frac{1}{p-1} - \frac{1}{\sigma pn} = v(\pi p^{1/(\sigma pn)})$. Par suite, $R \geq |\pi| p^{1/(\sigma pn)} > |\pi|$, ce qu'on voulait démontrer.

□

Remarque. Même si le système $y' = Gy$ n'est pas nilpotent, on peut montrer avec la proposition 19 que $R \geq |\pi|$.

3.3 Estimations sur le rayon de convergence

Cette sous-section s'appuie sur le chapitre IV de [14]. Le but est d'étudier le comportement de séries entières p -adiques sur le bord de leur disque ouvert de convergence à l'aide de la norme $\|\cdot\|_0$ qui sera introduite dans la proposition 21, ce qui fournit d'une part la formule de Hadamard sur le rayon de convergence p -adique (corollaire 1), et d'autre part, à l'aide des propositions techniques 19 à 21, le théorème 17, dû à Dwork et Robba, dont une conséquence cruciale est le théorème de Dwork-Robba pour les systèmes différentiels (théorème 18). L'intérêt de la norme $\|\cdot\|_0$ dans le cadre de la démonstration du théorème d'André-Bombieri est qu'elle coïncide pour les fractions rationnelles avec la valeur absolue de Gauss.

On se donne $(\Omega, |\cdot|)$ un corps valué de caractéristique 0 non archimédien tel que $\overline{\Omega}$ est infini. En particulier, le corps Ω construit dans la sous-section précédente vérifie ces hypothèses selon la remarque initiale de la sous-section 3.2.

On note p la caractéristique de $\overline{\Omega}$, de sorte que $|\cdot|_{\mathbb{Q}} = |\cdot|_p$, quitte à renormaliser.

3.3.1 Formule de Hadamard

Proposition 20

Soit $f(z) = \sum_{s=m}^{\infty} A_s z^s \in \Omega((z))$. Soit $R \in G_{\Omega} = \{|\omega|, \omega \in \Omega\}$. Si $f(x)$ converge pour $|x| = R$, alors

$$\sup_{|x|=R} |f(x)| = \sup_{s \geq m} (|A_s| R^s).$$

Démonstration. Notons $M = \sup_{s \geq m} (|A_s| R^s)$. Comme $f(x)$ converge pour $|x| = R$, on a

$$|A_s| R^s \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $M < \infty$.

D'une part, comme $|\cdot|$ est non archimédienne, on a pour tout x tel que $|x| = R$, $|f(x)| \leq \sup_{s \geq m} (|A_s| R^s) \leq M$.

Pour montrer la deuxième inégalité, supposons sans perte de généralité que $R = 1$. Comme $(|A_s|)_s$ tend vers 0, il y a un nombre fini d'indices s tels que $|A_s| = M$, de sorte qu'on peut écrire $f(z) = g(z) + h(z)$, avec

$$g(z) = \sum_{|A_s| < M} A_s z^s \in \Omega((z)) \quad \text{et} \quad h(z) = \sum_{|A_s| = M} A_s z^s \in \Omega\left[z, \frac{1}{z}\right].$$

Comme $|A_s| \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$, on peut trouver $M' < M$ tel que, pour tout s vérifiant $|A_s| < M$, $|A_s| \leq M'$. D'où, $|\cdot|$ étant non archimédienne, pour x tel que $|x| = 1$, $|g(x)| \leq M'$.

Par ailleurs,

$$\sup_{|x|=1} |h(x)| = |h|_{\text{Gauss}} = M.$$

En effet, $\sup_{|x|=1} |h(x)| \leq M$ de manière évidente. D'autre part, soit $y \in \Omega$ tel que $|y| = M$ et

$$h_1(z) = y^{-1} h(z) \in \mathcal{O}_{\Omega}[z],$$

où \mathcal{O}_Ω désigne l'anneau de valuation de Ω , d'unique idéal premier \mathfrak{p}_Ω .

Soit $\overline{h_1}$ la réduction modulo \mathfrak{p}_Ω de h_1 . Supposons $\overline{h_1} = 0$. Alors pour tout s tel que $|A_s| = M$, $y^{-1}A_s \in \mathfrak{p}_\Omega$, c'est-à-dire $|y^{-1}A_s| < 1$, si bien que $|A_s| < M$, ce qui est absurde. Donc $\overline{h_1} \neq 0$. Comme $\overline{\Omega}$ est infini, il existe ainsi $t \in \mathcal{O}_\Omega$ tel que $|t| = 1$ et $\overline{h_1}(t) \neq 0$, i.e. $|h_1(t)| = 1$. D'où par définition de h_1 , $|h(t)| = |y| = M$.

Finalement, $|f(t)| = \max(|g(t)|, |h(t)|) = M$, ce qui fournit la conclusion voulue. \square

Corollaire 1

Le rayon de convergence de $f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s z^s \in \Omega[[z]]$ est donné par la formule d'Hadamard

$$R = \liminf_{s \rightarrow +\infty} |A_s|^{-1/s}.$$

Démonstration. • Soit R' tel que $f(x)$ converge pour $|x| = R'$. Alors selon la proposition 20, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $|A_s|R^s \leq \sup_{|x|=R'} |f(x)|$. Donc en prenant la puissance $\frac{1}{s}$ de part et d'autre et en passant à la limite supérieure, on obtient

$$\left(\limsup_{s \rightarrow +\infty} |A_s|^{1/s} \right) R' \leq 1,$$

de sorte que $R' \leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} |A_s|^{-1/s}$. Comme le rayon de convergence R est la borne supérieure de l'ensemble des tels R' , on a $R \leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} |A_s|^{-1/s}$.

• si $R' > \liminf_{s \rightarrow +\infty} |A_s|^{-1/s}$, alors la contraposée du premier point nous donne qu'il existe x de valeur absolue R' tel que $f(x)$ ne converge pas pour $|x| = R'$, d'où $R' \geq R$. Ainsi, $R = \liminf_{s \rightarrow +\infty} |A_s|^{-1/s}$. \square

Proposition 21

Soit $R \in G_\Omega$. Si $f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s z^s \in \Omega[[z]]$ est convergente pour $|x| = R$, on pose $|f|_0(R) = \sup_{|x|=R} |f(x)|$. Alors l'ensemble des séries formelles convergeant pour $|x| = R$ forme un anneau intègre sur lequel $|\cdot|_0(R)$ est une valeur absolue.

Démonstration. Admis, voir [14, p. 116]. \square

Définition 20

On définit \mathcal{A}_0 l'anneau des fonctions analytiques sur $D(0, 1)$, c'est-à-dire le sous-anneau de $\Omega[[z]]$ constitué des séries convergeant pour $|x| < 1$. On note $\mathcal{A}'_0 = \text{Frac}(\mathcal{A}_0)$.

Proposition 22

Pour $f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s z^s \in \mathcal{A}_0$, on définit $\|f\|_0 = \limsup_{R \rightarrow 1^-} |f|_0(R)$. Alors $\|f\|_0 = \sup_{s \in \mathbb{N}} |A_s|$.

Démonstration. Selon la proposition 20, pour tout $R < 1$, $|f|_0(R) = \sup_{s \in \mathbb{N}} |A_s|R^s \leq \sup_{s \in \mathbb{N}} |A_s|$, donc $\|f\|_0 \leq \sup_{s \in \mathbb{N}} |A_s|$ par passage à la limite supérieure.

D'autre part, pour tout $s \in \mathbb{N}$ et $R < 1$, $|A_s R^s| \leq |f|_0(R)$, donc $|A_s| = \limsup_{R \rightarrow 1^-} |A_s| R^s \leq \|f\|_0$, d'où le résultat. \square

Le résultat suivant est une conséquence de la proposition 21.

Proposition 23

La fonction $\|\cdot\|_0$ définit une valeur absolue non archimédienne sur l'anneau des fonctions analytiques bornées $\mathcal{B}_0 := \{f \in \mathcal{A}_0 : \|f\|_0 < +\infty\}$ pouvant être étendue à $\mathcal{B}'_0 = \text{Frac}(\mathcal{B}_0)$.

Remarque. Pour $f, g \in \mathcal{A}'_0$, on a $\|fg\|_0 \leq \sup(\|f\|_0, \|g\|_0)$, dès que l'une des quantités intervenant dans le terme de droite est finie.

Proposition 24

Si $h(z) \in \Omega(z)$, alors $h \in \mathcal{B}'_0$ et $\|h\|_0 = |h|_{\text{Gauss}}$.

