Espaces vectoriels

Exercices

2.1. Exercices

Exercice 2.1. 1. Démontrer que $\mathbf{Z}$, muni de l'addition est un groupe abélien.

2. Démontrer que l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$ muni de l'addition possède un élément neutre, mais n'est pas un groupe.
3. Soit X un ensemble.
   (a) Démontrer que l'ensemble $\mathfrak{S}_X$ des bijections de X sur X, est un groupe pour la composition des applications.
   (b) On suppose que X contient au moins trois éléments distincts. Démontrer que le groupe $\mathfrak{S}_X$ n'est pas abélien.

Exercice 2.2. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$? (justifier la réponse)

1. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leqslant y\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\}$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$
6. $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

Exercice 2.3. Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ des suites de nombres réels, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. L'ensemble B des suites bornées.
2. L'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.
3. L'ensemble des suites constantes à partir d'un certain rang.
4. L'ensemble des suites décroissantes à partir d'un certain rang.
5. L'ensemble des suites convergeant vers 0.

6. L'ensemble des suites monotones.
7. L'ensemble des suites dont la valeur est $\leqslant 1$ à partir d'un certain rang.
8. L'ensemble des suites 3-périodiques.
9. L'ensemble des suites périodiques de période 3.
10. L'ensemble des suites périodiques.

Exercice 2.4. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbf{R}^3$, déterminer les quelles sont génératrices et lesquelles sont libres (justifier les réponses données).

1. $((1,1,0),(0,1,1))$,
2. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$,
3. $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$,
4. $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$,
5. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$.

Exercice 2.5. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbf{R}^3$, déterminer les quelles sont génératrices et lesquelles sont libres (justifier les réponses données).

1. $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1))$,
2. $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-1,4,-6,0))$,
3. $((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$,
4. $((0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1))$,
5. $((1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1))$.

Exercice 2.6. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les paramètres réels a et b pour que chacune des familles suivantes soient des bases de $\mathbf{R}^3$.

1. $((1,1,1),(0,a,1),(0,0,b))$,
2. $((1,0,1),(a,b,1),(b,a,1))$,
3. $((1,a,b),(a,1,a),(b,b,1))$,
4. $((a,a,b),(a,b,a),(b,a,a))$,
5. $((0,a,b),(a,0,b),(a,b,0))$.

Exercice 2.7. Les familles suivantes de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sont-elles libres ?

1. $(f_1 : x \mapsto \cos(x), f_2 : x \mapsto \sin(x), f_3 : x \mapsto 1)$,
2. $(f_1 : x \mapsto \cos^2(x), f_2 : x \mapsto \cos(2x), f_3 : x \mapsto 1)$,
3. $(f_1 : x \mapsto |x-1|, f_2 : x \mapsto |x|, f_3 : x \mapsto |x+1|)$,

Exercice 2.8. Pour tout entier $i \in \mathbf{N}$, on note e_i la suite de nombre réels $(\delta_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
2. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est-il de dimension finie ?
3. On définit $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ comme l'ensemble des suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} \mid u_n \neq 0\}$ est fini.
   (a) Démontrer que $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
   (b) Ce sous-espace vectoriel est-il de dimension finie ?

Exercice 2.9. Montrer par récurrence que les familles suivantes de n vecteurs de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sont libres (On pourra utiliser la dérivation).

1. $(f_k : x \mapsto \sin(kx))_{1\leqslant k\leqslant n}$,
2. $(f_k : x \mapsto e^{\lambda_k} x))_{1\leqslant k\leqslant n}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels deux à deux distincts.