

CONTRÔLE CONTINU 1

15 FÉVRIER 2018

Durée : 50 minutes. La calculatrice et les documents ne sont pas autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient. La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la précision des justifications seront prises en compte dans la notation. Le barème est indicatif.

Questions de cours. (5 points)

- 1) Donner la définition d'un sous-groupe.
- 2) Soient (G, \star) et (G', \star') deux groupes et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.
 - a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur le noyau $\ker f$ de f pour que f soit injectif.
 - b) Démontrer ce résultat.
- 3) Soient \mathbb{K} un corps, $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Que signifie « a est une racine de multiplicité m de P » ?

Exercice 1. (3 points)

Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \text{ est pair}\}$.

- 1) Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2, +)$.
- 2) Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & H \\ (a, b) & \longmapsto & (a, 2b - a) \end{array}$ est un morphisme de groupes bijectif (vérifier que $\varphi(\mathbb{Z}^2) \subset H$).

Exercice 2. (2 points)

- a) Soit σ la permutation de $\{1, \dots, 5\}$ définie par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calculer les puissances successives de σ pour la loi de composition \circ .
- b) Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

Exercice 3. (6 points)

Soit (G, \star) un groupe d'élément neutre e . On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des *automorphismes* de G , c'est-à-dire des morphismes de groupes bijectifs de G dans G .

On rappelle que l'ensemble $S(G)$ des bijections de G dans G , **muni de la loi de composition des applications** \circ , est un groupe. Au fait, quel est son élément neutre ?

- 1) Montrer que $(\text{Aut}(G), \circ)$ est un sous-groupe de $S(G)$. (*indication* : que peut-on dire de la composée de deux morphismes ? De la fonction réciproque d'un automorphisme ?)
- 2) Soit $g \in G$. Montrer que l'application $\text{Int}_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & g \star h \star g^{-1} \end{array}$ est un automorphisme de G .

- 3) Montrer que l'application $\text{Int} : G \longrightarrow \text{Aut}(G)$ est un morphisme de groupes. (*indication* : bien se souvenir de quelles lois respectives sont munies G et $\text{Aut}(G)$).
- 4) Décrire le noyau de Int .

Exercice 4 : polynômes réciproques. (6 points)

On dit que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré n est un *polynôme réciproque* si

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad a_k = a_{n-k}.$$

On note \mathcal{R} l'ensemble des polynômes réciproques de $\mathbb{C}[X]$.

- 1) Les polynômes $1 + 2X + X^2$ et $3 + 4X + 5X^2 + 3X^3$ sont-ils réciproques?
- 2) Montrer qu'un polynôme P de degré n est un polynôme réciproque si et seulement si $P(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.
- 3) Montrer que si $P, Q \in \mathcal{R}$ alors $PQ \in \mathcal{R}$.
- 4) Soit $P \in \mathcal{R}$.
 - a) Si α est une racine de P , prouver que $\alpha \neq 0$ et que $1/\alpha$ est une racine de P .
 - b) Montrer que si 1 est une racine de P , alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.
 - c) Démontrer que si le degré de P est impair, alors -1 est racine de P .
 - d) Démontrer que si P est de degré pair et que -1 est racine de P , alors sa multiplicité est supérieure ou égale à 2.
- 5) (Bonus) $\mathcal{R} \cup \{0\}$ est-il un sous-anneau de $\mathbb{C}[X]$?