

# Existence d'équilibres dans un jeu fini sous forme normale

Gabriel LEPETIT

La théorie des jeux permet une analyse formelle des problèmes posés par l'interaction stratégique d'un groupe d'agents rationnels poursuivant des buts qui leur sont propres. Il existe deux grandes manières de représenter des jeux, chacune étant adaptée pour modéliser certaines situations. La forme normale modélise un jeu par la donnée de fonctions d'ensemble de stratégies et de fonctions de gain (représentables par des matrices), tandis que la forme extensive s'intéresse aux jeux où il existe un ordre de jeu, ou bien dans lesquels les joueurs n'ont pas la connaissance parfait des règles ou du contexte. La théorie des jeux trouve des applications en premier lieu dans l'analyse de situations économiques, où elle fait preuve d'une efficacité surprenante et est au coeur de nombreuses modélisations mathématiques de l'économie. Dans le cadre du thème de l'année, "Transfert, échange", mon TIPE se propose d'étudier une modélisation des échanges entre individus sous la forme de cette théorie. Plus précisément, je me suis intéressé à la question d'existence d'équilibres dans de tels jeux.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Jeux sous forme normale</b>	<b>2</b>
1.1	Stratégies pures	2
1.1.1	Définitions et caractéristiques des jeux	2
1.1.2	Comparaison de stratégies	3
1.1.3	Notion d'équilibre itératif en stratégies strictement dominées (EISSD)	3
1.1.4	Equilibre de Nash	5
1.1.5	Optimum de Pareto	6
1.2	Stratégies mixtes	7
<b>2</b>	<b>Equilibre en jeu à somme nulle : le théorème du minimax de Von Neumann</b>	<b>7</b>
2.1	Valeur en stratégies pures	8
2.2	Cas des stratégies mixtes	9
2.2.1	Propriété de la valeur en stratégies mixtes	9
2.2.2	Le théorème du minimax	10
<b>3</b>	<b>Equilibre dans un jeu à <math>n</math> joueurs : le théorème de Nash</b>	<b>12</b>
3.1	Notion de correspondance. Théorème de Kakutani.	12
3.2	Enoncé et démonstration du théorème de Nash	15
<b>4</b>	<b>Recherche d'un point selle par des méthodes numériques</b>	<b>16</b>
4.1	Expression explicite du point selle	16
4.2	Généralisation du problème	17
4.2.1	Principe de l'algorithme	17
4.2.2	Implémentation en Maple	17

# 1 Jeux sous forme normale

## 1.1 Stratégies pures

### 1.1.1 Définitions et caractéristiques des jeux

**Définition 1.** Un jeu sous forme normale à  $n$  joueurs est défini par la donnée de :

- $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$  un ensemble de joueurs
- $\forall i \in \mathcal{N}, S_i = \{s_1^i, \dots, s_{n_i}^i\}$  où  $n_i \geq 1$  l'ensemble de stratégies du joueur  $i$ .
- $g = (g^1, \dots, g^n)$  une fonction de gain de  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  dans  $\mathbb{R}^n$  dont la  $i$ -ème composante donne le gain du joueur  $i$ .

*Remarque.* 1. La fonction de gain peut modéliser tant les avantages matériels objectifs apportés par telle ou telle situation (par exemple, les gains financiers) qu'un bénéfice subjectif.

2. On représente souvent un jeu sous forme normale sous forme de matrice ou de tableau lorsqu'il y a deux joueurs (voir les exemples suivants)

*Notation :* Pour  $i \in \mathcal{N}$ , on notera  $S^{-i} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n S^k$

Donnons ici quelques exemples classiques de tels jeux :

**Exemple 1.** : le dilemme du prisonnier

Deux personnes sont accusées d'un crime qu'elles auraient commis en commun. Elles ont le choix, face aux interrogateurs, d'avouer ou de nier. Le tableau suivant reporte les peines de prison qu'elles subiront selon qu'elles avouent ou nient.

Pris. 1	Pris. 2	Avouer	Nier
Avouer		2,2	5,10
Nier		10,5	0,0

Une question légitime qu'on peut se poser est : existe-t-il une stratégie optimale, d'une part du point de vue collectif, et d'autre part du point de vue de l'intérêt personnel de chacun ?

S'il n'en existe pas, peut-on trouver une situation d'équilibre, c'est à-dire une situation dans laquelle aucun joueur n'aurait intérêt à changer de stratégie ?

**Exemple 2.** le jeu du penalty " Matching Pennies "

Ce jeu comporte deux joueurs, le tireur et le gardien. Le problème qui se pose est de choisir de tirer à gauche plutôt qu'à droite.

Tireur - Goal	Gauche	Droite
Gauche	-1,1	1,-1
Droite	1,-1	-1,1

Souvent, dans un jeu à deux joueurs, tout gain d'un joueur constitue une perte pour l'autre (comme dans l'exemple précédent) :

**Définition 2.** Un jeu à somme nulle est un jeu à deux joueurs tel que  $g^1 = -g^2$ . On le note alors  $\Gamma = (A, B, g)$  où  $A$  et  $B$  sont les ensembles de stratégies des deux joueurs et  $g$  est la fonction de gain du premier joueur.

### 1.1.2 Comparaison de stratégies

**Définition 3.** — Une stratégie  $a^i$  du joueur  $i$  est dominée faiblement par  $b^i$  si  $\forall s^{-i} \in S^{-i}, g^i(a^i, s^{-i}) \leq g^i(b^i, s^{-i})$

- $a^i$  est dominée par  $b^i$  si  $b^i$  domine faiblement  $a^i$  et si  $\exists c^{-i} \in S^{-i} : g^i(a^i, c^{-i}) < g^i(b^i, c^{-i})$
- $a^i$  est dominée strictement par  $b^i$  si  $\forall s^{-i} \in S^{-i}, g^i(a^i, s^{-i}) < g^i(b^i, s^{-i})$
- Une stratégie d'un joueur est dite (strictement / faiblement) dominante lorsque qu'elle domine (strictement / faiblement) toutes les autres stratégies de ce joueur.

L'intérêt de cette notion est clair : lorsque chaque joueur dispose d'une stratégie dominante, il la joue et il n'y a pas d'autre choix rationnellement envisageable : l'équilibre est trouvé.

**Définition 4.** On parle d'équilibre en stratégies (strictement) dominantes lorsque chaque joueur possède une stratégie (strictement) dominante.

On remarque cependant que dans le cas du premier exemple, il n'existe pas de tel équilibre.

### 1.1.3 Notion d'équilibre itératif en stratégies strictement dominées (EISSD)

Il existe un algorithme relativement élémentaire pour trouver l'équilibre d'un jeu, mais il ne fonctionne pas toujours.

