Corrigé du contrôle continu 2

Le sujet était initialement noté sur 24 points (22 points + 2 points de présentation), et les notes ont été multipliées par 1.3. Parmi les 24 étudiants ayant effectivement composé, la moyenne est de 9.5 (sur 31 donc, ramenée sur 20), la médiane 9. Les notes vont de 0 à 16.

Exercice 1. *(6,5 points)*
On considère

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (3x+4y+z+2t,\ 6x+8y+2z+5t,\ 9x+12y+3z+10t) \end{array}$$

1) *Montrer que f est une application linéaire. (1.5 points)*

2) *Donner, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, une base de* $\ker f$. *Quelle est sa dimension ? L'application f est-elle injective ? (2.5 points)*

Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors

$$u\in\ker f \Leftrightarrow f(u)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+z+2t &= 0 \quad (L_1)\\ 6x+8y+2z+5t &= 0 \quad (L_2)\\ 9x+12y+3z+10t &= 0 \quad (L_3)\end{cases}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss pour résoudre ce système. Pour éliminer x dans L_2 et L_3, on effectue $L_2\leftarrow L_2-2L_1$ et $L_3\leftarrow L_3-3L_1$.

On obtient alors

$$u\in\ker f \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y+z+2t=0\\ t=0\\ 4t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x-4y\\ t=0\end{cases}.$$

Ainsi, $u\in\ker f \Leftrightarrow u=x.(1,0,-3,0)+y.(0,1,-4,0) \Leftrightarrow u\in \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ où $u_1=(1,0,-3,0)$ et $u_2=(0,1,-4,0)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^4$. En effet, si $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ sont tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=0_{\mathbb{R}^4}$, alors $0=\lambda_1\times 1+\lambda_2\times 0=\lambda_1$ (première composante) et de même $0=\lambda_2$ (deuxième composante).

Beaucoup d'étudiants ont omis de montrer et même de mentionner que (u_1,u_2) est une famille libre, alors qu'il s'agit d'un point essentiel pour connaître la dimension de $\ker f$.

Donc (u_1,u_2) est une base de $\ker f$ de cardinal 2, de sorte que $\underline{\dim\ker f=2}$

3) *Sans chercher de base de* $\mathrm{Im} f$, *donner la dimension de* $\mathrm{Im} f$ *(1 point).*

Il s'agit ici d'utiliser le théorème du rang, ce que la quasi-totalité des étudiants a fait.

Selon le théorème du rang appliqué à $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ (attention à bien adapter les notations au contexte de l'exercice !), on a

$$\dim\mathbb{R}^4=\dim\ker f+\dim\mathrm{Im} f,$$

soit, puisque $\dim\ker f=2$ (question **2)**), $\underline{\dim\mathrm{Im} f=2}$.

4) *Donner une base de* $\mathrm{Im} f$. *L'application f est-elle surjective ? (1.5 points)*

Pour tout $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned} f(u)&=(3x+4y+z+2t,\ 6x+8y+2z+5t,\ 9x+12y+3z+10t)\\ &=x.(3,6,9)+y.(4,8,12)+z.(1,2,3)+t.(2,5,10)\\ &=(3x+4y+z).(1,2,3)+t.(2,5,10)\in\mathrm{Vect}\big((1,2,3),(2,5,10)\big)\end{aligned}$$

puisque $(4,8,12) = 4.(1,2,3)$ et $(3,6,9) = 3.(1,2,3)$.

Donc $\mathscr{B} = ((1,2,3),(2,5,10))$ est une famille génératrice à 2 éléments de $\operatorname{Im} f$ de dimension 2 (selon **3)**), **c'est donc une base de** $\operatorname{Im} f$.

Comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension $2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on sait que $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$. Ainsi, f **n'est pas surjective.**

Exercice 2. *(3 points)*

Soit $\mathscr{B} = (1, \mathrm{id}, \sin, \cos)$, où $\mathrm{id} : x \mapsto x$ et $1 : x \mapsto 1$, une famille d'éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note W l'espace vectoriel engendré par $\mathscr{B}$.

