

# CONTRÔLE CONTINU 4

4 MAI 2020

*Durée : 45 minutes. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient. La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la précision des justifications seront prises en compte dans la notation (2 points). Le barème est indicatif.*

**Exercice 1.** (14 points)

Soient  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$  et  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z\}$ . On **admet** que  $P$  et  $D$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .

- 1) Calculer une base de  $P$  et une base de  $D$ . Quelle est la dimension de  $P$ ? De  $D$ ? De quels objets géométriques s'agit-il?
- 2) Montrer que  $P \oplus D = \mathbb{R}^3$ .
- 3) Soient  $(v_1, \dots, v_{\dim P})$  et  $(u_1, \dots, u_{\dim D})$  les bases respectives de  $P$  et  $D$  calculées à la question 1). Montrer que

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_{\dim P}, u_1, \dots, u_{\dim D})$$

est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- 4) Soit  $f$  la projection de  $\mathbb{R}^3$  sur  $P$  parallèlement à  $D$  et  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Calculer  $f(x, y, z)$ .
- 5) En déduire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base usuelle de  $\mathbb{R}^3$ .
- 6) Écrire la matrice  $A'$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}$ .
- 7) A l'aide de la formule de changement de base, donnez une équation matricielle reliant  $A$  et  $A'$ .

**Exercice 2.** (9 points)

On définit sur l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_2[X]$

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

- 1) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

(Indication : on pourra utiliser librement le fait que, si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et positive, alors  $\int_0^1 f(t)dt = 0$  si et seulement si  $f$  est la fonction nulle sur  $[0, 1]$ ).

On note  $\|P\| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$  pour  $P \in E$ .

- 2) Le but de cette question est de construire une base orthonormée, c'est à dire une famille  $(u_1, \dots, u_{\dim E})$  telle que  $\langle u_i, u_j \rangle$  vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon.

a) Rappeler (sans justifier) quelle est la dimension de  $E$ , donner une base de  $E$ .

b) Soit  $i \in \{0, \dots, 4\}$ . Justifier brièvement que  $\int_0^1 t^i dt = \frac{1}{i+1}$ .

c) On pose  $u_1 = 1$ . Trouver  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $u_2 := a + bX$  vérifie  $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$  et  $\|u_2\| = 1$ .

d) Trouver  $c, d, e \in \mathbb{R}$  tels que  $u_3 := c + dX + eX^2$  vérifie  $\langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$  et  $\|u_3\| = 1$ .