Démonstration. En effet, si $h = \frac{f}{g}$, $f, g \in \Omega[z]$, alors $\|h\|_0 = \frac{\|f\|_0}{\|g\|_0} = \frac{|f|_0(1)}{|g|_0(1)}$ car $f(x)$ et $g(x)$ convergent pour $|x| = 1$, donc selon la proposition 22, $\|h\|_0 = \frac{|f|_{\text{Gauss}}}{|g|_{\text{Gauss}}} = |h|_{\text{Gauss}}$. \square

On munit dans toute la suite de cette sous-section $\Omega((z))$ de la dérivation $D = \frac{d}{dz}$, avec $D|_{\Omega} = 0$.

Proposition 25

Soit $\xi \in \mathcal{A}'_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left\| \frac{D^n \xi}{s! \xi} \right\|_0 \leq 1$.

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{A}_0$ tel que $g\xi \in \mathcal{A}_0$. Alors selon la formule de Leibniz,

$$\frac{D^n \xi}{s! \xi} = \frac{D^n(g\xi)}{n! g\xi} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{D^{n-i} g}{(n-i)! g} \frac{D^i \xi}{i! \xi}.$$

Ainsi, si l'on montre le résultat pour $\xi \in \mathcal{A}_0$, selon la remarque suivant la proposition 23, un raisonnement par récurrence sur n prouvera le résultat pour $\xi \in \mathcal{A}'_0$.

Soit donc $\xi = \sum_{s=0}^{\infty} A_s z^s \in \mathcal{A}_0$ et $R < 1$. Alors $\frac{D^n \xi}{n!} = \sum_{s=n}^{\infty} \binom{s}{n} A_s z^{s-n}$, de sorte que, par la proposition 20,

$$\left| \frac{D^n \xi}{n!} \right|_0(R) \leq \sup_{s \in \mathbb{N}} (|A_s| R^{s-n}) = \frac{1}{R^n} |\xi|_0(R).$$

En passant à la limite supérieure, on obtient $\left\| \frac{D^n \xi}{n! \xi} \right\|_0 \leq 1$. \square

Remarque. En particulier, la conjugaison des deux dernières propositions donne pour $h \in \Omega(z)$ et $s \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{D^s h}{s!} \right|_{\text{Gauss}} \leq |h|_{\text{Gauss}}$.

3.3.2 Théorème de Dwork-Robba

Définition-proposition 1

Si $s, m \in \mathbb{N}$, on définit

$$\{s, m\}_p = \sup_{1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_m \leq s} \frac{1}{|\lambda_1 \dots \lambda_m|_p},$$

avec la convention que $\{s, 0\}_p = 1$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

Soient $s \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et p premier. Alors si $p \leq s$, $\{s, m\}_p \leq s^m$ et si $p > s$, $\{s, m\}_p = 1$.

Démonstration. Le cas $m = 0$ est évident puisque $\{s, 0\}_p = 1$ par convention. On prend donc $m \geq 1$. Supposons $p \leq m$. Soit $1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_m \leq s$, on a $|\lambda_1 \dots \lambda_m|_p \geq \left(\frac{1}{s}\right)^m$, puisque

$$p^{\sum_{i=1}^m v_p(\lambda_i)} \leq \prod_{i=1}^m p^{v_p(\lambda_i)} \leq \prod_{i=1}^m \lambda_i \leq s^m.$$

Le deuxième cas est clair. □

Le théorème suivant est le résultat principal de cette sous-section.

Théorème 17 (Dwork-Robba)

Soient $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{A}'_0$ de matrice wronskienne $W(u_1, \dots, u_n)$ inversible. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on définit $(G_{s,0}, \dots, G_{s,n-1}) \in \mathcal{A}'^n_0$ tel que

$$\frac{D^s}{s!}(u_1, \dots, u_n) = (G_{s,0}, \dots, G_{s,n-1})W(u_1, \dots, u_n).$$

Alors

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq j \leq n-1, \quad \|G_{s,j}\|_0 \leq \{s, n-1\}_p.$$

Remarque. Le vecteur ligne $(G_{s,0}, \dots, G_{s,n-1})$ existe bien pour tout $s \in \mathbb{N}$ car les lignes $L_i = (D^i u_1, \dots, D^i u_n)$ pour $0 \leq i \leq n$ forment une famille libre, de sorte que $(D^n u_1, \dots, D^n u_n) \in \text{Vect}_{\mathcal{A}'_0}(L_1, \dots, L_{n-1})$ ce qui fournit $(G_{n,0}, \dots, G_{n,n-1})$. Une récurrence immédiate conclut à l'existence des $G_{s,i}$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

Démonstration du théorème 17. Procédons par récurrence sur n . L'initialisation pour $n = 0$ est une reformulation de la proposition 25.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai pour n . On écrit $(u_1, \dots, u_{n+1}) = u(1, \tau_1, \dots, \tau_n)$ ($u_1 \neq 0$ car $w(u_1, \dots, u_{n+1}) \neq 0$), de sorte que si $s \in \mathbb{N}$,

$$\frac{D^s}{s!}(u_1 \dots u_{n+1}) = \sum_{i=0}^s \frac{u^{(i)}}{i!} \frac{D^j}{j!}(1, \tau_1, \dots, \tau_n). \quad (27)$$

Fixons $s \in \mathbb{N}^*$ et introduisons $U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u_1^{(s)}}{s!} & \dots & \frac{u_{n+1}^{(s)}}{s!} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{s+1, n+1}(\mathcal{A}'_0)$. Alors selon (27),

$$U = uP \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & \dots & \tau_n \\ 0 & \tau'_1 & \dots & \tau'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{\tau_1^{(s)}}{s!} & \dots & \frac{\tau_n^{(s)}}{s!} \end{pmatrix}, \text{ où } P = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} u & & & \\ u' & u & (0) & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{u^{(s)}}{s!} & \frac{u^{(s-1)}}{(s-1)!} & \dots & u \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{s+1}(\mathcal{A}'_0).$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{pmatrix} \tau'_1 & \cdots & \tau'_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(\tau'_1)^{(s-1)}}{(s-1)!} & \cdots & \frac{(\tau'_n)^{(s-1)}}{(s-1)!} \end{pmatrix} = HW(\tau'_1, \dots, \tau'_n),$$

où $H \in \mathcal{M}_{s,n}(\mathcal{A}'_0)$ a tous ses coefficients sur la ligne $i+1$ bornées en norme $\|\cdot\|_0$ par $\{i, n-1\}_p$.

Définissons la matrice diagonale $\Delta = \text{Diag}\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{s}\right)$. Alors

$$U = uP \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & \Delta HW(\tau'_1, \dots, \tau'_n) \end{pmatrix}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n). \quad (28)$$

Or, $U = GW$, où $G \in \mathcal{M}_{s+1,n+1}(\mathcal{A}'_0)$ de $(i+1)$ -ème ligne $(G_{i,0} \dots G_{i,n})$, et $W = W(u_1, \dots, u_{n+1})$ est une matrice wronskienne. Par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} W &= \begin{pmatrix} u & u\tau_1 & \cdots & u\tau_n \\ u' & (u\tau_1)' & \cdots & (u\tau_n)' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^{(n)} & (u\tau_1)^{(n)} & \cdots & (u\tau_n)^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} u & 0 & & & \\ u' & u & & & \\ u'' & \binom{2}{1}u' & & u & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ u^{(n)} & \binom{n}{n-1}u^{(n-1)} & \binom{n}{n-2}u^{(n-2)} & \cdots & u \end{pmatrix}}_{uP_n} \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & \cdots & \tau_n \\ 0 & \tau'_1 & \cdots & \tau'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (\tau_1)^{(n)} & \cdots & (\tau_n)^{(n)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$W = uP_n \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & W(\tau'_1, \dots, \tau'_n) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

En comparant (28) et (29) et en se souvenant que $U = GW$, on a

$$GP_n \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & W(\tau'_1, \dots, \tau'_n) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & \Delta HW(\tau'_1, \dots, \tau'_n) \end{pmatrix}.$$

Comme $(\tau'_1, \dots, \tau'_n)$ est libre (le wronskien de cette famille est non nul selon (29)), on en déduit que

$$GP_n = P \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & \Delta HW(\tau'_1, \dots, \tau'_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & W(\tau'_1, \dots, \tau'_n) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\tau W(\tau'_1, \dots, \tau'_n)^{-1} \\ 0 & W(\tau'_1, \dots, \tau'_n)^{-1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta H \end{pmatrix}.$$

Donc $G = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta H \end{pmatrix} P_n^{-1}$. Or, de la proposition 25 découle que $\|P\|_0 \leq 1$ et $\|P_n\|_0 \leq 1$, donc comme $\det P_n = 1$, on a $\|P_n^{-1}\|_0 = \|(\text{com}(P_n))^T\|_0 \leq 1$.