1) *Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de W. (1 point)*

Par définition, $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $W = \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$. Montrons qu'elle est libre. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a.1 + b.\mathrm{id} + c.\sin + d.\cos = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$, c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, a + bx + c\sin(x) + d\cos(x) = 0 \tag{1}$$

L'idée est d'obtenir à partir de (1) un système de 4 équations indépendantes à 4 inconnues (a,b,c,d) que l'on pourra résoudre par la méthode du pivot de Gauss. Pour cela, il faut choisir des valeurs de x « sympathiques », où les valeurs de cos et sin ne sont pas trop compliquées. Les multiples entiers de $\frac{\pi}{2}$ sont de bons candidats. On obtient donc :

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} a + d & = 0 \qquad (x = 0) \\ a + b\frac{\pi}{2} + c & = 0 \qquad (x = \pi/2) \\ a + b\pi - d & = 0 \qquad (x = \pi) \\ a + 2b\pi + d & = 0 \qquad (x = 2\pi) \end{cases}$$

En effectuant $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in \{2,3,4\}$, cela donne

$$(\mathscr{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} a + d & = 0 \\ b\frac{\pi}{2} + c - d & = 0 \\ b\pi - 2d & = 0 \\ 2b\pi & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 0 \\ c & = 0 \\ d & = 0 \\ b & = 0, \end{cases}$$

de sorte que $\mathscr{B}$ est une famille libre.

2) *Soit $D : \begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & W \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$ l'application de dérivation. Justifier que D est une application linéaire à valeurs dans W. Écrire la matrice A de D dans la base $\mathscr{B}$ (1,5 points)*

La linéarité de D vient de la linéarité de la dérivation des fonctions.

Il faut justifier que D était bien à valeurs dans W, ce qui est essentiel pour que l'on puisse écrire sa matrice dans $\mathscr{B}$.

Cela vient du fait que $(D(1), D(\mathrm{id}), D(\sin), D(\cos)) = (0, 1, \cos, -\sin) \in W^4$. De plus,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Attention, A est à coefficients dans $\mathbb{R}$ et non dans W !

3) *Calculer A^2 (0,5 points)*

On a
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. *(8.5 points)*

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1) *Montrer que $A - \lambda I_3$ est de rang 3 si et seulement si $\lambda \notin \{-3, 1, 2\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ où $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Donner le rang de $A - \lambda_i I_3$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ (3 points)*

La méthode attendue était d'effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes de $A - \lambda I_3$ pour mettre cette matrice sous forme échelonnée et en déduire son rang.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 4 \\ -6 & 3-\lambda & 6 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

On échange L_1 et L_3 :
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ -6 & 3-\lambda & 6 \\ -3-\lambda & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 + 6L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + (3+\lambda)L_1$:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -3-\lambda & 6-6\lambda \\ 0 & -3-\lambda & 4-\lambda(3+\lambda) \end{pmatrix}$$

On effectue $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, ce qui donne
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -3-\lambda & 6-6\lambda \\ 0 & 0 & 4-\lambda(3+\lambda)-6+6\lambda \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Or, $4-\lambda(3+\lambda)-6+6\lambda = -(\lambda^2-3\lambda+2) = -(\lambda-1)(\lambda-2)$ car 1 et 2 sont racines du polynôme de degré 2 X^2-3X+2.

La matrice (2) étant sous forme échelonnée, on en déduit qu'elle est de rang 3 si et seulement si $\lambda \notin \{-3, 1, 2\}$. Comme le rang est invariant par opérations sur les lignes et colonnes,on a bien : $\underline{A - \lambda I_3 \text{ est inversible si et seulement si } \lambda \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}}$.

Si $\lambda = -3$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$, la matrice (2) est sous forme échelonnée avec deux coefficients diagonaux non nuls donc $\underline{\mathrm{rg}(A - \lambda_i I_3) = 2 \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3\}}$.

2) *Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, trouver un vecteur colonne non nul v_i dans $\ker(A - \lambda_i I_3) := \{v \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : (A - \lambda_i I_3)v = 0\}$ (1.5 points)*

Il s'agit, pour chaque λ_i d'écrire le système linéaire de 3 équations à 3 inconnues
$$(A - \lambda_i I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis de le résoudre à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, et enfin de choisir une solution particulière non nulle. On sait qu'elle existe puisque la matrice $A-\lambda_i I_3$ est de rang 2 selon la question 2 donc $\ker(A-\lambda_i I_3)$ est de dimension $3-2=1$ selon le théorème du rang.

On trouve par exemple

$$(v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-6\\5\end{pmatrix}\right)$$

3) *Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les trois colonnes sont v_1, v_2 et v_3. Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1} (2.5 points).*

Il s'agit d'appliquer la méthode du cours et d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de P et de I_3 simultanément jusqu'à ce qu'on ait transformé P en I_3.

