Feuille de TD Mat201: Chapitre 3

1 Entraînement

Exercice 1.1 Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont génératrices, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $((1,1,0),(0,1,1))$
2. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$
3. $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$
4. $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$
5. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$

Exercice 1.2 Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, lesquelles sont libres, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $((1,1,0),(0,1,1))$
2. $((1,1,0),(-1,-1,0))$
3. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$
4. $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$
5. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$

Exercice 1.3 Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, lesquelles sont libres, lesquelles ne le sont pas, et pourquoi ?

1. $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1))$
2. $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-1,4,-6,0))$
3. $((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$
4. $((0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1))$
5. $((1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1))$

Exercice 1.4 Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les paramètres réels a et b pour que les familles suivantes soient des bases de $\mathbb{R}^3$.

1. $((1,1,1),(0,a,1),(0,0,b))$
2. $((1,0,1),(a,b,1),(b,a,1))$
3. $((1,a,b),(a,1,a),(b,b,1))$
4. $((a,a,b),(a,b,a),(b,a,a))$
5. $((0,a,b),(a,0,b),(a,b,0))$

Exercice 1.5 Dans un espace vectoriel E montrer que :

1. La famille vide est libre,
2. La famille (x) à un élément est libre ssi $x \neq 0$,
3. Toute famille contenue dans une famille libre est libre,
4. Toute famille contenant une famille liée est liée,
5. En particulier toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Exercice 1.6 Les familles suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont elles libres ?

1. $(f_1 : x \mapsto \cos x, \quad f_2 : x \mapsto \sin x, \quad f_3 : x \mapsto 1)$
2. $(f_1 : x \mapsto \cos^2 x, \quad f_2 : x \mapsto \cos 2x, \quad f_3 : x \mapsto 1)$
3. $(f_1 : x \mapsto |x-1|, \quad f_2 : x \mapsto |x|, \quad f_3 : x \mapsto |x+1|)$

Exercice 1.7 Montrer par récurrence que les familles suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont libres. On pourra utiliser la dérivation.

1. $(f_k : x \mapsto \sin kx)_{k\in\{1,\dots,n\}}$
2. $(f_k : x \mapsto e^{\lambda_k x})_{k\in\{1,\dots,n\}}$, où les $(\lambda_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ sont des réels deux à deux distincts.

Exercice 1.8 Dans chacun des cas suivants, montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées du vecteur u dans cette base.

1. $\mathcal{B} = ((1,0,-1),(0,1,1),(0,0,1))$, $u = (1,2,3)$
2. $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1))$, $u = (1,2,3)$

Exercice 1.9 Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}_0 = (e_1,e_2,e_3)$ une base de E. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1+e_2, e_1+e_3, e_2+e_3)$ est une base de E. Donner les coordonnées des vecteurs e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 1.10 Déterminer la dimension et donner une base de chacun des espaces vectoriels suivants :

1. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x+y=0\}$
2. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x=y\}$
3. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x+y+z=0\}$
4. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x=y=z\}$

Exercice 1.11 Compléter les familles libres suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

1. $((1,1,1))$
2. $((1,1,0))$
3. $((1,1,1),(1,-1,-1))$
4. $((1,1,0),(1,-1,0))$
5. $((1,1,0),(1,1,1))$
6. $((1,1,0),(1,-1,1))$

Exercice 1.12 Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, déterminer son rang et donner une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

1. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2))$
2. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2),(0,1,0),(1,1,1),(1,-2,1))$
3. $((1,0,1),(-1,0,-1),(2,0,2),(0,1,0),(1,1,1),(1,-2,-1))$
4. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,2))$
5. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,2,1,0))$
6. $((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,0),(0,1,0,1),(1,2,1,0))$

Exercice 1.13 On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \mathrm{vect}((1,0,-1),(1,1,0)),\ \ G = \mathrm{vect}((1,-1,0),(-1,1,-1)),(1,-1,-1)).$$

Déterminer $\dim F$, $\dim G$ et $\dim(F\cap G)$. Donner une base de $F \cap G$.

