THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Gabriel LEPETIT

Thèse dirigée par **Tanguy RIVOAL**

préparée au sein de l'**Institut Fourier**
dans **l'École Doctorale Mathématiques**

Propriétés différentielles et diophantiennes des *E*- et *G*-fonctions

Thèse soutenue publiquement le **18 octobre 2021**,
devant le jury composé de :

M. Boris ADAMCZEWSKI
Directeur de recherche CNRS, Université Lyon 1, Rapporteur
Mme Sara CHECCOLI
Maître de conférences, Université Grenoble Alpes, Examinatrice
Mme Lucia DI VIZIO
Directrice de recherche CNRS, Université Versailles-St Quentin, Rapporteur
M. Stéphane FISCHLER
Maître de conférences HDR, Université Paris Saclay, Examinateur
M. Emmanuel PEYRE
Professeur, Université Grenoble Alpes, Président du jury
M. Tanguy RIVOAL
Directeur de recherche CNRS, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse

Alors que la moindre phrase qu'on doit écrire exige un simulacre d'invention, il suffit en revanche d'un peu d'attention pour entrer dans un texte, même difficile. Griffonner une carte postale se rapproche plus de l'activité créatrice que lire la Phénoménologie de l'esprit.

Emil CIORAN, *De l'inconvénient d'être né*

Résumé

Cette thèse est divisée en deux parties concernant toutes deux les propriétés différentielles et diophantiennes des G-fonctions de Siegel, ainsi que des E-fonctions dans une certaine mesure. Dans une première partie, nous nous intéressons, étant donnée une G-fonction $F(z)$ à coefficients dans un corps de nombres $\mathbb{K}$ et un entier S, à une famille de G-fonctions $\left(F_{n,\beta}^{[s]}(z)\right)$, indexées par les entiers naturels n et les entiers $s \leqslant S$, qui correspondent essentiellement, dans le cas où β est nul à des primitives itérées de F. Nous obtenons des bornes supérieure, de l'ordre de S, et inférieure sur la dimension sur $\mathbb{K}$ de l'espace vectoriel $\Phi_{\alpha,\beta,S}$ engendré par les valeurs $F_{n,\beta}^{[s]}(\alpha)$, quand α est un élément de $\mathbb{K}$ dans le disque de convergence de F. Ceci est une généralisation de travaux menés par Fischler et Rivoal dans le cas $\beta = 0$. De plus, nous obtenons de deux manières différentes des majorations explicites de la taille de l'opérateur minimal annulant une série Nilsson- Gevrey de type arithmétique et de type holonome d'ordre 0. La première manière se fait en généralisant des travaux d'André sur la taille des modules différentiels et leur compatibilité avec les opérations algébriques usuelles. La seconde consiste, sous une hypothèse de liberté plus forte, à prouver un analogue du théorème des Chudnovsky pour certaines séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique d'ordre 0. Ceci permet de rendre explicite les bornes inférieure et supérieure sur la dimension de $\Phi_{\alpha,\beta,S}$, ce qui n'avait pas été fait par Fischler et Rivoal dans le cas $\beta = 0$. La deuxième partie de la thèse est consacrée dans un premier temps à l'étude des G-fonctions au sens large, qui sont des séries holonomes dont le dénominateur et la maison des coefficients a une croissance en $n!^{\varepsilon}$ à partir d'un certain rang pour tout ε strictement positif. Nous prouvons, en développant une esquisse donnée par André et en la complétant, un analogue *au sens large* du théorème d'André- Chudnovsky-Katz sur la structure des équations différentielles satisfaites par les G-fonctions au sens strict. Une conséquence de cela est la preuve d'un théorème de structure sur les E-opérateurs *au sens large*, dont sont solutions les E-fonctions *au sens large*. Ceci permet de donner une nouvelle preuve d'un théorème d'André généralisant le théorème de Siegel-Shidlovskii sur l'indépendance algébrique de valeurs de E-fonctions *au sens large*.

Abstract

This PhD thesis is divided into two parts which both concern the differential and Diophantine properties of Siegel's G-functions, as well as the properties of E-functions to some extent. In a first part, we interest ourselves, given a G-function $F(z)$ with coefficients in a number field $\mathbb{K}$ and an integer S, to a family of G-functions $\left(F_{n,\beta}^{[s]}(z)\right)$, indexed by the positive integers n and the integers $s \leqslant S$, which essentially correspond, in the case when β is null to iterated primitives of F. We obtain upper and lower bounds on the dimension over $\mathbb{K}$ of the vector space $\Phi_{\alpha,\beta,S}$ spanned by the values $F_{n,\beta}^{[s]}(\alpha)$, when α is an element of $\mathbb{K}$ in the disc of convergence of F. This is a generalization of the work carried out by Fischler et Rivoal in the case $\beta = 0$. Moreover, we obtain by two different ways explicit upper bounds on the size of the minimal operator cancelling a Nilsson- Gevrey power series of arithmetic and holonomic type of order 0. The first way is done by generalizing André's work on the size of differential modules and their compatibility with the usual algebraic operations. The second way consists, under a stronger hypothesis of linear independence, in proving an analogue of Chudnovsky's theorem for some Nilsson-Gevrey series of arithmetic and holonomic type of order 0. This allows us to make explicit the lower and upper bounds on the dimension of $\Phi_{\alpha,\beta,S}$, which had not been done by Fischler in Rivoal in the case $\beta = 0$. The second part of the thesis is devoted in the first place to the study of G-functions in the broad sense, which are holonomic power series whose coefficient have their denominator of houses growing at most in $n!^{\varepsilon}$ from a certain rank for all positive ε. We prove, by developing a sketch given by André and completing it, an analogue *in the broad sense* of the André-Chudnovsky-Katz theorem on the structure of differential equations satisfied by G-functions in the strict sense. A consequence of this is the proof of a structure theorem on the E-operators *in the broad sense*, of which the E-functions *in the broad sense* are solutions. This allows us to give a new proof of atheorem of André generalizing the Siegel-Shidlovskii theorem on the algebraic independence of values of E-functions *in the broad sense*.

Table des matières

Introduction

Cette thèse est motivée par la recherche de résultats d'irrationalité ou de transcendance sur les valeurs de fonctions spéciales telles que les séries

$$\log(1-z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \quad \mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}, \quad \arctan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

l'exponentielle $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, la fonction de Bessel $J_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{4^n n!^2}$ et la famille des fonctions hypergéométriques

$${}_{\nu}F_{\nu-1}(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta};z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_\nu)_k}{k!(\beta_1)_k \dots (\beta_{\nu-1})_k} z^k,$$

quand $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \in \mathbb{Q}^\nu$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_{\nu-1}) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0})^{\nu-1}$.

Toutes ces fonctions ont en commun de faire partie de deux classes plus larges de fonctions, les G-fonctions et E-fonctions. Elles ont été définies par Siegel (voir [51]) en 1929, qui a constaté qu'il fallait introduire certaines conditions de croissances archimédiennes et non archimédiennes pour pouvoir obtenir des résultats sur l'irrationalité ou la transcendance des valeurs de telles séries.

Définition 0.1

Une G-fonction *au sens strict est une série* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$ *satisfaisant les trois conditions suivantes :*

a) *f est solution d'une équation différentielle non nulle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$;*

b) *Il existe $C_1 > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\overline{|a_k|} \leqslant C_1^{k+1}$, où $\overline{|a_k|}$ est la* maison *de a_k,* i.e. *le maximum des conjugués au sens de Galois de a_k ;*

c) *Il existe $C_2 > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{den}(a_0, \dots, a_k) \leqslant C_2^{k+1}$, où $\mathrm{den}(a_0, \dots, a_k)$ est le* dénominateur *de $a_0, \dots, a_k$,* i.e. *le plus petit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $da_0, \dots, da_k$ sont des entiers algébriques.*

On dit que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une G-fonction *au sens large si elle vérifie **a)** et les conditions alternatives **b)'** et **c)'** suivantes :*

b)' *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0(\varepsilon), \overline{|a_n|} \leqslant (n!)^\varepsilon$;*

c)' *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0(\varepsilon), \mathrm{den}(a_0, \dots, a_n) \leqslant (n!)^\varepsilon$.*

Une E-fonction *au sens strict (resp. au sens large) est une série $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$ vérifiant **a)** et telles que les a_k vérifient **b)** et **c)** (resp. **b)'** et **c)'**).*

Les noms de G- et E-fonctions viennent respectivement de la série géométrique $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ et de la série exponentielle. Siegel a défini les E-fonctions *au sens large* mais les G-fonctions *au sens strict*. Les articles récents sur les E-fonctions portent plutôt sur les E-fonctions *au sens strict*, et très peu a été écrit sur les G-fonctions *au sens large*.

L'étude des E- et G-fonctions a été développée, entre autres, par Shidlovskii [49], puis poursuivie par Nesterenko et Shidlovskii [41], André [5, 6], Galochkin [27], Katz [34], Bombieri et Beukers [14].

Le but de Siegel en étudiant les E-fonctions était de généraliser le théorème de Lindemann-Weierstrass, qui affirme que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. En particulier, e^{α} est transcendant si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$. La généralisation souhaitée par Siegel est donnée par le théorème suivant :

Théorème 0.1 (*Siegel–Shidlovskii, 1929/1956, [49], p. 139*)

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de E-fonctions au sens large. *Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1, \dots, f_n)$, supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ tel que $\mathbf{f}' = A\mathbf{f}$. Prenons $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$, où $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ est tel que $T(z)A(z) \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$.*

Alors le degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de $(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$ est égal au degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de $(f_1(z), \dots, f_n(z))$.

Un énoncé encore plus précis a été obtenu par André [7]. Beukers a obtenu le même énoncé dans le cas strict dans [14].

Théorème 0.2 (*André, 2014*)

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de E-fonctions au sens large. *Supposons que*

$$ {}^t(f_1, \dots, f_n)' = A\left({}^t(f_1, \dots, f_n)\right), \quad A \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z)), $$

et prenons $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$, où $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ est tel que $T(z)A(z) \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$. Alors pour tout polynôme homogène $P \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{Q}[Z, X_1, \dots, X_n]$ homogène en les variables $X_1, \dots, X_n$ tel que

$$ Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0. $$

L'étude des E-fonctions permet de déduire la transcendance de $\log(\alpha)$ pour $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$. Ceci est une conséquence directe du théorème de Lindemann-Weierstrass. On peut obtenir ce résultat par l'étude directe des G-fonctions, mais cela est plus difficile.

L'un des résultats principaux de la théorie des G-fonctions, le théorème d'André-Chudnovsky-Katz qui a fait l'objet de mon mémoire de Master 2 [38] inclut le fait suivant : l'opérateur différentiel d'ordre minimal à coefficients $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ annulant une G-fonction appartient à une famille spécifique d'opérateurs différentiels, appelés *G-opérateurs*, définis par une condition de croissance modérée sur certains dénominateurs, la *condition de Galochkin* (cf [27]) :

Définition 0.2 (*Galochkin*)

Soit $G \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Considérons, pour tout s entier, la matrice $G_s \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ telle que $\mathbf{y}^{(s)} = G_s\mathbf{y}$ pour tout $\mathbf{y} \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]^n$ solution de $\mathbf{y}' = G\mathbf{y}$. On prend $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ le plus petit dénominateur commun des coefficients de la matrice $G(z)$. On note, pour $s \in \mathbb{N}$, q_s le plus petit dénominateur supérieur ou égal à 1 *de tous les coefficients des coefficients des matrices polynomiales $T(z)^m G_m(z)/m!$, quand $m \in \{1, \dots, s\}$.*

- *On dit que le système $y' = Gy$* vérifie la condition de Galochkin *si*

$$ \exists C > 0 : \forall s \in \mathbb{N}, \quad q_s \leqslant C^{s+1}. $$

- *Si G est la matrice compagnon d'un opérateur L, on dit que L est un G*-opérateur *si G vérifie la condition de Galochkin.*

D. et G. Chudnovsky [1] ont démontré dans [17, Theorem III p. 17] le théorème suivant :

1. Ces auteurs seront nommés dans la suite de cette thèse comme « les Chudnovsky ».

Théorème 0.3 (*Chudnovsky*)

Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1(z),\ldots,f_n(z))$ une famille de G-fonctions libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et vérifiant $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$, $G \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Alors le système $y' = Gy$ vérifie la condition de Galochkin.

Le théorème 0.3 implique alors le point **a)** du théorème suivant (voir [5, pp. 717–720]) :

Théorème 0.4 (*André-Chudnovsky-Katz*)

a) *Tout opérateur différentiel à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ annulant une G-fonction $f(z)$ et d'ordre minimal pour $f(z)$ est un G-opérateur.*

b) *Tout G-opérateur d'ordre μ est fuchsien à exposants rationnels et admet au voisinage de tout point a de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ une base de solutions de la forme*

$$(f_1(z-a),\ldots,f_\mu(z-a))(z-a)^{C_\alpha},$$

en remplaçant, pour $a=\infty$, $z-a$ par $1/z$, où les $f_i(u)$ sont des G-fonctions et $C_\alpha \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{Q})$.

Du point de vue des résultats diophantiens, la théorie des G-fonctions est loin d'être achevée. Un des premiers théorèmes diophantiens généraux a été obtenue par Galochkin dans [27].

Théorème 0.5 (*Galochkin, [27]*)

Soit $\mathbf{f} = {}^t\left(f_1(z),\ldots,f_n(z)\right) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]^n$ un vecteur de G-fonctions vérifiant $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$, avec $G \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$, tel que $(f_1(z),\ldots,f_n(z))$ est libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, et satisfaisant la condition de Galochkin.

Alors il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de $\mathbf{f}$ et de G telle que pour tout $b \in \mathbb{Z}$ vérifiant $c < |b|$, la famille $\left(f_1\left(\frac{1}{b}\right),\ldots,f_n\left(\frac{1}{b}\right)\right)$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

Si $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, on a le même type de résultat sur les $f_i\left(\frac{a}{b}\right)$ pourvu que $0 < c_1|a|^{c_2} < |b|$, avec c_1, c_2 des constantes.