On part de

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\1 & 0 & -6\\0 & 1 & 5\end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\0 & -1 & -10\\0 & 1 & 5\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On effectue $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\0 & -1 & -10\\0 & 0 & -5\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 + 4/5L_3$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1/5 & 4/5 & 4/5\\1 & -1 & -2\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

On effectue $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}6/5 & -1/5 & -6/5\\1 & -1 & -2\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Enfin, on effectue $L_2 \leftarrow -L_2$ et $L_3 \leftarrow -1/5L_3$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}6/5 & -1/5 & -6/5\\-1 & 1 & 2\\1/5 & -1/5 & -1/5\end{pmatrix} = P^{-1}$$

4) *A l'aide de la formule de changement de base, donner l'expression de $D = P^{-1}AP$.*

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'$ la base composée de $w_1 = {}^t v_1$, $w_2 = {}^t v_2$ et $w_3 = {}^t v_3$, de sorte que $v_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w_i)$ pour tout i. Il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$ puisque la matrice P de colonnes v_1, v_2, v_3 est de rang 3 selon **3)**.

Soit $a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a)$.

Par définition, P est la matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Ainsi, selon la formule de changement de base, on a

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(a) = P^{-1}AP.$$

Or, $Av_i = \lambda_i v_i$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$, soit $a(w_i) = \lambda_i w_i$ en vertu de la correspondance matrices-applications linéaires.

Donc

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. *(4 points)*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On note $f^2 = f \circ f$.

1) *Montrer que*

$$\mathrm{Im}\, f + \ker f = E \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2.$$

(1,25 point) On procède par double implication.

- Supposons que

$$\mathrm{Im}\, f + \ker f = E \tag{3}$$

L'inclusion $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$ étant évident, il faut montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f^2$.
Soit $y = f(x) \in \mathrm{Im}\, f$, où $x \in E$. Selon (3), on peut trouver $u \in E$ et $v \in \ker f$ tels que $x = f(u) + v$. Ainsi, par linéarité de f,

$$f(x) = f(f(u)) + f(v) = f^2(v) \in \mathrm{Im}\, f^2$$

car $f(v) = 0$. Donc $\underline{\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f^2}$.

- Supposons que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.
Soit $x \in E$. Alors $y = f(x) \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$, de sorte que l'on peut trouver $u \in E$ tel que $y = f^2(u)$.
Donc $f(x) = f^2(u)$, soit, par linéarité de f, $f(x - f(u)) = 0$, c'est à dire $x - f(u) \in \ker f$.
Donc $x = f(u) + v$ où $v \in \ker f$. Ainsi, $\underline{E = \ker f + \mathrm{Im}\, f}$.

2) Prouver que

$$\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2.$$

(1,25 point)

On procède là encore par double implication.

- Suppposons que

$$\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = \{0_E\}. \tag{4}$$

Comme l'inclusion $\ker f \subset \ker f^2$ est triviale, il faut montrer que $\ker f^2 \subset \ker f$. Soit donc $x \in \ker f^2$. On a $0 = f^2(x) = f(f(x))$ donc $f(x) \in \ker f$. Or, par définition $f(x) \in \mathrm{Im}\, f$ donc selon (4), $f(x) = 0$, c'est dire $x \in \ker f$.
D'où $\underline{\ker f^2 \subset \ker f}$.

- Supposons que $\ker f^2 = \ker f$.
Soit $y \in \mathrm{Im}\, f \cap \ker f$.
Comme $y \in \mathrm{Im}\, f$, on peut fixer $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, comme $y \in \ker f$, on a $0 = f(y) = f(f(x)) = f^2(x)$. Donc $x \in \ker f^2 = \ker f$, de sorte que $y = f(x) = 0$.
Donc $\underline{\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = \{0\}}$.

3) *On fait l'hypothèse supplémentaire que E est de dimension finie. Démontrer que*

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \begin{cases} E = \operatorname{Im} f + \ker f \\ \operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\} \end{cases}.$$

(1,5 point)

Selon **1)** et **2)**, l'assertion que l'on veut démontrer est équivalent à

$$\operatorname{Im} + \ker f = E \quad \text{(i)} \Leftrightarrow \operatorname{Im} \cap \ker f = \{0\} \quad \text{(ii)} \Leftrightarrow \begin{cases} E = \operatorname{Im} f + \ker f \\ \operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\} \end{cases} \quad \text{(iii)}.$$

Selon le théorème du rang, applicable car E est de dimension finie, on a

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

De plus, $\dim(\operatorname{Im} f \cap \ker f) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f - \dim(\operatorname{Im} f + \ker f) = \dim E - \dim(\operatorname{Im} f + \ker f)$

Donc

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \dim E - \dim(\operatorname{Im} f + \ker f) \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f \cap \ker f) = 0 \Leftrightarrow \text{(ii)}.$$

Comme (iii) $\Leftrightarrow$ (i) et (ii), on a bien le résultat voulu.