Systèmes linéaires

Exercices

1.1. Exercices

Exercice 1.1. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} X+Y+Z=3 \\ Y+Z=2 \\ Z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} X+Y+Z=3 \\ Y+Z=2 \\ X+Y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2X+3Y=4 \\ X-2Z=5 \end{cases}$$

Exercice 1.2. Pour chacun des systèmes suivants, tracer la droite de $\mathbf{R}^2$ correspondant à chaque équation $ax+by=c$ du système et trouver graphiquement l'ensemble des solutions. Vérifier le résultat en utilisant le pivot de Gauss.

$$\begin{cases} X+Y=1 \\ X-Y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} X-Y=2 \\ Y-X=1 \end{cases} \quad \begin{cases} X-3Y=-3 \\ X-Y=1 \\ X+Y=5 \end{cases}$$

Exercice 1.3. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 3X+Y=2 \\ X+2Y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2X+3Y=1 \\ 5X+7Y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3X+Y=2 \\ 6X+2Y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2X+4Y=10 \\ 3X+6Y=15 \end{cases}$$

Exercice 1.4. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} X+Y+Z=1 \\ X+2Y+2Z=0 \\ Y+4Z=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} X+Y+Z=2 \\ X+Y+2Z=0 \\ X+2Y-Z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X+Y-3Z=5 \\ 3X-2Y+2Z=5 \\ 5X-3Y-Z=16 \end{cases} \quad \begin{cases} X+Y+Z+T=2 \\ X+Y+2Z+2T=0 \\ X+2Y-Z-T=1 \\ Z-T=0 \end{cases}$$

Exercice 1.5. 1. Déterminer suivant les valeurs du paramètre a les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} X+aY=2 \\ aX+Y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} X-2Y=2 \\ X-aY=a \end{cases} \quad \begin{cases} X+Y=3 \\ aX+Y=a. \end{cases}$$

2. Déterminer suivant les valeurs des paramètres réels a et b les solutions des systèmes linéaires suivants :
$$\begin{cases} X - aY = 2 \\ aX + Y = b \end{cases} \qquad \begin{cases} aX + 8Y = b \\ X - bY = a \end{cases} \qquad \begin{cases} aX + bY = 1 \\ bX + aY = 1 \end{cases}$$
3. Interprétez les résultats des questions précédentes en termes d'intersections de droites dans le plan.

Exercice 1.6. On considère pour un nombre réel θ et tous $u, v \in \mathbf{R}$ le système linéaire

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y = u \\ \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y = v \end{cases}$$

1. Vérifier que, pour tous $u, v \in \mathbf{R}$, ce système possède une unique solution que l'on déterminera.
2. Démontrer que $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est solution du système (S) si et seulement si on l'égalité de nombres complexes
$$e^{i\theta}(x + iy) = u + iv.$$
Justifier d'une autre manière la réponse de la question 1.
3. Interpréter les résultats précédents à l'aide d'une application du plan dans lui-même.

Exercice 1.7. Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m les solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} mx - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.8. Un peu de physique

On considère le réseau hydraulique de la figure 1. Les cuves sont à pressions respectives 3 et 2 bars et la sortie est à pression atmosphérique. La loi hydraulique permettant de calculer le débit s'énonce $Q = \alpha\Delta P$, où Q est le débit du tuyau, ΔP la différence des pressions en entrée et sortie et α est un coefficient de résistance hydraulique dépendant de la géométrie et de la matière du tuyau. Les données du constructeur sont

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1\, m^3.s^{-1}.bar^{-1} ,$$
$$\alpha_3 = 0.3\, m^3.s^{-1}.bar^{-1} .$$

Quel est le débit de sortie Q_3 du réseau ?

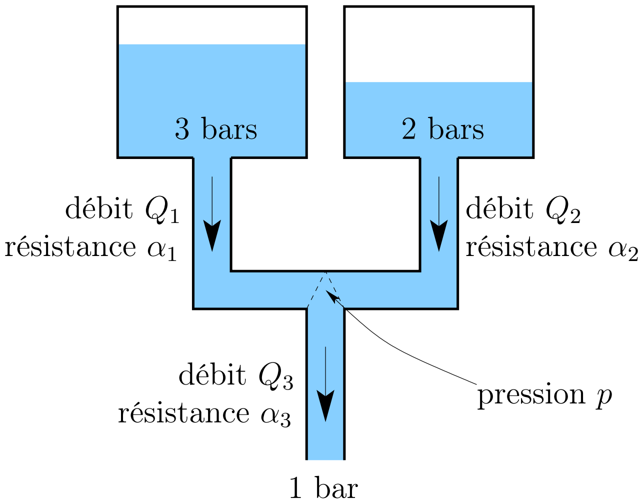

FIGURE 1. Un réseau hydraulique

Exercice 1.9. Choix du pivot et erreurs informatiques

Dans un ordinateur, la norme IEEE 754 simple précision (32 bits) permet de coder des nombres entre environ 10^{-45} et 10^{38} avec une précision de 8 à 9 chiffres significatifs en base 10. Cela veut dire que si on considère le nombre $\varepsilon = 10^{-10}$, alors $1 + \varepsilon$ sera tronqué à 1 par l'ordinateur. De même, le calcul $1 + 1/\varepsilon$ donnera $1/\varepsilon = 10^{10}$ comme résultat.

