Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Dans ce dernier cas, expliciter la bijection réciproque.

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n, \quad f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2, \quad f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2, \quad f_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y) = (x + y, 3x - y, 2x + y)$.

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f.
2. Si f est bijective, déterminer f^{-1}.
3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. À quelle condition a-t-on $(a, b, c) \in f(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 3. 0n considère l'application f de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + y - z, 2x - y + z).$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de f.
2. Si f est bijective, déterminer f^{-1}.
3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. À quelle condition a-t-on $(a, b, c) \in f(\mathbb{R}^3)$?

Exercice 4. Soit $E = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments.

1. Construire sur E une loi de composition interne commutative mais non associative.
2. Construire sur E une loi de composition interne associative mais non commutative.
3. Construire sur E une loi de groupe.

Exercice 5. Montrer que les structures suivantes sont des groupes.

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$.
2. $(\{-1, 1\}, \times)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$.
3. $(\mathcal{S}(E), \circ)$, où E est un ensemble fini et $\mathcal{S}(E)$ est l'ensemble des bijections de E. Remarque : si $E = \{1, \ldots, n\}$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble $\mathcal{S}(E)$.

Exercice 6. Les ensembles suivants sont-il des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$? de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$?

$\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}^*_+$, $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé), l'ensemble $D = \{k/10^n : (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ des nombres décimaux, l'ensemble D^* des nombres décimaux non nuls ?

Exercice 7. Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on note $x * y = x + y - xy$.

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne commutative et associative sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $*$ admet un élément neutre e que l'on précisera.
3. Montrer que tout élément $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet un symétrique x' que l'on déterminera.
4. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ? $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *, e)$ est-il un groupe ?
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel n on note $x^{*n} = x * \cdots * x$ le produit de x par lui même pour la loi $*$ dans lequel il y a n occurences de x (par convention, $x^{*0} = e$). Montrer que $x^{*n} = 1 - (1-x)^n$.

Exercice 8. Exemples de lois internes.

1. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, on pose $x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$. Montrer que $*$ est une loi de composition interne commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.
2. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, on pose $x * y = \sqrt{x^2+y^2}$. Montrer que $*$ est une loi de composition interne commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de $\mathbb{R}^{+*}$ n'a de symétrique pour $*$.
3. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, on pose $x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Montrer que l'application $x \mapsto x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$. En déduire que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une bijection. Pour tous x et y dans I on pose $x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$

1. Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif. Expliciter le neutre, et le symétrique d'un élément $x \in I$ pour la loi $*$.
2. Donner la loi $*$ dans les cas suivants :
   (a) $I =]0, +\infty[, f(x) = \ln(x)$;
   (b) $I = \mathbb{R}, f(x) = 1 + x$;
   (c) $I = \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ fixé) ;
   (d) $I =]-1, 1[, f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$.

Exercice 10. Soit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Montrer que G est un groupe pour la loi définie par $(x, y) * (x', y') = (x'y + x/y', yy')$. Est-il abélien ?

Exercice 11. Soient $(G_1, *), (G_2, \star)$ deux groupes. Montrer que $G_1 \times G_2$ est un groupe pour la loi définie par $(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 * g_1', g_2 \star g_2')$.

Exercice 12. Soit $H = \{a + b\sqrt{3} : (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ a^2 - 3b^2 = 1\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 13. Soit $\mathbb{U}_4$ est l'ensemble des racines quatrièmes de l'unité.

1. Écrire la table du groupe $(\mathbb{U}_4, \times)$. À quoi voit-on que ce groupe est abélien ?

$\times$	1	i	-1	$-i$
1				
i				
-1				
$-i$				

2. Trouver un sous-groupe du groupe $(\mathbb{U}_4, \times)$ autre que $\{1\}$ et $\mathbb{U}_4$.

Exercice 14. On considère les éléments suivants de $\mathcal{S}_5$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varrho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances successives de σ, ϱ, $\sigma \circ \varrho$. Indication : on pourra écrire dans un tableau les images de $1, 2, 3, 4, 5$ par les puissances successives de σ, ϱ, $\sigma \circ \varrho$ et montrer qu'on obtient des suites périodiques.