Soit $h \leq s$, on sait que la h -ième ligne de H est bornée pour $\|\cdot\|_0$ par $\{h-1, n-1\}_p$, donc la h ème ligne de ΔH est bornée pour $\|\cdot\|_0$ par $\frac{1}{|h|_p} \{h-1, n-1\}_p \leq \{h, n\}_p$.

Donc la $(h+1)$ ème ligne de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta H \end{pmatrix}$ est bornée pour $\|\cdot\|_0$ par $\{h, n\}_p$. Comme $\|P_n^{-1}\|_0 \leq 1$, c'est aussi le cas de la $(h+1)$ ème ligne de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta H \end{pmatrix} P_n^{-1}$. Or, P est triangulaire inférieure, donc

$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta H \end{pmatrix} P_n^{-1}$ a pour coefficient d'ordre $(h+1, j)$ une somme de produits impliquant les coefficients de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta H \end{pmatrix} P_n^{-1}$ situés sur la colonne j de numéro de ligne inférieure ou égale à $h+1$ et les coefficients de P situés sur sa $h+1$ ^{ème} ligne. Comme $h \mapsto \{h, n\}_p$ est croissante, ce coefficient est borné par $\sup_{1 \leq i \leq h} \frac{1}{|i|_p} \{h-1, n-1\}_p \leq \{h, n\}_p$. On a ainsi obtenu

$$\forall h \in \mathbb{N}, \forall j \in \{0, \dots, n-1\}, \|G_{h+1, j}\|_0 \leq \{h, n\}_p,$$

ce qu'on voulait démontrer. \square

On peut obtenir également une estimation du type de celle du théorème de Dwork-Robba dans le cadre de l'étude d'un système différentiel.

Proposition 26 (Dwork-Robba pour les systèmes)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A}'_0)$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i la matrice telle que si $y' = Ay$, alors $\frac{D^i}{i!} y = A_i y$.

Soient $s \in \mathbb{N}$ et $Y \in \text{GL}_n(\mathcal{A}'_0)$ tels que $\frac{D^s Y}{s!} = A_s Y$, $A_s \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A}'_0)$. Alors

$$\|A_s\|_0 := \sup_{1 \leq i, j \leq n} \|(A_s)_{i, j}\|_0 \leq \{s, n-1\}_p \sup_{0 \leq i \leq n-1} (\|i! A_i\|_0).$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour la première ligne $u = (u_1, \dots, u_n) \in \Omega((z))^n$ de A_s .

Notons $q = \dim \text{Vect}_\Omega(u_1, \dots, u_n)$ et prenons une base z_1, \dots, z_q de ce Ω -espace vectoriel. En notant $z = (z_1, \dots, z_q)$, alors il existe $E \in \text{GL}_n(\Omega)$ tel que $uE = (z \ 0_{n-q})$. Considérons la matrice wronskienne de z

$$Z = \begin{pmatrix} z \\ \vdots \\ D^{q-1} z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q-1}(\mathcal{A}'_0) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ D^{q-1} u \end{pmatrix} Y^{-1}.$$

Prenons $G_s = (G_{s,0}, \dots, G_{s,q-1})$ tel que $\frac{D^s z}{s!} = G_s Z$. Alors, comme $D|_\Omega = 0$,

$$\left(\frac{D^s u}{s!} \right) E = \frac{D^s (uE)}{s!} = \frac{D^s}{s!} (z \ 0) = G_s (Z \ 0_{n-q}).$$

D'autre part,

$$T Y E = \begin{pmatrix} uE \\ \vdots \\ (D^{q-1} u)E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uE \\ \vdots \\ D^{q-1} (uE) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \ 0 \\ \vdots \\ D^{q-1} z \ 0 \end{pmatrix} = (Z \ 0).$$

Donc $\left(\frac{D^s u}{s!} \right) E = G_s T Y E$, donc, comme E est inversible, $\frac{D^s u}{s!} = G_s T Y$.

Notons pour tout $i \in \mathbb{N}$, L_i la première ligne de A_i . Comme $A_s = \left(\frac{D^s Y}{s!} \right) Y^{-1}$, on a

$$L_s = \frac{D^s u}{s!} Y^{-1} = G_s T, \quad \text{d'où} \quad \|L_s\|_0 \leq \|G_s\|_0 \|T\|_0.$$

D'autre part, si $0 \leq i \leq n-1$, la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne de T est $(D^i u)Y^{-1} = (i!)L_i$, donc

$$\|T\|_0 \leq \sup_{0 \leq i \leq n-1} (\|i!A_i\|_0).$$

Le théorème 17 donne finalement

$$\|L_s\|_0 \leq \|G_s\|_0 \|T\|_0 \leq \{s, q-1\}_p \|T\|_0 \leq \{s, n-1\}_p \|T\|_0 \leq \{s, n-1\}_p \sup_{0 \leq i \leq n-1} \|i!A_i\|_0.$$

□

On cherche à obtenir une version plus générale du théorème précédent appliquée à des matrices A définies par une série entière de rayon de convergence quelconque autour d'un point a de Ω .

On définit pour $a \in \Omega$ et $\rho > 0$, $\mathcal{A}_{a,\rho}$ l'anneau des séries formelles $\sum_{s=0}^{\infty} A_s(z-a)^s$ de rayon de convergence autour de a supérieur ou égal à ρ . On peut le munir d'une norme $\|\cdot\|_{a,\rho}$ de manière à ce que, si $\alpha \in \Omega$ est tel que $|\alpha| = \rho$, l'isomorphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \phi_{a,\rho}: \mathcal{A}_{a,\rho} &\longrightarrow \mathcal{A}_0 \\ f(z) &\longmapsto f(\alpha(z+a)) \end{aligned}$$

soit une isométrie. On définit de même que précédemment $\mathcal{A}'_{a,\rho}$, $\mathcal{B}_{a,\rho}$, $\mathcal{B}'_{a,\rho}$. On remarque que $D(f(\alpha(z+a))) = \alpha f(\rho(z+a))$. L'utilisation de l'isométrie $\phi_{a,\rho}$ permet d'obtenir la version généralisée du théorème 26 suivante :

Théorème 18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A}'_{a,\rho})$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i la matrice telle que si $y' = Ay$, alors $\frac{D^i}{i!} y = A_i y$.
 Soit $s \in \mathbb{N}$, $Y \in \text{GL}_n(\mathcal{A}'_{a,\rho})$ tel que $\frac{D^s Y}{s!} = A_s Y$, $A_s \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A}'_{a,\rho})$. Alors

$$\|A_s\|_{a,\rho} \leq \rho^{-s} \{s, n-1\}_p \sup_{0 \leq i \leq n-1} \left(\rho^i \|i!A_i\|_{a,\rho} \right).$$

Démonstration. Posons $\tilde{Y} = Y(\alpha(z+a)) = \phi_{a,\rho}(Y) \in \text{GL}_n(\mathcal{A}'_0)$ via l'isomorphisme d'anneaux $\phi_{a,\rho}$. On a pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\frac{D^i \tilde{Y}}{i!} = \alpha^i \left(\frac{D^i Y}{i!} \right) (\alpha(z+a)) = \alpha^i A_i (\alpha(z+a)) \tilde{Y} = \tilde{A}_i \tilde{Y},$$

avec $\tilde{A}_i = \alpha^i A_i (\alpha(z+a))$, donc selon la proposition 26,

$$\|\alpha^s A_s (\alpha(z+a))\|_0 \leq \{s, n-1\}_p \sup_{0 \leq i \leq n-1} \|i! \tilde{A}_i\|_0 = \{s, n-1\}_p \sup_{0 \leq i \leq n-1} \|\rho^i i! A_i (\alpha(z+a))\|_0$$

ce qui donne le résultat voulu car $|\alpha| = \rho$. □

Dans la partie suivante, on va appliquer ces résultats aux G -opérateurs dans le théorème d'André-Bombieri.

3.4 Le théorème d'André-Bombieri

Le but de cette partie est de démontrer le théorème d'André-Bombieri (théorème 19) qui établit que la condition de Galochkin pour un système différentiel $y' = Gy$ implique la nilpotence globale de ce système. Pour cela, nous allons introduire une condition sur les rayons de convergence génériques p -adiques de $y' = Gy$, la *condition de Bombieri*, qui implique la nilpotence globale de $y' = Gy$. De plus, nous allons reformuler la condition de Galochkin à l'aide d'une quantité p -adique, la *taille* de G .

3.4.1 Rayon de convergence global

On considère un corps de nombres \mathbb{K} de degré δ .

Définition 21

On note, pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$, $R_{\mathfrak{p}}$ le rayon de convergence de la matrice solution générique $\mathcal{U}_{G, t_{\mathfrak{p}}}$ issue de la construction de la sous-section 3.2 associée au système $y' = Gy$ et à la valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ sur \mathbb{K} .