La présence de la condition de Galochkin dans ce théorème illustre le fait que la nature des équations différentielles satisfaites par les G-fonctions influence de manière essentielle les propriétés de leurs valeurs en des points algébriques. Ultérieurement, les Chudnovsky ont montré que cette condition était automatiquement vérifiée, ce qui est l'objet du théorème 0.3 ci-dessus.

La recherche de résultats diophantiens sur les valeurs de G-fonctions a ensuite été poursuivie par Bombieri dans [15], puis par les Chudnovsky, qui ont démontré le théorème suivant, qui est essentiellement le meilleur connu à ce jour (cf [17, Theorem II p. 17]).

Théorème 0.6 (*Chudnovsky, [17], p. 17*)

Soit $\mathbf{f} = {}^t\left(f_1(z),\ldots,f_n(z)\right) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]^n$ un vecteur de G-fonctions vérifiant $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$ avec $G \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ telle que $1, f_1(z),\ldots,f_n(z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors pour tout $t \geqslant 1$, il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant de $\mathbf{f}$ et de t telle que pour tout nombre algébrique ξ de degré inférieur ou égal à t, et vérifiant

$$0 < |\xi| \leqslant \exp\left(-c_0\left(\log H(\xi)\right)^{\frac{4n}{4n+1}}\right),$$

les nombres $1, f_1(\xi),\ldots,f_n(\xi)$ ne sont pas liés par une relation algébrique de degré inférieur ou égal à t sur $\mathbb{Q}(\xi)$.

Ici, $H(\xi)$ est la hauteur naïve de ξ, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme minimal normalisé de ξ sur $\mathbb{Q}$.

Hata [31] et Chudnovsky [18] ont obtenu des résultats analogues et plus précis pour les polylogarithmes $\mathrm{Li}_s(z)$, quand $s \geqslant 1$. Soulignons qu'il s'agit de fonctions qui jouent un rôle central en approximation diophantienne, car elles sont liées aux valeurs de la fonctions zêta de Riemann par les formules, valables pour $s \geqslant 2$,

$$\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s) \quad \text{et} \quad \mathrm{Li}_s(-1) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s).$$

Les résultats d'Hata et Chudnovsky sont de la même forme que le théorème 0.6, mais concernent uniquement l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$. Hata ayant raffiné le travail de Chudnovsky, nous n'énonçons que le résultat suivant :

Proposition 0.1 (*Hata, [31], p. 135*)

Définissons

$$D_{m,\pm}(x) := \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}} \frac{(x \pm 1)^{m+1}}{x^m},$$

$F_{m,+}(x) := D_{m,+}(1/x)$ *et*

$$F_{m,-}(x) := \begin{cases} D_{1,-}(1/x) \quad \text{si } m = 1 \\ \dfrac{2}{27}\left\{x^2 - 9 + \dfrac{1}{x}(x^2+3)^{3/2}\right\} \quad \text{si } m = 2 \\ D_{m,+}(1/x) \quad \text{si } m \geqslant 3 \end{cases}$$

Soit $q \in \mathbb{Z}$ tel que $|q| > F_{m,\mathrm{sgn}(q)}(e^m)$. Alors les nombres $1, \mathrm{Li}_1(1/q), \dots, \mathrm{Li}_m(1/q)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Pour $k = 1$, le polylogarithme $\mathrm{Li}_1(z)$ est égal à $-\log(1-z)$. Alladi et Robinson ont prouvé en dans [3] que $\log(1 + p/q)$ est un nombre irrationnel pour tous les entiers p, q vérifiant $q\left(1 - \sqrt{1+p/q}\right)^2 < e^{-1}$. Comme nous l'avons mentionné plus haut, on savait déjà, via l'étude des E-fonctions, que $\log(\alpha)$ est un nombre transcendant pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1\}$, mais il est intéressant de voir quels résultats effectifs nous pouvons obtenir du point de vue des G-fonctions.

A la suite de la preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$ par Apéry [8], une autre direction fructueuse a consisté à adopter un point de vue dual : ce n'est plus le nombre α en lequel on évalue les polylogarithmes qui varie, mais la famille de polylogarithmes que l'on considère. Ainsi, les résultats de Ball et Rivoal [10] sur l'indépendance linéaire des valeurs de la fonction ζ de Riemann ont été suivis de ceux de Rivoal [45] puis Marcovecchio [40] sur l'indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes.

Précisément, Marcovecchio a démontré le résultat suivant, que Rivoal avait déjà prouvé dans [45] dans le cas particulier où α est un nombre algébrique réel tel que $0 < |\alpha| < 1$.

Proposition 0.2 (*Marcovecchio, [40]*)

Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $0 < |\alpha| < 1$, alors on a

$$\frac{1 + o(1)}{(1 + \log(2))[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]} \log(S) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}(\alpha)} \mathrm{Vect}\big(1, \mathrm{Li}_1(\alpha), \dots, \mathrm{Li}_S(\alpha)\big) \leqslant S + 1, \quad S \to +\infty.$$

Dans [24], Fischler et Rivoal ont généralisé cette démarche en considérant le problème suivant : étant donnée une G-fonction non polynomiale $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ de rayon de convergence $R > 0$, où $\mathbb{K}$ est un corps de nombres, d'opérateur minimal non nul $L \in \mathbb{K}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, on définit la famille de G-fonctions $\big(F_n^{[s]}(z)\big)_{n \in \mathbb{N}*, 0 \leqslant s \leqslant S}$ par l'équation

$$F_n^{[s]}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{(k+n)^s} z^{k+n} \tag{1}$$

La question est de savoir, pour $\alpha \in \mathbb{K} \cap D(0,R)$ donné, s'il est possible de trouver des bornes inférieures et supérieures pertinentes sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\Phi_{\alpha,S}$ engendré par les valeurs $F_n^{[s]}(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant s \leqslant S$.

Cette étude est motivée par l'exemple des fonctions polylogarithmes : si $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1/(1-z)$, alors on remarque

$$F_n^{[s]}(z) = \mathrm{Li}_s(z) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^k}{k^s}$$

de sorte que $F_n^{[s]}(z)$ est, à un terme additif polynomial près, la fonction polylogarithme d'ordre s définie par $\mathrm{Li}_s(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$.

Théorème 0.7 (*Fischler–Rivoal, [24]*)

Il existe des constantes $C(F) > 0$ et $\ell_0 \in \mathbb{N}^*$ ne dépendant pas de α telles que

$$\frac{1+o(1)}{C(F)[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} \log(S) \leqslant \dim_{\mathbb{K}} \Phi_{\alpha,S} \leqslant \ell_0 S + \mu, \quad S \to +\infty.$$

Dans [25], le théorème 0.7 a été généralisé à $\alpha \in \mathscr{D}_F$, où $\mathscr{D}_F$ est un ouvert étoilé en 0 contenant le disque ouvert $D(0,R)$.

Les propriétés diophantiennes des valeurs des E- et G-fonctions sont étroitement liées à leurs propriétés différentielles : le théorème d'André-Chudnovsky-Katz (théorème 0.4), qui est un théorème de structure sur les G-opérateurs, permet d'obtenir des résultats diophantiens sur les valeurs des E-fonctions, comme on le verra dans le chapitre 4.

Je vais maintenant présenter le contenu de mon travail de thèse.

0.1 Propriétés diophantiennes des valeurs des G-fonctions

Dans un premier temps, l'essentiel de mes travaux a été tourné vers la recherche d'une généralisation du théorème 0.7, qui est le résultat principal de l'article de Fischler et Rivoal [24].

Dans le théorème 0.7, l'entier ℓ_0 est donné par une expression explicite en fonction des exposants de L en 0 et en ∞. En revanche, quoique la constante $C(F)$ obtenue par Fischler et Rivoal soit théoriquement calculable, elle n'a pas été explicitée dans [24].

L'un des objectifs de ma thèse est d'étudier le problème suivant :

Soit β un rationnel positif. Définissons les G-fonctions

$$F_{n,\beta}^{[s]}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{(k+n+\beta)^s} z^{k+n}, \quad 0 \leqslant s \leqslant S,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

En prenant $\beta = 0$, on retrouve la famille $\left(F_n^{[s]}(z)\right)_{n,s}$ définie dans (1). Comme ci-dessus, on se donne $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $0 < |\alpha| < R$ et on pose

$$\Phi_{\alpha,\beta,S} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\left(F_{n,\beta}^{[s]}(\alpha), 0 \leqslant s \leqslant S, n \in \mathbb{N}^*\right).$$

Dans le chapitre 3, qui correspond à l'article [36], j'ai adapté la démarche reposant sur la méthode du col de [24] pour prouver l'analogue du théorème 0.7 dans cette nouvelle situation. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 0.8

On peut trouver des constantes $C(F,\beta)>0$ et $\ell_0(\beta)\in\mathbb{N}^*$ telles que

$$\frac{1+o(1)}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]C(F,\beta)}\log(S)\leqslant \dim_{\mathbb{K}}\Phi_{\alpha,\beta,S}\leqslant \ell_0(\beta)S+\mu.$$

En prolongement de cette étude, je me suis intéressé aux questions connexes suivantes, numérotées de **1)** à **3)**.

1) Comme expliqué ci-dessus, il n'y a pas dans [24] d'expression explicite de la constante $C(F)$ du théorème 0.7. Peut-on donner une expression effectivement calculable de la constante $C(F,\beta)$, de manière à obtenir une version quantitative du théorème 0.7 ?

On peut là encore répondre par l'affirmative à cette question comme on le montre dans le chapitre 3. En m'appuyant sur les livres de référence d'André [4] et Dwork [21] sur les G-fonctions et G-opérateurs, j'ai pu obtenir une expression de $C(F,\beta)$ en fonction de constantes analytiques et arithmétiques de l'opérateur L et du dénominateur de β. Il se trouve que $C(F,\beta)$ dépend de manière cruciale de la *taille* $\sigma(M_\beta)$ d'un opérateur différentiel M_β dépendant à la fois de L et de β. Cette quantité, définie à l'aide des valeurs absolues p-adiques sur un corps de nombres par André dans [4], encode la *condition de Galochkin* vérifiée par les G-opérateurs. Avec les notations de la définition 0.2, dans le cas particulier où $M\in\mathbb{Z}[z,\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, G est la matrice compagnon de M, et $T(z)\in\mathbb{Z}[z]$ a au moins un coefficient égal à 1, alors on a

$$\sigma(M)=\limsup_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\log q_s.$$

Ce réel positif $\sigma(M)$ a l'inconvénient de ne pas être directement calculable numériquement, c'est pourquoi j'ai étudié et adapté les travaux de Chudnovsky, Dwork et André afin de lever certains obstacles :

2) Soit $G(z)$ une série Nilsson-Gevrey de type arithmétique d'ordre 0 (cf [5]) de la forme

$$G(z)=\sum_{(\alpha,k,\ell)\in S}c_{\alpha,k,\ell}z^\alpha\log(z)^k g_{\alpha,k,\ell}(z),$$

étant donnés un ensemble fini $S\subset\mathbb{Q}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, une famille de nombres complexes non nuls $(c_{\alpha,k,\ell})_{(\alpha,k,\ell)\in S}$ et une famille de G-fonctions non nulles $\big(g_{\alpha,k,\ell}(z)\big)_{\alpha,k,\ell}$. Soit $L\in\overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ un opérateur non nul d'ordre minimal tel que $L(G(z))=0$. On définit une notion de *taille étendue* $\overline{\sigma}(g_{\alpha,k,\ell})$ de $g_{\alpha,k,\ell}(z)$, qui est un réel quantifiant les conditions **b)** et **c)** de la définition de G-fonction (définition 0.1). Peut-on obtenir une estimation de la taille de L en fonction de S et des *tailles étendues* $\overline{\sigma}(g_{\alpha,k,\ell}(z))$? On démontrerait ainsi un analogue quantitatif du théorème des Chudnovsky pour les séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique. C'est ce que nous allons faire, de deux manières différentes, dans les chapitres 1 et 2.

3) Étant donnés deux opérateurs différentiels L_1 et L_2, peut-on trouver une borne supérieure sur $\sigma(L_1L_2)$ en fonction de $\sigma(L_1)$ et $\sigma(L_2)$?