Exercice 15. Soit E un ensemble ayant au moins deux éléments. Lorsque a et b sont deux éléments de E distincts, on définit l'application $\tau_{a,b} : E \to E$ par $\tau_{a,b}(a) = b$, $\tau_{a,b}(b) = a$ et $\tau_{a,b}(x) = x$ pour tout $x \in E \setminus \{a, b\}$. Une telle application s'appelle transposition.

1. Déterminer $\tau_{a,b} \circ \tau_{a,b}$. En déduire que $\tau_{a,b}$ est une permutation de E.
2. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}(E)$, $\sigma \circ \tau_{a,b} \circ \sigma^{-1} = \tau_{\sigma(a),\sigma(b)}$.
3. On prend $E = \{1, \ldots, 7\}$. Écrire la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

comme composée de transpositions. Indication : passer de 1 2 3 4 5 6 7 à 3 4 6 7 2 1 5 en n'échangeant que deux éléments à chaque étape.

Exercice 16. Les ensembles suivants muni des lois considérées sont-ils des groupes, des groupes abéliens ?

1. $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la loi $\circ$, où f_1, f_2, f_3, f_4 sont les applications de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définies par $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = 1/x$, $f_4(x) = -1/x$.
2. $G = \{f_{a,b}(x) : (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$ muni de la loi $\circ$, où $f_{a,b}$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_{a,b}(x) = ax + b$.
3. L'ensemble C des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition.

Exercice 17. Soit $(G, *)$ un groupe, de neutre e.

1. Montrer que G et $\{e\}$ sont des sous-groupes de G.
2. Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de G est un sous-groupe de G.
3. On appelle centre de G l'ensemble $Z(G) = \{z \in G : \forall g \in G, z * g = g * z\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G, et que $Z(G)$ est un groupe abélien.

Exercice 18. Les applications suivantes sont-elles des morphismes de groupe ?

1. $f : x \to 2x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto 2x$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.
3. $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.
5. $f : x \mapsto \ln x$ de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
6. $f : x \mapsto \exp(x)$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
7. $f : x \mapsto \exp(x)$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
8. $f : n \mapsto 2^n$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
9. $f : z \mapsto \bar{z}$ de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}, +)$.
10. $f : z \mapsto \bar{z}$ de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
11. $f : z \mapsto 1/z$ de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 19. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Un élément $a \in A$ est dit inversible s'il existe $a' \in A$ tel que $aa' = 1_A$. Soit $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de A.

1. Déterminer $A^\times$ dans les cas suivants : $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{R}$, $A = D$ (ensemble des nombres décimaux).
2. Montrer que $(A^\times, \times)$ est un groupe.

Exercice 20. Soit $A = \{a + b\sqrt{2}; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Soit $z \in A$. Montrer que z a une unique écriture sous la forme $z = a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire que si l'on a $z = a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$ avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^4$, alors $a = a'$ et $b = b'$. On pourra utiliser le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Montrer que $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
3. Soit $\phi : A \to A$ l'application qui à un élément $z = a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ associe $\phi(z) = a - b\sqrt{2}$. Montrer que ϕ est un automorphisme de l'anneau A (autrement dit ϕ est une bijection de A dans A, $\phi(1) = 1$, et ϕ est un morphisme pour chacune des deux lois $+$ et $\times$).
4. Pour tout $z \in A$, on pose $N(z) = z\phi(z)$. Montrer que $N(z) \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in A$, on a $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