Montrons son fonctionnement sur un exemple

**Exemple 3.** On part du tableau de gain suivant (le joueur 1 correspond aux lignes, le joueur 2 aux colonnes)

	A	B	C
D	(2,5)	(4,8)	(1,3)
E	(1,4)	(2,5)	(3,6)
F	(3,7)	(5,8)	(2,9)

B domine A donc le joueur 2 n'a absolument pas intérêt à jouer la colonne A. On peut donc l'éliminer et se ramener à

	B	C
D	(4,8)	(1,3)
E	(2,5)	(3,6)
F	(5,8)	(2,9)

La ligne F domine D. On obtient donc :

	B	C
E	(2,5)	(3,6)
F	(5,8)	(2,9)

C domine B, donc

	C
E	(3,6)
F	(2,9)

L'équilibre final est donc :

	C
E	(3,6)

**Définition 5.** On note pour tout jeu  $G$  à  $N$  joueurs et pour tout  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $SD^i(G)$  l'ensemble des stratégies strictement dominées du joueur  $i$ .

Soit un jeu  $G_0 = (N, (A_0^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$

On pose  $G_k = (N, (A_k^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$  où  $\forall i, A_k^i = A_{k-1}^i \setminus SD^i(G_{k-1})$ . (les fonctions de gain sont définies par restriction).

On pose de plus  $A_{\infty}^i = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k^i$

On dit alors que  $G_0$  admet un équilibre itératif en stratégies strictement dominées (EISSD) si la restriction de la fonction de gain à  $A_{\infty}$  est constante.

*Remarque.* Dans l'exemple précédent, on a réduit le jeu à une matrice de taille 1, donc il y a bien un EISSD.

On peut alors programmer sur Caml un algorithme simple de réduction d'un jeu fini à deux joueurs, donc représentable par deux matrices.

```
let superieur t u=
let n=vect_length t in
let b=ref true in
  for i=0 to (n-1) do
    if t.(i)<= u.(i) then b:=false
  done;
(!b);;

let lignes_dominees z=
let n=vect_length z in
let t=make_vect n 1 in
  for i=0 to (n-1) do
    if t.(i)=1 then
      for j=0 to (n-1) do
        if superieur z.(i) z.(j) then t.(j)<-0
      done;
    done;
  t;;

let transposee z=
let n=vect_length z in
let m=vect_length z.(0) in
let u=make_matrix m n 0 in
  for i=0 to (m-1) do
    for j=0 to (n-1) do
      u.(i).(j)<-z.(j).(i);
    done;
  done;
u;;

let colonnes_dominees z=
lignes_dominees (transposee z);;

let valeur t=
let n=vect_length t in
let i=ref 0 in
for j=0 to (n-1) do
  i:=(!i)+t.(j)
done;
(!i);;
```

```

let sous_matrice t u w=
let n=vect_length w in
let m=vect_length w.(0) in
let p=valeur t in
let q=valeur u in
let z=make_matrix p q 0 in
let k=ref 0 in
  for i=0 to (n-1) do
    if t.(i)=1 then
      begin
        let l=ref 0 in
        for j=0 to (m-1) do
          if u.(j)=1 then
            begin
              z.(!k).(!l)<-w.(i).(j);
              l:=(!l)+1;
            end
          done;
          k:=(!k)+1;
        end;
      done;
    done;
  z;;

let reduire y z=
let t=lignes_dominees y in
let u=colonnes_dominees z in
(sous_matrice t u y), (sous_matrice t u z);;

let rec eissd y z=
let w,x= reduire y z in
if (w=y) && (x=z) then y,z
else eissd w x;;

```

La fonction `superieur` teste si une stratégie domine strictement les autres, la fonction `colonnes dominees` (resp. `lignes dominees`) renvoie pour le joueur 1 (resp.2) un vecteur initialement rempli de 1 et qui affecte à la place  $i$  0 lorsque la  $i$ -ème colonne (resp. ligne) est strictement dominée.

La fonction `sous_matrice` construit à partir d'une liste de cette forme la matrice du jeu réduite par EISSD.

Les fonctions `reduire` et `eissd` utilisent les dernières fonctions pour mettre en place l'algorithme décrit dans la définition 5. Notons que l'algorithme `eissd` termine bien car il s'arrête si la fonction `reduire` a atteint un point fixe.

#### 1.1.4 Equilibre de Nash

**Définition 6.** Une stratégie  $a_*^i$  est une meilleure réponse à  $b^{-i} \in S^{-i}$  si  $\forall a^i \in S^i, g^i(a_*^i, b^{-i}) \geq g(a^i, b^{-i})$

$a_*^i$  est alors la meilleure stratégie possible sous la condition que les autres joueurs jouent  $b^{-i}$ .

**Définition 7.** Un profil de stratégies  $a_* = (a_*^1, \dots, a_*^n) \in \prod_{i=0}^n S^i$  est un équilibre de Nash si chacune de ses composantes est une meilleure réponse aux autres, c'est à dire :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall a^i \in S^i, g^i(a_*^i, a_*^{-i}) \geq g^i(a^i, a_*^{-i})$$

En d'autres termes, si les joueurs se trouvent dans cette configuration d'équilibre, aucun n'a intérêt à changer unilatéralement de stratégie.

**Théorème 1.** Un équilibre en stratégies (strictement) dominantes est un équilibre de Nash.

*Démonstration.* Soit  $a_* = (a_*^1, \dots, a_*^n)$  une  $n$ -liste de stratégies dominantes pour chaque joueur. Soit  $(a^1, \dots, a^n) \in \prod_{i=0}^n S^i$ .

Il est immédiat, par définition d'une stratégie dominante que  $a_*$  domine toutes les autres  $n$ -uplets de stratégies. En particulier, on a bien  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, g^i(a_*^i, a_*^{-i}) \geq g^i(a^i, a_*^{-i})$  ce qui prouve le résultat.  $\square$

**Exemple 4.** Dans le dilemme du prisonnier, (avouer, avouer) est un équilibre de Nash mais pas un couple de stratégies dominantes.

**Théorème 2.** Un équilibre itératif en stratégies strictement dominées est un équilibre de Nash

*Démonstration.* Soit  $G$  un jeu à  $n$  joueurs.

Soit  $b^i$  une stratégie du joueur  $i$  faiblement dominée par  $c^i$  : on a  $\forall s^{-i} \in S^{-i}, g(b^i, s^{-i}) \leq g(c^i, s^{-i})$

Notons  $G'$  le jeu obtenu en éliminant  $b^i$

Soit  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un équilibre de  $G'$ . Supposons que  $a$  n'est pas un équilibre de  $G$ . Alors un joueur peut jouer unilatéralement une stratégie plus profitable.

Si ce joueur n'est pas  $i$ , alors cette stratégie plus profitable subsiste nécessairement dans  $G'$  et  $a$  n'en est donc pas un équilibre.

Donc ce joueur est  $i$ . On peut fixer  $d^i$  tel que  $g(d^i, a^{-i}) > g(a^i, a^{-i})$ . Si  $d^i \neq b^i$ , alors par le même argument que précédemment,  $a$  n'est pas un équilibre de  $G'$ .