Dans le chapitre 1, qui correspond à l'article [37], j'utilise la méthode d'André (voir [4, 5]) consistant à associer à tout opérateur différentiel L un module différentiel $\mathscr{M}_L$, à définir la taille d'un module différentiel $\mathscr{M}$, puis à étudier le comportement de la taille vis à vis des opérations algébriques usuelles sur les modules différentiels : produit cartésien, quotient, inclusion, produit tensoriel, etc. Ceci est le point clef permettant de répondre positivement à **2)** et **3)**. Précisément, la solution obtenue au problème **2)** est résumée dans le théorème suivant :

Théorème 0.9

Soit $S\subset\mathbb{Q}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ un ensemble fini, $(c_{\alpha,k,\ell})_{(\alpha,k,\ell)\in S}\in(\mathbb{C}^*)^S$ et une famille $(g_{\alpha,k,\ell}(z))_{(\alpha,k,\ell)\in S}$

de G-fonctions non nulles. On considère

$$G(z) = \sum_{(\alpha,k,\ell)\in S} c_{\alpha,k,\ell} z^{\alpha} \log(z)^k g_{\alpha,k,\ell}(z),$$

qui est une série Nilsson-Gevrey de type arithmétique d'ordre 0*. Alors :*

a) *La fonction $G(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire non nulle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et l'opérateur minimal L de $f(z)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est un G-opérateur [5, p. 720].*

b) *Pour tout $(\alpha,k,\ell) \in S$, notons $L_{\alpha,k,\ell} \neq 0$ un opérateur minimal de la G-fonction $g_{\alpha,k,\ell}(z)$.On définit κ comme le maximum des entiers k tels que $(\alpha,k,\ell)\in S$ pour un certain $(\alpha,\ell)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$ et $A := \{\alpha\in\mathbb{Q} : \exists (k,\ell)\in\mathbb{N}^2, (\alpha,k,\ell)\in S\}$.*

On note $\mu_{\alpha,k,\ell} := \mathrm{ord}\,(L_{\alpha,k,\ell})$, $\delta_{\alpha,k,\ell} := \deg_z(L_{\alpha,k,\ell})$, et $\varepsilon(x,y) := \begin{cases} 1 \text{ si } x = y \\ 0 \text{ sinon}. \end{cases}$

Alors on a

$$\sigma(L) \leqslant \max\Big(1+\log(\kappa+2),\, 2\big(1+\log(\kappa+2)\big)\log\big(\max_{\alpha\in A}\mathrm{den}(\alpha)\big),\, \max_{(\alpha,k,\ell)\in S}\Big[\big(1+\log(k+2)\big)$$
$$\Big(\big(5+\varepsilon(\mu_{\alpha,k,\ell},1)\big)\mu_{\alpha,k,\ell}^2(\delta_{\alpha,k,\ell}+1)-1-(\mu_{\alpha,k,\ell}-1)(\delta_{\alpha,k,\ell}+1)\Big)\overline{\sigma}(g_{\alpha,k,\ell})\Big)\Big]\Big)$$

Le point clef est d'obtenir une majoration entre $\sigma(L)$ et les tailles $\sigma(L_{\alpha,k,\ell})$ des opérateurs minimaux non nuls respectifs sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ des G-fonctions $g_{\alpha,k,\ell}(z)$. L'application d'une version quantitative du théorème des Chudnovsky dûe à Dwork [21, p. 290, p. 299] permet alors de faire le lien entre les tailles de $L_{\alpha,k,\ell}$ et les tailles étendues des $g_{\alpha,k,\ell}(z)$.

Par ailleurs, dans le chapitre 2, j'adopte une autre démarche pour résoudre le problème **2)** dans un cas particulier. En adaptant directement le théorème des Chudnovsky [17, Theorem II p. 17] aux séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique d'ordre 0 s'écrivant sous la forme

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\kappa}\sum_{\ell=1}^{\lambda} z^{\alpha_\ell}\log(z)^k g_{k,\ell}(z), \tag{2}$$

où $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_\lambda)\in\mathbb{Q}^\lambda$ et les $g_{k,\ell}(z)$ sont des G-fonctions, j'ai pu exprimer la taille de l'opérateur minimal L de G sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ en fonction de κ, λ, $\boldsymbol{\alpha}$, ainsi que de la taille étendue des G-fonctions $g_{k,\ell}(z)$. Notons que l'ensemble des séries s'écrivant sous la forme (2) est inclus strictement dans l'ensemble des séries particulières (de type Nilsson-Gevrey arithmétique d'ordre 0) considérées dans le théorème 0.9.

Dans la section 3.3.3, une comparaison des majorations obtenues sur $\sigma(L)$ dans les chapitres 1 et 2 est menée dans le cas particulier des séries $G(z) = z^\beta F(z)$, quand $\beta\in\mathbb{Q}$ et $F(z)$ est une G-fonction.

0.2 Structure des G-opérateurs *au sens large*

Une seconde partie de la thèse, qui correspond à la prépublication [35], a consisté, dans la continuité de mon travail de mémoire de deuxième année de Master [38], à chercher une généralisation du théorème d'André-Chudnovsky-Katz pour la classe de fonctions plus générale des G-fonctions *au sens large*.

On sait que toute G-fonction *au sens strict* est une G-fonction *au sens large*, mais la réciproque est à l'état de conjecture. Dans le chapitre 4, je montre à la suite des travaux d'André [5, 6] le théorème 0.10. Sa preuve a été sommairement esquissée par André dans [6, pp. 746–747], qui n'a énoncé qu'une partie de ce théorème. Précisément, André énonce que *la* *singularité en l'infini d'un opérateur d'ordre minimal annulant une G-fonction* au sens large *est régulière.* Dans le chapitre 4, nous donnons tous les détails de l'esquisse d'André et nous obtenons également des résultats supplémentaires sur la structure des bases de solutions aux points algébriques non singuliers. L'ensemble de tous ces résultats est résumé ainsi :

Théorème 0.10

Soit $f(z)$ une G-fonction au sens large *et $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ un opérateur différentiel tel que $L(f(z)) = 0$ et d'ordre minimal μ pour f.*

Alors au voisinage de tout $\alpha \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$, il existe une base de solutions de $Ly(z) = 0$ de la forme

$$(f_1(z-\alpha), \dots, f_\mu(z-\alpha))(z-\alpha)^{C_\alpha},$$

en remplaçant, pour $\alpha = \infty$, $z - \alpha$ par $1/z$, où $C_\alpha \in \mathscr{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ est triangulaire supérieure à valeurs propres dans $\mathbb{Q}$ et les $f_i(u) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![u]\!]$ sont des G-fonctions au sens large.

Le théorème 0.10 constitue une généralisation du théorème d'André-Chudnovsky-Katz (théorème 0.4) aux G-fonctions *au sens large*. La démonstration, inspirée de [13], s'appuie sur la définition d'une notion de G-opérateur *au sens large* adaptée aux conditions **b)'** et **c)'**.

Elle repose sur quatre éléments :

i) On commence par montrer l'analogue du théorème des Chudnovsky pour les G-fonctions *au sens large* en définissant une condition de Galochkin « large ». Il s'avère qu'André a introduit cette condition, en la formulant dans un autre langage, dans [6, p. 747].

Définition 0.3

On reprend les notations de la définition 0.2.

- *On dit que le système $y' = Gy$* vérifie la condition de Galochkin *au sens large si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists s_0(\varepsilon) :\ \forall s \geqslant s_0(\varepsilon), \quad q_s \leqslant s!^{\varepsilon}.$$

- *Si G est la matrice compagnon d'un opérateur L, on dit que L est un G*-opérateur *au sens large si G vérifie la condition de Galochkin* au sens large.

On donne alors les détails du résultat suivant, esquissé par André.

Théorème 0.11 (*André, [6], p. 747*)

Si $f(z)$ est une G-fonction au sens large *et $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ est un opérateur d'ordre minimal tel que $L(f(z)) = 0$, alors L est un G-opérateur* au sens large.

ii) Suivant André [6, p. 747], on introduit une condition de Bombieri *au sens large*. Si G est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}(z)$, où $\mathbb{K}$ est un corps de nombres, et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$, on définit $R_{\mathfrak{p}}(G)$ comme le rayon de convergence d'une matrice fondamentale de solutions du système $y' = Gy$ au voisinage du *point générique* $\mathfrak{p}$*-adique* tel que construit dans [21, pp. 92–97].

Définition 0.4 (*André, [6], p. 747*)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n(G) := \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}) \\ p(\mathfrak{p}) \leqslant n}} \log^+ \left(\dfrac{1}{R_{\mathfrak{p}}(G)} \right)$, où $p(\mathfrak{p})$ est le premier positif de $\mathbb{Z}$ engendrant $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$. On dit que le système $y' = Gy$ satisfait la condition de Bombieri *au sens large quand*

$$\rho_n(G) = o(\log n).$$

Nous montrons alors que tout opérateur différentiel dont la matrice compagnon satisfait la condition de Bombieri au sens large est *globalement nilpotent* selon la terminologie de

Dwork [21, p. 95, 98], et donc, selon un théorème de Katz [21, p. 98], est à exposants rationnels en tout point de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$.

iii) On prouve un analogue *au sens large* du théorème d'André-Bombieri (voir [21, pp. 228–234]) :

Proposition 0.3 (*André, [6], p. 747*)

Soit $G \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$. La condition de Galochkin au sens large *est vérifiée si et seulement si la condition de Bombieri* au sens large $\rho_n(G) = o(\log n)$ *est vérifiée.*

Les trois points précédents fournissent, au voisinage de tout point α de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ une base de solutions de l'équation $L(y(z)) = 0$ de la forme

$$(f_1(z-\alpha),\dots,f_\mu(z-\alpha))(z-\alpha)^{C_\alpha},$$

où $C_\alpha \in \mathcal{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ est triangulaire supérieure à valeurs propres dans $\mathbb{Q}$ et les $f_i(u) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![u]\!]$.

iv) On montre enfin, en adaptant la démonstration donnée dans le cas strict par Dwork dans [21, pp. 234–248], que les $f_i(u)$ sont alors des G-fonctions *au sens large*, ce qui n'avait pas été énoncé par André.

Malheureusement, on ne dispose pas d'une généralisation complète *au sens large* de la théorie des G-fonctions *au sens strict*, car il manque l'analogue du théorème diophantien 0.6. Plus précisément, il serait difficile de concilier rayon de convergence fini et dénominateur en $n!^\varepsilon$ dans les constructions diophantiennes usuelles. Pour compléter la théorie, pourrait-on prouver à partir du théorème de structure des E-opérateurs *au sens large* un analogue *au sens large* du théorème 0.6, de la même manière que l'on peut obtenir une preuve du théorème de Siegel-Shidlovskii à partir de la connaissance de la structure des G-opérateurs *au sens large*? Ceci constituerait une forme de réciproque à la méthode de « transcendance sans transcendance » menée par André dans [6]. Ceci semble être un problème difficile qui reste ouvert à ce jour.

0.3 Structure des E-opérateurs *au sens large*

Dans le chapitre 5, nous tirons plusieurs conséquence du théorème 0.10. L'une d'elles est l'obtention d'un théorème de structure sur les E-opérateurs *au sens large*, qui sont les transformées de Fourier-Laplace des G-opérateurs *au sens large*. Ce résultat n'avait pas été écrit auparavant par André.

Théorème 0.12

Soit $f(z)$ une E-fonction au sens large *et L son opérateur minimal non nul sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors*

- ***a)*** *Toute les singularités différentes de 0 et ∞ de L sont apparentes.*
- ***b)*** *L'opérateur L est singulier régulier en 0. Les exposants de L en 0 sont rationnels, ceux qui ne sont pas entiers sont (modulo $\mathbb{Z}$ et comptés sans multiplicité), les exposants en ∞ de sa transformée de Fourier-Laplace $\mathcal{F}^*(L)$.*
- ***c)*** *Il existe une base de solutions en 0 de l'équation $L(y(z)) = 0$ de la forme*

$$(F_1(z),\dots,F_\nu(z))\cdot z^{\Gamma_0},$$

où les F_j sont des E-fonctions au sens large *et $\Gamma_0 \in \mathcal{M}_\nu(\mathbb{Q})$ est triangulaire supérieure.*

Ceci mène à une nouvelle preuve du théorème 0.2 ci-dessus, qui est davantage dans l'esprit de la démonstration du théorème dans le cas strict (dûe à Beukers [14]). Nous obtenons ensuite d'autres conséquences diophantiennes sur les valeurs des E-fonctions *au sens large* (voir les parties 5.4 et 5.5).

Remarques et notations

• Dans ce qui suit, étant donnée une fonction f, on appellera « opérateur minimal de f sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ », ou « opérateur minimal » quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, tout opérateur non nul $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)\,[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ tel que $L(f(z)) = 0$, et dont l'ordre est minimal pour f.
• Pour $u_1, \dots, u_n \in \overline{\mathbb{Q}}$, on note $\mathrm{den}(u_1, \dots, u_n)$ le *dénominateur* de $u_1, \dots, u_n$, c'est à dire le plus petit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $du_1, \dots, du_n$ sont des entiers algébriques.
• Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$, on note $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des entiers algébriques de $\mathbb{K}$.
• Pour éviter trop de retour du lecteur vers l'introduction, on réécrira explicitement certains des théorèmes cités en introduction dans les divers chapitres.

Chapitre 1

Problèmes quantitatifs sur la taille des G-opérateurs

Ce chapitre correspond à l'article [37].

1.1 Introduction

La pierre angulaire de la théorie des G-fonctions est l'étude des opérateurs minimaux non nuls des G-fonctions sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Il se trouve qu'ils ont des propriétés spécifiques, incluant le fait que ce sont des opérateurs différentiels fuchsiens à exposants rationnels en tout point. Ils appartiennent à la classe des G-opérateurs, qui sont conjecturés comme « venant de la géométrie » (voir [4, chapitre II]).

Le théorème des Chudnovsky affirme que l'opérateur minimal non nul L d'une G-fonction f satisfait une condition arithmétique de croissance géométrique sur certains dénominateurs, appelée *condition de Galochkin* (définition 0.2). Cette condition est équivalente au fait qu'une quantité $\sigma(L)$, définie en termes p-adiques (voir définition 1.7 dans la section 1.2 ci-dessous), est finie. Cette quantité est appelée la *taille* de L. Plus généralement, il est possible d'associer une taille $\sigma(G)$ à tout système différentiel $y' = Gy$, où $G \in M_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$.

Similairement, on associe à toute G-fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sa taille étendue $\overline{\sigma}(f)$, encodant les conditions de croissance modérée $\overline{|a_n|} \leqslant C_1^{n+1}$ et $\mathrm{den}(a_0, \dots, a_n) \leqslant C_2^{n+1}$ (voir l'introduction).

Le théorème des Chudnovsky a été prouvé de telle sorte qu'il existe un lien explicite entre la taille de L et la taille de f, où L est l'opérateur minimal non nul de f sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ (voir [21, chapitre VII]). Ceci est particulièrement utile pour des applications diophantiennes, comme par exemple dans [36].

Dans [5] et [6], André a étudié les propriétés des *séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique* d'ordre 0, *i.e.* les fonctions qui peuvent être écrites sous la forme

$$f(z) = \sum_{(\alpha,k,\ell)\in S} c_{\alpha,k,\ell} z^{\alpha} \log(z)^k f_{\alpha,k,\ell}(z), \tag{1.1}$$

où $S \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $c_{\alpha,k,\ell} \in \mathbb{C}^*$, et les $f_{\alpha,k,\ell}(z)$ vérifient les conditions **b)** et **c)** de la définition 0.1. On dit de plus que $f(z)$ est *de type holonome* si les $f_{\alpha,k,\ell}(z)$ sont holonomes, c'est à dire solutions d'une équation différentielle non nulle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ [1].