Exercice 1.14 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Montrer que la famille $(1, X, X^2, ..., X^n)$ est une base du sous-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ (polynômes de degré inférieur ou égal à n).
2. Montrer que toute famille finie de polynômes de degrés tous distincts est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 1.15 Déterminer une base du noyau et de l'image des applications $\mathbb{R}$-linéaires suivantes.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (y - z, z - x, x - y)$.
2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z, t) \mapsto (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$
3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z + i\overline{z}$ ($\mathbb{C}$ est ici vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Exercice 1.16 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et f une application linéaire de E dans F. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. L'image par f du vecteur nul de E est le vecteur nul de F.
2. L'image par f d'une famille libre dans E est toujours une famille libre dans F.
3. L'image par f d'une famille liée dans E est toujours une famille liée dans F.
4. L'image par f d'une famille génératrice dans E est toujours une famille génératrice dans F.
5. Si $\dim(E) > \dim(F)$ alors $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$.
6. Si $\dim(E) > \dim(F)$ alors f est surjective.
7. Si $\dim(E) < \dim(F)$ alors f est injective.
8. Si f est bijective, alors $\dim(E) = \dim(F)$

2 Exercices théoriques

Exercice 2.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On appelle *hyperplan* de E tout sous-espace vectoriel H de E tel que $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

1. Soit H un hyperplan de E et soit $x_0 \in E \setminus H$. Montrer que $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.
2. Soit F un sous-espace de E. Montrer que

$$\dim(F \cap H) = \begin{cases} \dim(F) & \text{si} \quad F \subset H \\ \dim(F) - 1 & \text{si} \quad F \not\subset H. \end{cases}$$

   Indication. Si $F \not\subset H$, soit $x_0 \in F \setminus H$. Montrer que $F = (F \cap H) \oplus \mathbb{K}x_0$.

3. Soient H_1, H_2 deux hyperplans de E distincts (ce qui entraîne $\dim(E) \geq 2$). Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(E) - 2$.

Exercice 2.2 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on définit la i-ième application coordonnée L_i comme l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à $v \in E$ associe le réel x_i qui est la i-ième coordonnée de v sur la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $L_i(x) = x_i$.

1. Montrer que les L_i sont des applications linéaires.
2. Montrer que le noyau de L_i est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de E (hyperplan).
3. On prend $E = \mathbb{R}^3$ et $b_1 = (1, 0, -1),\ b_2 = (0, 2, 3),\ b_3 = (0, 0, 1)$. Montrer que (b_1, b_2, b_3) est une base de E. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer l'image par L_i d'un vecteur $v = (x, y, z)$ quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.3 Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1. On suppose que $f \circ f$ est l'application nulle. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. On suppose que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Montrer que n est nécessairement pair.
3. On suppose que f n'est pas l'application nulle et qu'il existe un entier k tel que $f^{\circ k}$ (composée de f avec elle-même k fois) est l'application nulle (on dit que f est *nilpotente*). Soit m le plus petit entier tel que f^m est l'application nulle. Montrer qu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que $f^{\circ m}(v) \neq 0$. Pour un tel vecteur v, montrer que la famille de vecteurs $(v, f(v), \ldots, f^{\circ(m-1)})$ est libre.
4. En déduire que si f est nilpotente, alors $f^{\circ n}$ est l'application nulle.

Exercice 2.4 Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires dans E
2. $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$
3. $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$
4. $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$.

Exercice 2.5 Soient E, F, G, H quatre $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $h \in \mathcal{L}(G, H)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} g)$ (appliquer le théorème du rang à la restriction de g à $\mathrm{Im} f$).
2. En déduire que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim F \leq \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) + \mathrm{rg}(h \circ g) \leq \mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(h \circ g \circ f)$ (réutiliser le résultat de la question 1.).