Correction du contrôle continu 1

Barême :

Questions de cours : 1) 1 pt, 2)a) 1 pt 2)b) 1 pt, 3) 1 pt
Exercice 1 : 1) 1,5 pt 2) 2,5 pt (0,5 pour $\varphi(\mathbb{Z}^2) \subset H$, 1,5 pour montrer que φ est un morphisme, 0,5 pour montrer sa bijectivité)
Exercice 2 : 1) 1.5 pt 2) 1.5 pt
Exercice 3 : 1) 2 pts 2) 1.5 pts 3) 1.5 pts 4) 1 pt

La plupart des copies a essentiellement traité les questions de cours et les deux premiers exercices ainsi que la question **1)** de l'exercice 4.

Le total des points est de 24, toutes les notes ont été multipliées par 1.25, le sujet était donc de facto noté sur 30.

Correction de l'exercice 4 : polynômes réciproques.

On dit que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré n est un *polynôme réciproque* si

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad a_k = a_{n-k}.$$

On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des polynômes réciproques de $\mathbb{C}[X]$

1) *Les polynômes* $1 + 2X + X^2$ *et* $3 + 4X + 5X^2 + 3X^3$ *sont-ils réciproques ?* (1 point)

$1 + 2X + X^2$ est réciproque mais pas $P := 3 + 4X + 5X^2 + 3X^3$ car, en reprenant les notations de l'énoncé, $a_{3-1} = 5 \neq a_1 = 4$.

2) *Montrer qu'un polynôme P de degré n est un polynôme réciproque si et seulement si* $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. (2 points)

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ Alors on a

$$X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = X^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} X^p$$

par un changement d'indice $p = n - k$. En effet, $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant k \leqslant n \Leftrightarrow 0 \leqslant n - k \leqslant n$.

Ainsi, en identifiant coefficient par coefficient, on obtient

$$X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X) \Leftrightarrow \forall k \in \{0, \ldots, n\}, a_k = a_{n-k} \Leftrightarrow P \in \mathscr{R}$$

par définition de la réciprocité des polynômes.

3) *Montrer que si $P, Q \in \mathscr{R}$ alors $PQ \in \mathscr{R}$.* (1 point)

On utilise la question précédente. Soient $P, Q \in \mathscr{R}$, on note $n = \deg(P)$ et $m = \deg(Q)$. On a $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ et $Q(X) = X^m Q\left(\frac{1}{X}\right)$ donc

$$(PQ)(X) = P(X)Q(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right) X^m Q\left(\frac{1}{X}\right) = X^{n+m}(PQ)\left(\frac{1}{X}\right)$$

puisque la substitution de X par $1/X$ est une opération compatible avec la multiplication des polynômes.

4) Soit $P \in \mathscr{R}$.

a) *Si α est une racine de P, prouver que $\alpha \neq 0$ et que $1/\alpha$ est une racine de P.* (0,5 pt)

Contrairement à ce qu'affirmaient certaines copies, le fait qu'on ne puisse pas évaluer la relation de la question **2)** en substituant 0 à X ne signifie pas que $P(0)$ n'est pas défini. En effet, si $P = 1 + 2X + X^2$, P est réciproque et $P(0) = 1$ est bel et bien défini.

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathscr{R}$ est de degré n, alors $a_n \neq 0$ par définition du degré. Par ailleurs, $P(0) = a_0$ et $a_0 = a_n$ car P est réciproque. Donc si 0 était une racine de P, on aurait $a_n = 0$ ce qui est absurde.

Donc si α est une racine de P, $\alpha \neq 0$. En évaluant la relation de la question **2)** en substituant α à X, on obtient $0 = P(\alpha) = \alpha^n P\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, donc comme $\alpha \neq 0$, $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$, ce qu'on voulait démontrer.

b) *Montrer que si 1 est une racine de P, alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.* (0,5 pt)

En dérivant l'équation **2)** (en identifiant P à la fonction de la variable réelle $x \mapsto P(x)$, ce qui est possible car $P \in \mathbb{C}[X]$), on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, P'(x) = nx^{n-1} P\left(\frac{1}{x}\right) - x^n \times \frac{1}{x^2} P'\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc si $P(1) = 0$, on a $P'(1) = -1^{n-2} P'(1) = -P'(1)$ de sorte que $P'(1) = 0$. Par caractérisation de la multiplicité, 1 est donc une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à 2.

c) *Démontrer que si le degré de P est impair, alors -1 est racine de P.* (0,5 pt)

En substituant dans l'équation **2)** -1 à X, on obtient

$$P(-1) = (-1)^{\deg P} P(-1) = -P(-1)$$

si $\deg P$ est impair donc $P(-1) = 0$.

d) *Démontrer que si P est de degré pair et que -1 est racine de P, alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.* (0,5 pt)

En réutilisant le raisonnement de **b)**, on a

$$P'(-1) = -(-1)^{\deg P - 2} P'(-1)$$

donc si $\deg P$ est pair, $P'(-1) = -P'(-1)$ si bien que $P'(-1) = 0$.

5) *(Bonus) $\mathscr{R} \cup \{0\}$ est-il un sous-anneau de $\mathbb{C}[X]$?*

Non, par exemple $1 + X \in \mathscr{R}$ et $1 \in \mathscr{R}$ mais $1 + X + 1 = 2 + X \notin \mathscr{R}$ donc la stabilité par la loi + n'est pas vérifiée.