Donc  $d^i = b^i$ , et  $g(c^i, a^{-i}) \geq g(b^i, a^{-i}) > g(a^i, a^{-i})$ . Or  $c^i$  est dans  $G'$  : contradiction. Donc  $a$  est un équilibre de  $G$ .  $\square$

*Remarque.* La méthode de réduction itérative d'un jeu s'avère donc être un moyen simple et efficace pour parvenir à un équilibre de Nash.

### 1.1.5 Optimum de Pareto

Au contraire des équilibres précédents qui s'intéressent au gain individuel, la notion d'optimum de Pareto exprime au contraire un gain commun à tous les joueurs.

**Définition 8.** Soit  $a_* = (a_*^1, \dots, a_*^n) \in \prod_{i=0}^n S^i$ .  $a_*$  est un optimum de Pareto si

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \prod_{i=0}^n S^i, (\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, g^i(a^i, a^{-i}) \geq g^i(a_*^i, a_*^{-i})) \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, g^i(a^i, a^{-i}) = g^i(a_*^i, a_*^{-i}))$$

*Interprétation* : aucun des joueurs ne peut obtenir un paiement plus élevé sans que le paiement d'un des autres ne diminue.

**Exemple 5.** dans le dilemme du prisonnier, (nier, nier) est un optimum de Pareto.

*Remarque.* un optimum de Pareto n'est pas nécessairement un équilibre de Nash, et un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto.

## 1.2 Stratégies mixtes

Pour tout jeu fini en stratégies pures, on peut définir son extension mixte. Intuitivement, cela revient à décider de jouer aléatoirement en choisissant la probabilité de jouer chaque stratégie.

**Définition 9.** L'extension mixte du jeu défini par  $(S^1, \dots, S^n)$  et  $g = (g^1, \dots, g^n)$  est le jeu défini par  $(X^1, \dots, X^n)$  et  $h(h^1, \dots, h^n)$  où,  $m_i$  étant le cardinal de  $S^i$ ,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, X^i = \left\{ \sum_{k=1}^{m_i} x_k \cdot s_k^i \mid (x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}_+^{m_i}, \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1 \right\}$$

On identifie  $X^i$  à  $\{(x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}_+^{m_i}, \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1\}$  en numérotant les stratégies avec des symboles de Kronecker.

Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Soit  $(x^1, \dots, x^n) \in \prod_{k=1}^n X^k$  tel que

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, x^j = \sum_{k=1}^{m_j} x_k^j \cdot s_k^j$$

On définit alors

$$h^i(x^1, \dots, x^n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \llbracket 1; m_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1; m_n \rrbracket} x_{k_1}^1 \dots x_{k_n}^n h^i(s_{k_1}^1, \dots, s_{k_n}^n)$$

On prouve alors aisément les deux théorèmes suivants :

**Théorème 3.** Pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $h^i$  est multilinéaire.

**Théorème 4.**  $X^i$  est un convexe compact de  $\mathbb{R}^{m_i}$

## 2 Equilibre en jeu à somme nulle : le théorème du minimax de Von Neumann

On se place dans le cadre d'un jeu  $G$  à deux joueurs et à somme nulle. On note  $g$  la fonction de gain du joueur 1 ( $-g$  est donc la fonction de gain du joueur 2),  $A$  (resp.  $B$ ) l'ensemble des stratégies du joueur 1 (resp. 2). Le but de cette section est de montrer l'existence d'un équilibre de Nash en stratégies mixtes dans ce cas particulier, ce qui correspondra à l'existence d'une valeur.

De plus, dans ce cas particulier, on arrivera à relier la notion de "bien jouer" – que l'on précisera – et l'existence d'un équilibre, ce qui ne sera pas possible dans le cas général.

## 2.1 Valeur en stratégies pures

**Définition 10.** 1. Le *supinf* (ou *maxmin* lorsque le jeu est fini) de  $G$  est  $\underline{v}(G) = \sup_{a \in A} \left( \inf_{b \in B} g(a, b) \right)$

2. L'*infsup* (ou *minmax*) de  $G$  est  $\overline{v}(G) = \inf_{b \in B} \left( \sup_{a \in A} g(a, b) \right)$

$\underline{v}$  est le gain minimal garanti par A, et  $\overline{v}$  la perte minimale garantie par B, comme le montre la proposition suivante

**Théorème 5.** 1. Le joueur 1 garantit  $\underline{v}$  à  $\epsilon$  près :

$$\forall \epsilon > 0, \exists a \in A, \forall b \in B, g(a, b) \geq \underline{v} - \epsilon$$

Il défend  $\underline{v}$  à  $\epsilon$  près :

$$\forall \epsilon > 0, \forall b \in B, \exists a \in A : g(a, b) \geq \underline{v} - \epsilon$$

2. Le joueur 2 garantit  $\overline{v}$  à  $\epsilon$  près :

$$\forall \epsilon > 0, \exists b \in B, \forall a \in A, g(a, b) \leq \overline{v} + \epsilon$$

Il défend  $\overline{v}$  à  $\epsilon$  près :

$$\forall \epsilon > 0, \forall a \in A, \exists b \in B : g(a, b) \leq \overline{v} + \epsilon$$

*Démonstration.* facile en utilisant la définition. □

*Remarque.* lorsque le jeu est fini, la proposition précédente est vraie pour  $\epsilon = 0$ .

**Théorème 6.**  $\underline{v} \leq \overline{v}$

*Démonstration.* On a  $\forall (a_0, b_0) \in A \times B, g(a_0, b_0) \leq \sup_{a \in A} g(a, b_0)$  donc  $\forall (a_0, b_0) \in A \times B, \inf_{b \in B} g(a_0, b) \leq \sup_{a \in A} g(a, b_0)$  donc  $\forall a_0 \in A, \inf_{b \in B} g(a_0, b) \leq \inf_{b \in B} \left( \sup_{a \in A} g(a, b) \right)$  d'où finalement  $\underline{v} \leq \overline{v}$ . □

**Définition 11.** Si  $\underline{v} = \overline{v}$ , on dit que le jeu a une valeur  $v = \underline{v} = \overline{v}$  en stratégies pures.

Cela signifie alors que les deux joueurs ont tous deux intérêt à jouer un couple de stratégies donné pour garantir cette valeur.

**Définition 12.** Un couple de stratégies  $(a_*, b_*) \in A \times B$  est un *point selle* si  $\forall (a, b) \in A \times B, g(a, b_*) \leq g(a_*, b_*) \leq g(a_*, b)$

*Remarque.* Cela correspond exactement à la notion d'équilibre de Nash définie précédemment, étant donné que la fonction de gain du joueur 2 est  $-g$ .