1. Dans [22, Proposition 1, p. 2], Fischler et Rivoal prouvent que toutes les séries Nilsson-Gevrey holonomes d'ordre s de type arithmétique sont des séries de type holonome. Ainsi, dans la suite de la thèse, tous les énoncés portant sur les séries Nilsson-Gevrey de type holonome seront également vrais si l'on suppose seulement ces séries holonomes.

André a démontré en particulier un analogue du théorème des Chudnovsky pour les séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome d'ordre 0 :

Théorème 1.1 (*[5], p. 720*)

Soit $S \subset \mathbb{Q}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ un ensemble fini, $(c_{\alpha,k,\ell})_{(\alpha,k,\ell)\in S} \in (\mathbb{C}^*)^S$ et une famille $(f_{\alpha,k,\ell}(z))_{(\alpha,k,\ell)\in S}$ de G-fonctions non nulles. On considère

$$f(z) = \sum_{(\alpha,k,\ell)\in S} c_{\alpha,k,\ell} z^\alpha \log(z)^k f_{\alpha,k,\ell}(z)$$

une série Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome d'ordre 0. Alors $f(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire non nulle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et l'opérateur minimal L de $f(z)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est un G-opérateur.

Dans la suite de ce chapitre, nous n'écrirons plus « ordre 0 ».

Nous voudrions obtenir un résultat plus précis : est-il possible de trouver un lien quantitatif entre la taille $\sigma(L)$ de l'opérateur minimal de $f(z)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et les tailles étendues des G-fonctions $f_{\alpha,k,\ell}(z)$?

Dans la section 1.3, nous étudierons cette question et y répondrons par l'affirmative.

Le résultat principal de ce chapitre – et le réponse au problème posé ci-dessus – est le théorème suivant :

Théorème 1.2

Nous conservons les notations du théorème 1.1. Pour tout $(\alpha,k,\ell)\in S$, notons $L_{\alpha,k,\ell}\neq 0$ un opérateur minimal de la G-fonction $f_{\alpha,k,\ell}(z)$. On définit κ comme le maximum des entiers k tels que $(\alpha,k,\ell)\in S$ pour un certain $(\alpha,\ell)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$ et $A := \{\alpha\in\mathbb{Q} : \exists(k,\ell)\in\mathbb{N}^2, (\alpha,k,\ell)\in S\}$.

On note $\mu_{\alpha,k,\ell} := \mathrm{ord}(L_{\alpha,k,\ell})$, $\delta_{\alpha,k,\ell} := \deg_z(L_{\alpha,k,\ell})$, et $\varepsilon(x,y) := \begin{cases} 1 \text{ si } x=y \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$

Alors on a

$$\begin{aligned}\sigma(L) \leqslant \max\Big(&1+\log(\kappa+2),\ 2\big(1+\log(\kappa+2)\big)\log\big(\max_{\alpha\in A}\mathrm{den}(\alpha)\big),\ \max_{(\alpha,k,\ell)\in S}\Big[\big(1+\log(k+2)\big)\\ &\Big(\big(5+\varepsilon(\mu_{\alpha,k,\ell},1)\big)\mu_{\alpha,k,\ell}^2(\delta_{\alpha,k,\ell}+1)-1-(\mu_{\alpha,k,\ell}-1)(\delta_{\alpha,k,\ell}+1)\Big)\overline{\sigma}(f_{\alpha,k,\ell})\Big)\Big]\Big)\end{aligned} \tag{1.2}$$

Dans le chapitre 2, nous adapterons la preuve du théorème des Chudnovsky aux séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome pour prouver un résultat analogue au théorème 1.2 (théorème 2.4), moyennant une condition supplémentaire sur $f(z)$. On obtient ainsi une meilleure estimation sur $\sigma(L)$ que celle donnée par le théorème 1.2 dans des cas particuliers (voir la comparaison menée dans la partie 3.3.3).

Le théorème 1.2 est la combinaison, d'une part d'une version quantitative du théorème de Chudnovksy, faisant le lien entre la taille étendue d'une G-fonction et la taille de son opérateur minimal non nul sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, et d'autre part du théorème suivant, que ce chapitre vise à prouver :

Théorème 1.3

Nous conservons les notations du théorème 1.2. Alors on a

$$\begin{aligned}\sigma(L) \leqslant \max\Big(&1+\log(\kappa+2),\ 2\big(1+\log(\kappa+2)\big)\log\big(\max_{\alpha\in A}\mathrm{den}(\alpha)\big),\\ &\max_{(\alpha,k,\ell)\in S}\big((1+\log(k+2))\sigma(L_{\alpha,k,\ell})\big)\Big).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Il s'avère que la taille d'un système différentiel est invariant par équivalence de systèmes différentiels. Ainsi, André a pu généraliser la notion de taille aux modules différentiels et étudier le comportement de la taille relativement aux opérations algébriques usuelles sur les modules différentiels : sous-module, quotient, somme directe, produit tensoriel, etc.

Nous allons suivre ce point de vue pour résoudre le problème énoncé ci-dessus et consacrerons la section 1.2 à quelques rappels utiles sur les modules différentiels et à une synthèse des résultats d'André sur la taille des modules différentiels.

Enfin, dans la partie 1.4, nous donnerons une application de ces résultats qui consiste, étant donnés deux G-opérateurs L_1 et L_2, à trouver une inégalité explicite entre la taille de L_1L_2 et les tailles de L_1 et L_2 (Théorème 1.4, §1.4).

1.2 Taille d'un module différentiel

1.2.1 Rappels sur les modules différentiels

Dans cette partie, nous allons essentiellement synthétiser la présentation de la théorie des modules différentiels issue de [52, chapitre 2], qui sera utile dans le reste du chapitre. Les preuves et davantage de détails sur les modules différentiels peuvent être trouvées dans dans le livre cité ci-dessus.

Définition 1.1

Soit (k,δ) un corps différentiel. On note $k[\partial]$ l'anneau des opérateurs différentiels sur k. Il est défini comme l'ensemble des polynômes non commutatifs en ∂ avec la condition de compatibilité

$$\forall a \in k, \quad \partial a = a\partial + \delta(a).$$

C'est un anneau euclidien à gauche (et à droite) pour le stathme

$$\mathrm{ord} : L = \sum_{k=0}^{n} a_k \partial^k \mapsto n \qquad (\text{où } a_n \neq 0).$$

Définition 1.2

Soit (k,δ) un corps différentiel. Un module différentiel $\mathscr{M}$ sur k est un k-espace vectoriel de dimension finie qui est un $k[\partial]$-module à gauche, ou, de façon équivalente, un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une application $\partial : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ telle que

$$\forall \lambda \in k,\ \forall a,b \in \mathscr{M}, \quad \partial(a+b) = \partial(a) + \partial(b) \quad \text{et} \quad \partial(\lambda a) = \lambda\partial(a) + \delta(\lambda)a.$$

Soit $\mathscr{M}$ un k-module différentiel de dimension n, muni d'une k-base $(e_1,\dots,e_n)$. Alors il existe une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j} \in M_n(k)$ telle que $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $\partial e_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} e_j$. Un calcul direct montre que si $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in \mathscr{M}$, alors $\partial u = 0 \iff u' = Au, u = {}^t(u_1,\dots,u_n)$.

Remarque. Si l'on choisit une autre k-base $(f_1,\dots,f_n)$ de $\mathscr{M}$ telle que $\partial f_i = -\sum_{j=1}^{n} b_{j,i} f_j$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que $B = P[A] = P^{-1}P' + P^{-1}AP$.

Les systèmes différentiels définis par A et B sont dits *équivalents* sur k. Ceci équivaut au fait que $y \mapsto Py$ établit une bijection entre les ensembles des solutions de A et de B.

Par conséquent, la matrice A obtenue par la construction ci-dessus ne dépend pas du choix de base que l'on fait, à équivalence de systèmes différentiels près.

On peut aussi effectuer l'opération inverse :

Définition 1.3

Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(k)$, On définit le module différentiel $\mathcal{M}_A$ associé au système différentiel $y' = Ay$ par $\mathcal{M}_A = k^n$, muni de la dérivation ∂ telle que $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\partial e_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, où $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de k^n.

On associe à un opérateur différentiel $L = \partial^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \partial^k \in k[\partial]$ le module différentiel $\mathcal{M}_L := \mathcal{M}_{A_L}$, où A_L est la matrice compagnon de L :

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.4

Un morphisme de modules différentiels *est une application k-linéaire $\varphi : (\mathcal{M}, \partial_{\mathcal{M}}) \to (\mathcal{N}, \partial_{\mathcal{N}})$ telle que $\partial_{\mathcal{N}} \circ \varphi = \varphi \circ \partial_{\mathcal{M}}$.*

Proposition 1.1

Soient $A, B \in M_n(k)$. Alors il y a un isomorphisme de modules différentiels entre $\mathcal{M}_A$ et $\mathcal{M}_B$ si et seulement si A et B définissent des systèmes différentiels équivalents sur k.

Ainsi, les classes d'équivalence des systèmes différentiels sur k classifient les k-modules différentiels à isomorphisme près.

On peut effectuer les constructions algébriques usuelles avec les modules différentiels :
- Un *sous-module différentiel* de $\mathcal{M}$ est un sous-$k[\partial]$-module à gauche de $\mathcal{M}$.
- Si $\mathcal{N}$ est un sous-module différentiel de $\mathcal{M}$, alors le *module différentiel quotient* $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ est muni de la dérivation quotient $\overline{\partial} : \overline{m} \mapsto \overline{\partial(m)}$.
- Le *produit cartésien* (ou somme directe) de $(\mathcal{M}_1, \partial_1)$ et $(\mathcal{M}_2, \partial_2)$ peut être muni de la dérivation $\partial : (m_1, m_2) \mapsto (\partial_1(m_1), \partial_2(m_2))$, qui en fait un k-module différentiel.
- Le *produit tensoriel* $\mathcal{M}_1 \otimes_k \mathcal{M}_2$ est un module différentiel quand on le munit de $\partial : m_1 \otimes m_2 \mapsto m_1 \otimes \partial_2(m_2) + \partial_1(m_1) \otimes m_2$ (étendu à l'espace vectoriel entier avec la règle de Leibniz). Il est à noter que le produit tensoriel ne peut pas être défini sur l'anneau de base non commutatif $k[\partial]$ puisque $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont seulement des $k[\partial]$-modules à gauche. Par conséquent, nous noterons souvent $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ sans préciser le corps de base.
- La dérivation $\partial^* : \varphi \mapsto \big(m \mapsto \varphi(\partial(m)) - \delta(\varphi(m))\big)$ fait du *dual* $\mathcal{M}^* = \mathrm{Hom}_k(\mathcal{M}, k)$ un module différentiel.
- Plus généralement, les constructions précédentes permettent de définir une structure de module différentiel sur *l'espace des morphismes* $\mathrm{Hom}_k(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \simeq \mathcal{M}_1^* \otimes_k \mathcal{M}_2$.

Remarque. En réalité, pour tout $A \in M_n(k)$, on a $\mathcal{M}_A^* \simeq \mathcal{M}_{A^*}$, où $A^* = -{}^tA$. Si X est une matrice fondamentale de solutions du système $y' = Ay$, alors $Y := {}^tX^{-1}$ satisfait $Y' = -{}^tAY$.

Lemme 1.1

Il y a un isomorphisme de modules différentiels $\mathcal{M}_L \simeq \left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial] / \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L\right)^*$.

Définition 1.5

*L'*opérateur adjoint *de $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$ est l'opérateur L^* tel que $\mathcal{M}_{L^*} \simeq \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial] / \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L$.*

On peut calculer directement L^* : si $L = \partial^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \partial^k$, alors $L^* = (-\partial)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-\partial)^k a_k$. L'opérateur adjoint a des propriétés utiles ; par exemple, on a $L^{**} = L$ et $(L_1 L_2)^* = L_2^* L_1^*$.

Mentionnons finalement le *théorème du vecteur cyclique* implique que tout système différentiel $y' = Ay$ est équivalent à un système $y' = A_L y$, $L \in k[\partial]$. Ceci fournit *in fine* une équivalence entre les systèmes différentiels et les opérateurs différentiels (voir [52, pp. 42–43]).

1.2.2 Taille et opérations sur les modules différentiels

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $G \in M_n(\mathbb{K}(z))$. Dans cette sous-section, suivant les notations d'André, nous introduisons une quantité $\sigma(G)$ qui encode une condition arithmétique de croissance modérée sur un système différentiel, appelée *condition de Galochkin.*

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on définit G_s comme la matrice telle que, si y est un vecteur satisfaisant $y' = Gy$, alors $y^{(s)} = G_s y$. En particulier, G_0 est la matrice identité. Les matrices G_s satisfont la relation de récurrence

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad G_{s+1} = G_s G + G_s',$$

où G_s' est la dérivée de la matrice G_s.

Définition 1.6 (*Galochkin, [27]*)

Soit $T(z) \in \mathbb{K}[z]$ tel que $T(z)G(z) \in M_n(\mathbb{K}[z])$. On note, pour $s \in \mathbb{N}$, q_s le plus petit dénominateur supérieur ou égal à 1 *de tous les coefficients des coefficients des matrices $T(z)^m \dfrac{G_m(z)}{m!}$, quand $m \in \{1, \dots, s\}$. On dit que le système $y' = Gy$* vérifie la condition de Galochkin *si*

$$\exists C > 0 : \forall s \in \mathbb{N}, \quad q_s \leqslant C^{s+1}.$$

Le théorème des Chudnovsky (cf [17]) affirme que si G est la matrice compagnon de l'opérateur minimal non nul L associé à une G-fonction, alors le système $y' = Gy$ satisfait la condition de Galochkin. C'est pour cette raison que L est appelé *G-opérateur* (voir [5, pp. 717–719] pour une revue des propriétés des G-opérateurs). Suivant [21, chapter VII], nous allons maintenant reformuler cette condition en termes p-adiques.

Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, on définit $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ comme la valeur absolue $\mathfrak{p}$-adique sur $\mathbb{K}$, avec le choix de normalisations donné dans [21, p.223].

On rappelle que la *valeur absolue de Gauss* associée à $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ est la valeur absolue non-archimédienne

$$\begin{array}{rccc} |\cdot|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} : & \mathbb{K}(z) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \dfrac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^i}{\sum_{j=0}^{M} b_j z^j} & \longmapsto & \dfrac{\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |a_i|_{\mathfrak{p}}}{\max_{0 \leqslant j \leqslant M} |b_j|_{\mathfrak{p}}}. \end{array}$$

La valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$ induit naturellement une norme sur $M_{n,m}(\mathbb{K}(z))$, définie pour tout $H = (h_{i,j})_{i,j} \in M_{n,m}(\mathbb{K}(z))$ comme $\|H\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} = \max_{i,j} |h_{i,j}|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$. On l'appelle *norme de Gauss.* Si $n = m$, $M_n(\mathbb{K}(z))$ munie de $\|\cdot\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$ est une algèbre normée. Utilisons à présent cette notation pour définir la notion de taille d'une matrice :

Définition 1.7 (*[21]*)

a) *([21, p. 227]) Soit $G \in M_n(\mathbb{K}(z))$. La* taille *de G est*

$$\sigma(G) := \limsup_{s \to +\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} h(s, \mathfrak{p}),$$

où

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad h(s, \mathfrak{p}) = \sup_{m \leqslant s} \log^+ \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}},$$

avec $\log^+ : x \mapsto \log(\max(1, x))$.

b) *([21, p. 243]) La* taille *de* $Y=\sum_{m=0}^{\infty} Y_m z^m$, $Y_m \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ *est*

$$\sigma(Y) := \limsup_{s\to+\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\,(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{m\leqslant s} \log^{+} \|Y_m\|_{\mathfrak{p}}.$$

c) *(...Dwork) La* taille étendue *de* $\overline{\sigma}(y) := \sigma(y) + \limsup_{s\to+\infty} \frac{1}{s} \sum_{\tau:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{C}} \sup_{m\leqslant s} \log^{+} |y_m|_\tau$, *où pour tout plongement* $\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$,

$$|\zeta|_\tau := \begin{cases} |\tau(\zeta)|^{1/[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} & \text{si } \tau(\mathbb{K}) \subset \mathbb{R} \\ |\tau(\zeta)|^{2/[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour donner un lien entre $\sigma(G)$ et la condition de Galochkin, nous allons introduire une notion alternative de dénominateur. Si $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ sont tels que $(\alpha_i) = \frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{b}_i}$, où $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{b}_i$ sont des idéaux premiers entre eux de $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$, on définit $\mathrm{den}'(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ comme la norme $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})$ du plus petit multiple commun $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_n$ dans le sens des anneaux de Dedekind.

Ce dénominateur n'est pas nécessairement le plus petit multiple commun des α_i dans le sens classique du terme, comme le montre l'exemple de $\alpha = (1+i)/2$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$: il satisfait $\mathrm{den}(\alpha) = 2$ et $\mathrm{den}'(\alpha) = 4$, puisque $(1+i)$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}[i] = \mathscr{O}_{\mathbb{K}}$. Toutefois, on a

$$\mathrm{den}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \leqslant \mathrm{den}'(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \leqslant (\mathrm{den}(\alpha_1,\dots,\alpha_n))^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}. \tag{1.4}$$

Cette notion alternative de dénominateur s'avère être plus utile que la notion usuelle dans notre contexte, car, comme il a été prouvé dans [21, p. 225], on a

$$\forall \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\,(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \log^{+} |\alpha_i|_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} \log\big(\mathrm{den}'(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\big). \tag{1.5}$$

Nous commençons par prouver la proposition suivante qui donne le lien entre la condition de Galochkin et $\sigma(G)$.

Proposition 1.2

Soit $T(z) \in \mathbb{K}[z]$ *tel que* $T(z)G(z) \in M_n(\mathbb{K}[z])$. *Définissons, pour* $s \in \mathbb{N}$, q_s *(resp.* q'_s*), le dénominateur (resp. le* den'*) des coefficients des coefficients des matrices* TG, $T^2\frac{G_2}{2}$, $\dots$, $T^s\frac{G_s}{s!}$. *Alors*

a) *Pour tout entier* s, $\frac{1}{s}\log(q_s) \leqslant \frac{1}{s}\log(q'_s) \leqslant [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\frac{1}{s}\log(q_s)$.

b) *Posons*

$$h^{-}(T) = \sum_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\,(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \log^{-} |T|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \quad \text{et} \quad h^{+}(T) = \sum_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\,(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \log^{+} |T|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}},$$

avec $\log^{-} : x \mapsto \log(\min(1,x))$. *Alors*

$$[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\sigma(G) + h^{-}(T) \leqslant \limsup_{s\to+\infty} \frac{1}{s}\log(q'_s) \leqslant [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\sigma(G) + h^{+}(T).$$

c) *Le système différentiel* $y' = Gy$ *satisfait la condition de Galochkin si et seulement si* $\sigma(G) < +\infty$ *[21, p. 228].*

Démonstration. Le point **a)** est une conséquence directement de l'inégalité (1.4). Il implique immédiatement **c)**.

b) L'équation (1.5) donne

$$\log q'_s = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{m \leqslant s} \log^+ \left\| \frac{T^m G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}}.$$

De plus, pour $s \in \mathbb{N}^*$ et $m \leqslant s$, on a

$$\log^+ \left\| T^m \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} = \log^+ \left(|T|^m_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \right) \leqslant s \log^+ |T|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} + \log^+ \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}}.$$

D'où

$$\sup_{m \leqslant s} \log^+ \left\| T^m \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \leqslant s \log^+ |T|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} + h(s, \mathfrak{p}),$$

de sorte que

$$\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{m \leqslant s} \log^+ \left\| \frac{T^m G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \leqslant s \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{m \leqslant s} \log^+ |T|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} + h(s, \mathfrak{p}).$$

Symétriquement, en remarquant que $\dfrac{G_m}{m!} = \left(\dfrac{1}{T}\right)^m \dfrac{T^m G_m}{m!}$ et $\log^+ \left\| \dfrac{1}{T} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} = -\log^- |T|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}}$, on a

$$h(s, \mathfrak{p}) \leqslant -s \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{m \leqslant s} \log^- |T|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} + \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{m \leqslant s} \log^+ \left\| \frac{T^m G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}}.$$

On obtient le résultat voulu en divisant par s et en passant à la limite supérieure. □

Remarque. Une situation commode apparaît quand $G \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{Q}(z))$ et $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ a au moins un coefficient égal à 1. Dans ce cas, la proposition 1.2 se résume à l'égalité

$$\sigma(G) = \limsup_{s \to +\infty} \frac{1}{s} \log(q_s).$$

Le lemme suivant montre que la taille ne dépend pas du corps de nombres $\mathbb{K}$ considéré et elle est invariante par équivalence de systèmes différentiels. Il est dû à André [4, p. 71]. Nous donnons une preuve plus détaillée que dans [4] par souci d'exhaustivité.

Lemme 1.2 (*[4], p. 71*)

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres, $G \in M_n(\mathbb{K}(z))$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$, soit $H = P[G] = PGP^{-1} + P'P^{-1}$ une matrice définissant un système différentiel $y' = Hy$ qui est équivalent à $y' = Gy$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors $\sigma(G) = \sigma(H)$.

Démonstration. Quitte à remplacer $\mathbb{K}$ par une de ses extensions finies de corps, on peut supposer que P est à coefficients dans $\mathbb{K}(z)$.

On a

$$\forall s \in \mathbb{N}, \; H_s = \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} P^{(s-m)} G_m P^{-1}. \tag{1.6}$$

En effet, soit $s \in \mathbb{N}$ et y tel que $y' = Gy$. Alors $y^{(s)} = G_s y$ et, comme $H = P[G]$, $(Py)^{(s)} = H_s Py$. Or,

$$H_s P y = (Py)^{(s)} = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} P^{(s-k)} y^{(k)} = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} P^{(s-k)} G_k y.$$

Comme cette égalité vaut pour toute solution y de de $y' = Gy$, il s'ensuit que

$$H_s = \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} P^{(s-m)} H_m P^{-1}.$$

Par conséquent, pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})$,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{H_s}{s!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} &\leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant s} \left\| \frac{P^{(s-m)}}{(s-m)!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \cdot \|P^{-1}\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \cdot \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \\ &\leqslant \|P\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \cdot \|P^{-1}\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \cdot \max_{0\leqslant m\leqslant s} \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}},\end{aligned}$$

car $\left\| \frac{P^{(s-m)}}{(s-m)!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \leqslant \|P\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$ (cf [21, p. 118]). En notant $C(\mathfrak{p}) = \|P\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \cdot \|P^{-1}\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$, on a alors, pour tout entier s,

$$\max_{0\leqslant m\leqslant s} \left\| \frac{H_s}{s!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \leqslant C(\mathfrak{p}) \max_{0\leqslant m\leqslant s} \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}.$$

D'où

$$\sigma(H) \leqslant \sigma(G) + \limsup_{s\to+\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \log^+ C(\mathfrak{p}) = \sigma(G).$$

Symétriquement, on a $\sigma(G) \leqslant \sigma(H)$, puisque $G = P^{-1}[H]$. □

La proposition 1.1 et le lemme 1.2 impliquent que l'on peut définir sans ambiguïté la *taille* d'un module différentiel $\mathscr{M}$ par $\sigma(\mathscr{M}) := \sigma(A)$, car tout module différentiel $\mathscr{M}$ peut être associé à une unique classe d'équivalence de systèmes différentiels $[A]$.

Définition 1.8 (*[4], pp. 74–76*)

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$. On pose $\sigma(L) = \sigma(\mathscr{M}_L)$. Si $\sigma(L) < +\infty$, on dit que l'opérateur L est un G-opérateur.

Cette terminologie est justifiée par le fait que toute solution de l'équation $L(y(z)) = 0$ au voisinage de tout point non singulier du G-opérateur L est une G-fonction.

Le résultat suivant est un résultat essentiel de ce chapitre. Il est dû à André. Il démontre que la notion de taille est compatible avec la plupart des opérations usuelles sur les modules différentiels.

Rappelons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, la $n^{\text{ième}}$ puissance symétrique du module différentiel $\mathscr{M}$, $\mathrm{Sym}^n_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(\mathscr{M})$, est le quotient de $\mathscr{M}^{\otimes n}$ par le sous-module engendré sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ par les $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n - m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(n)}$, quand σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$.

Proposition 1.3 (*[4], p. 72*)

Soient $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3$ des modules différentiels sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors

a) *Si $\mathscr{M}_2$ est un sous-module différentiel de $\mathscr{M}_1$, alors $\sigma(\mathscr{M}_2) \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1)$ et $\sigma\left(\mathscr{M}_1 / \mathscr{M}_2\right) \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1)$.*

b) $\sigma(\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2) = \max(\sigma(\mathscr{M}_1), \sigma(\mathscr{M}_2)) \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1) + \sigma(\mathscr{M}_2)$.

c) $\sigma\left(\mathrm{Sym}^N_{\overline{\mathbb{Q}}(z)}(\mathscr{M}_1)\right) \leqslant \big(1 + \log(N)\big)\sigma(\mathscr{M}_1)$.

d) $\sigma(\mathscr{M}_1^*) \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1)\big(1 + \log(\mu_1 - 1)\big)$, *où* $\mu_1 = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \mathscr{M}_1$.

e) Si la suite $0 \to \mathscr{M}_2 \to \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_3 \to 0$ *est exacte, alors on a*

$$\sigma(\mathscr{M}_1) \leqslant 1 + 2\sigma(\mathscr{M}_2 \times \mathscr{M}_3 \times (\mathscr{M}_3)^*) \leqslant 1 + 2\max(\sigma(\mathscr{M}_2), \sigma(\mathscr{M}_3) + \mu_3 - 1), \tag{1.7}$$

avec $\mu_3 = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \mathscr{M}_3$.

Dans **d)**, on peut également prouver l'inégalité alternative suivante, dont nous donnerons une démonstration dans la preuve de la proposition 1.3 :

$$\sigma(\mathscr{M}_1) - \mu_1 + 1 \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1^*) \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1) + \mu_1 - 1. \tag{1.8}$$

Dans **e)**, on peut en réalité déduire de la preuve d'André le résultat un peu plus précis suivant

$$\sigma(\mathscr{M}_1) \leqslant 1 + \frac{11}{6}\sigma\left(\mathscr{M}_2 \times \mathscr{M}_3 \times (\mathscr{M}_3)^*\right). \tag{1.9}$$

De manière alternative (voir (1.8) ci-dessus et (1.15) ci-dessous), on a

$$\sigma(\mathscr{M}_1) \leqslant 1 + \sigma(\mathscr{M}_2) + \sigma(\mathscr{M}_3) + \sigma(\mathscr{M}_3^*) \leqslant \mu_3 + \sigma(\mathscr{M}_2) + 2\sigma(\mathscr{M}_3). \tag{1.10}$$

Notons que (1.9) n'est pas toujours une meilleure estimation que (1.10), comme l'exemple avec $\sigma(\widetilde{L}_\beta)$ dans la sous-section 3.3.3 le montre.

