Feuille de td 2

Exercice 1

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois $+$ et $\cdot$ suivantes est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

1. $\begin{cases} (x,y)+(x',y') = (y+y', x+x') \\ \alpha.(x,y) = (\alpha x, \alpha y) \end{cases}$
2. $\begin{cases} (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \\ \alpha.(x,y) = (\alpha y, \alpha x) \end{cases}$
3. $\begin{cases} (x,y)+(x',y') = (xx', yy') \\ \alpha.(x,y) = (\alpha x, \alpha y) \end{cases}$

Exercice 2

Soient $(E, +_E, \cdot_E)$, $(F, +_F, \cdot_F)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Montrer que $E \times F$ muni des lois $+$ et $\cdot$ suivantes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$$\begin{cases} \forall (x,y), (x',y') \in E \times F,\ (x,y)+(x',y') = (x +_E x', y +_F y') \\ \forall (x,y) \in E \times F,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha.(x,y) = (\alpha \cdot_E x, \alpha \cdot_F y) \end{cases}$$

Exercice 3

Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. L'ensemble B des suites bornées.
2. L'ensemble A des suites nulles à partir d'un certain rang.
3. L'ensemble C des suites constantes à partir d'un certain rang.
4. L'ensemble D des suites décroissantes à partir d'un certain rang.
5. L'ensemble L_0 des suites convergeant vers 0.
6. L'ensemble M des suites monotones.
7. L'ensemble N des suites dont le terme général est $\leqslant 1$ à partir d'un certain rang.
8. L'ensemble P_3 des suites 3-périodiques.
9. L'ensemble P_3 des suites périodiques de période 3.
10. L'ensemble P des suites périodiques.

Exercice 4

Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. L'ensemble des polynômes nul ou de degré 0.
2. L'ensemble des polynômes de degré 3.
3. L'ensemble des polynômes dont le terme constant est nul.
4. L'ensemble des polynômes à coefficients positifs ou nuls.
5. L'ensemble des polynômes multiples de $X-1$.
6. L'ensemble des polynômes multiples de $X-1$ ou de $X+1$.
7. L'ensemble des polynômes contenant uniquement des monômes de degrés impairs.

Exercice 5

Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. L'ensemble des applications telles que $f(0) = f(1)$.
2. L'ensemble des applications telles que $f(0) = 1$.
3. L'ensemble des applications nulles sur l'intervalle $[0, 1]$.
4. L'ensemble des applications à valeurs dans $\{0, 1\}$.
5. L'ensemble des applications ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.
6. L'ensemble des applications croissantes.
7. L'ensemble des applications paires.
8. L'ensemble des applications f telles qu'on a $(f(x))^2 = (f(-x))^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
9. L'ensemble des applications 2π-périodiques.
10. L'ensemble des applications périodiques.
11. L'ensemble des applications f telles que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
12. L'ensemble des applications continues f telles que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.
13. L'ensemble des applications continues f telles que $\int_0^1 f^3(x)\,dx = 0$.
14. L'ensemble des applications f telles qu'il existe un entier k tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq (2 + |x|)^k$.

Exercice 6

Donner des lois $+$ et $\cdot$ qui rendent vraies les affirmations suivantes :

1. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré $\leqslant 2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des applications de $\{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Deux sous-espaces vectoriels de E peuvent être disjoints.
2. Si un sous-ensemble de E contient toutes les droites vectorielles engendrées par ses vecteurs, alors c'est un espace vectoriel.
3. Si un sous-ensemble de E contient la somme de deux quelconques de ses vecteurs ainsi que toutes les droites vectorielles engendrées par ses vecteurs, alors c'est un espace vectoriel.
4. Si un sous-ensemble de E contient toutes les combinaisons linéaires de 2 quelconques de ses vecteurs, alors c'est un espace vectoriel.
5. Si un sous-ensemble de E contient tous les sous-espaces vectoriels engendrés par deux de ses vecteurs, alors c'est un espace vectoriel.
6. Si un sous-ensemble de E contient la somme de deux quelconques de ses vecteurs, alors c'est un espace vectoriel.

Exercice 8

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? (justifier la réponse)

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
5) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$
6) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel. Montrer que

$$\forall x \in E \quad 0_{\mathbb{K}} * x = 0_E, \tag{1}$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha * 0_E = 0_E, \tag{2}$$
$$\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E \quad (\alpha * x = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}} \,\text{ou}\, x = 0_E), \tag{3}$$
$$\forall x \in E \quad (-1) * x = -x, \tag{4}$$
$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad (\alpha - \beta) * x = \alpha * x - \beta * x, \tag{5}$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \alpha * (x - y) = \alpha * x - \alpha * y. \tag{6}$$

Exercice 10

Soient F, G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. À quelle condition a-t-on $F \cup G = E$?

Exercice 11

Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $H \cap (F + G) \supset (H \cap F) + (H \cap G)$ et donner un contre-exemple à l'inclusion inverse.
2. Montrer que $H + (F \cap G) \subset (H + F) \cap (H + G)$ et donner un contre-exemple à l'inclusion inverse.
3. Montrer que $H \cap (F + (H \cap G)) = (H \cap F) + (H \cap G)$.

Exercice 12

Dans les cas suivants, montrer que F, G sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E et dire s'ils sont supplémentaires ou non.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in E,\ x = 0\}$, $G = \{(x, y) \in E,\ y = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in E,\ x - y = 0\}$, $G = \{(x, y) \in E,\ y = 0\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in E,\ 2x - y = 0\}$, $G = \{(x, y) \in E,\ y = 0\}$.
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E,\ f(1) = 0\}$, G est l'ensemble des applications constantes.