**Définition 13.** 1. Une stratégie  $a_* \in A$  est  $\epsilon$ -optimale si  $\forall b \in B, g(a_*, b) \geq \underline{v} - \epsilon$

2. Une stratégie  $b_* \in B$  est  $\epsilon$ -optimale si  $\forall a \in A, g(a, b_*) \leq \overline{v} + \epsilon$

Quand  $\epsilon = 0$ , on dit que la stratégie est optimale

**Théorème 7.** Il existe un point selle  $(a_*, b_*)$  si et seulement si le jeu admet une valeur  $v$  et  $(a_*, b_*)$  est un couple de stratégies optimales. On a alors  $v = g(a_*, b_*)$



*Démonstration.* Soit  $(a_*, b_*)$  un point selle. Comme  $\forall a \in A, g(a, b_*) \leq g(a_*, b_*)$ , on a  $g(a_*, b_*) \geq \sup_{a \in A} g(a, b_*) \geq \underline{v}$

On montre de la même manière que  $g(a_*, b_*) \leq \underline{v}$ . Le théorème 6 permet de conclure à l'existence d'une valeur  $v$ , et les inégalités précédentes donnent  $v = g(a_*, b_*)$ . Donc  $\forall b \in B, g(a_*, b) \geq g(a_*, b_*) = v = \underline{v}$ , donc  $a_*$  est optimale. De même,  $b_*$  est optimale

Si le jeu admet une valeur  $v$  et un couple de stratégies optimales  $(a_*, b_*)$ , alors  $\forall b \in B, g(a_*, b) \geq v$  et  $\forall a \in A, g(a, b_*) \leq v$  donc immédiatement  $v = g(a_*, b_*)$  et  $(a_*, b_*)$  est un point selle

□

*Remarque.* Ce lien entre stratégie optimale et équilibre n'est plus vrai dès que l'on sort du cadre des jeux à deux joueurs et à somme nulle.

## 2.2 Cas des stratégies mixtes

### 2.2.1 Propriété de la valeur en stratégies mixtes

On notera  $X$  (resp.  $Y$ ) l'ensemble des stratégies mixtes du joueur 1 (resp. 2) et  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_l\}$ . (**A et B sont finis**). On nomme  $G_\Delta = (X, Y, g)$

Dans le cas particulier des jeux à somme nulle, les résultats de la section 1.2 s'écrivent :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_k) \in X, \forall y = (y_1, \dots, y_l) \in Y, g(x, y) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} x_i y_j g(a_i, b_j)$$

On sait alors que  $g$  est bilinéaire sur  $X \times Y$ . Elle y est de plus continue.

**Définition 14.** 1. Le maxmin de  $G$  en stratégies mixtes est  $\underline{V}(G) = \underline{v}(G_\Delta)$

2. Le minmax de  $G$  en stratégies mixtes est  $\overline{V}(G) = \overline{v}(G_\Delta)$

3. Le jeu admet une valeur  $V$  si  $\overline{V}(G) = \underline{V}(G)$

*Remarque.* On peut bien parler de maxmin et minmax. En effet, soit  $K$  compact et  $\phi : f \mapsto \min f$  définie sur  $(\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , cet espace étant noté  $E$

$\phi$  est continue sur  $E$  essentiellement car le minimum est atteint

De plus soit  $f \in \mathcal{C}^0(X \times Y, \mathbb{R})$  et  $f_x : y \mapsto f(x, y)$ .  $F : x \mapsto f_x$  est continue sur  $X$ .

En effet, soit  $\epsilon > 0$  et  $x_0 \in X$ . Par uniforme continuité de  $f$  sur un compact, on peut fixer  $\eta > 0$  tel que

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in X^2 \times Y^2, \|x_1 - x_2\| \leq \eta, \|y_1 - y_2\| \leq \eta \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \epsilon$$

Donc si  $\|x - x_0\| \leq \eta$ , pour  $y \in Y$ ,  $|f_x(y) - f_{x_0}(y)| \leq \epsilon$  ce qui prouve que  $\|f_x - f_{x_0}\| \leq \epsilon$ .

Par composition des deux fonctions précédentes, on en déduit la continuité de  $x \mapsto \min_{y \in Y} f(x, y)$  sur  $X$  compact et le résultat.

**Théorème 8.**  $\overline{V} = \min_{y \in Y} \left( \max_{a \in A} g(a, y) \right)$

*Démonstration.* Comme  $\overline{V} = \min_{y \in Y} \left( \max_{x \in X} g(x, y) \right)$ , il suffit de montrer que  $\forall y \in Y, \max_{x \in X} g(x, y) = \max_{a \in A} g(a, y)$ .

Soit  $y \in Y$ .

Comme  $A \subset X$ , il est évident que  $\max_{a \in A} g(a, y) \leq \max_{x \in X} g(x, y)$ .

De plus, soit  $x \in X$ . On a

$$g(x, y) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} x_i y_j g(a_i, b_j) = \sum_{1 \leq i \leq k} x_i g(a_i, y) \leq \sum_{1 \leq i \leq k} x_i \max_{a \in A} g(a, y) = \max_{a \in A} g(a, y)$$

Donc  $\max_{x \in X} g(x, y) \leq \max_{a \in A} g(a, y)$ .

□

*Remarque.* On montrerait de même que  $\underline{V} = \max_{x \in X} \left( \min_{b \in B} g(x, b) \right)$

On en déduit :

**Théorème 9.**  $\underline{v} \leq \underline{V} \leq \overline{V} \leq \overline{v}$

*Démonstration.* Le théorème 6 donne  $\underline{V} \leq \overline{V}$ . De plus, selon le théorème 8,

$$\overline{V} = \min_{y \in Y} \left( \max_{a \in A} g(a, y) \right) \leq \min_{b \in B} \left( \max_{a \in A} g(a, b) \right) = \overline{v}$$

On montre de même que  $\underline{v} \leq \underline{V}$ .

□

*Remarque.* Il est donc clair que si le jeu admet une valeur en stratégies pures, elle admettra une valeur en stratégies mixtes qui sera la même.

**Théorème 10.** Si le jeu admet une valeur  $V$ , alors il existe un couple de stratégies optimales  $(a_*, b_*)$  qui est aussi un point selle et vérifie  $g(a_*, b_*) = V$

*Démonstration.* C'est la reformulation du théorème 7, l'existence d'un couple de stratégies optimales provenant du fait que le minimax (resp. maximin) du jeu est atteint. □

### 2.2.2 Le théorème du minimax

Ce théorème est le premier grand théorème d'équilibre de la théorie des jeux, énoncé par John von Neumann en 1928. Le théorème de Nash qui date de 1949 en est donc une généralisation. La preuve s'appuie sur le théorème de projection sur un convexe, fondamental en géométrie des convexes.

**Définition 15.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé et  $H$  un hyperplan affine de  $E$  d'équation  $f(x) = c$  où  $f \in E^*$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Soit  $E_1 = \{x \in E : f(x) \leq c\}$  et  $E_2 = \{x \in E : f(x) \geq c\}$ . On dit que  $H$  sépare  $C$  et  $D$ , parties de  $E$  si l'un est inclus dans  $E_1$  et l'autre dans  $E_2$

Le théorème suivant permet de séparer un singleton et un convexe fermé, via la notion de projection sur un convexe.