La preuve des points **a)** et **e)** repose essentiellement sur le lemme classique suivant, énoncé sans preuve dans [4, p. 72], dont nous donnons une démonstration pour la convenance du lecteur :

Lemme 1.3 (*[4], p. 72*)

Soient $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3$ *des modules différentiels sur* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$*. Si la suite* $0 \to \mathscr{M}_2 \to \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_3 \to 0$ *est exacte, alors, avec un choix adapté de bases,* $\mathscr{M}_1$ *est asssocié à un système différentiel* $\partial y = Gy$*, où* $G = \begin{pmatrix} G^{(2)} & G^{(0)} \\ 0 & G^{(3)} \end{pmatrix}$ *et les systèmes* $\partial y = G^{(2)}y$ *et* $\partial y = G^{(3)}y$ *sont respectivement associés à* $\mathscr{M}_2$ *et* $\mathscr{M}_3$*.*

Démonstration. On lit sur la suite exacte que $\mathscr{M}_3 \simeq \mathscr{M}_1 \big/ \mathscr{M}_2$.

Un raisonnement d'algèbre linéaire nous convainc alors que, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base sur k de $\mathscr{M}_2$ et $(\overline{f_1}, \dots, \overline{f_m})$ est une base sur k de $\mathscr{M}_1/\mathscr{M}_2$, alors $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m)$ est une base de $\mathscr{M}_1$.

Ainsi, si $\forall 1 \leqslant i \leqslant m$, $\partial \overline{f_i} = -\sum_{j=1}^{m} g_{j,i}^{(3)} \overline{f_j}$, on a $\partial f_i + \sum_{j=1}^{n} g_{j,i}^{(3)} f_j \in \mathscr{M}_2$, de sorte qu'il existe une matrice $G^{(0)} = (g_{i,j}^{(0)}) \in M_{m,n}(k)$ telle que

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \partial f_i = -\sum_{j=1}^{m} g_{j,i}^{(3)} f_j - \sum_{j=1}^{n} g_{j,i}^{(0)} e_j.$$

De plus, on peut trouver une matrice $G^{(2)} \in M_n(k)$ associée à $\mathscr{M}_2$ telle que

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \partial e_i = -\sum_{j=1}^{m} g_{j,i}^{(2)} e_j.$$

Par suite, la matrice G telle que $\partial^t \mathscr{B} = -{}^t G^t \mathscr{B}$ est de la forme $G = \begin{pmatrix} G^{(2)} & G^{(0)} \\ 0 & G^{(3)} \end{pmatrix}$. $\square$

Démonstration de la proposition 1.3. Nous donnons cette preuve pour la convenance du lecteur, en donnant de plus des détails qui n'ont pas été écrits par André.

L'assertion **a)** est une conséquence directe du lemme 1.3, et **b)** s'ensuit de la définition. Pour le point **c)**, voir [4, p. 72] (et [4, pp. 17–18] pour l'argument clé).

L'inégalité **d)** est prouvée dans [4, p. 80]. La preuve consiste à utiliser le théorème de Katz sur les exposants d'un G-opérateur pour exprimer la taille de $\mathscr{M}_1^*$ en fonction de la taille de $\sigma(\mathrm{Sym}^{\mu_1-1}\mathscr{M}_1)$, puis à appliquer le point **c)**.

Expliquons maintenant comment obtenir la borne alternative (1.8) sur $\sigma(\mathscr{M}_1^*)$.

En suivant les notations de [21, p. 226], on note $\rho(\mathscr{M}_1)$ le rayon inverse global de $\mathscr{M}_1$. Alors le théorème d'André-Bombieri [4, p. 74] donne

$$\rho(\mathscr{M}_1) \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1) \leqslant \rho(\mathscr{M}_1) + \mu_1 - 1,$$

où $\mu_1 = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \mathscr{M}_1$. De plus, [4, Lemma 2, p. 72] affirme que $\rho(\mathscr{M}_1^*) = \rho(\mathscr{M}_1)$. Ainsi, l'application du théorème d'André-Bombieri au module adjoint $\mathscr{M}_1^*$ donne $\rho(\mathscr{M}_1) \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1^*) \leqslant \rho(\mathscr{M}_1) + \mu_1 - 1$, d'où

$$\sigma(\mathscr{M}_1) - \mu_1 + 1 \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1^*) \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1) + \mu_1 - 1.$$

Remarque. Dwork [20, Theorem 1 p. 226] a obtenu le raffinement suivant du théorème d'André-Bombieri :

Supposons que $\mathscr{M}_1$ soit un module différentiel vérifiant $\rho(\mathscr{M}_1) < +\infty$ représentant un système $y' = Gy$ tel que $G \in M_{\mu_1}(\mathbb{Q}(z))$, alors

$$\rho(\mathscr{M}_1) + \overline{\Delta}(V) \leqslant \sigma(\mathscr{M}_1) \leqslant \rho(\mathscr{M}_1) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\mu_1 - 1}\right)\overline{\Delta}(V), \tag{1.11}$$

où $\overline{\Delta}(V) := \limsup\limits_{s \to +\infty} \dfrac{1}{s} \sum\limits_{\substack{p \in V \\ p \leqslant s}} \log p$ et V est l'ensemble des nombres premiers p tels que l'équation $y' = Gy$ a une réduction modulo p et cette réduction a une p-courbure non nulle (avec la terminologie de [20, p. 228]).

On pourrait, sous les conditions énoncées ci-dessus, utiliser (1.11) pour obtenir une inégalité plus fine que (1.8).

Passons maintenant à la preuve de **e)**. André a donné une démonstration de cette assertion sans en fournir tous les détails. Nous les présentons ici.

Par le lemme 1.3, on peut trouver des bases convenables de $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3$ telles que, dans ces bases, $\mathscr{M}_1$ (resp. $\mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3$) représente le système $\partial y = Gy$ (resp. $\partial y = G^{(2)}y$ et $\partial y = G^{(3)}y$), où

$$G = \begin{pmatrix} G^{(2)} & G^{(0)} \\ 0 & G^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres tel que $G \in M_n(\mathbb{K}(z))$. On fixe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})$. On considère $t_{\mathfrak{p}}$ une variable libre sur $\mathbb{K}$ appelée *point générique*. On peut alors construire une extension complète et algébriquement close de $\big(\mathbb{K}(t_{\mathfrak{p}}), |\cdot|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}\big)$. Concrètement, $\Omega_{\mathfrak{p}}$ est la complétion de la clôture algébrique de la complétion de $\mathbb{K}(t_{\mathfrak{p}})$ muni de la valeur absolue de Gauss $|\cdot|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$ (voir [21, p. 93]).

On pose

$$X_{t_{\mathfrak{p}}}^{(2)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{G_s^{(2)}(t_{\mathfrak{p}})}{s!}(z - t_{\mathfrak{p}})^s \in \mathrm{GL}_n(\Omega_{\mathfrak{p}}[\![z - t_{\mathfrak{p}}]\!])$$

(resp. $X_{t_{\mathfrak{p}}}^{(3)} \in \mathrm{GL}_m(\Omega_{\mathfrak{p}}[\![z - t_{\mathfrak{p}}]\!])$) une matrice fondamentale de solutions de $\partial y = G^{(2)}y$ (resp. $\partial y = G^{(3)}y$) au point générique $t_{\mathfrak{p}}$ telle que $X_{t_{\mathfrak{p}}}^{(2)}(t_{\mathfrak{p}}) = I_n$ (resp. $X_{t_{\mathfrak{p}}}^{(3)}(t_{\mathfrak{p}}) = I_m$). On considère $X_{t_{\mathfrak{p}}}^{(0)} \in M_{n,m}(\Omega_{\mathfrak{p}}[\![z - t_{\mathfrak{p}}]\!])$ une solution de

$$\partial X_{t_{\mathfrak{p}}}^{(0)} = G^{(3)} X_{t_{\mathfrak{p}}}^{(0)} + G^{(0)} X_{t_{\mathfrak{p}}}^{(2)} \tag{1.12}$$

telle que $X^{(0)}_{t_\mathfrak{p}}(t_\mathfrak{p})=0$.

Alors $X_{t_\mathfrak{p}}=\begin{pmatrix} X^{(2)}_{t_\mathfrak{p}} & X^{(0)}_{t_\mathfrak{p}} \\ 0 & X^{(3)}_{t_\mathfrak{p}}\end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale de solutions de $\partial y = Gy$ telle que $X_{t_\mathfrak{p}}(t_\mathfrak{p}) = I_{n+m}$. Ainsi, on a $\forall s\in\mathbb{N}$, $\partial^s(X_{t_\mathfrak{p}})(t_\mathfrak{p}) = G_s(t_\mathfrak{p})$. Puisque l'on sait que $\partial^s(X^{(2)}_{t_\mathfrak{p}})(t_\mathfrak{p}) = G^{(2)}_s(t_\mathfrak{p})$ (et de même pour $X^{(3)}_{t_\mathfrak{p}}$), il suffit d'estimer la norme de Gauss de $\partial^s(X^{(0)}_{t_\mathfrak{p}})(t_\mathfrak{p})$ pour obtenir une estimation sur la taille de G.

Par souci de simplicité, on omettra l'indice $t_\mathfrak{p}$ dans ce qui suit.

L'équation (1.12) implique que

$$\begin{aligned}\partial(X^{(3)^{-1}}X^{(0)}) &= X^{(3)^{-1}}\partial(X^{(0)}) - X^{(3)^{-1}}\partial(X^{(3)})X^{(3)^{-1}}X^{(0)}\\ &= X^{(3)^{-1}}(G^{(3)}X^{(0)}+G^{(0)}X^{(2)}) - X^{(3)^{-1}}G^{(3)}X^{(0)} = X^{(3)^{-1}}G^{(0)}X^{(2)},\end{aligned}$$

de sorte que, pour $\ell\in\mathbb{N}$, par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\ell X^{(0)}}{\ell!} &= \sum_{i=0}^{\ell}\frac{\partial^{\ell-i}(X^{(3)})}{(\ell-i)!}\frac{\partial^i(X^{(3)^{-1}}X^{(0)})}{i!} = \frac{\partial^\ell(X^{(3)})}{\ell!}X^{(3)^{-1}}X^{(0)} + \sum_{i=1}^{\ell}\frac{\partial^{\ell-i}(X^{(3)})}{(\ell-i)!}\frac{\partial^{i-1}(X^{(3)^{-1}}G^{(0)}X^{(2)})}{i!}\\ &= \frac{\partial^\ell(X^{(3)})}{\ell!}X^{(3)^{-1}}X^{(0)} + \sum_{i=0}^{\ell}\frac{\partial^{\ell-i}(X^{(3)})}{(\ell-i)!}\frac{1}{i}\sum_{i_1+i_2+i_3=i-1}\frac{\partial^{i_1}(X^{(3)^{-1}})}{i_1!}\frac{\partial^{i_2}(G^{(0)})}{i_2!}\frac{\partial^{i_3}(X^{(2)})}{i_3!}.\end{aligned}$$

On évalue maintenant cette égalité au point générique $t_\mathfrak{p}$. Puisque $X^{(0)}(t_\mathfrak{p})=0$, on obtient

$$\frac{\partial^\ell X^{(0)}}{\ell!}(t_\mathfrak{p}) = \sum_{i=0}^{\ell}\frac{\partial^{\ell-i}(X^{(3)})(t_\mathfrak{p})}{(\ell-i)!}\frac{1}{i}\sum_{i_1+i_2+i_3=i-1}\frac{\partial^{i_1}(X^{(3)^{-1}})(t_\mathfrak{p})}{i_1!}\frac{\partial^{i_2}(G^{(0)})(t_\mathfrak{p})}{i_2!}\frac{\partial^{i_3}(X^{(2)})(t_\mathfrak{p})}{i_3!}.$$

On fait les observations suivantes :

- Puisque $G^0(t_\mathfrak{p})$ est à coefficients dans $\mathbb{K}(t_\mathfrak{p})$, on a $\left\|\frac{\partial^{i_2}(G^{(0)})}{i_2!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \leqslant \|G^0\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$ par [21, p. 94].
- Posons $\delta_\ell = \mathrm{ppcm}(1,2,\dots,\ell)$. Alors

$$\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\mathbb{K})}\sup_{1\leqslant i\leqslant \ell}\frac{1}{|i|_\mathfrak{p}} = \frac{1}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}\log(\delta_\ell)\leqslant \frac{\ell}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}(1+o(1)),$$

par [21, Lemma 1.1, p. 225].

Donc, puisque $\|\cdot\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$ est non-archimédienne, on a

$$\begin{aligned}\log^+\left\|\frac{\partial^\ell X^{(0)}}{\ell!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \leqslant \max_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i_1+i_2+i_3=i-1}}\Bigg(&\log^+\left\|\frac{\partial^{\ell-i}(X^{(3)})}{(\ell-i)!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} + \log^+\left\|\frac{1}{i}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} +\\ &\log^+\left\|\frac{\partial^{i_1}(X^{(3)^{-1}})}{i_1!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} + \log^+\left\|\frac{\partial^{i_2}(G^{(0)})}{i_2!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} + \log^+\left\|\frac{\partial^{i_3}(X^{(2)})}{i_3!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}\Bigg).\end{aligned} \quad (1.13)$$

Or,

$$\left\|\frac{\partial^{\ell-i}(X^{(3)})}{(\ell-i)!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} = \left\|\frac{(G^{(3)})_{\ell-i}}{(\ell-i)!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \quad \text{et} \quad \left\|\frac{\partial^{i_3}(X^{(2)})}{i_3!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} = \left\|\frac{(G^{(2)})_{i_3}}{i_3!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$$

et de plus, on a

$$\left\|\frac{\partial^{i_1}(X^{(3)^{-1}})}{i_1!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} = \left\|\frac{(-{}^tG^{(3)})_{i_1}}{i_1!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}},$$

car ${}^{t}X^{(3)^{-1}}$ est une matrice fondamentale de solutions du système $y' = -{}^{t}G^{(3)}y$, associé au module dual $\mathscr{M}_3^*$. Ceci implique, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant \ell$

$$\log^+ \left\| \frac{\partial^\ell (X^{(0)})(t_\mathfrak{p})}{\ell !} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \leqslant h(N,\mathfrak{p},G^{(3)}) + h(N,\mathfrak{p},-{}^{t}G^{(3)}) + h(N,\mathfrak{p},G^{(2)}) + \log^+ \|G^{(0)}\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} + \log \max_{0\leqslant i\leqslant N} \frac{1}{|i|_p}. \quad (1.14)$$

Par conséquent, on obtient

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})} \sup_{n\leqslant N} \log^+ \left\| \frac{\partial^\ell (X^{(0)})(t_\mathfrak{p})}{\ell !} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \leqslant \frac{1}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} + \sigma(\mathscr{M}_3) + \sigma(\mathscr{M}_3^*) + \sigma(\mathscr{M}_2)$$

puisque $\|G^{(0)}\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} = 1$ pour tous les premiers sauf un nombre fini. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{G_\ell}{\ell !} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} &= \left\| \frac{\partial^\ell (X)(t_\mathfrak{p})}{\ell !} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \\ &= \max\left(\left\| \frac{\partial^\ell (X^{(0)})(t_\mathfrak{p})}{\ell !} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}, \left\| \frac{\partial^\ell (X^{(2)})(t_\mathfrak{p})}{\ell !} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}, \left\| \frac{\partial^\ell (X^{(3)})(t_\mathfrak{p})}{\ell !} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \right), \end{aligned}$$

d'où, finalement,

$$\sigma(\mathscr{M}_1) \leqslant 1 + \sigma(\mathscr{M}_3) + \sigma(\mathscr{M}_3^*) + \sigma(\mathscr{M}_2). \quad (1.15)$$

On peut en réalité obtenir une inégalité plus raffinée en utilisant l'argument qui suit. Soient $\ell \in \mathbb{N}$ et $i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{N}$ tels que $i_1 + i_2 + i_3 \leqslant \ell - 1$. On suppose par exemple que $i_1 \geqslant i_2 \geqslant i_3$, les autres cas pouvant être traités de la même manière en menant à la même conclusion finale.En considérant séparément les cas $i_1 \leqslant \frac{\ell-1}{2}$ et $i_1 > \frac{\ell-1}{2}$,on prouve que $i_2 \leqslant \frac{\ell-1}{2}$ et $i_3 \leqslant \frac{\ell-1}{3}$.

