Applications à la géométrie

Exercices

5.1. Exercices

Exercice 5.1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^3$.

1. Supposons que $\vec{u} = (1, 2, 1)$ et $\vec{v} = (-1, 1, 1)$. Justifier que $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est un plan. Donner une équation implicite de ce plan.
2. Supposons que $\vec{u} = (1, 2, 1)$ et $\vec{v} = (-2, -4, -2)$. Justifier que $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est une droite, et donner un système d'équations paramétriques de cette droite.
3. Donner la nature géométrique de $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ en fonction de la nature de la famille $(\vec{u}, \vec{v})$.
4. Dans quel cas $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est-il la somme directe de $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et de $\mathrm{Vect}(\vec{v})$?

Exercice 5.2. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$.

1. Les hyperplans définis, dans la base usuelle de $\mathbf{R}^3$, par
$$P_1 : \ X + 2Y + Z = 0 \qquad \text{et} \qquad P_2 : \ X + Y + Z = 0$$
sont-ils en somme directe ?
2. Que dire des sous-espaces vectoriels $P_1 : \ X + 2Y + Z = 0$ et $\mathrm{Vect}((1, 2, 1))$?
3. Soient E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$. En discutant selon les dimensions de E_1 et E_2 et leur intersection, donner tous les cas où E_1 et E_2 sont en somme directe.

Exercice 5.3. Soient $\vec{v}_1 = (0, 1, -2, 1)$ $\vec{v}_2 = (1, 0, 2, -1)$ $\vec{v}_3 = (3, 2, 2, -1)$, $\vec{v}_4 = (0, 0, 1, 0)$ et $\vec{v}_5 = (0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbf{R}^4$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$;
2. $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \cap \mathrm{Vect}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$;
3. $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \cap \mathrm{Vect}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est une droite vectorielle ;
4. $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) + \mathrm{Vect}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \mathbf{R}^4$;
5. $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $\mathrm{Vect}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ sont en somme directe ;
6. $\mathrm{Vect}(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 5.4. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = 1$.

1. Démontrer que le noyau de f est un hyperplan de E.

2. Justifier qu'on a l'alternative suivante. Soit $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, soit $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Dans le cas où $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, justifier que $f \circ f = 0$.
4. Dans le cas où $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, démontrer que f est un multiple de la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallelement à $\mathrm{Ker}(f)$.
5. Trouver une base de E dans laquelle la matrice de f a $n^2 - 1$ coefficients nuls.

Exercice 5.5. On pose $E = \mathbf{R}[X]_{\leqslant 2}$, $F = \{P \in E \mid \int_0^1 P(t)dt = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1+X)$.

1. Démontrer que $E = F \oplus G$.
2. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Pour tout polynome P de E, déterminer $p(P)$.
3. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer $s(P)$ pour tout polynôme P dans E.

Exercice 5.6. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}[x]_{\leqslant 3}$ des fonctions polynomiales de degré au plus 3.

1. Pour tout $a \in \mathbf{R}$, on note V_a le sous ensemble de $\mathbf{R}[x]_{\leqslant 3}$ formé des polynômes qui s'annulent en a. Montrer que pour tout réel a, V_a est un sous-espace vectoriel de de $\mathbf{R}[x]_{\leqslant 3}$.
2. Les sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 sont-ils en somme directe ?
3. Montrer que $\mathbf{R}[x]_{\leqslant 3}$ est la somme directe des sous-espaces $V_1 \cap V_2$ et $V_3 \cap V_4$.
4. Justifier que tout polynôme $P \in \mathbf{R}[x]_{\leqslant 3}$ s'écrit de manière unique comme une some $P = P_1 + P_2$, où $P_1(1) = P_1(2) = 0$, $P_2(3) = P_2(4) = 0$ et $\deg(P_i) \leqslant 3$.

Exercice 5.7. Certaines des transformations qui servent dans les logiciels de graphisme ou de gestion d'images sont des endomorphimes linéaires du plan $\mathbf{R}^2$. Par exemple, la rotation d'un quart de tour à droite est donnée par l'application linéaire $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto (y, -x) \in \mathbf{R}^2$. Pour chaque application linéaire ci-dessous, décrire la transformation géométrique correspondante.

$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto (-x, y) \in \mathbf{R}^2 \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto (x/2, y/2) \in \mathbf{R}^2$$
$$(x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto (2x, y) \in \mathbf{R}^2 \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto (x + y, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Exercice 5.8. On munit $E = \mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle. On note Δ la droite de E engendrée par le vecteur $(1, 1)$ et s la symétrie orthogonale par rapport à Δ.