Le rayon de convergence générique inverse global de G est

$$\rho(G) := \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \log^+ \left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} \right).$$

On dit que G satisfait la condition de Bombieri si $\rho(G) < \infty$.

Proposition 27

Si la matrice G satisfait la condition de Bombieri, alors $y' = Gy$ est un système différentiel globalement nilpotent.

Démonstration. Soit \mathcal{S} l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ au-dessus de p tel que $R_{\mathfrak{p}} \leq |p|_{\mathfrak{p}}^{\frac{1}{p-1}}$. Selon le théorème 16, \mathcal{S} est l'ensemble des p tels que $y' = (G \bmod \mathfrak{p})y$ est non nilpotent pour au moins un premier \mathfrak{p} au-dessus de p . Fixons pour chaque $p \in \mathcal{S}$ un tel premier $\mathfrak{p}(p)$. Alors

$$\rho(G) \geq \sum_{p \in \mathcal{S}} \log^+ \left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}(p)}} \right) \geq \sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{1}{\delta} \frac{\log p}{p-1}.$$

En effet, $|p|_{\mathfrak{p}} = p^{-f_{\mathfrak{p}}/\delta}$, avec la normalisation choisie.

Par suite, si $\rho(G) < \infty$, on a

$$\sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{1}{p} \leq \sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{\log p}{p-1} < \infty.$$

Ainsi (cf définition 26 en annexe), \mathcal{S} a une densité de Dirichlet nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{-1}{\log(s-1)} \sum_{p \in \mathcal{S}} p^{-s} \rightarrow 0$$

quand s tend vers 1, $s > 1$. Or, si $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ est tel que $y' = (G \bmod \mathfrak{p})y$ est non nilpotent, alors $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \in \mathcal{S}$, donc l'ensemble \mathcal{S}' des premiers vérifiant cette propriété est de densité de Dirichlet nulle. En effet, si $s > 1$,

$$\sum_{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}'} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} = \sum_{p \in \text{Spec}(\mathbb{Z})} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}' \\ \mathfrak{p} | p}} \frac{1}{p^{f_{\mathfrak{p}} s}} \leq \sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{\text{Card}\{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}' : \mathfrak{p} | p\}}{p^s} \leq \delta \sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{1}{p^s}$$

car le nombre de premiers \mathfrak{p} au-dessus de p est borné par δ selon la formule $\sum_{\mathfrak{p}|p} d_{\mathfrak{p}} = \delta$. Donc en divisant par $-\log(s-1)$ de part et d'autre de l'inégalité et en passant à la limite, on obtient que \mathcal{S}' a une densité de Dirichlet nulle. Selon la définition 18, le système $y' = Gy$ est donc globalement nilpotent. \square

3.4.2 Taille d'un système différentiel

On considère un corps de nombres \mathbb{K} de degré δ . Pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$, on définit la valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ de manière à ce que si p est le premier de \mathbb{Z} au-dessous de \mathfrak{p} , $|p|_{\mathfrak{p}} = p^{-\frac{d_{\mathfrak{p}}}{\delta}}$, où $d_{\mathfrak{p}} = e_{\mathfrak{p}}f_{\mathfrak{p}}$, avec $e_{\mathfrak{p}}$ (resp. $f_{\mathfrak{p}}$) le degré d'inertie (resp. de ramification) de \mathfrak{p} au-dessus de p .

En remarquant que $v_{\mathfrak{p}}(p) = e_{\mathfrak{p}}$, on a donc par définition

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad |x|_{\mathfrak{p}} = (N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}))^{-\delta v_{\mathfrak{p}}(x)} = p^{-\frac{f_{\mathfrak{p}}}{\delta} v_{\mathfrak{p}}(x)}.$$

Les résultats de la sous-section 3.3 n'utilisant par cette normalisation, on les appliquera en tenant compte de cette adaptation technique rendue nécessaire par la démonstration du lemme 12 ci-dessous.

Définition 22

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $(\alpha_i) = \frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{b}_i}$, où \mathfrak{a}_i et \mathfrak{b}_i sont des idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ premiers entre eux, on définit $\text{den}'(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})$, où \mathfrak{b} est le plus petit multiple commun au sens des anneaux de Dedekind des idéaux $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_n$.

Remarque. Ce dénominateur n'est pas nécessairement le plus petit dénominateur commun des α_i au sens de la définition 11, comme le montre l'exemple de $\alpha = \frac{1+i}{2}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$ qui vérifie $\text{den}(\alpha) = 2$ et $\text{den}'(\alpha) = 4$, puisque $(1+i)$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}[i] = \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Cependant on peut obtenir un encadrement

$$\text{den}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq \text{den}'(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\text{den}(\alpha_1, \dots, \alpha_n))^{\delta}.$$

En effet, notons $N = \text{den}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $M = \text{den}'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Alors :

- On sait par les propriétés de la norme que $M \in \mathfrak{b}$ (c'est clair si \mathfrak{b} est un idéal premier, sinon on utilise la multiplicativité de la norme et la décomposition en idéaux premiers dans l'anneau de Dedekind $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$), donc $(M) = \mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ pour un certain idéal \mathfrak{b}' , de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(M\alpha_i) = \mathfrak{b}\mathfrak{b}' \frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{b}_i} = \mathfrak{b}'\mathfrak{a}_i \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}_i}$, donc, par définition de \mathfrak{b} , $M\alpha_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Donc $N \leq M$.
- D'autre part, pour tout $1 \leq i \leq n$, $(N) \frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{b}_i} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, donc $N\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{b}_i$ pour tout i , donc, comme \mathfrak{a}_i et \mathfrak{b}_i sont premiers entre eux, $(N) \subset \mathfrak{b}_i$, de sorte que $(N) \subset \mathfrak{b}$, le plus petit commun multiple des \mathfrak{b}_i . Donc $M = N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) = |\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{b}| \leq |\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/N\mathcal{O}_{\mathbb{K}}| = N^{\delta}$.

Définition 23

On définit les fonctions

$$\begin{aligned} \log^+ :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}_+ & \text{et} & \log^- :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}_- \\ x &\longmapsto \log(\sup(1, x)) & & x &\longmapsto \log(\inf(1, x)). \end{aligned}$$

On remarque immédiatement que

$$\forall x, y > 0, \log^+(xy) \leq \log^+(x) + \log^+(y) \quad \text{et} \quad \log^+(x^y) \leq y \log^+(x).$$

Lemme 12

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, alors

$$\sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{1 \leq i \leq n} \log^+ |\alpha_i|_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{\delta} \log(\text{den}'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)).$$

Démonstration. En reprenant les notations de la définition 22, on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathfrak{b}_i = \prod_{v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i) < 0} \mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i)}, \text{ de sorte que } \mathfrak{b} = \prod_{\exists i: v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i) < 0} \mathfrak{p}^{-\min_i v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i)}.$$

Donc

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) = \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbb{Z})} \prod_{\substack{\mathfrak{p} | p \\ \exists i: v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i) < 0}} p^{-f_{\mathfrak{p}}(\min_i v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i))}$$

(le produit a bien un nombre de termes fini). D'où

$$\frac{1}{\delta} \log(\text{den}'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathbb{Z})} \sum_{\substack{\mathfrak{p} | p \\ \exists i: v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i) < 0}} \frac{-f_{\mathfrak{p}}}{\delta} (\min_i v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i)) \log p.$$

Or, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|\alpha_i|_{\mathfrak{p}} = p^{-\frac{\delta}{f_{\mathfrak{p}}} v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i)}$, de sorte que

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \log^+ |\alpha_i|_{\mathfrak{p}} = \frac{-f_{\mathfrak{p}}}{\delta} \log p \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i) < 0}} v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i).$$

En remarquant que cette dernière quantité est nulle si $\forall i, v_{\mathfrak{p}}(\alpha_i) \geq 0$, on obtient le résultat voulu en sommant sur $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$. \square

Définition 24

La taille de G est

$$\sigma(G) = \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} h(s, \mathfrak{p}),$$

où

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad h(s, \mathfrak{p}) = \sup_{m \leq s} \log^+ \left| \frac{G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}.$$

La taille de G est une quantité qui « encode » la condition de Galochkin (définition 13), dans un sens précisé par la proposition suivante :

Proposition 28

Soit $T(z) \in \mathbb{K}[z]$ tel que $T(z)G(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[z])$, et soit, pour $s \in \mathbb{N}$, q_s (resp. q'_s), le dénominateur (resp. le den') des coefficients des coefficients des matrices $TG, T^2 \frac{G_2}{2}, \dots, T^s \frac{G_s}{s!}$.