**Théorème 11.** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie. Soit  $C$  un convexe fermé non vide et  $x \in E$  tel que  $x \notin C$ . Il existe un unique point  $a = \rho_C(x) \in C$  tel que  $d(x, C) = \|x - \rho_C(x)\|$ . Ce point vérifie la propriété :

$$\forall z \in C, (x - a \mid z - a) \leq 0$$

On l'appelle projeté de  $x$  sur  $C$ .

*Démonstration.* 1. Existence : Soit  $y \in C$ . Notons  $B$  la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $d(x, y)$ .  $B \cap C$  est fermé borné dans  $E$  de dimension finie donc compact. Donc  $f$  définie sur  $B \cap C$  par  $\forall z \in C, f(z) = \|z - x\|$  atteint son minimum en un point  $a$  de  $C$ . De plus, si  $z \notin B$ , alors  $\|z - x\| \geq \|x - y\| \geq \|a - x\|$  donc  $a$  vérifie bien la propriété voulue.

2. Unicité : Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux points vérifiant la propriété. Notons  $m = \frac{a_1 + a_2}{2} \in C$  par convexité.

On a  $\|x - m\| \leq \frac{1}{2} \|x - a_1\| + \frac{1}{2} \|x - a_2\| = \|x - a_1\|$  et il y a donc égalité car la distance de  $x$  à  $a_1$  est minimale.

L'inégalité du parallélogramme nous donne :  $\|x - a_1\|^2 + \|x - a_2\|^2 = \frac{1}{2} (\|a_1 - a_2\|^2 + \|2x - (a_1 + a_2)\|^2) = \frac{1}{2} (\|a_1 - a_2\|^2 + 4\|x - m\|^2)$

De ces deux points, on tire :  $\frac{1}{4} (\|a_1 - a_2\|^2) \leq 0$  et donc  $\|a_1 - a_2\| = 0$ , d'où par séparation  $a_1 = a_2$

3. Soit  $z \in C$ , et  $t \in ]0; 1[$ . On note  $z_t = a + t.(z - a)$ . On a alors

$$\|x - a\|^2 \leq \|z_t - x\|^2 = \|z_t - a\|^2 + \|x - a\|^2 + 2(z_t - a | a - x) = t^2 \|z - a\|^2 + \|x - a\|^2 + 2t(z - a | a - x)$$

Donc en divisant par  $t$  et en passant à la limite en 0, on obtient l'inégalité voulue.  $\square$

*Remarque.* L'hyperplan  $H$  d'équation  $(x - a | z - a) = 0$  sépare donc  $C$  et  $\{x\}$

Voici, à des fins culturelles, le théorème de Hahn-Banach qui généralise ce résultat.

**Théorème 12** (Hahn-Banach). *Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé,  $C_1$  et  $C_2$  deux convexes de  $E$  non vides et disjoints tels que  $C_1$  est fermé et  $C_2$  est compact. Alors il existe un hyperplan  $H$  de  $E$  séparant strictement  $C_1$  et  $C_2$ .*

**Théorème 13** (Neumann, 1928). *Tout jeu fini admet une valeur en stratégies mixtes*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons  $\underline{V} < \overline{V}$ . On peut alors fixer  $r \in \mathbb{R}$  tel que  $\underline{V} < r < \overline{V}$

On introduit l'ensemble  $E = \{(e_1, \dots, e_k) \in \mathbb{R}^k : \exists y \in Y, \forall i, e_i \geq g(a_i, y)\}$ . On remarque que  $E = \{d + (g(a_i, y))_{1 \leq i \leq k} \mid d \in \mathbb{R}_+^k, y \in Y\}$

$E$  est fermé. En effet soit  $e^n = (e_1^n, \dots, e_k^n) \in E^k$  tendant vers  $e = (e_1, \dots, e_k)$  quand  $n$  tend vers l'infini. Par définition de  $E$ , pour tout  $n$ , on peut alors fixer  $y^n \in Y$  tel que

$$\forall i, e_i^n \geq g(a_i, y^n) \quad (1)$$

Comme  $Y$  est compact, quitte à se ramener à une sous-suite convergente de  $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut supposer que cette suite est convergente. Alors par continuité de  $x \rightarrow g(a_i, x)$  (car c'est une fonction linéaire en dimension finie), on a en passant à la limite dans 1,  $\forall i, e_i \geq g(a_i, y)$ . Donc  $e \in E$  qui est par suite fermé.

$E$  est immédiatement convexe par linéarité de la fonction de gain par rapport à  $y$  et par convexité de  $Y$

Enfin, le joueur 1 peut défendre  $\underline{V}$  en stratégies pures selon le théorème 8 donc

$$\forall y \in Y, \exists a \in A : g(a, y) \geq \underline{V} > r \text{ par hypothèse. Donc } w = (r, \dots, r) \notin E$$

Donc  $E$  est un convexe fermé disjoint de  $\{w\}$  donc selon le théorème de projection sur un convexe, on peut séparer  $E$  et  $w$  par un hyperplan d'équation  $(u | x) = h$  avec  $u \in \mathbb{R}^k$  ( $u$  non nul) et  $h \in \mathbb{R}$ .

On a donc

$$\forall e \in E, \sum_{i=1}^k r u_i \leq \sum_{i=1}^k e_i u_i$$

C'est à dire :

$$\forall y \in Y, \forall d \in \mathbb{R}_+^k, \sum_{i=1}^k r u_i \leq \sum_{i=1}^k u_i (d_i + g(a_i, y)) \quad (2)$$

donc  $\sum_{i=1}^k (r - (d_i + g(a_i, y))) u_i \leq 0$

Si  $\exists i_0 \in \llbracket 1; k \rrbracket : u_{i_0} < 0$ , alors en faisant tendre  $d_{i_0}$  vers  $+\infty$  (tous les autres paramètres étant fixés), on montre que cette dernière somme tend  $+\infty$ .

Donc  $\forall i, u_i \geq 0$ . Par ailleurs, selon 2, en prenant  $d = 0$ ,

$$\forall y \in Y, r \leq \sum_{i=1}^k \frac{u_i}{\sum_{i=1}^k u_i} g(a_i, y)$$

Soit par bilinéarité de  $g$  sur  $X \times Y$ , en notant

$$x = \sum_{i=1}^k \frac{u_i}{\sum_{i=1}^k u_i} a_i \in X$$

On a  $\forall y \in Y, r \leq g(x, y)$

Donc en revenant à la définition de  $\underline{V}$ , on a immédiatement que  $r \leq \underline{V}$ , ce qui contredit l'hypothèse. D'où le résultat. □

### 3 Equilibre dans un jeu à $n$ joueurs : le théorème de Nash

On a vu dans la première partie la définition d'un équilibre de Nash. Le théorème de Nash affirme son existence en stratégies mixtes dans le cas d'un jeu à  $n$  joueurs. Pour cela, il utilise le théorème de Kakutani qui est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer.

