Applications linéaires

Exercices

3.1. Exercices

Exercice 3.1. Parmi les applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définies par les relations qui suivent, déterminer lesquelles sont linéaires.

$$\begin{array}{lll} f_1(x,y) = (x+y, x-y) & f_2(x,y) = (|x|+|y|, 2) & f_3(x,y) = (x, -y) \\ f_4(x,y) = (xy, y) & f_5(x,y) = (x-y+1, x) & f_6(x,y) = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right) \end{array}$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

Exercice 3.2. Pour chacune des applications ci-dessous, démontrer qu'elle est linéaire, et determiner son noyau, son image ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, 3x-y) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, -4x-6y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x+y-z) \end{array}$$

Exercice 3.3. Soit f une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$.

1. Rappeler la définition de « f est injective » (resp. surjective, bijective).
2. (Question de cours) Démontrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
3. On suppose dans cette question que $n = m$. Démontrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.
4. Démontrer que si f est injective alors $n \leqslant m$.
5. Démontrer que si f est surjective alors $n \geqslant m$.
6. Les réciproques des deux implications précédentes sont elles vraies ?

Exercice 3.4. Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs F. On note φ l'unique application de E dans F telle que $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{u}_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

1. (Question de cours) Déterminer l'image par φ d'un point de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.
2. Démontrer que φ est injective si et seulement si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille libre.
3. Démontrer que φ est surjective si et seulement si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille génératrice de F.

Exercice 3.5. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E. La famille $(\varphi(\vec{u}_1), \ldots, \varphi(\vec{u}_n))$ est appelée *l'image* de la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ par l'application φ.

1. Démontrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.
2. Démontrer que l'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est génératrice.
3. Démontrer qu'une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle envoie une base sur une base.

Exercice 3.6. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On définit par récurrence $f^{\circ k}$ de la façon suivante : $f^{\circ 0} = \mathrm{Id}_E$ et, si $n \geqslant 1$, $f^{\circ n} = f \circ f^{\circ(n-1)}$. En particulier $f^{\circ 1} = f$. On dit que f est *nilpotente* s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $f^{\circ k}$ est l'application constante nulle. L'ordre de nilpotence de f est alors le plus petit entier $m \geqslant 1$ tel que $f^{\circ m} = 0$.

1. On suppose que $f \circ f$ est l'application constante nulle. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. Démontrer la réciproque.
3. On suppose que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$. Démontrer que la dimension n est un entier pair.
4. On suppose maintenant que $n \geqslant 1$ et que f est nilpotente d'ordre m. Démontrer qu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que $f^{\circ(m-1)}(v) \neq 0$. Pour un tel vecteur v démontrer que $(v, f(v), \ldots, f^{\circ(m-1)}(v))$ est libre.
5. En déduire que si f est nilpotente, alors $f^{\circ n} = 0$.

Exercice 3.7. Rappelons que $\mathbf{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

1. Démontrer que la dérivation $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$.
2. Déterminer son image.
3. Déterminer son noyau.
4. L'application D est-elle surjective, injective, bijective ?
5. En utilisant un raisonnement par l'absurde, déduire de la question précédente que l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 3.8. Dans chacun des exemples suivants, justifier rapidement pourquoi la partie considérée est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$, en donner la dimension et trouver une base du sous-espace vectoriel.

1. $E = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0 \,\}$.
2. $F = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y \,\}$.
3. $G = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0 \,\}$.
4. $H = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y = z \,\}$.

Exercice 3.9. Polynômes d'interpolation de Lagrange. Soit $d \in \mathbf{N}$. On rappelle que $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ désigne l'ensemble des applications $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles qu'il existe des nombres réels $(a_0, \ldots, a_d)$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k.$$

On note $\boldsymbol{t} = (t_0, \ldots, t_d)$ une famille de $d + 1$ nombres réels deux à deux distincts. On note $\text{év}_{\boldsymbol{t}}$ l'application de $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ dans $\mathbf{R}^{d+1}$ qui envoie une application P sur le $(d+1)$-uplet $(P(t_0), P(t_1), \ldots, P(t_d))$.