Alors

a) On a, pour tout entier s , $\frac{\log q_s}{s} \leq \frac{\log q'_s}{s} \leq \delta \frac{\log q_s}{s}$.

b) Notons

$$h^-(T) = \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \log^- |T|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \quad \text{et} \quad h^+(T) = \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \log^+ |T|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}.$$

$$\text{Alors } \delta \sigma(G) + h^-(T) \leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{\log q'_s}{s} \leq \delta \sigma(G) + h^+(T).$$

Démonstration. Le point **a)** est une conséquence directe de la remarque suivant la proposition 22.

b) Selon le lemme 12, on a

$$\log q'_s = \delta \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{m \leq s} \log^+ \left| \frac{T^m G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}.$$

De plus, si $s \in \mathbb{N}^*$ et $m \leq s$, alors

$$\log^+ \left| T^m \frac{G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} = \log^+ \left(|T|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}^m \left| \frac{G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \right) \leq s \log^+ |T|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} + \log^+ \left| \frac{G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}.$$

Donc

$$\sup_{m \leq s} \log^+ \left| T^m \frac{G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq s \log^+ |T|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} + h(s, \mathfrak{p}),$$

si bien que

$$\sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{m \leq s} \log^+ \left| \frac{T^m G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq s \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \log^+ |T|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} + h(s, \mathfrak{p})$$

Symétriquement, en remarquant que

$$\frac{G_m}{m!} = \left(\frac{1}{T} \right)^m \frac{T^m G_m}{m!} \text{ et } \log^+ \left| \frac{1}{T} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} = -\log^- |T|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}},$$

on a

$$h(s, \mathfrak{p}) \leq -s \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \log^- |T|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} + \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{m \leq s} \log^+ \left| \frac{T^m G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}.$$

En divisant par s et en passant à la limite supérieure, on obtient le résultat voulu. \square

Corollaire 2

Le système $y' = Gy$ satisfait la condition de Galochkin de la définition 13 si et seulement si $\sigma(G) < +\infty$.

Démonstration. Selon le point **a)** de la proposition 28, on a

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{\log q'_s}{s} < \infty \Leftrightarrow \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{\log q_s}{s} < \infty.$$

De plus, selon le point **b)**, on a $\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{\log q'_s}{s} < +\infty \Leftrightarrow \sigma(G) < +\infty$. Par suite

$$\sigma(G) < \infty \iff \exists C > 0 : \forall s \in \mathbb{N}, q_s \leq C^{s+1},$$

ce qui n'est autre que la condition de Galochkin. \square

3.4.3 Théorème d'André-Bombieri

Le théorème suivant donne le lien entre le rayon de convergence global et la taille, et donc entre la condition de Bombieri et la condition de Galochkin.

Théorème 19 (André-Bombieri)

Si \mathbb{K} est un corps de nombres et $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(z))$, alors

$$\rho(G) \leq \sigma(G) \leq \rho(G) + n - 1.$$

En particulier, si la condition de Galochkin est vérifiée, alors $y' = Gy$ est un système globalement nilpotent.

Démonstration. La preuve consiste pour l'essentiel à montrer en deux étapes que si \mathfrak{p} est un premier de \mathbb{K} , alors $\log^+ \left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} \right) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} h(s, \mathfrak{p})$, chacune des deux étapes fournissant une inégalité du théorème.

• **Étape 1** : soit $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$, montrons que

$$\log^+ \left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} \right) = \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} h(s, \mathfrak{p}).$$

Selon le corollaire 1, on a

$$R_{\mathfrak{p}} = \liminf_{s \rightarrow +\infty} \left| \frac{G_s}{s!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}^{-1/s}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \log^+ \left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} \right) &= \log^+ \left(\limsup_{s \rightarrow +\infty} \left| \frac{G_s}{s!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}^{1/s} \right) \stackrel{\log^+ \text{ croissante}}{\leq} \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \log^+ \left(\left| \frac{G_s}{s!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \right) \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} h(s, \mathfrak{p}). \end{aligned} \quad (30)$$

Par ailleurs, selon le corollaire 18, en tenant compte de la normalisation de $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ choisie en début de sous-section,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq \frac{1}{R_{\mathfrak{p}}^m} \{m, n-1\}_{\mathfrak{p}} \sup_{j \leq n-1} |G_j|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}},$$

où

$$\{m, n-1\}_{\mathfrak{p}} = \sup_{1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} \leq m} \frac{1}{|\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}|_{\mathfrak{p}}} = \{m, n-1\}_p^{d_{\mathfrak{p}}/\delta}.$$

Donc

$$\log^+ \left| \frac{G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq m \log^+ \left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} \right) + \frac{d_{\mathfrak{p}}}{\delta} \log^+ \{m, n-1\}_p + C_{\mathfrak{p}},$$

où $C_{\mathfrak{p}} = \log^+ \sup_{j \leq n-1} |G_j|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}}$ est indépendant de m . Selon la définition-proposition 1, si $p \leq m$,

on a $\{m, n-1\}_p \leq m^{n-1}$ et si $p > m$, on a $\{m, n-1\}_p = 1$. De plus, comme $\sum_{\mathfrak{p}|p} d_{\mathfrak{p}} = \delta$, on a $\frac{d_{\mathfrak{p}}}{\delta} \leq 1$.

Par suite, dans tous les cas, si $m \leq s$,

$$\log^+ \left| \frac{G_m}{m!} \right|_{\mathfrak{p}, \text{Gauss}} \leq s \log^+ \left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} \right) + (n-1) \log s + C_{\mathfrak{p}},$$

d'où, si $p \leq s$,

$$\frac{1}{s} h(s, \mathfrak{p}) \leq \log^+ \left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} \right) + (n-1) \frac{\log s}{s} + \frac{C_{\mathfrak{p}}}{s} \quad (31)$$

et si $p > s$, on a $\frac{1}{s}h(s, p) \leq \log^+ \left(\frac{1}{R_p} \right) + \frac{C_p}{s}$. Ainsi,

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s}h(s, p) \leq \log^+ \left(\frac{1}{R_p} \right).$$

Ce résultat conjugué à (30) donne

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s}h(s, p) = \log^+ \left(\frac{1}{R_p} \right).$$

On a $\forall j \in \{0, \dots, n-1\}, |G_j|_{p, \text{Gauss}} \leq 1$ pour tous les premiers p sauf un nombre fini, de sorte que la constante C_p est nulle sauf pour p dans cet ensemble fini de premiers. Ainsi, en utilisant (31), on peut trouver une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \text{Spec}(\mathcal{O}_K)} \frac{1}{s}h(s, p) &\leq \sum_{p \in \text{Spec}(\mathcal{O}_K)} \log^+ \left(\frac{1}{R_p} \right) + \sum_{p \leq s} \sum_{p|p} \frac{d_p}{\delta} (n-1) \frac{\log s}{s} + \frac{C}{s} \\ &\leq \sum_{p \in \text{Spec}(\mathcal{O}_K)} \log^+ \left(\frac{1}{R_p} \right) + (n-1) \pi(s) \frac{\log s}{s} + \frac{C}{s}, \end{aligned}$$

puisque pour tout premier p , $\sum_{p|p} d_p = \delta$. Ici, π est la fonction de comptage des nombres premiers. L'équivalent, fourni par le théorème des nombres premiers, $\pi(s) \sim \frac{s}{\log s}$ donne par passage à la limite de part et d'autre,

$$\sigma(G) \leq \rho(G) + n - 1.$$

• **Étape 2** : soit $p \in \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$, montrons que

$$\log^+ \left(\frac{1}{R_p} \right) = \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s}h(s, p).$$

Soit y vecteur colonne tel que $Dy = Gy$. Soient $s, m \in \mathbb{N}$, on a $D^s y = G_s y$ et

$$\begin{aligned} \frac{G_{s+m}}{(s+m)!} y &= \frac{D^m}{(s+m)!} D^s y = \frac{D^m}{(s+m)!} (G_s y) \stackrel{\text{Leibniz}}{=} \frac{1}{(s+m)!} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (D^i G_s) D^{m-i} y \\ &= \frac{1}{(s+m)!} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (D^i G_s) G_{m-i} y. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{G_{s+m}}{(s+m)!} = \sum_{i=0}^m \frac{s!m!}{(s+m)!} \left(\frac{D^i G_s}{i!s!} \right) \frac{G_{m-i}}{(m-i)!}.$$

Or, pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$, selon la proposition 25, $\left| \frac{D^i}{i!} \left(\frac{G_s}{s!} \right) \right|_{p, \text{Gauss}} \leq \left| \frac{G_s}{s!} \right|_{p, \text{Gauss}}$.