#### 3.1 Notion de correspondance. Théorème de Kakutani.

**Théorème 14** (Brouwer). *(admis) Soit  $C$  un convexe compact non vide et  $f$  une application continue de  $C$  dans  $C$ . Alors  $f$  admet un point fixe dans  $C$ .*

La démonstration s'appuie sur la notion de simplexe. Il existe également une démonstration - davantage dans l'esprit de la théorie des jeux - utilisant un jeu appelé "jeu de Hex".

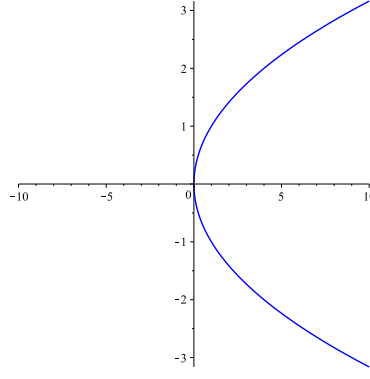
**Définition 16.** Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles. Une correspondance de  $X$  dans  $Y$  est une application  $f$  de  $X$  dans  $P(Y)$ , ensemble des parties de  $Y$ . On note alors  $f : X \rightrightarrows Y$

**Définition 17.** Le graphe d'une correspondance  $f : X \rightrightarrows Y$  est l'ensemble

$$Gr(f) = \{(x, y) \mid x \in X, y \in f(x)\}$$

*Remarque.* La notion de correspondance est une généralisation de la notion de fonction : à un élément est associé plusieurs images.

Par exemple, montrons le graphe de  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}$



Pour démontrer le théorème de Kakutani, on aura besoin de la définition et du théorème suivant :

**Définition 18.** L'enveloppe convexe  $\text{conv}(A)$  d'une partie  $A$  d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est le plus petit convexe contenant  $A$ . On a de plus

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i \mid n \in \mathbb{N}, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in A^{n+1} \right\}$$

**Théorème 15** (Carathéodory). Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  - espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $A \subset E$  non vide. Alors en notant  $\text{conv}(A)$  l'enveloppe convexe de  $A$ , on a :

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot a_i \mid (\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in A^{n+1} \right\}$$

*Démonstration.* Soit  $B = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot a_i \mid (\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in A^{n+1} \right\}$

L'inclusion  $B \subset \text{conv}(A)$  est évidente

Soit  $a \in \text{conv}(A)$ . On peut fixer  $m \in \mathbb{N}$  et  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}_+^{m+1}$  et  $(a_i)_{0 \leq i \leq m} \in A^{m+1}$  tel que  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$  et  $a = \sum_{i=0}^m \lambda_i \cdot a_i$

Prenons le plus petit  $m$  vérifiant cette propriété et supposons  $m > n$ . Alors  $(a_i - a_0)_{1 \leq i \leq m}$  est liée dans  $E$  de dimension  $n$  donc on peut fixer  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m \setminus 0_{\mathbb{R}^m}$  tel que  $\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot (a_i - a_0) = 0$

Notons alors  $\alpha_0 = -\sum_{i=1}^m \alpha_i$ . On a donc  $\sum_{i=0}^m \alpha_i a_i = 0$  et par suite :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a = \sum_{i=0}^m (\lambda_i + t \alpha_i) \cdot a_i$$

Posons  $h = \min \left\{ -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \mid \alpha_i > 0 \right\}$  (existe car si tous les  $\alpha_i$  pour  $1 \leq i \leq m$  sont négatifs,  $\alpha_0 > 0$ ) et fixons  $j$  tel que  $h = -\frac{\lambda_j}{\alpha_j}$

Alors en notant  $\forall i \in \llbracket 0; m \rrbracket \setminus \{j\}, \mu_i = \lambda_i + h \alpha_i$ , on a  $a = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \mu_i \cdot a_i$ , et par construction  $\mu_i \geq 0$

De plus, comme  $\mu_j = 0$ ,

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \mu_i = \sum_{i=0}^m \mu_i = \sum_{i=0}^m \lambda_i + h \sum_{i=0}^m \alpha_i = \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$$

Donc on peut écrire  $a$  comme barycentre à coefficients positifs de  $m - 1$  points de  $E$ , ce qui contredit la minimalité de  $m$ . Donc  $m \leq n$  et  $a \in B$ . D'où le résultat.  $\square$

**Théorème 16** (Kakutani, 1941). *Soit  $C$  un ensemble convexe compact non vide d'un espace euclidien  $E$ , et  $f : C \rightrightarrows C$ . Si  $Gr(f)$  est fermé et si  $\forall x \in X$ ,  $f(x)$  est un convexe non vide, alors :*

$$\exists c \in C : c \in f(c)$$

*Démonstration.* On notera  $k = \dim E$  et pour  $x \in E$  et  $r > 0$ ,  $B(x, r)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

$C$  est compact, donc précompact, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p_n \in \mathbb{N}, \exists (x_i^n)_{1 \leq i \leq p_n} : C \subset \bigcup_{i=1}^{p_n} B(x_i^n, 1/n)$$

On note  $B^C(x_i^n, 1/n)$  le complémentaire dans  $E$  de  $B(x_i^n, 1/n)$ . Fixons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_i^n \in B^C(x_i^n, 1/n)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose

$$\forall x \in C, f^n(x) = \sum_{i=1}^{p_n} \frac{d(x, B^C(x_i^n, 1/n))}{\sum_{j=1}^{p_n} d(x, B^C(x_j^n, 1/n))} \cdot y_i^n$$

Cela a un sens car  $C \subset \bigcup_{i=1}^{p_n} B(x_i^n, 1/n)$  donc  $\forall x \in C, \exists i \in \llbracket 1; p_n \rrbracket : x \in B(x_i^n, 1/n)$  donc  $x \notin B^C(x_i^n, 1/n) = \overline{B^C(x_i^n, 1/n)}$  donc  $d(x, B^C(x_i^n, 1/n)) > 0$ .

Donc  $f^n$  est bien définie et continue sur  $C$  par continuité de la distance à un fermé en dimension finie, et par opération sur les limites.

De plus  $\forall i \in \llbracket 1; p_n \rrbracket, y_i^n \in C$  donc par convexité,  $\forall x \in C, f^n(x) \in C$ .

