Calcul Matriciel

Exercices

4.1. Vrai ou faux

Vrai-Faux 4.1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies pour toutes matrices A et B et pourquoi ?

1. Si le produit AB est défini, alors le produit BA est défini.
2. Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit AB est défini.
3. Si le produit AB est défini, alors le produit ${}^tB\,{}^tA$ est défini.
4. Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit $A\,{}^tB$ est défini.
5. Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B$ est définie.
6. Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+{}^tB$ est définie.
7. Si les produits AB et ${}^tBA$ sont définis, alors la somme $A+{}^tA$ est définie.
8. Si les produits AB et ${}^tBA$ sont définis, alors la somme $A+{}^tB$ est définie.
9. Si le produit AB est défini, alors la somme $A\,{}^tA+B\,{}^tB$ est définie.
10. Si le produit AB est défini, alors la somme ${}^tA\,A+B\,{}^tB$ est définie.

Vrai-Faux 4.2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies pour toute matrice A et pourquoi ?

1. Si A est inversible, alors $A\,{}^tA={}^tA\,A$.
2. Si A est inversible, alors $A\,{}^tA$ est inversible.
3. Si A est inversible, alors $A+{}^tA$ est inversible.
4. Si A est inversible, alors A est équivalente à la matrice identité.
5. Si A est inversible, alors A est semblable à la matrice identité.

Vrai-Faux 4.3. Soit A une matrice carrée. On dit que A est *diagonale* si tous ses coefficients d'ordre (i,j) avec $i\neq j$, sont nuls. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies pour toute matrice carrée A et pourquoi ?

1. Si A est diagonale, alors A est inversible.

2. Si A est diagonale, alors A est symétrique.
3. Si A est diagonale et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.
4. Si A est diagonale, alors A est semblable à la matrice identité.
5. Si A est diagonale, alors A est équivalente à la matrice identité.

Vrai-Faux 4.4. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies et pourquoi ?

1. Si une matrice est de rang r, alors elle est équivalente à la matrice I_r
2. Une matrice est de rang r si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est de rang r.
3. Une matrice est de rang r si et seulement si la famille de ses vecteurs lignes est de rang r.
4. Si une matrice A est de rang r, alors toute matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r.
5. Si une matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r, alors A est de rang $\geqslant r$.
6. La matrice nulle est la seule matrice de rang 0.
7. Si deux lignes de A ne sont pas proportionnelles, alors le rang de A est au plus 2.
8. Si deux lignes de A sont proportionnelles, alors le rang de A est strictement inférieur à son nombre de colonnes.
9. Si une matrice carrée de $\mathscr{M}_r$, extraite de A est inversible, alors A est de rang $\geqslant r$.
10. Si A est de rang r, alors aucune matrice carrée de $\mathscr{M}_{r+1}$ extraite de A n'est inversible.
11. Si toute matrice carrée de $\mathscr{M}_r$, extraite de A est de rang r, alors A est de rang r.

4.2. Exercices

Exercice 4.1. Pour chacune des application linéaires suivantes de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$, écrire sa matrice dans les bases usuelles des espaces de départ et d'arrivée.

$$f(x,y,z) = x + 2y + 3z \qquad f(x) = (x, -x, 2x)$$
$$f(x,y) = (x+y, x-y) \qquad f(x,y,z) = (x+2y+3z, x+y+z, x-y-z)$$
$$f(x,y,z) = (x-2y, 3y) \qquad f(x,y,z,t) = (x+y-2z+t, x+y+t)$$

Exercice 4.2. Rappelons que $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ désigne l'espace vectoriel des applications polynomiales de degré au plus d. Soit D l'application de $\mathbf{R}[X]_{\leqslant 3}$ dans lui-même définie par $f(P) = P'$.

1. Vérifier que D est linéaire.
2. Écrire la matrice de D dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}[X]_{\leqslant 3}$.
3. Calculer M^4. Que pensez-vous de votre résultat ?
4. Trouver un analogue de la question précédente et le prouver si l'on change $\mathbf{R}[X]_{\leqslant 3}$ en $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ pour un entier d quelconque ?

Exercice 4.3. On considère les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver m et n tels que chacune des matrices représente une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ dans les bases usuelles. Écrire ces applications en termes des coordonnées.
2. Ecrire la transposée de chacune de ces matrices.
3. Etant données deux matrices A, B appartenant à l'ensemble ci-dessus, calculer ceux des produits $A\,B$, ${}^t\!A\,B$, $A\,{}^t\!B$, ${}^t\!A\,{}^t\!B$ qui sont définis.

Exercice 4.4. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Démontrer que $\varphi \circ \varphi(\vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_2) = 0$. Démontrer que $\varphi \circ \varphi(\vec{e}_3) = \varphi(\vec{e}_3)$.
2. En déduire A^2. Vérifier en effectuant le produit matriciel.