Donc

$$\left| \frac{G_{s+m}}{(s+m)!} \right|_{p, \text{Gauss}} \leq \left| \frac{G_s}{s!} \right|_{p, \text{Gauss}} \left| \frac{s!m!}{(s+m)!} \right|_{p, \text{Gauss}} \sup_{j \leq m} \left| \frac{G_j}{j!} \right|_{p, \text{Gauss}},$$

de sorte que

$$\log^+ \left| \frac{G_{s+m}}{(s+m)!} \right|_{p, \text{Gauss}} \leq \log^+ \left| \frac{G_s}{s!} \right|_{p, \text{Gauss}} + h(m, p) - \frac{d_p}{\delta} \log \left| \binom{s+m}{s} \right|_p.$$

En effet, comme $|\cdot|_p$ est non archimédienne, $\left| \binom{s+m}{s}^{-1} \right|_p \geq 1$, donc

$$\log^+ \left| \binom{s+m}{s}^{-1} \right|_p = \log \left| \binom{s+m}{s}^{-1} \right|_p = -\log \left| \binom{s+m}{s} \right|_p.$$

On obtient donc par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \log^+ \left| \frac{G_{s+km}}{(s+km)!} \right|_{p, \text{Gauss}} &\leq \log^+ \left| \frac{G_s}{s!} \right|_{p, \text{Gauss}} + kh(m, p) - \frac{d_p}{\delta} \log \left| \binom{s+m}{s} \binom{s+2m}{s+m} \cdots \binom{s+km}{s+(k-1)m} \right|_p \\ &\leq \log^+ \left| \frac{G_s}{s!} \right|_{p, \text{Gauss}} + kh(m, p) - \frac{d_p}{\delta} \log \left| \frac{(s+km)!}{s!(m!)^k} \right|_p. \end{aligned}$$

Or, selon le lemme 10, on a pour tout $h \in \mathbb{N}$, $\frac{-\log|h|_p}{\log p} = \frac{h - S_h}{p-1}$, avec $h = a_0 + a_1p + \cdots + a_{\ell-1}p^{\ell-1}$ écrit en base p , $S_h = a_0 + \cdots + a_{\ell}$.

On remarque que comme $\forall i \in \{0, \dots, \ell-1\}, 0 \leq a_i \leq p-1$, on a $\frac{S_h}{p-1} \leq \ell$, et puisque $h \geq p^{\ell-1}$, $\ell \leq 1 + \frac{\log h}{\log p}$. Ici,

$$\begin{aligned} -\log \left| \frac{(s+km)!}{s!(m!)^k} \right|_p &= \left(\frac{(s+km) - S_{s+km}}{p-1} - \frac{s - S_s}{p-1} - k \frac{m - S_m}{p-1} \right) \log p \\ &= \log p (S_s + kS_m - S_{s+km}) \leq \log p \left(1 + \frac{\log s}{\log p} + k + k \frac{\log m}{\log p} \right) \\ &\leq (k+1) \log p + k \log m + \log s \leq (k+1)(\log p + \log m) \text{ si } s \leq m. \end{aligned}$$

Donc comme pour $s \leq m$, $\log^+ \left| \frac{G_s}{s!} \right|_{p, \text{Gauss}} \leq h(m, p)$, on a si $s \leq m$,

$$\log^+ \left| \frac{G_{s+km}}{(s+km)!} \right|_{p, \text{Gauss}} \leq (k+1) \left(h(m, p) + \frac{d_p}{\delta} (\log p + \log m) \right).$$

Soient $N \geq 1$ et $m \geq 1$, écrivons $N = qm + s$, $0 \leq s < m$ la division euclidienne de N par m . On a $q \leq \frac{N}{m}$, donc l'inégalité précédente devient

$$\log^+ \left| \frac{G_N}{N!} \right|_{p, \text{Gauss}} \leq (q+1) \left(h(m, p) + \frac{d_p}{\delta} (\log p + \log m) \right) \leq \frac{N+m}{m} \left(h(m, p) + \frac{d_p}{\delta} (\log p + \log m) \right),$$

inégalité qui est vérifiée *a fortiori* pour $N' < N$, d'où

$$\frac{1}{N} h(N, p) \leq \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{N} \right) \left(h(m, p) + \frac{d_p}{\delta} (\log p + \log m) \right).$$

Donc selon l'étape 1,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \log^+ \left(\frac{1}{R_p} \right) = \limsup_{N \rightarrow +\infty} h(N, p) \leq \frac{1}{m} \left(h(m, p) + \frac{d_p}{\delta} (\log p + \log m) \right). \quad (32)$$

Considérons une extraction $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\frac{1}{\phi(r)} h(\phi(r), p) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} h(s, p).$$

En prenant $m = \phi(r)$ dans (32) et en passant à la limite, on obtient

$$\log^+ \left(\frac{1}{R_p} \right) \leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} h(s, p),$$

d'où $\log^+ \left(\frac{1}{R_p} \right) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} h(s, p)$. L'inégalité $\rho(G) \leq \sigma(G)$ découle finalement du lemme de Fatou puisque

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \log^+ \left(\frac{1}{R_p} \right) &= \sum_{p \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} h(s, p) \\ &\leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} \sum_{p \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \frac{1}{s} h(s, p) \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \sum_{p \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \frac{1}{s} h(s, p) = \sigma(G). \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration. □

3.5 Démonstration du théorème 5

Pour finir, synthétisons les différents résultats obtenus en prouvant le théorème d'André-Chudnovsky-Katz (théorème 5) cité en introduction.

Soit $f \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ une G -fonction, $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$ un opérateur différentiel d'ordre minimal pour f tel que $L(f(z)) = 0$ et \mathbb{K} un corps de nombres tel que $L \in \mathbb{K}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$. Alors

- Selon la remarque suivant le théorème des Chudnovsky (théorème 14), la matrice compagnon associée A_L associée à L vérifie la condition de Galochkin.
- Donc, selon le théorème d'André-Bombieri (théorème 19), $y' = A_L y$ est un système différentiel globalement nilpotent.
- La dernière remarque de la partie 3.1.2 nous assure alors que $L \in \mathbb{K}(z) \left[\frac{d}{dz} \right]$ est un opérateur différentiel globalement nilpotent.
- Selon le théorème de Katz (théorème 12) et la remarque qui le suit, L est donc un opérateur singulier régulier en tout point de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ et ses exposants en tout point sont rationnels.
- Les points de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ sont des points ordinaires puisque, en écrivant L sous la forme

$$L = P_\mu(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^\mu + P_{\mu-1}(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^{\mu-1} + \cdots + P_0(z),$$

avec $P_i(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, ce qui est toujours possible quitte à multiplier L à gauche par un polynôme convenable, toute singularité de L est une racine de P_μ , donc un élément de $\overline{\mathbb{Q}}$.

Annexe : le théorème de Chebotarev

Intéressons-nous de plus près au théorème de Chebotarev dont une conséquence est utilisée de manière cruciale dans la démonstration du théorème de Katz (sous-section 1.3).

On peut définir trois notions de densité sur l'ensemble $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ des premiers d'un corps de nombres \mathbb{K} .

Définition 25

Soit $T \subset \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$. On définit

$$\zeta_{\mathbb{K},T}(s) := \prod_{\mathfrak{p} \in T} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{p})^{-s}},$$

où $N(\mathfrak{p})$ désigne $\text{Card}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$, la norme de \mathfrak{p} .

S'il existe n tel que $\zeta_{\mathbb{K},T}^n$ se prolonge en une fonction méromorphe au voisinage de 1 avec un pôle d'ordre m en 1 (en adoptant la convention qu'un zéro d'ordre m est un pôle d'ordre $-m$) alors T a une densité polaire $d(T) = \frac{m}{n}$.

On a quelques propriétés correspondant à ce que l'on est en droit d'attendre d'une densité, qui sont valables également pour les autres notions de densité.

- L'ensemble de tous les idéaux premiers de \mathbb{K} a une densité polaire de 1.
- Si T admet une densité polaire, $d(T) \geq 0$.
- Un ensemble fini a une densité nulle.
- Si T est l'union disjointe de T_1 et T_2 , et si deux d'entre eux ont une densité polaire, le troisième en a une et $d(T) = d(T_1) + d(T_2)$.
- Si T_1 et T_2 ont des densités polaires et $T_1 \subset T_2$, alors $d(T_1) \leq d(T_2)$.

La deuxième notion, qui est celle utilisée pour définir la notion d'opérateur globalement nilpotent dans la section 1, est la densité *de Dirichlet* ou *analytique* (cf [13, pp. 255-257])

Définition 26

Soit $T \subset \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$. On dit que T admet $d \geq 0$ pour densité de Dirichlet lorsque

$$\frac{-1}{\log(s-1)} \sum_{\mathfrak{p} \in T} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} \longrightarrow d$$

quand s tend vers 1 pour s réel, $s > 1$.