Exercice 13

On considère les sous-ensembles F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$$

et

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer $F \cap G$.

Exercice 14

Soit $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, et soit $u = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$.
1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2) Montrer que H et $D = \mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires.
3) Écrire les vecteurs suivants comme somme d'un élément de H et d'un élément de D :

$$(1, 2, -6, 3); (2, 2, 2, 2); (1, 2, 3, 4).$$

Exercice 15

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $x = (1, -1, 1)$ et $y = (0, 1, a)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le vecteur $u = (1, 1, 2)$ appartienne à $\mathrm{Vect}(x, y)$.

Comparer alors $\mathrm{Vect}(x, y), \mathrm{Vect}(x, u)$ et $\mathrm{Vect}(y, u)$.

Exercice 16

Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C} \subset E$ le sous-ensemble des fonctions réelles croissantes de E. Considérons

$$\Delta = \{f - g \mid f, g \in \mathcal{C}\} .$$

Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

(Pour les intrépides : Montrer que l'inclusion $\Delta \subset E$ est stricte.)

Exercice 17

On considère les sous-ensembles F et G de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définis par

$$F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$

et

$$G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2) Écrire la fonction $x \longmapsto e^x$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exercice 18

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à 3, on considère les familles suivantes.

- $(P_1) = (1 + X^2)$
- $(P_1, P_2) = (\, 1 + X^2 \,,\, 1 - X^2 \,)$
- $(P_3, P_4) = (\, X + X^2 + X^3 \,,\, X - X^2 + X^3 \,)$
- $(P_5, P_1, P_2) = (\, 1 + X \,,\, 1 + X^2 \,,\, 1 - X^2 \,)$
- $(P_5, P_6, P_7) = (\, 1 + X \,,\, 1 + X^3 \,,\, 1 - X^3 \,)$

Pour chacune de ces familles :

1. Décrire les éléments du sous-espace F engendré par la famille.
2. Décrire un supplémentaire G de F.
3. Ecrire chacun des polynômes suivants comme somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de G.
$$1 \ ; \ X \ ; \ X^2 \ ; \ X^3 \ ; \ 1 - X + X^2 - X^3 \ ; \ 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3$$

Exercice 19

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications $\mathbb{R}$-linéaires, lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y, z) \longmapsto (x - z, y - z)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y, z) \longmapsto (x + y, |z|)$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y, z) \longmapsto (x + y, z^2)$.
4. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $x + iy \longmapsto (x, y)$.
5. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $z \longmapsto \mathrm{Re}\,(z)$.
6. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $z \longmapsto \overline{z}$.
7. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $z \longmapsto |z|$.
8. $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (a_0, a_1)$.

Exercice 20

Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, lesquelles sont des applications linéaires, lesquelles ne le sont pas et pourquoi ?

1. $f_1 : P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X)$
2. $f_2 : P(X) \longmapsto P'(X)$
3. $f_3 : P(X) \longmapsto P(X+1) - X$
4. $f_4 : P(X) \longmapsto XP(X+1) - P'(X)$
5. $f_5 : P(X) \longmapsto XP(X+1) - P'(1)$
6. $f_6 : P(X) \longmapsto XP(X+1) - P^2(1)$

Exercice 21

Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire si et seulement si il existe des réels a_1, a_2, a_3 tels que $f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 22

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Dans cet exercice, on note $f^2 = f \circ f$. Montrer les équivalences suivantes :

1. $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f^2 = 0$.
2. $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
3. $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
4. Les propriétés précédentes sont-elles vérifiées pour les applications linéaires suivantes ?
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \longmapsto (y, 0)$.
   (b) l'application dérivation de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.
   (c) l'application dérivation de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.

Exercice 23

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. On note :

- p_F la projection sur F parallèlement à G,
- s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G,
- p_G la projection sur G parallèlement à F,
- s_G la symétrie par rapport à G parallèlement à F,
- id_E l'application identique de E.

Parmi les relations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

a. $p_F + p_G = \mathrm{id}_E$. **b.** $s_F + s_G = \mathrm{id}_E$. **c.** $s_F - s_G = 2p_G$. **d.** $p_F - p_G = s_F$.

e. $s_F - p_F = p_G$. **f.** $s_F + p_G = p_G$. **g.** $p_F \circ s_G = p_F$. **h.** $p_G \circ s_F = p_G$.

i. $s_G \circ s_F = -\mathrm{id}_E$. **j.** $p_G \circ p_F = \mathrm{id}_E$.

Exercice 24

Soit F l'ensemble des applications paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ce sont les applications f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad f(x) = f(-x)\ .$$

Soit G l'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: ce sont les applications f telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \quad f(x) = -f(-x)\ .$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que $F \cap G$ est réduit à la fonction nulle.
3. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les deux fonctions ϕ et ψ, définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$\phi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}\ .$$
Montrer que $\phi \in F$, $\psi \in G$ et $f = \phi + \psi$.
4. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$.
5. Soit p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Calculer l'image par p et s des fonctions suivantes.
$$x \mapsto 1 + x\ , \quad x \mapsto x^2 + 2x^3\ , \quad x \mapsto e^x\ , \quad x \mapsto e^x + e^{-2x}$$