1. Déterminer l'image du vecteur (1,-1) par s.

2. Déterminer $s(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.
3. Déterminer la matrice de s dans la base usuelle de $\mathbf{R}^2$.
4. Soit f une application bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Rappelons que son graphe est l'ensemble
$$\Gamma_f = \{\, (x, f(x)), x \in \mathbf{R}\,\}.$$
Que peut-on dire des ensembles $s(\Gamma_f)$ et $\Gamma_{f^{-1}}$?
5. Représenter sur un même dessin les graphes des application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ données par $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

Exercice 5.9. On munit $\mathbf{R}^3$ du produit scalaire usuel. On note $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, -1)$ et $F = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

1. Prouver que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est libre.
2. Quelle est la dimension de $F^\perp$, l'orthogonal de F ? En donner une base.
3. On rappelle qu'une base $(\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n)$ d'un espace est dite *orthonormée* si elle vérifie les relations
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$
pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
   (a) Construire une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbf{R}^3$ telle que $\vec{e}_3 \in F^\perp$.
   (b) Démontrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de F.
   (c) Écrire la matrice P de passage de la base usuelle de $\mathbf{R}^3$ à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
   (d) Calculer le produit ${}^t\!PP$.
   (e) Déterminer l'inverse de la matrice P.
4. Soit p la projection orthogonale sur le plan F.
   (a) Écrire la matrice de p dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
   (b) Déterminer la matrice A de p dans la base usuelle de $\mathbf{R}^3$.
   (c) Calculer A^2. Expliquer le résultat obtenu.
5. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan F.
   (a) Écrire la matrice de s dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
   (b) Déterminer la matrice B de s dans la base usuelle de $\mathbf{R}^3$.
   (c) Calculer B^2. Expliquer le résultat obtenu.

Exercice 5.10. On munit $\mathbf{R}^3$ du produit scalaire usuel. On note $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et D la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$.

1. Donner une équation implicite de l'orthogonal $D^\perp$ de D.
2. Quelle est la dimension de $D^\perp$? En donner une base.
3. (a) Construire une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbf{R}^3$ telle que $\vec{e}_1 \in D$.
   (b) Démontrer que $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $D^\perp$.
   (c) Écrire la matrice P de passage de la base usuelle de $\mathbf{R}^3$ à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
   (d) Calculer le produit ${}^tPP$.
   (e) Déterminer l'inverse de la matrice P.
4. Soit p la projection orthogonale sur la droite D.
   (a) Écrire la matrice de p dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
   (b) Déterminer la matrice A de p dans la base usuelle de $\mathbf{R}^3$.
   (c) Calculer A^2. Expliquer le résultat obtenu.
5. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite D.
   (a) Écrire la matrice de s dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
   (b) Déterminer la matrice B de s dans la base usuelle de $\mathbf{R}^3$.
   (c) Calculer B^2. Expliquer le résultat obtenu.
6. Soit r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, d'axe la droite D orientée par le vecteur $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.
   (a) Écrire la matrice de r dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
   (b) Déterminer la matrice C de r dans la base usuelle de $\mathbf{R}^3$.
   (c) Calculer C^3. Expliquer géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 5.11. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit φ une *isométrie vectorielle de E* c'est à dire un endomorphisme de E tel que

$$\forall \vec{u} \in E, \quad \|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|.$$

1. Démontrer que la formule
$$C \cdot C' = {}^tC\,C'$$
définit un produit scalaire sur l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ des vecteurs colonnes.
2. Soit M la matrice de φ dans un repére orthonormé de E. Soient C_i la i-ème colonne de la matrice M.

(a) Démontrer que

$$C_i \cdot C_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} \tag{1}$$

(b) Que peut-on dire de la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ vue comme famille de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$?

(c) Démontrer la formule

$$^t\!M\, M = I_n$$

Une telle matrice est dite *orthogonale*.

(d) Que peut-on dire de la matrice $M\,^t\!M$?

(e) Construire sur l'espace $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ un produit scalaire de sorte que les lignes de M vérifie une condition analogue à celle de (1).

Exercice 5.12. Soient A et B deux points distincts d'un espace affine $\mathscr{E}$. Démontrer qu'il existe une unique droite affine contenant les points A et B. On appelle cette droite la *droite affine passant par A et B* et on la note (AB).

Exercice 5.13. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et soit $A \in \mathscr{E}$. Soit k un nombre réel non nul. On appelle *homothétie* de centre A et de rapport k l'application h qui à un point M de $\mathscr{E}$ associe le point $h(M) = A + k\overrightarrow{AM}$.