Définition 27

Soit $T \subset \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$. On dit que T admet $d \geq 0$ pour densité naturelle si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card} \{ \mathfrak{p} \in T : N(\mathfrak{p}) \leq n \}}{\text{Card} \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) : N(\mathfrak{p}) \leq n \}} = d.$$

Proposition 29

Si la densité polaire de T existe, alors sa densité de Dirichlet aussi et les deux quantités sont égales. Si la densité naturelle de T existe, alors sa densité polaire aussi et les deux quantités sont égales.

En revanche, la réciproque de cette proposition est fausse : Serre ([24, p. 126]) cite un exemple d'ensemble de premiers ayant une densité de Dirichlet mais pas de densité naturelle.

Une fois choisie une notion de densité parmi les trois ci-dessus, on peut donner un sens à l'expression « presque tout ».

Définition 28

On dit qu'une propriété est valable pour presque tout premier p d'un corps de nombres (relativement à la densité choisie) si elle vaut pour un ensemble de premiers de densité 1. Ceci est vrai en particulier, si elle vaut pour tous les premiers sauf un nombre fini.

Le théorème suivant, dont la preuve dépasse largement le cadre de ce mémoire, a été démontré par Chebotarev en 1922. Pour plus de détails, on peut se référer à [25, p. 131], et [20]. Une preuve de ce théorème pour la densité de Dirichlet peut être trouvée dans [21, pp. 179–197].

Théorème 20 (Chebotarev)

Soit \mathbb{L}/\mathbb{K} une extension de corps de nombres galoisienne. Soit $C \subset G = \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ une classe de conjugaison. Alors l'ensemble des idéaux premiers \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ qui sont non ramifiés et tels que $(\mathfrak{p}, \mathbb{L}/\mathbb{K}) = C$ a une densité naturelle de $\frac{|C|}{|G|}$, où $|X| := \text{Card}(X)$.

Selon la proposition 29, le théorème 20 est vrai en remplaçant « densité naturelle » par « densité polaire » ou « densité de Dirichlet ». Dans toute la suite, on fixe une notion de densité. Les résultats énoncés vaudront pour toutes les notions de densité.

Définissons les objets utilisés dans le théorème. Soit \mathfrak{p} premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Soit \mathfrak{q} premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ au-dessus de \mathfrak{p} et $D(\mathfrak{q}) = \{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) : \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}$ le groupe de décomposition de \mathfrak{q} .

Notons $k_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}$ et $l_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{\mathbb{L}}/\mathfrak{q}$ les corps résiduels respectifs de \mathfrak{p} et \mathfrak{q} . Notons f l'indice d'inertie de $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$, c'est-à-dire le degré de l'extension $l_{\mathfrak{q}}/k_{\mathfrak{p}}$. On a un morphisme surjectif

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{q}} : D(\mathfrak{q}) &\longrightarrow \text{Gal}(l_{\mathfrak{q}}/k_{\mathfrak{p}}) \\ \sigma &\longmapsto \bar{\sigma} : x \pmod{\mathfrak{q}} \mapsto \sigma(x) \pmod{\mathfrak{q}} \end{aligned}$$

En remarquant que $D(\mathfrak{q})$ est un stabilisateur de l'action transitive de $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ sur les premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ au-dessus de \mathfrak{p} , et en utilisant la formule $e(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})fr = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$, où r est le nombre de premiers au-dessus de \mathfrak{p} dans $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$, on voit que si \mathfrak{p} est non ramifié, $D(\mathfrak{q})$ a pour cardinal f . Donc $\varphi_{\mathfrak{q}}$ est en réalité un isomorphisme de groupes.

En tant que groupe de Galois d'une extension de corps finis, $\text{Gal}(l_{\mathfrak{q}}/k_{\mathfrak{p}})$ est engendré par le morphisme de Frobenius $\text{Frob}_{\mathfrak{p}} : x \mapsto x^{N(\mathfrak{p})}$. On note $(\mathfrak{p}, \mathbb{L}/\mathbb{K})_{\mathfrak{q}} = \varphi_{\mathfrak{q}}^{-1}(\text{Frob}_{\mathfrak{p}})$, générateur de $D(\mathfrak{q})$.

On vérifie que si \mathfrak{q}' est un autre premier au-dessus de \mathfrak{p} et $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ est tel que $\mathfrak{q}' = \sigma(\mathfrak{q})$, alors $(\mathfrak{p}, \mathbb{L}/\mathbb{K})_{\mathfrak{q}'} = \sigma(\mathfrak{p}, \mathbb{L}/\mathbb{K})_{\mathfrak{q}}\sigma^{-1}$.

Définition 29

Soit \mathfrak{p} un idéal premier non ramifié de \mathbb{K} dans l'extension galoisienne \mathbb{L}/\mathbb{K} . Le Frobenius de \mathfrak{p} est la classe de conjugaison dans $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$

$$(\mathfrak{p}, \mathbb{L}/\mathbb{K}) = \{(\mathfrak{p}, \mathbb{L}/\mathbb{K})_{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q} \cap \mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{p}\}.$$

En particulier, si \mathbb{L}/\mathbb{K} est une extension abélienne, le Frobenius de \mathfrak{p} est un élément de $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$.

Remarque. Si $f \in \mathbb{Z}[z]$ est **unitaire** et p ne divise pas le discriminant $\Delta(f)$ de f , alors $f \pmod{p}$ a même degré n que f et a autant de racines, simples, dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}$, que f dans \mathbb{K} .

En effet, supposons que f a n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans \mathbb{K} . Soit $x \in \mathbb{K}$ est tel que $f(x) = 0$. Alors, comme f est unitaire, on a $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ et en réduisant modulo \mathfrak{p} pour \mathfrak{p} premier de \mathbb{K} au-dessus de p , on a

$$(f \pmod{p})(x \pmod{\mathfrak{p}}) = 0 = f(x) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Donc $\alpha_1 \bmod p, \dots, \alpha_n \bmod p$ sont des racines de $f \bmod p$, qui sont deux à deux distinctes. En effet, $\Delta(f) \in \mathbb{Z}$, donc $\Delta(f) \bmod p = \Delta(f) \bmod p \neq 0$ car p ne divise pas $\Delta(f)$ et

$$\Delta(f) \bmod p = \prod_{1 \leq r < s \leq n} (\alpha_r - \alpha_s)^2 \bmod p = \prod_{1 \leq r < s \leq n} (\alpha_r \bmod p - \alpha_s \bmod p)^2 \neq 0.$$

Ainsi, via l'isomorphisme $\varphi_p : D(p) \longrightarrow \text{Gal}(k_p/\mathbb{F}_p)$, on voit que l'action du morphisme $\sigma \longmapsto \bar{\sigma}$

de Frobenius $\text{Frob}_p \in \text{Gal}(k_p/\mathbb{F}_p)$ en tant que permutation de $\{\alpha_1 \bmod p, \dots, \alpha_n \bmod p\}$ est la même que celle de $(p, \mathbb{K}/\mathbb{Q})_p$ sur $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Proposition 30

Soit $f \in \mathbb{Z}[z]$ un polynôme unitaire non nul tel que $f \bmod p \in \mathbb{F}_p[z]$ est scindé dans $\mathbb{F}_p[z]$ pour presque tout premier p . Alors f est scindé dans $\mathbb{Q}[z]$.

Démonstration. On note \mathbb{K} un corps de décomposition de f . On prend p un premier ne divisant pas $\Delta(f)$. Si \mathfrak{p} est un premier de \mathbb{K} au-dessus de p , on sait donc que \mathfrak{p} est non ramifié. De plus, pour toute racine α de $f \bmod p$, on a $\text{Frob}_p(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha^p = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{F}_p$. Donc $f \bmod p$ est scindé sur \mathbb{F}_p si et seulement si $\text{Frob}_p = \text{id}$. Via l'isomorphisme φ_p , cela équivaut à dire que $(p, \mathbb{K}/\mathbb{Q}) = \{\text{id}\}$.

Selon le théorème 20, l'ensemble des premiers p de \mathbb{Z} tels que $(p, \mathbb{K}/\mathbb{Q}) = \{\text{id}\}$ a pour densité $1/|\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})|$. Or, comme $f \bmod p$ est scindé sur \mathbb{F}_p pour presque tout p , cette densité vaut 1. Donc $|\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})| = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 1$, si bien que f est scindé sur \mathbb{Q} . \square

Corollaire 3

Soit $f \in \mathbb{Z}[z]$ un polynôme irréductible unitaire tel que $f \bmod p \in \mathbb{F}_p[z]$ a un zéro dans \mathbb{F}_p pour tout premier p dans un sous-ensemble de densité $d > \frac{1}{2}$ de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Alors f est de degré 1.