3. Démontrer que $A^3 = A^2$ sans effectuer le produit matriciel, puis vérifier en l'effectuant.
4. Donner une base de $\ker(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$

Exercice 4.5. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $\varphi \circ \varphi(\vec{e}_i)$, puis $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(\vec{e}_i)$.
2. En déduire que $A^2 = A^{-1}$. Vérifier en calculant le produit matriciel.

Exercice 4.6. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $\varphi \circ \varphi(\vec{e}_i)$, puis $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(\vec{e}_i)$.
2. En déduire A^2 et A^3.
3. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, donner une expression de $(I_3 + A)^k$ en fonction de k. Vérifier votre expression pour $k = 3$ en effectuant le produit matriciel.
4. Reprendre la question précédente pour $(I_3 - A)^k$, puis pour $(3I_3 - 2A)^k$.

Exercice 4.7. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $\varphi \circ \varphi(\vec{e}_i)$, en déduire que $\varphi \circ \varphi = 3\varphi$.
2. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, démontrer par récurrence que $\varphi^{\circ k} = 3^{k-1}\varphi$.
3. En déduire l'expression de A^k en fonction de k.

4. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, donner une expression de $(I_3 + A)^k$ en fonction de k. Vérifier votre expression pour $k = 3$ en effectuant le produit matriciel.
5. Reprendre la question précédente pour $(I_3 - A)^k$, puis pour $(3I_3 - 2A)^k$.

Exercice 4.8. On rappelle qu'une matrice carrée est symétrique si elle est égale à sa transposée. On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices carrées symétriques. On dit qu'une matrice carrée est *antisymétrique* si elle est l'opposée de sa transposée : ${}^tA = -A$. On note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques.

1. Démontrer que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.
2. Démontrer que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n$.
3. Soit A une matrice carrée quelconque. Démontrer que $A + {}^tA$ est symétrique et $A - {}^tA$ est antisymétrique.
4. Soit A une matrice carrée. Démontrer qu'elle s'écrit d'une et d'une seule façon comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
5. Démontrer que le produit de deux matrices symétriques A et B est symétrique si et seulement si $AB = BA$ (on dit que A et B « commutent »).
6. Démontrer que le produit de deux matrices antisymétriques A et B est antisymétrique si et seulement si $AB = -BA$.
7. Soit A une matrice inversible. Démontrer que ${}^tA$ est inversible et que son inverse est ${}^t(A^{-1})$.
8. Soit A une matrice symétrique et inversible. Démontrer que son inverse est symétrique.
9. Soit A une matrice antisymétrique et inversible. Démontrer que son inverse est antisymétrique.
10. Démontrer qu'aucune matrice de $\mathscr{A}_3$ n'est inversible.

Exercice 4.9. On appelle *trace* d'une matrice carrée la somme de ses éléments diagonaux. On note $\mathrm{tr}(A)$ la trace de $A \in \mathscr{M}_n$.

1. Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n$. Démontrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. En déduire que deux matrices carrées semblables ont la même trace.
3. Soit A une matrice carrée non nulle. Démontrer que les traces de $A\,{}^tA$ et ${}^tA\,A$ sont strictement positives.

Exercice 4.10. Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.11. Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.12. Pour chacune des matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer selon les valeurs de λ le rang de la matrice $A - \lambda I_2$.
2. On note λ_1 et λ_2 les deux réels tels que le rang de $A - \lambda_i I_2$ est 1. Pour $i = 1, 2$, déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire
$$(A - \lambda_i I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
On note $\vec{v}_i$ un vecteur non nul solution de ce système.
3. Démontrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ à la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Calculer P^{-1}. Démontrer que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$
5. Démontrer que la matrice $(A-\lambda_1 I_2)(A-\lambda_2 I_2)$ est nulle. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A et I_2.
6. En utilisant l'expression de la question précédente, vérifier que
$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{pmatrix} .$$
7. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, donner une expression de A^k en fonction de k.

Exercice 4.13. Pour chacune des matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer selon les valeurs de λ le rang de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les trois réels tels que le rang de $A - \lambda_i I_3$ est 2. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$(A - \lambda_i I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   On note $\vec{v}_i$ un vecteur non nul solution de ce système.
3. Démontrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Calculer P^{-1}. Démontrer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} .$$

5. Démontrer que la matrice $(A - \lambda_1 I_3)(A - \lambda_2 I_3)(A - \lambda_3 I_3)$ est nulle. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.
6. En utilisant l'expression de la question précédente, vérifier que

$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{pmatrix} .$$

7. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, donner une expression de A^k en fonction de k.