1. Démontrer que $(1, \ldots, X^d)$ est une base de $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$, quelle est la dimension de cet espace ?
2. Démontrer que $\text{év}_{\boldsymbol{t}}$ est linéaire.
3. On considère l'application polynomiale P_i donnée par

$$t \longmapsto \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant d \\ k \neq i}} \frac{t - t_k}{t_i - t_k}$$

   (a) Déterminer $\text{év}_{\boldsymbol{t}}(P_i)$.

   (b) Que peut-on en déduire sur l'application $\text{év}_{\boldsymbol{t}}$?

   (c) Que peut-on dire de la famille $(P_0, \ldots, P_d)$?

Exercice 3.10. Dans l'exercice 2.8, on a défini l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ formé des suites de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tel que $\{n \in \mathbf{N} \mid a_n \neq 0\}$ est fini. Soit $P = (a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ un élément de $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$. On note $p \in \mathbf{N}$ un entier tel que $a_k = 0$ si $k > p$. On considère l'application f_P de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$. Démontrer que l'application $P \mapsto f_P$ définit un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ sur l'espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 3.11* On note $\mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont deux fois dérivables et dont la dérivée seconde f'' est continue. On note a, b des nombres réels.

1. Démontrer que $\mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
2. Démontrer que l'application $f \mapsto f'' + af' + bf$ est linéaire.

   On note E le noyau de cette application linéaire.
3. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. À quelle condition $t \mapsto e^{\alpha t}$ appartient-elle à l'espace E ?
4. On considère l'application φ de E dans $\mathbf{R}^2$ qui à une application f associe le couple $(f(0), f'(0))$. Démontrer que φ une application linéaire.
5. On suppose que l'équation $X^2 + aX + b = 0$ a deux solutions réelles distinctes. Démontrer que φ est surjective.
6. Soit f un élément du noyau de φ.
   (a) Que vaut $f''(0)$?
   (b) Démontrer qu'il existe une constante $\eta < 1$ telle que pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, on ait $|f'(x)| \leqslant |x|$ et $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|x|^2$. (On pourra éventuellement utiliser qu'une application dérivable dont la dérivée est positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle en l'appliquant à la différence entre des applications bien choisies).
   (c) Notons $C = |a| + |b|$. Déduire de la question précédente que $|f''(x)| \leqslant C|x|$ pour $x \in]-\eta, \eta[$.
   (d) Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in]-\eta, \eta[$, $|f(x)| \leqslant C^n|x|^{n+2}$
   (e) Démontrer qu'il existe un intervalle contenant 0 tel que la restriction de f à I soit la fonction constante nulle
7. Soit $f \in E$ et $a \in \mathbf{R}$ soit $T_a(f)$ l'application $t \mapsto f(t - a)$.
   (a) Démontrer que $T_a(f) \in E$.
   (b) Démontrer que T_a est linéaire. Quel est son noyau ? Quelle est la composée $T_{-a} \circ T_a$? Quelle est son image ?
   (c) Exprimer simplement $\varphi(T_a(f))$.
8. soit $f \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. On considère

$$A = \{\, t \in \mathbf{R}_+ \mid \forall x \in [0, t[, f(x) = f'(x) = 0 \,\}$$

   (a) Démontrer que $A = \mathbf{R}_+$ (On pourra raisonner par l'absurde et considérer la borne supérieure de A).
   (b) Démontrer que f est l'application constante nulle.
9. Démontrer que φ est injective.
10. Que peut-on en déduire sur la dimension de l'espace E ?
11. On suppose maintenant que l'équation $X^2 + aX + b$ n'a pas de solutions réelles. Soit $\alpha + i\theta$ une des deux solutions complexes.
   (a) Donner l'autre solution complexe.
   (b) Vérifier que l'application $t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\theta t)$ appartient à l'espace E.
   (c) Donner dans ce cas une base de l'espace vectoriel E.
12. Étudier le cas où l'équation $X^2 + aX + b$ n'a qu'une solution.