Ainsi, on obtient dans l'inégalité (1.13)

$$\max\left(\log^+ \left\| \frac{\partial^{i_1}(X^{(3)^{-1}})}{i_1 !} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} + \log^+ \left\| \frac{\partial^{i_2}(G^{(0)})}{i_2 !} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} + \log^+ \left\| \frac{\partial^{i_3}(X^{(2)})}{i_3 !} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \right) \leqslant h(\ell,\mathfrak{p},G^{(3)}) + h\left(\frac{\ell}{2},\mathfrak{p},-{}^{t}G^{(3)}\right) + h\left(\frac{\ell}{3},\mathfrak{p},G^{(2)}\right),$$

de sorte que

$$\frac{1}{\ell} \sum_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})} h(\ell,\mathfrak{p},G) \leqslant \frac{\log(\delta_\ell)}{\ell} + \frac{1}{\ell} \sum_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})} \log^+ \|G^{(0)}\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} + v_\ell + \frac{1}{\ell}\left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor v_{\left\lfloor \frac{\ell}{2} \right\rfloor} + \frac{1}{\ell}\left\lfloor \frac{\ell}{3} \right\rfloor v_{\left\lfloor \frac{\ell}{3} \right\rfloor}$$

avec $v_\ell = \frac{1}{\ell} \sum_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})} \max\big(h(\ell,\mathfrak{p},G^{(3)}), h(\ell,\mathfrak{p},-{}^{t}G^{(3)}), h(\ell,\mathfrak{p},G^{(2)})\big)$. En passant à la limite supérieure de part et d'autre de l'inégalité, on obtient

$$\sigma(\mathscr{M}_1) \leqslant 1 + \frac{11}{6} \max\big(\sigma(\mathscr{M}_3^*), \sigma(\mathscr{M}_3), \sigma(\mathscr{M}_2)\big),$$

quantité majorée par $1 + 2\max\big(\sigma(\mathscr{M}_3^*), \sigma(\mathscr{M}_3), \sigma(\mathscr{M}_2)\big)$ dans [4]. Ceci est la conclusion voulue. □

Les points **a)**, **b)** et **c)** de la proposition 1.3 impliquent en fait le résultat suivant, qui n'est pas énoncé explicitement par André et sera un point important de la preuve du théorème 1.1 ci-dessous.

Proposition 1.4

Soit $(\mathscr{M}_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ une famille de modules différentiels sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors

$$\sigma(\mathscr{M}_1 \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \cdots \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \mathscr{M}_N) \leqslant \big(1+\log(N)\big)\max\big(\sigma(\mathscr{M}_1),\dots,\sigma(\mathscr{M}_N)\big).$$

En particulier, on a $\sigma\left(\mathscr{M}_1^{\otimes N}\right) \leqslant (1+\log(N))\sigma(\mathscr{M}_1)$.

Démonstration. On note $\overline{\alpha}$ la classe d'un élément $\alpha \in (\mathscr{M}_1\times\cdots\times\mathscr{M}_N)^{\otimes n}$ dans l'espace quotient $\mathrm{Sym}^N(\mathscr{M}_1\times\cdots\times\mathscr{M}_N)$. Il y a un morphisme injectif de modules différentiels

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & \mathscr{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_N & \longrightarrow & \mathrm{Sym}^N(\mathscr{M}_1\times\cdots\times\mathscr{M}_N) \\ & m_1\otimes\cdots\otimes m_N & \longmapsto & \overline{(m_1,0,\dots,0)\otimes\cdots\otimes(0,\dots,0,m_N)}.\end{array}$$

En effet, pour tout i, soit $\mathscr{B}_i = (e_1^{(i)},\dots,e_{n_i}^{(i)})$ une base sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de $\mathscr{M}_i$. Une base sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de $\mathscr{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_N$ est la famille $\mathscr{F}$ dont les éléments sont les $e_{i_1}^{(1)}\otimes e_{i_2}^{(2)}\otimes\cdots\otimes e_{i_N}^{(N)}$, quand $1\leqslant i_k\leqslant n_k$.

Notons $\mathscr{B} = (f_1,\dots,f_p)$ la base de $\mathscr{M}_1\times\cdots\times\mathscr{M}_N$ obtenue à partir des bases $\mathscr{B}_i$. Alors la famille $\mathscr{F}'$ dont les éléments sont les $\overline{f_{i_1}\otimes f_{i_2}\otimes\cdots\otimes f_{i_N}}$, quand $1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_N\leqslant n_1+\cdots+n_N$ est une base de $\mathrm{Sym}^N(\mathscr{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_N)$ (cf [29, p. 218]). De plus, on a

$$\varphi(e_{i_1}^{(1)}\otimes e_{i_2}^{(2)}\otimes\cdots\otimes e_{i_N}^{(N)}) = \overline{f_{i_1}\otimes f_{n_1+i_2}\otimes\cdots\otimes f_{n_1+\cdots+n_{N-1}+i_N}},$$

donc $\mathscr{F}$ est envoyée par φ sur une famille libre de $\mathrm{Sym}^N(\mathscr{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_N)$, ce qui montre que φ est injective.

Ainsi, en combinant les points **a)**, **b)** et **c)** de la proposition 1.3, on obtient

$$\sigma(\mathscr{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathscr{M}_N) \leqslant \big(1+\log(N)\big)\max\big(\sigma(\mathscr{M}_1),\dots,\sigma(\mathscr{M}_N)\big).$$

□

1.3 Une généralisation du théorème des Chudnovsky aux séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 1.3, une version quantitative d'un résultat d'André, qui est un théorème de type Chudnovsky pour les séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome [5].

Dans ce qui suit, nous noterons ∂ la dérivation standard $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

1.3.1 Produit et somme de solutions de G-opérateurs

Le résultat suivant est prouvé par André dans [5, p. 720] :

Proposition 1.5 (*[5], p. 720*)

Si y_1 (resp. y_2) est solution d'un G-opérateur L_1 (resp. L_2), alors

a) *y_1+y_2 est solution d'un G-opérateur L_3 ;*

b) *y_1y_2 est solution d'un G-opérateur L_4.*

Notons que y_1 et y_2 ne sont pas nécessairement des G-fonctions, mais ce sont des séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome. Cette proposition devient évidente, une fois que l'on dispose du théorème de Chudnovsky (théorème 0.3 dans l'introduction), quand y_1 et y_2 sont des G-fonctions, car l'ensemble des G-fonctions est un anneau.

Nous allons utiliser les résultats de la partie 1.2 (proposition 1.3) pour trouver une borne supérieure sur les tailles de L_3 et L_4.

Proposition 1.6

Soient L_1 et L_2 les opérateurs minimaux respectifs de y_1 et y_2, qui sont des G-opérateurs. Alors on peut trouver des G-opérateurs non nuls L_3 et L_4 comme dans la proposition 1.5 tels que

$$\sigma(L_3) \leqslant \max\big(\sigma(L_1), \sigma(L_2)\big) \quad \textit{et} \quad \sigma(L_4) \leqslant \big(1+\log(2)\big)\max\big(\sigma(L_1), \sigma(L_2)\big).$$

Démonstration des propositions 1.5 et 1.6. Dans [4, p. 720], André a donné une esquisse de preuve de la proposition 1.5, que nous explicitons ici afin de trouver une borne sur la taille des opérateurs L_3 et L_4.

Si $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$ est l'opérateur minimal d'une fonction y, on remarque qu'il y a un isomorphisme naturel de modules différentiels entre $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L$ et

$$\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y) := \big\{M(y) \mid M \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]\big\}$$

donné par $M \mod L \mapsto M(y)$. D'où $\sigma(L) = \sigma\left(\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y)\right)^*\right)$.

On définit aussi, pour u, v solutions de G-opérateurs, $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](u,v) := \left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](u)\right)[\partial](v)$ qui est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ des $\partial^k(u)\partial^\ell(v)$, quand $k, \ell \in \mathbb{N}$. L'existence d'équations différentielles à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaites par u et v nous assure qu'il s'agit en effet d'un $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-espace vectoriel de dimension finie, de sorte qu'il peut être muni d'une structure de module différentiel.

- Soit L_3 l'opérateur minimal de $y_1 + y_2$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors $\sigma(L_3) = \sigma\left(\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1+y_2)\right)^*\right)$.

Soit $\mathcal{M}$ l'image du morphisme de $\overline{\mathbb{Q}}[z][\partial]$-modules à gauche

$$\begin{array}{rccc} \iota: & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial] & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \times \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2) \\ & L & \longmapsto & (L(y_1), L(y_2)). \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{M}$ est un sous-module différentiel de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1)\times\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)$, car c'est un sous-$\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$-module à gauche de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \times \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)$ qui est de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.
De plus, on pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{M} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1+y_2) \\ & (L(y_1), L(y_2)) & \longmapsto & L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_2). \end{array}$$

Ce morphisme de modules différentiels est bien défini et surjectif, donc sa factorisation par son noyau induit un isomorphisme de modules différentiels entre $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1+y_2)$ et $\mathcal{M}/\ker(\varphi)$. Par suite, il y a un isomorphisme $\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1+y_2)\right)^* \simeq \big(\mathcal{M}/\ker(\varphi)\big)^* \simeq \mathcal{M}^*/\mathrm{Im}(\varphi^*)$, où φ^* est le morphisme dual de φ dans le sens de l'algèbre linéaire. D'où, par la proposition 1.3 **a)**, on obtient

$$\sigma(L_3) = \sigma(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1+y_2)^*) \leqslant \sigma(\mathcal{M}^*). \tag{1.16}$$

Nous allons maintenant trouver une borne sur $\sigma(\mathcal{M}^*)$. Le morphisme dual de l'injection $\mathcal{M} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \times \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)$ est une surjection $\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1)\times\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\right)^* \twoheadrightarrow \mathcal{M}^*$, et

$$\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1)\times\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\right)^* \simeq \left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1)\right)^* \times \left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\right)^*,$$

de sorte que $\mathscr{M}^*$ peut être écrit comme un quotient de $\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1)\right)^* \times \left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\right)^*$.
Ainsi, il s'ensuit de la proposition 1.3 **a)** et **b)** que

$$\sigma(\mathscr{M}^*) \leqslant \sigma\left(\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1)\right)^* \times \left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\right)^*\right) \leqslant \max\big(\sigma(L_1), \sigma(L_2)\big). \tag{1.17}$$

Finalement, (1.16) et (1.17) impliquent que $\sigma(L_3) \leqslant \max\big(\sigma(L_1), \sigma(L_2)\big) < \infty$. Donc L_3 est en effet un G-opérateur.