Donc selon le théorème de Brouwer, dont  $C$  et  $f^n$  vérifient bien les hypothèses,

$$\exists x^n \in C : f^n(x^n) = x^n$$

De plus,

$$\forall x \in C, d(x, B^C(x_i^n, 1/n)) > 0 \Leftrightarrow x \notin \overline{B^C(x_i^n, 1/n)} \Leftrightarrow d(x, x_i^n) < 1/n$$

On en déduit :

$$x^n = \sum_{i \in \{j \in \llbracket 1; p_n \rrbracket : d(x^n, x_j^n) < 1/n\}} \frac{d(x^n, B^C(x_i^n, 1/n))}{\sum_{j=1}^{p_n} d(x^n, B^C(x_j^n, 1/n))} \cdot y_i^n$$

$x^n$  appartient donc à  $\text{conv}(A)$  où  $A = \{y_i^n \mid 1 \leq i \leq p_n, d(x^n, x_i^n) < 1/n\}$ . Selon le théorème de Carathéodory, on peut fixer :

- $a^n = (a_0^n, \dots, a_k^n) \in \{x_1^n, \dots, x_{p_n}^n\}^{k+1}$  tel que  $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket, d(x^n, a_i^n) < 1/n$ ,
- $\lambda^n = (\lambda_0^n, \dots, \lambda_k^n) \in \mathbb{R}_+^{k+1}$  tel que  $\sum_{i=0}^k \lambda_i^n = 1$

—  $b^n = (b_0^n, \dots, b_k^n) \in \{y_1^n, \dots, y_{p_n}^n\}^{k+1}$  tel que  $\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket, b_i^n \in f(a_i^n)$  vérifiant :

$$x^n = \sum_{i=0}^k \lambda_i^n \cdot b_i^n \quad (3)$$

Comme  $C$  (et donc  $C^{k+1}$ ) est compact, ainsi que  $\Delta = \left\{ (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^{k+1}, \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \right\}$  et quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}, (x^n)_{n \in \mathbb{N}}, (a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergentes vers respectivement  $\lambda \in \Delta, x \in C, a = (a_0, \dots, a_k) \in C^{k+1}$  et  $b = (b_0, \dots, b_k) \in C^{k+1}$

De plus, soit  $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$ . Comme  $\forall n \in \mathbb{N}, d(x^n, a_i^n) < 1/n$ , par passage à la limite, on a  $d(x, a_i) = 0$  donc  $x = a_i$ .

Par ailleurs,  $Gr(f)$  est fermé donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_i^n, b_i^n) = (x, b_i) \in Gr(f)$ . Donc  $b_i \in f(x)$ .

Enfin, par passage à la limite dans (3), on a  $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i \cdot b_i$  donc, comme  $f(x)$  est convexe, on a  $x \in f(x)$  ce qui prouve le résultat. □

### 3.2 Enoncé et démonstration du théorème de Nash

Le théorème de Kakutani est extrêmement efficace pour démontrer le théorème de Nash. Nash l'a d'ailleurs utilisé dans son article original et popularisé par ce biais. On considère dans la suite de cette section un jeu fini à  $N$  joueurs d'ensemble de stratégies pures  $A^1, \dots, A^N$ , de cardinaux respectifs  $p_1, \dots, p_N$ . On note

$$\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, X^i = \left\{ \sum_{k=1}^{p_i} x_k \cdot a_k \mid (x_1, \dots, x_{p_i}) \in \mathbb{R}_+^{p_i}, \sum_{k=1}^{p_i} x_k = 1 \right\}$$

**Théorème 17** (Nash, 1950). *Tout jeu fini en stratégie mixtes admet un équilibre de Nash*

*Démonstration.* On définit pour  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket, BR^i : X^{-i} \rightrightarrows X^i$  telle que

$$\forall x^{-i} \in X^{-i}, BR^i(x^{-i}) = \left\{ y^i \in X^i \mid g^i(y^i, x^{-i}) = \max_{z^i \in X^i} g^i(z^i, x^{-i}) \right\}$$

On définit ensuite  $BR : X \rightrightarrows X$  telle que

$$\forall x \in X, BR(x) = \{ y \in X \mid \forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, y^i \in BR^i(x^{-i}) \}$$

$BR(x)$  est donc l'ensemble des  $y \in X$  tels que pour tout  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket, y^i$  est une meilleure réponse à  $x^{-i}$

Par définition d'un équilibre de Nash, un point fixe de  $BR$  sera donc un tel équilibre.

Soit  $x \in X$  et  $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ . Soit  $\phi_i : y^i \mapsto g^i(y^i, x^{-i})$ , linéaire donc continue (on est en dimension finie) sur  $X^i$ . De plus, comme  $X^i$  est compact,  $M_i = \max_{X^i} \phi_i$  existe et est atteint.

Donc  $BR^i(x^{-i}) = \{ y^i \in X^i \mid \phi_i(y^i) = M_i \}$  est non vide. Il est de plus trivialement convexe.

Enfin, soit  $(y_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Gr(BR)^{\mathbb{N}}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$ .

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket, \forall x^i \in X^i, g^i(z_n^i, y_n^{-i}) \geq g^i(x^i, y_n^{-i})$$

Donc par passage à la limite et continuité de  $g^i$ ,  $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $\forall x^i \in X^i$ ,  $g^i(z^i, y^{-i}) \geq g^i(x^i, y^{-i})$   
Donc  $(y, z) \in Gr(BR)$  qui est donc fermé.

Comme  $BR$  vérifie les hypothèses du théorème de Kakutani, on conclut à l'existence d'un point fixe, qui n'est autre qu'un équilibre de Nash.

□

*Remarque.* Il ne faut pas confondre l'existence d'un équilibre de Nash et le gain optimal pour chaque joueur : il existe des équilibres de Nash où certains joueurs n'ont pas un gain maximal

## 4 Recherche d'un point selle par des méthodes numériques

On se place dans le cadre d'un jeu à deux joueurs et à somme nulle. On suppose de plus que chaque joueur n'a que deux stratégies, comme dans le problème du gardien (exemple 2)

### 4.1 Expression explicite du point selle

Le jeu représenté dans un premier temps par

	y	1-y
x	a	c
1-x	b	d

où  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ .

La fonction de gain est

$$g(x, y) = axy + b(1-x)y + cx(1-y) + d(1-x)(1-y) = (a+d-c-b)xy + (c-d)x + (b-d)y + d$$

Elle est définie sur  $\mathbb{R}$  ouvert.

Un point selle au sens du cours d'analyse est en particulier un point critique ( $dg(x, y) = 0$ ). En résolvant le système (on considère que  $a + d - c - b \neq 0$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

on obtient un unique point critique  $(x_0, y_0) = \left( \frac{d-b}{a+d-c-b}, \frac{d-c}{a+d-c-b} \right)$

On a de plus selon la formule de Taylor-Young, comme  $df(x_0, y_0) = 0$

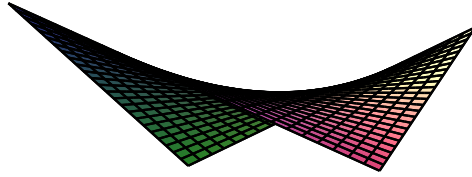
$$\forall H = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, g(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = g(x_0, y_0) + \frac{1}{2} {}^t H \times M \times H + o(\|H\|^2)$$

où  $M = \begin{pmatrix} 0 & a+d-c-b \\ a+d-c-b & 0 \end{pmatrix}$  (matrice hessienne). On vérifie alors par un calcul élémentaire que le terme  $o(\|H\|^2)$  est nul

Il est alors immédiat que  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, g(x, y_0) = g(x_0, y) = g(x_0, y_0)$  ce qui prouve en particulier que  $(x_0, y_0)$  est un point selle.

