

CONTRÔLE CONTINU 1

21 FÉVRIER 2020

Durée : 1 heure. La calculatrice et les documents ne sont pas autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient. La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la précision des justifications seront prises en compte dans la notation. Le barème est indicatif.

Questions de cours. (5 points)

- 1) Donner la définition d'un groupe.
- 2) Définir la dimension d'un espace vectoriel.
- 3) Énoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 1. (3 points) On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des solutions de (\mathcal{S}) à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, en précisant les opérations effectuées.

Exercice 2. (4 points)

- 1) Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système linéaire

$$(\mathcal{S}_m) : \begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$$

Donner, selon les valeurs du paramètre m , l'ensemble des solutions de (\mathcal{S}_m) . Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous?

- 2) Soit $\mathcal{F}_m = ((1, m), (m, 4))$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $m \in \mathbb{R}$ pour que \mathcal{F}_m soit une base de \mathbb{R}^2 .

Exercice 3. (5 points)

- 1) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- 2) Démontrer que $\mathcal{B} = ((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$ est une base de F .
- 3) Soit $H = \text{Vect}((1, 1, 1))$ le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $(1, 1, 1)$. Montrer que $F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- 4) Montrer **sans calcul**, à l'aide d'arguments de dimension, que $\mathbb{R}^3 = F + H$.

Exercice 4. (4 points)

- 1) Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(-1) = P(1) = 0\}$ est un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_n = (X - 1)^n(X + 1)^n$.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P_n \in E$. Quel est le degré de P_n ?
- b) On admet la propriété suivante : si $N \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_N \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes non nuls tels que $\deg(A_1) < \deg(A_2) < \dots < \deg(A_N)$, alors

$$\deg\left(\sum_{k=1}^N A_k\right) = \deg(A_N).$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (P_1, \dots, P_N) est une famille libre de E .

- c) L'espace vectoriel E est-il de dimension finie sur \mathbb{R} ?