

## CONTRÔLE CONTINU 3

17 AVRIL 2020

*Durée : 1 heure 15. La calculatrice et les documents ne sont pas autorisés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient. La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la précision des justifications seront prises en compte dans la notation (2 points). Le barème est indicatif.*

**Exercice 1.** (6 points)

On considère

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (3x + 4y + z + 2t, 6x + 8y + 2z + 5t, 9x + 12y + 3z + 10t) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que  $f$  est une application linéaire.
- 2) Donner, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, une base de  $\ker f$ . Quelle est sa dimension? L'application  $f$  est-elle injective?
- 3) Sans chercher de base de  $\operatorname{Im} f$ , donner la dimension de  $\operatorname{Im} f$ .
- 4) Donner une base de  $\operatorname{Im} f$ . L'application  $f$  est-elle surjective?

**Exercice 2.** (3 points)

Soit  $\mathcal{B} = (1, \operatorname{id}, \sin, \cos)$ , où  $\operatorname{id} : x \mapsto x$  et  $1 : x \mapsto 1$ , une famille d'éléments de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $W$  l'espace vectoriel engendré par  $\mathcal{B}$ .

- 1) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $W$ .
- 2) Soit  $D : W \longrightarrow W$  l'application de dérivation. Justifier que  $D$  est une application linéaire à valeurs dans  $W$ . Écrire la matrice  $A$  de  $D$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- 3) Calculer  $A^2$ .

**Exercice 3.** (8 points)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Montrer que  $A - \lambda I_3$  est de rang 3 si et seulement si  $\lambda \notin \{-3, 1, 2\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  où  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ . Donner le rang de  $A - \lambda_i I_3$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
- 2) Pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ , à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, trouver un vecteur colonne non nul  $v_i$  dans  $\ker(A - \lambda_i I_3) := \{v \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : (A - \lambda_i I_3)v = 0\}$ .
- 3) Soit  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  la matrice dont les trois colonnes sont  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ . Montrer que  $P$  est inversible et calculer son inverse  $P^{-1}$ .
- 4) A l'aide de la formule de changement de base, donner l'expression de  $D = P^{-1}AP$ .

**Exercice 4.** (5 points)

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $f^2 = f \circ f$ .

1) Montrer que

$$\operatorname{Im} f + \ker f = E \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

.

2) Prouver que

$$\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2.$$

3) On fait l'hypothèse supplémentaire que  $E$  est de dimension finie. Démontrer que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow \begin{cases} E = \operatorname{Im} f + \ker f \\ \operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\} \end{cases}.$$