Représentons la fonction  $g$  dans le cas  $(a, b, c, d) = (2, 1, 2, 4)$ .  $\left( \frac{2}{3}, 1 \right)$  est un point selle





Si  $a + d - c - b = 0$ , on ne peut pas en général trouver de point selle par cette méthode, comme on peut s'en convaincre en écrivant le système d'équations précédent.

## 4.2 Généralisation du problème

Dans certains cas, il peut être plus approprié de considérer que les coefficients  $a, b, c, d$  ne sont pas constants, mais dépendent de  $x$  et de  $y$ .

La fonction de gain est ainsi de la forme

$$g(x, y) = a(x, y)xy + b(x, y)(1-x)y + c(x, y)x(1-y) + d(x, y)(1-x)(1-y)$$

Elle n'est plus quadratique comme précédemment, ce qui rend le problème plus intéressant. On va chercher, sous certaines conditions sur  $g$ , à réaliser un algorithme numérique calculant de manière approchée le point selle  $(x_*, y_*)$ , en supposant son existence.

La "direction" du point selle est imposée, ce sont les droites  $(Ox)$  et  $(Oy)$

On supposera également que la fonction varie de manière raisonnable.

### 4.2.1 Principe de l'algorithme

On se donne un entier  $m$  qui déterminera le pas d'approximation.

On part de  $a = 0$  et  $b = 1$

On va découper le segment  $[a; b]$  en  $m$  tranches et déterminer le maximum de la fonction  $x \mapsto g(x, \frac{i}{m})$  pour  $i \in \llbracket 0; m \rrbracket$  en découpant encore  $[0; 1]$  avec un pas  $m^2$

On prend ensuite le minimum, atteint pour un certain  $\alpha = a + \frac{i(b-a)}{m}$  de ces différents maximums. Puis on applique récursivement l'algorithme en réduisant, à quelques cas particuliers près, le segment d'étude à  $[a; b] := [\alpha - \frac{b-a}{m}; \alpha + \frac{b-a}{m}]$ , et en prenant toujours le même pas  $m$

Afin que l'algorithme termine, on se donne une précision de calcul souhaitée  $l$  qui permettra d'arrêter de faire un appel récursif quand  $b - a < l$ .

On calcule ainsi le minimax du jeu, s'il existe. Pour calculer le maximin, il suffit d'appliquer l'algorithme à  $(x, y) \mapsto -g(y, x)$ .

### 4.2.2 Implémentation en Maple

```
maximum := proc (f, i, a, b, m) local g, r, j;
```

```

g := x -> f(x, a+i*(b-a)/m);
r := 0;
for j to m^2 do
  if g(r) < g(j/m^2) then r := j/m^2 end if
end do;
r;
end proc;

```

La fonction maximum prend en argument la fonction de gain, un entier  $i$  indiquant de quelle fonction partielle on cherche le maximum, les bornes du segment  $[a; b]$  traité par la fonction Minimax, et la finesse du découpage  $m \in \mathbb{N}^*$ .

Elle compare alors  $m^2$  valeurs (le calcul doit être précis par rapport à la finesse du découpage pour que l'algorithme fonctionne) et retient le point où la plus grande d'entre elles est atteinte.

Cependant, si le maximum est atteint en plusieurs points (par exemple si la fonction est constante), le plus proche de 0 sera renvoyé.

```

Minimax := proc (f, m, a, b, l) local i, u, v, X, Y;
  X := maximum(f, 0, a, b, m);
  Y := a;
  for i to m do
    u := maximum(f, i, a, b, m);
    if f(u, a+i*(b-a)/m) < f(X, Y) then Y := a+i*(b-a)/m;
                                         X := u end if
  end do;
  if b-a <= l then Y
  elif Y-(b-a)/m <= a then Minimax(f, m, a, Y+(b-a)/m, l)
  elif b <= Y+(b-a)/m then Minimax(f, m, Y-(b-a)/m, b, l)
  else Minimax(f, m, Y-(b-a)/m, Y+(b-a)/m, l) end if
end proc;

```

Les arguments de Minimax incluent ceux de maximum, et  $l$  est la précision de calcul souhaitée. Elle compare les maximums des différentes fonctions partielles et renvoie une première approximation  $Y$  de  $y_*$ . Le  $X$  calculé ne correspond pas toujours à  $x_*$  à cause du défaut précédemment soulevé de la fonction maximum.

Si la précision du calcul est suffisante, la fonction renvoie  $Y = y_*$ , sinon, elle renvoie récursivement à un calcul sur un segment plus petit.

```

PointSelle := proc (f, m, a, b, l) local g, Y, X;
  g :=(x, y) -> -f(y, x);
  Y := Minimax(f, m, a, b, l);
  X := Minimax(g, m, a, b, l);
  X, Y, f(X, Y)
end proc;

```

Cette fonction utilise la fonction Minimax pour calculer le maximin et le minimax du jeu, et obtenir ainsi  $x_*$  et  $y_*$  et la valeur.

## Conclusion

Ce TIPE a permis de préciser les notions d'équilibre dans un jeu fini, en faisant appel à des puissants théorèmes de topologie des convexes. L'application de cette notion à l'économie n'est clairement pas à négliger, la plupart des théories économiques d'aujourd'hui s'appuyant sur une modélisation proche de la théorie des jeux pour décrire les situations économiques de concurrence, ou d'achat et de vente.

J'ai particulièrement apprécié ce travail, car il m'a permis de découvrir une théorie mathématique nouvelle partant d'une situation extrêmement concrète (comment jouer la meilleure stratégie dans un jeu donné ?). La puissance des outils utilisés permet de résoudre ces questions peu mathématiques au premier abord.

## Références

- [1] Marcel Berger. *Géométrie*, volume 2. Nathan, 1977.
- [2] Jean-Daniel Kant. Introduction à la théorie des jeux. [www-poleia.lip6.fr/~kant/Ens/IIIE/IIIE\\_Cours8.pdf](http://www-poleia.lip6.fr/~kant/Ens/IIIE/IIIE_Cours8.pdf), 2013. consulté le 19 mai 2014, hébergé par l'université Pierre et Marie Curie.
- [3] John Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Science*, (36), Janvier 1950.
- [4] Tristan Tomala. *Théorie des jeux, Introduction à la théorie des jeux répétés*, chapitre Jeux sous forme normale. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2006.
- [5] Guillaume Viger. Cours de théorie des jeux. [www.ceremade.dauphine.fr/~viger/PolycopieL3.pdf](http://www.ceremade.dauphine.fr/~viger/PolycopieL3.pdf), 2012. consulté le 19 mai 2014.