5. Soit $z \in A$. Démontrer que z est un élément inversible de A si et seulement si $N(z) = \pm 1$. Dans ce cas, quel est son inverse ?
6. Déterminer si -1, $\sqrt{2}$ et $g := 1 + \sqrt{2}$ sont inversibles dans A et si oui, donner leur inverse. En déduire que $\{\pm g^n : n \in \mathbb{Z}\} \subset A^\times$.
7. On se propose de montrer l'inclusion réciproque. Soit $z = a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que $z \in A^\times$.
   (a) Montrer que $a \neq 0$.
   (b) Quelles sont les valeurs possibles pour a et pour z si $b = 0$?
   (c) Montrer que si a et b sont de même signe (au sens strict) alors $|z| \geq g$.
   (d) En déduire que si sont de signes opposés (au sens strict) alors $|z| \leq 1/g$.
   (e) Déduire des questions précédentes que g est le plus petit élément de $A^\times \cap]1, +\infty[$.
   (f) Soit n la partie entière de $\ln |z| / \ln g$. Montrer que $|z|g^{-n} \in A^\times \cap [1, g[$ et en déduire que $z = \pm g^n$.

Exercice 21. Soit K un corps. Montrer les propriétés suivantes

1. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Pour tous P et Q dans $K[X]$, $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
3. Pour tous P et Q dans $K[X]$, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$. En déduire que $PQ = 0$ si et seulement si $P = 0$ ou $Q = 0$.

Exercice 22. On pose $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour $n \geqslant 2$, on définit le n-ième polynôme de Tchebychev T_n par la relation de récurrence $T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$.

1. Calculer T_2, T_3 et T_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le terme dominant du polynôme T_n est $2^{n-1}X^n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$. En déduire les racines de T_n.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2 T_n = 0$. Indication : dériver par rapport à θ l'égalité $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Exercice 23. Soit K un corps. Soient $P \in K[X]$ et a, b deux éléments de K distincts.

1. Montrer que $(X - a)(X - b)$ divise P si et seulement si $P(a) = P(b) = 0$.
2. Généraliser.
3. On note Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$. Montrer que $R = P(a) + P'(a)(X - a)$.
4. À quelle condition $(X - a)^2$ divise-t-il P ?

Exercice 24. Soit n un entier strictement positif. On se place dans l'anneau des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $X-1$ divise X^n-1.
2. Montrer X^2+2X divise $(X+1)^{2n}-1$.
3. Montrer que X^2 divise $(X+1)^n-nX-1$.
4. Montrer que $(X-1)^2$ divise $X^n-nX+n-1$.
5. Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$.
6. On note
$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}X^k.$$
Montrer que $(X-1)^2$ divise $S_n^2-n^2X^{n-1}$. Calculer $(X-1)S_n$.
7. Montrer que $(X-1)^3$ divise $nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$

Exercice 25. Dans $\mathbb{R}[X]$, effectuer la division euclidienne de A par B pour les couples (A,B) suivants.

1. $A=X^2-1$, $B=X-1$
2. $A=X^3-1$, $B=X^2+1$
3. $A=X^4-1$, $B=X^2+1$
4. $A=X^4-2X^2+1$, $B=X^2-2X+1$
5. $A=X^4-X^3+X-2$, $B=X^2-2X+4$
6. $A=X^4+2X^3-X+6$, $B=X^3-6X^2+X+4$
7. $A=3X^5+4X^2+1$, $B=X^2+2X+3$
8. $A=3X^5+2X^4-X^2+1$, $B=X^3+X+2$
9. $A=X^5-X^4+2X^3+X^2+4$, $B=X^2-1$
10. $A=X^6-3X^4+3X^2-1$, $B=X^2-X$
11. $A=X^6-X^5+X^2-1$, $B=X^3-X$
12. $A=X^6-2X^4+X^3+1$, $B=X^3+X^2+1$

Exercice 26. Soient a,b,c trois réels distincts. On note $M=(X-a)(X-b)(X-c)$ et
$$A=\frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)},\quad B=\frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)},\quad C=\frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}.$$
Soient $P\in\mathbb{R}[X]$, Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par M.

1. Montrer que les polynômes P et R coïncident aux points a, b, c.
2. Calculer les valeurs des polynômes A, B, C aux points a, b, c.
3. En déduire que $P(a)A+P(b)B+P(c)C=R$.