

Lemme de Morse

Leçons : 158, 170, 171, 214, 215, 218

Théorème 1

Soit U ouvert de \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ est une forme bilinéaire non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe V, W voisinages ouverts de 0 et un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow W$ tels que $\forall x \in V, f(x) = Q_0(\varphi(x))$ où $Q_0(y_1, \dots, y_n) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2$.

Lemme 2

Si $A_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, \text{GL}_n(\mathbb{R}))$ tel que $\forall A \in V, A = {}^t\rho(A)A_0\rho(A)$.

Démonstration. Soit $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Cette fonction est de classe \mathcal{C}^1 et sa

$$M \longmapsto {}^tMA_0M$$

différentielle en l'identité est $D\psi(I_n) : H \mapsto {}^tHA_0 + A_0H$ (différentielle d'une application bilinéaire).

Donc $\ker D\psi(I_n) = A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donc selon le théorème d'inversion local appliqué à $\tilde{\psi} = \psi|_{A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$, il existe U voisinage de $I_n = A_0A_0^{-1}$ dans $A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, V voisinage de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $\tilde{\psi} : U \rightarrow V$ soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

Or, $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\tilde{U} = U \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert (non vide car contenant I_n). L'inverse de la restriction de $\tilde{\psi}$ à cet ouvert fournit une application ρ de classe \mathcal{C}^1 de \tilde{V} voisinage de A_0 dans $\tilde{U} \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall A \in \tilde{V}, A = \tilde{\psi}(\rho(A)) = {}^t\rho(A)A_0\rho(A)$. □

Démonstration (du théorème). Notons, pour $x \in U$, $H(x)$ la matrice hessienne de f en x . Selon la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, applicable car f est de classe \mathcal{C}^2 , on a

$$\forall x \in U, f(x) = \int_0^1 (1-t) {}^tx H(tx) x dt = {}^tx \left(\int_0^1 (1-t) H(tx) \right) x = {}^tx Q(x) x$$

où Q est une matrice réelle symétrique et $Q(0) = \frac{H(0)}{2}$ est une matrice symétrique inversible de signature $(p, n-p)$.

Selon le lemme précédent, il existe un voisinage V de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, \text{GL}_n(\mathbb{R}))$ tels que $\forall A \in V, {}^t\rho(A)Q(0)\rho(A)$.

Or, $x \mapsto Q(x)$ est continue sur U puisque f est de classe \mathcal{C}^3 donc il existe un voisinage V_0 de 0 dans U tel que $\forall x \in V_0, Q(x) \in V$.

Donc $\psi : x \in V_0 \mapsto \rho(Q(x))$ est telle que $\forall x \in V_0, Q(x) = {}^t\psi(x)Q(0)\psi(x)$ donc

$f(x) = {}^t\varphi(x)I_{p,n-p}\varphi(x)$ où $I_{p,n-p} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$, $Q(0) = {}^tPI_{p,n-p}P$ (théorème de Sylvester) et $\varphi : x \mapsto P\rho(Q(x))x$.

Montrons finalement que $\varphi : V_0 \rightarrow W_0 = \varphi(V_0)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme à l'aide du théorème d'inversion locale.

$\forall h \in V_0, \varphi(h) - \varphi(0) = P(\psi(0) + D\psi(0).h + o(\|h\|))h = P\psi(0)h + o(\|h\|)$ car $D\psi(0)$ est une application linéaire continue. Donc la matrice jacobienne de φ en 0 est $P\psi(0) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, de sorte que φ est le \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local attendu. \square

Remarque. • Le résultat est en fait vrai pour une fonction de classe \mathcal{C}^2 , mais la démonstration est plus subtile.

- La preuve peut être faite de manière plus concise avec le théorème des submersions.

Référence : François ROUVIÈRE (2003). *Petit guide de calcul différentiel*. 2^e éd. Cassini, p. 344