On considère le système linéaire

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \varepsilon X + Y = 1 \\ X + 2Y = 3 \end{cases}$$

On va regarder sur cet exemple comment le choix du pivot peut radicalement changer la pertinence d'un calcul fait par un ordinateur.

1. Résoudre (S) à la main de façon exacte.
2. On considère maintenant que le calcul est fait par un ordinateur avec les erreurs de troncature du type « $1 + \varepsilon = 1$ ». Utiliser εX comme pivot et éliminer X dans la deuxième ligne. Finir la résolution et comparer le résultat avec la solution exacte.
3. Même question si on utilise maintenant le terme X de la deuxième ligne comme pivot pour éliminer X dans la première ligne.

Exercice 1.10. L'algorithme Pagerank

Le réseau internet est composé de milliers de milliards de pages reliées entre elles. On peut le modéliser par un graphe orienté où deux pages sont reliées par une flèche si l'une renvoie sur l'autre. La figure 2 donne un exemple de graphe avec seulement 4 pages et 5 liens hypertexte. La question est de savoir quelle est la page la plus pertinente dans ce réseau. Pour cela, on va attribuer une note $\mathrm{PR}(i) \geqslant 0$ à la page i et la plus pertinente sera celle avec la meilleure note [1]. Ces notes doivent vérifier la relation

$$\mathrm{PR}(A) = (1-d) + d(\mathrm{PR}(T_1)/C(T_1) + ... + \mathrm{PR}(T_n)/C(T_n))$$

si on note $T_1, \ldots, T_n$ les pages pointant vers la page de A et $C(B)$ le nombre de liens sur la page B.

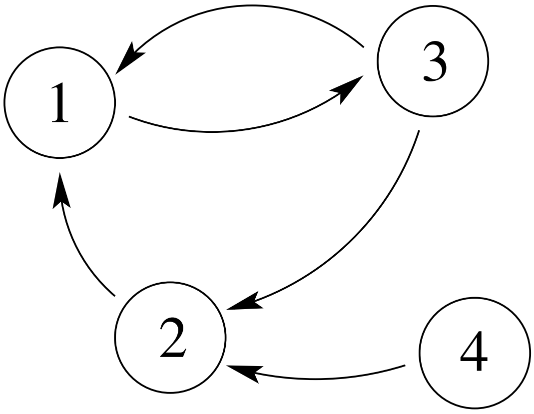

FIGURE 2. Internet et ses quatre pages

1. L'article *The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine* de Sergey Brin et Lawrence Page publié en 1998 commence par *In this paper, we present Google....* Plus loin, les auteurs proposent de définir les notes $\mathrm{PR}(i)$ des pages selon la formule de l'algorithme *Pagerank*.

We assume page A has pages $T1 \ldots Tn$ which point to it (i.e., are citations). The parameter d is a damping factor which can be set between 0 and 1. We usually set d to 0.85. There are more details about d in the next section. Also $C(A)$ is defined as the number of links going out of page A. The PageRank of a page A is given as follows :

$$\mathrm{PR}(A) = (1-d) + d(\mathrm{PR}(T1)/C(T1) + ... + \mathrm{PR}(Tn)/C(Tn))$$

Sergey Brin et Lawrence Page disent aussi que PR est une probabilité et $\mathrm{PR}(i)$ doit donc être compris entre 0 et 1. Pour cela, il faudrait en fait remplacer $(1-d)$ par $(1-d)/N$ où N est le nombre total de pages, mais nous laissons ici la coquille de l'article originel qui ne fait que multiplier toutes les notes par N.

1. Écrire le système correspondant aux notes *Pagerank* du mini-réseau web de la figure 2 sans remplacer d par sa valeur (on pourra utiliser x, y, z et t à la place de $PR(1), \ldots, PR(4)$).
2. Résoudre le système pour $d = 1/2$ et dire quelle page est la plus pertinente selon cette notation.
3. Le nombre de pages indexées par Google est estimé en 2019 à environ 130 mille milliards de pages. Combien le système linéaire correspondant a-t-il de coefficients ? Sachant qu'un disque dur standard actuel contient de l'ordre de 1 téraoctet (soit 2^{40} octets) de données, combien de disques durs faudrait-il pour stocker ce système linéaire ? Quel commentaire cela suggère-t-il sur la méthode décrite dans cet exercice ?