On utilise le lemme suivant :

Lemme 13

Soit G un groupe agissant transitivement sur un ensemble fini Ω de cardinal au moins 2. Alors il existe $\sigma \in G$ tel que $\forall \omega \in \Omega, \sigma(\omega) \neq \omega$.

Démonstration. On utilise la formule de Burnside : si $\text{Orb}(\Omega)$ est l'ensemble des orbites de l'action de X sur Ω , et pour tout $g \in G$, $\text{Fix}_g = \{\omega \in \Omega / g(\omega) = \omega\}$, alors

$$|\text{Orb}(\Omega)| \times |G| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}_g| = |G|$$

car l'action est transitive. Mais $|\text{Fix}_{\text{id}}| = |\Omega| > 1$, donc il existe $\sigma \in G$ tel que $|\text{Fix}_\sigma| = 0$, i.e. σ est sans point fixe. \square

Démonstration du corollaire 3. Par l'absurde, supposons que $\deg(f) > 1$. Soit \mathbb{K} un corps de décomposition de f et p un premier ne divisant pas $\Delta(f)$. Une racine de $f \bmod p$ dans \mathbb{F}_p correspond à un point fixe du morphisme de Frobenius par action sur les racines de $f \bmod p$.

Selon la remarque suivant la définition 29, si $f \bmod p$ a une racine dans \mathbb{F}_p , tout élément de $(p, \mathbb{K}/\mathbb{Q})$ a donc un point fixe par action sur les racines de f .

Soit G_0 le sous groupe de $G = \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ composé des $\sigma \in G$ tels que σ a un point fixe. C'est aussi une classe de conjugaison dans G . Comme f est irréductible, l'action de G sur

l'ensemble à au moins deux éléments de ses racines dans \mathbb{K} est transitive. Selon le lemme 13, $|G_0| < |G|$. Donc l'ensemble des premiers p de \mathbb{Z} tels que p est non ramifié et $(p, \mathbb{K}/\mathbb{Q}) = G_0$ a pour densité $\frac{|G_0|}{|G|} \leq \frac{1}{2}$ (car G_0 est un sous-groupe strict de G). Or, cet ensemble est en fait l'ensemble des premiers p non ramifiés tels que $f \bmod p$ a une racine dans \mathbb{F}_p , qui est de densité strictement plus grande que $\frac{1}{2}$ par hypothèse. On a donc une contradiction, par conséquent $\deg(f) = 1$. \square

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 10 utilisée pour démontrer le théorème de Katz :

Corollaire 4

Soit \mathbb{K} un corps de nombres et $\alpha \in \mathbb{K}$. Si pour presque tout premier \mathfrak{p} de \mathbb{K} , $|\alpha|_{\mathfrak{p}} \leq 1$ et $\alpha \bmod \mathfrak{p} \in \mathbb{F}_p$, où $(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$, alors $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit $d \in \mathbb{Z}$ tel que $d\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. On a pour presque tout premier \mathfrak{p} de \mathbb{K} , si $(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$, $d \bmod \mathfrak{p} = d \bmod p \in \mathbb{F}_p$ et $(d\alpha) \bmod \mathfrak{p} = (d \bmod \mathfrak{p})(\alpha \bmod \mathfrak{p}) \in \mathbb{F}_p$ car $\alpha \bmod \mathfrak{p} \in \mathbb{F}_p$. Donc le polynôme minimal unitaire $f \in \mathbb{Z}[z]$ de $d\alpha$ a une racine dans \mathbb{F}_p pour presque tout p . Selon le corollaire 3, f est de degré 1, donc $d\alpha \in \mathbb{Z}$, de sorte que $\alpha \in \mathbb{Q}$. \square

Références

- [1] B. ADAMCZEWSKI et T. RIVOAL. “Exceptional values of E -functions at algebraic points”. In : *Bull. London Math. Soc.* 50.4 (2018), p. 697-708.
- [2] Y. ANDRÉ. *G-Functions and Geometry : A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn*. 1^{re} éd. Aspects of Mathematics. Vieweg+Teubner Verlag, 1989.
- [3] Y. ANDRÉ. “Séries Gevrey de type arithmétique II. Transcendance sans transcendance”. In : *Annals of Mathematics* 151 (2000), p. 741-756.
- [4] Y. ANDRÉ. “Séries Gevrey de type arithmétique, I. Théorèmes de pureté et de dualité”. In : *Annals of Mathematics* 151 (2000), p. 705-740.
- [5] G. E. ANDREWS, R. ASKEY et R. ROY. *Special functions*. Cambridge University Press, 1999.
- [6] W.N BAILEY. *Generalized hypergeometric series*. Cambridge Tracts in Mathematics et Mathematical Physics, 1935.
- [7] A. BAKER. *Transcendental number theory*. 1^{re} éd. Cambridge University Press, 1975.
- [8] F. BEUKERS. *E-functions and G-functions*. notes disponibles sur swc.math.arizona.edu/aws/2008/08BeukersNotesDraft.pdf. 2008.
- [9] F. BEUKERS. “A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem”. In : *Annals of Math.* 163 (2006), p. 369-379.
- [10] F. BEUKERS. “Notes on A-hypergeometric functions”. In : *Arithmetic and Galois theories of differential equations*. T. 23. Séminaires et congrès. Editeurs : L. DI VIZIO et T. RIVOAL. Société mathématique de France, 2011, p. 25-61.
- [11] J.W.S. CASSELS. *Local fields*. London Mathematical Society Student Texts 3. Cambridge University Press, 1986.
- [12] D. CHUDNOVSKY et G. CHUDNOVSKY. “Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G -functions”. In : *Number Theory. Lecture Notes in Mathematics* 1135. Springer Berlin, 1984, p. 9-51.
- [13] R. DESCOMBES. *Éléments de théorie des nombres*. P.U.F, 1986.
- [14] B. DWORK, G. GEROTTO et F. J. SULLIVAN. *Introduction to G-functions*. AM 133. Princeton University Press, 1994.
- [15] A. I. GALOCHKIN. “Estimates from below of polynomials in the values of analytic functions of a certain class”. In : *Mathematics of the USSR-Sbornik* 24 (1974), p. 385-407.
- [16] A. I. GALOCHKIN. “Hypergeometric Siegel functions and E -functions”. In : *Matematicheskie Zametki* 29 (1981), p. 3-14.
- [17] E. HILLE. *Ordinary differential equations in the complex domain*. Pure and Applied Mathematics, Monographs and Texts. Willey, 1976.
- [18] N. KATZ. “A conjecture in the arithmetic theory of differential equations”. In : *Bulletin de la S.M.F* 110 (1982), p. 203-239.
- [19] E. KUMMER. “Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen”. In : *J. Reine Angew. Math* 44 (1852), p. 93-146.
- [20] H. LENSTRA. *The Chebotarev Density Theorem*. notes de cours disponibles en ligne sur <http://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/Lenstra-Chebotarev.pdf>. 2010.
- [21] J.S. MILNE. *Class Field Theory (v4.02)*. Consultable sur www.jmilne.org/math/. 2013.

- [22] Yu. V. NESTERENKO et A. B. SHIDLOVSKII. “On the linear independence of values of E -functions”. In : *Math Sb.* 187 (1996). traduit en anglais dans *Sb. Math* 187 (1996), 1197–1211, p. 93-108.
- [23] J. SAULOY. *Differential Galois Theory through Riemann-Hilbert Correspondence : An Elementary Introduction*. T. 177. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2016.
- [24] J.-P. SERRE. *Cours d'arithmétique*. P.U.F., 1994.
- [25] J.-P. SERRE. “Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev”. In : *Publications mathématiques de l'IHES* 54 (1981), p. 123-201.
- [26] A. B. SHIDLOVSKII. *Transcendental Numbers*. T. 12. Degruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter, 1989.
- [27] C. L. SIEGEL. *Transcendental Numbers*. Princeton University Press, 1949.
- [28] C. L. SIEGEL. “Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen”. In : *Abh. Preuss. Akad. Wiss.* (1929), p. 41-69.
- [29] M. F. SINGER et M. VAN DER PUT. *Galois Theory of Linear Differential Equations*. T. 328. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2003.
- [30] A. THUE. “Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen”. In : *J. reine angew. Math.* 135 (1909), p. 284-305.
- [31] M. YOSHIDA. *Fuchsian differential equations*. T. 11. Aspects of Mathematics. Vieweg et Son, 1987.