1. Soit M et N des points de $\mathscr{E}$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{h(M)h(N)}$ en termes de $\overrightarrow{MN}$.
2. Prouver que l'application h est une application affine.
3. Soit M et N des points de $\mathscr{E}$. Exprimer la longueur $h(M)h(N)$ en termes de la longueur MN.
4. Pour quelle valeurs de k l'application h est-elle une isométrie ?
5. Pour quelle valeur de k l'application h est-elle l'application $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$?
6. Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ passant par un point B et de vecteur directeur $\vec{u}$. Démontrer que $h(\mathscr{D})$ est une droite dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur. Que peut-on dire des droites $\mathscr{D}$ et $h(\mathscr{D})$?
7. Démontrer le théorème de Thalès :

Théorème 5.1 (Thalès)

Soient A, B et C des points deux à deux distincts de $\mathscr{E}$. Soit D un point de la droite (AB). Soit Δ la droite parallèle à (BC) passant par D. La droite Δ coupe la droite (AC) en un point E tel que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

8. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine telle qu'il existe $k \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$ tel que $\vec{f} = k\mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{E}}}$
   (a) Démontrer qu'il existe au plus un point $B \in \mathscr{E}$ tel que $f(B) = B$.
   (b) Soit $M \in \mathscr{E}$ tel que $f(M) \neq M$. Démontrer qu'il existe un point B de la droite $(Mf(M))$ tel que $f(B) = B$.
   (c) Démontrer que f est une homothétie.
9. Que peut-on dire d'une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ telle qu'il existe un nombre réel non nul k de sorte que $\vec{f} = k\mathrm{Id}_{\vec{\mathscr{E}}}$.
10. On suppose que f (resp. g) est une homothétie ou une translation. Démontrer qu'il en est de même de $f \circ g$.
11. Trouver des homothéties f et g telles que la composée $f \circ g$ soit une translation de vecteur non nul.

Problème 5.1. Représentation matricielle des applications affines.

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des espaces affines de dimensions m et n respectivement. On se donne un repère affine $\widetilde{\boldsymbol{e}} = (O_{\mathscr{E}}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ de $\mathscr{E}$ et un repère affine $\widetilde{\boldsymbol{f}} = (O_{\mathscr{F}}, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ de $\mathscr{F}$. Pour tout entier $d \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{H}_d$ l'hyperplan affine de $\mathbf{R}^{d+1}$ définit par l'équation $X_{n+1} = 1$. On note $\Phi_{\widetilde{\boldsymbol{e}}}$ l'application de $\mathscr{H}_m$ dans $\mathscr{E}$ définie par

$$\Phi_{\widetilde{\boldsymbol{e}}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 1) = O_{\mathscr{E}} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \vec{e}_k.$$

On définit de manière similaire l'application $\Phi_{\widetilde{\boldsymbol{f}}}$. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n+1,m+1}(\mathbf{R})$, on note Ψ_A l'application linéaire de $\mathbf{R}^{m+1}$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ définie par A, c'est-à-dire celle dont la matrice dans les bases usuelles est A.

1. Démontrer que $\Phi_{\widetilde{\boldsymbol{e}}}$ est une application affine bijective.
2. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant j \leqslant m+1}} \in \mathscr{M}_{n+1,m+1}(\mathbf{R})$. Démontrer que l'inclusion

$$\Psi_A(\mathscr{H}_m) \subset \mathscr{H}_n$$

vaut si et seulement la dernière ligne de A est donnée par :

$$a_{m+1,k} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n+1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Une telle matrice sera dite affine. *Si cette condition est vérifiée, on note ψ_A l'application de $\mathscr{H}_m$ dans $\mathscr{H}_n$ donnée par $M \mapsto \Psi_A(M)$.*

3. Soit A une matrice affine. Démontrer que ψ_A est une application affine.
4. Soit A une matrice affine. Démontrer qu'il existe une unique application $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $\varphi(\Phi_{\widetilde{e}}(M)) = \Phi_{\widetilde{f}}(\psi_A(M))$ pour tout $M \in \mathscr{H}_m$. Démontrer que φ est une application affine.
5. Inversement, on se donne une application affine $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$.
   (a) Démontrer qu'il existe une unique application $\psi : \mathscr{H}_m \to \mathscr{H}_n$ telle que $\varphi(\Phi_{\widetilde{e}}(M)) = \Phi_{\widetilde{f}}(\psi(M))$ pour tout $M \in \mathscr{H}_m$ et que cette application est affine.
   (b) Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $\Psi : \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ telle que $\Psi(M) = \psi(M)$ pour tout $M \in \mathscr{H}_m$.
   (c) Vérifier que la matrice de Ψ dans les bases usuelles de $\mathbf{R}^{m+1}$ et $\mathbf{R}^{n+1}$ est affine.

Avec les notations de la dernière question, A est appelée la matrice de l'application φ dans les repères $\widetilde{e}$ et $\widetilde{f}$. *On note*

$$A = \mathrm{Mat}_{\widetilde{e},\widetilde{f}}(\varphi).$$

6. Vérifier que la matrice ainsi définie coïncide avec celle définie dans les compléments du chapitre 4.