- On définit le morphisme

$$\begin{array}{rrcl} \psi: & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1, y_2) \\ & K(y_1) \otimes L(y_2) & \longmapsto & K(y_1)L(y_2). \end{array}$$

De plus, l'ensemble $\mathscr{M} = \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1 y_2)$ est un sous-module différentiel de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1, y_2)$, car si $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$, $L = \sum_{k=0}^{\mu} a_k \partial^k$, on a

$$L(y_1 y_2) = \sum_{k=0}^{\mu} a_k \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \partial^p(y_1) \partial^{k-p}(y_2) = \psi\left(\sum_{k=0}^{\mu} a_k \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \partial^p(y_1) \otimes \partial^{k-p}(y_2)\right) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1, y_2).$$

Par définition, la restriction de ψ à $\psi^{-1}(\mathscr{M})$ est une surjection $\widetilde{\psi} : \psi^{-1}(\mathscr{M}) \to \mathscr{M}$.
La factorisation de $\widetilde{\psi}$ par son noyau fournit un isomorphisme entre $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N} / \ker(\widetilde{\psi})$, où $\mathscr{N} = \psi^{-1}(\mathscr{M})$ est un sous-module différentiel de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)$.
En passant aux modules duaux, on obtient $\mathscr{M}^* \simeq \mathscr{N}^* / \mathrm{Im}(\widetilde{\psi}^*)$ donc par la proposition 1.3 **a)**, l'opérateur minimal L_4 de $y_1 y_2$ vérifie

$$\sigma(L_4) = \sigma(\mathscr{M}^*) \leqslant \sigma(\mathscr{N}^*). \tag{1.18}$$

Par ailleurs, le morphisme dual de $\mathscr{N} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)$ est une surjection

$$\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\right)^* \twoheadrightarrow \mathscr{N}^*$$

et on a

$$\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\right)^* \simeq \left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1)\right)^* \otimes \left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\right)^*,$$

de sorte que, par les propositions 1.3 **a)** et 1.4,

$$\sigma(\mathscr{N}^*) \leqslant \sigma\left(\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1)\right)^* \otimes \left(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\right)^*\right) \leqslant \big(1 + \log(2)\big) \max\big(\sigma(L_1), \sigma(L_2)\big). \tag{1.19}$$

Ainsi, la combinaison de (1.18) et (1.19) montre que $\sigma(L_4) \leqslant \big(1+\log(2)\big)\max\big(\sigma(L_1), \sigma(L_2)\big)$, de sorte que L_4 est un G-opérateur. □

Remarque. En utilisant la proposition 1.4, on peut généraliser la seconde assertion de la proposition 1.6 à un produit quelconque $y_1 \dots y_N$ de solutions de G-opérateurs : si L_0 est l'opérateur minimal de $y_1 \dots y_N$ et L_i est l'opérateur minimal de y_i, on obtient

$$\sigma(L_0) \leqslant \big(1 + \log(N)\big) \max\big(\sigma(L_1), \dots, \sigma(L_N)\big).$$

Il existe une version « générique » des propositions 1.5 et 1.6). En effet, il est possible de trouver des opérateurs L_3 et L_4 dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$ tels que $L_3(y_1 + y_2)$ et $L_4(y_1 y_2) = 0$ pour tous y_1, y_2 vérifiant $L_1(y_1) = L_2(y_2) = 0$. Explicitement, on peut prendre $L_3 := \mathrm{LCLM}(L_1, L_2)$ et $L_4 := L_1 \otimes L_2$ respectivement construits dans [52, p. 40] et [52, Corollary 2.19 p. 51]). Si L_1 et L_2 sont des G-opérateurs, L_3 est encore un G-opérateur et $\sigma(L_3) \leqslant \max\big(\sigma(L_1), \sigma(L_2)\big)$ (voir la preuve de la proposition 4.10 **c)**). On peut obtenir un résultat analogue concernant $L_1 \otimes L_2$; c'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 1.7

Soient $L_1, L_2 \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$ des opérateurs d'ordres respectifs μ_1 et μ_2. Alors

$$\sigma(L_1 \otimes L_2) \leqslant \big(1+\log(2)\big)\max\big(\sigma(L_1)+\mu_1-1, \sigma(L_2)+\mu_2-2\big)+\mu_1\mu_2-1.$$

En particulier, si L_1 et L_2 sont des G-opérateurs, alors $L_1 \otimes L_2$ également.

Démonstration. L'opérateur $L_1 \otimes L_2$ est défini (voir [52, Definition 2.20 p. 51]) comme l'opérateur minimal de $1 \otimes 1$ dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_1 \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_2$.

On dispose d'un morphisme

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial] & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_1 \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_2 \\ & L & \longmapsto & L(1\otimes 1) \end{array}$$

dont le noyau est par définition $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](L_1 \otimes L_2)$, de sorte que selon la proposition 1.3 **a)** et la proposition 1.4,

$$\sigma(\mathcal{M}^*_{L_1\otimes L_2}) \leqslant \sigma\left(\mathcal{M}^*_{L_1} \otimes \mathcal{M}^*_{L_2}\right) \leqslant \big(1+\log(2)\big)\max\big(\sigma(\mathcal{M}^*_{L_1}), \sigma(\mathcal{M}^*_{L_2})\big). \tag{1.20}$$

Or, selon (1.8), pour $i \in \{1,2\}$, $\sigma(\mathcal{M}^*_{L_i}) \leqslant \sigma(\mathcal{M}_{L_i}) + \mu_i - 1$. De plus,

$$\sigma(\mathcal{M}_{L_1\otimes L_2}) \leqslant \sigma(\mathcal{M}^*_{L_1\otimes L_2}) + \operatorname{ord}(L_1 \otimes L_2) - 1$$

et

$$\operatorname{ord}(L_1 \otimes L_2) = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \mathcal{M}^*_{L_1\otimes L_2} \leqslant \dim_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \mathcal{M}^*_{L_1} \otimes \mathcal{M}^*_{L_2} = \mu_1\mu_2$$

car la factorisation de ψ par son noyau fournit une injection $\overline{\mathbb{Q}}(z)$-linéaire de $\mathcal{M}^*_{L_1\otimes L_2}$ dans $\mathcal{M}^*_{L_1} \otimes \mathcal{M}^*_{L_2}$. Ainsi, on déduit de (1.20) que

$$\sigma(L_1 \otimes L_2) = \sigma(\mathcal{M}_{L_1\otimes L_2}) \leqslant \big(1+\log(2)\big)\max\big(\sigma(L_1)+\mu_1-1, \sigma(L_2)+\mu_2-1\big)+\mu_1\mu_2-1,$$

ce qui est le résultat voulu. □

1.3.2 Démonstrations des théorèmes 1.2 et 1.3

On peut à présent déduire de la proposition 1.5 et de sa version quantitative la preuve du théorème 1.3 énoncé dans l'introduction.

Démonstration du theorème 1.3. Pour tout $(\alpha, k, \ell) \in S$, soit $N_{\alpha,k,\ell} \neq 0$ l'opérateur minimal sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de $g_{\alpha,k,\ell}(z) := c_{\alpha,k,\ell} z^\alpha \log(z)^k f_{\alpha,k,\ell}(z)$, avec $f_{\alpha,k,\ell}(z)$ une G-fonction, qui existe puisque cette fonction est un produit de solutions d'opérateurs différentiels à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

• Comme $f(z)$ est la somme sur $(\alpha, k, \ell) \in S$ des fonctions $g_{\alpha,k,\ell}(z)$, la proposition 1.6 implique que la taille de l'opérateur minimal L de $f(z)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfait

$$\sigma(L) \leqslant \max_{(\alpha,k,\ell)\in S} \sigma(N_{\alpha,k,\ell}).$$

• Soit $(\alpha, k, \ell) \in S$. La fonction $z^\alpha \log(z)^k c_{\alpha,k,\ell} f_{\alpha,k,\ell}(z)$ est un produit de $k+2$ solutions de G-opérateurs. Les facteurs de ce produit sont :

- z^α d'opérateur minimal $K_\alpha = \mathrm{d}/\mathrm{d}z - \alpha/z$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$;
- $\log(z)$ d'opérateur minimal $T = z(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)^2 + \mathrm{d}/\mathrm{d}z$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ (k fois) ;
- $c_{\alpha,k,\ell} f_{\alpha,k,\ell}(z)$ d'opérateur minimal $L_{\alpha,k,\ell}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Ainsi, il découle de la remarque après la proposition 1.6 que

$$\sigma(N_{\alpha,k,\ell}) \leqslant \big(1+\log(k+2)\big)\max\big(\sigma(K_\alpha),\sigma(T),\sigma(L_{\alpha,k,\ell})\big).$$

Or, on peut calculer directement les matrices itérées correspondant au système différentiel $y' = \dfrac{\alpha}{z}y$: en notant $B_\alpha = \dfrac{\alpha}{z}$, avec les notations de la sous-section 1.2.2, on a

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad (B_\alpha)_s = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-s+1)}{z^s},$$

de sorte que, selon le lemme 3.11, $\mathrm{den}(\alpha)^{2s}(B_\alpha)_s/s! \in \mathbb{Z}(z)$, d'où $\sigma(K_\alpha) \leqslant 2\log(\mathrm{den}(\alpha))$. De plus, $\sigma(T) \leqslant 1$, donc on obtient finalement

$$\begin{aligned}\sigma(L) &\leqslant \max_{(\alpha,k,\ell)\in S}\Big(\big(1+\log(k+2)\big)\max\big(2\log(\mathrm{den}(\alpha)),1,\sigma(L_{\alpha,k,\ell})\big)\Big)\\ &\leqslant \max\left(1+\log(\kappa+2),\ 2(1+\log(\kappa+2))\log\big(\max_{\alpha\in A}\mathrm{den}(\alpha)\big),\ \max_{(\alpha,k,\ell)\in S}\big((1+\log(k+2))\sigma(L_{\alpha,k,\ell})\big)\right),\end{aligned}$$

où κ est le maximum des entiers k tels que $(\alpha,k,\ell)\in S$ pour un certain $(\alpha,\ell)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$ et $A=\{\alpha\in\mathbb{Q} : \exists(k,\ell)\in\mathbb{N}^2, (\alpha,k,\ell)\in S\}$. Ceci conclut la preuve du théorème 1.3. □

Ceci, combiné à la version quantitative du théorème des Chudnovsky issue de [21, p. 290, p. 299], permet d'obtenir le théorème 1.2

Démonstration du théorème 1.2. On a, selon le théorème 1.3,

$$\begin{aligned}\sigma(L) &\leqslant \max_{(\alpha,k,\ell)\in S}\Big(\big(1+\log(k+2)\big)\max\big(2\log(\mathrm{den}(\alpha)),1,\sigma(L_{\alpha,k,\ell})\big)\Big)\\ &\leqslant \max\left(1+\log(\kappa+2),\ 2(1+\log(\kappa+2))\log\big(\max_{\alpha\in A}\mathrm{den}(\alpha)\big),\ \max_{(\alpha,k,\ell)\in S}\big((1+\log(k+2))\sigma(L_{\alpha,k,\ell})\big)\right).\end{aligned}$$

De plus, pour tout $(\alpha,k,\ell)\in S$, comme $L_{\alpha,k,\ell}$ est l'opérateur minimal non nul de $f_{\alpha,k,\ell}(z)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, [21, p. 290, p. 299] implique que

$$\sigma(L_{\alpha,k,\ell}) \leqslant \Big(\big(5+\varepsilon(\mu_{\alpha,k,\ell},1)\big)\mu_{\alpha,k,\ell}^2(\delta_{\alpha,k,\ell}+1)-1-(\mu_{\alpha,k,\ell}-1)(\delta_{\alpha,k,\ell}+1)\Big)\overline{\sigma}(f_{\alpha,k,\ell}) \qquad (1.21)$$

où $\mu_{\alpha,k,\ell} := \mathrm{ord}(L_{\alpha,k,\ell})$, $\delta_{\alpha,k,\ell} := \deg_z(L_{\alpha,k,\ell})$ et $\varepsilon(x,y) := \begin{cases} 1 \text{ si } x=y \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\sigma(L) \leqslant \max\Bigg(&1+\log(\kappa+2),\ 2\big(1+\log(\kappa+2)\big)\log\big(\max_{\alpha\in A}\mathrm{den}(\alpha)\big),\ \max_{(\alpha,k,\ell)\in S}\Big[\big(1+\log(k+2)\big)\\ &\Big(\big(5+\varepsilon(\mu_{\alpha,k,\ell})\big)\mu_{\alpha,k,\ell}^2(\delta_{\alpha,k,\ell}+1)-1-(\mu_{\alpha,k,\ell}-1)(\delta_{\alpha,k,\ell}+1)\Big)\overline{\sigma}(f_{\alpha,k,\ell})\Big]\Bigg)\end{aligned}$$

□

1.4 Application : taille d'un produit de G-opérateurs

Dans cette partie, nous allons interpréter le résultat d'André sur la taille des modules différentiels (Proposition 1.3) en termes d'opérateurs différentiels.

La proposition suivante nous permet de formuler une correspondance entre les facteurs à droite d'un opérateur différentiel L et les sous-modules différentiels de $\mathcal{M}_L$ (voir [52, p. 47, p. 58]). On note ∂ la dérivation $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Proposition 1.8 (*[52], p. 47*)

Etant donnés $L_1, L_2 \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{M}_{L_2} \to \mathcal{M}_{L_1 L_2} \to \mathcal{M}_{L_1} \to 0. \tag{1.22}$$

Démonstration. Puisque nous travaillons avec des espaces vectoriels de dimensions finies, une suite

$$0 \to \mathcal{M}_{L_2} \xrightarrow{u} \mathcal{M}_{L_1 L_2} \xrightarrow{v} \mathcal{M}_{L_1} \to 0$$

est exacte si et seulement si la suite duale

$$0 \leftarrow \mathcal{M}_{L_2}^* \xleftarrow{u^*} \mathcal{M}_{L_1 L_2}^* \xleftarrow{v^*} \mathcal{M}_{L_1}^* \leftarrow 0$$

est exacte (voir [33, pp. 53 – 59]). Ainsi, il suffit de trouver une suite exacte

$$0 \to \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_1 \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_1 L_2 \xrightarrow{\psi} \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_2 \to 0. \tag{1.23}$$

Pour cela, nous définissons l'application injective

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_1 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_1 L_2 \\ & u \mod L_1 & \longmapsto & uL_2 \mod L_1 L_2 \end{array}$$

et l'application surjective

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_1 L_2 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_2 \\ & u \mod L_1 L_2 & \longmapsto & u \mod L_2. \end{array}$$

On a $\ker(\psi) = \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_2 \big/ \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L_1 L_2 = \mathrm{Im}\,(\varphi)$. Donc la suite (1.23) est bien exacte. □

Remarque. Une conséquence pratique de la proposition 1.8 est l'équivalence sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ du système différentiel $Y' = A_{L_1 L_2} Y$ à un système $Z' = BZ$, où $B = \begin{pmatrix} A_{L_1} & B^0 \\ 0 & A_{L_2} \end{pmatrix}$, B^0 étant une matrice à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Cela découle du lemme 1.3 appliqué à (1.22).

Les propositions 1.3 et 1.8 impliquent alors le résultat suivant qui est l'application voulue.

Théorème 1.4

Pour tout $L_1, L_2 \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$, on a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \max\big(\sigma(L_1), \sigma(L_2)\big) \leqslant \sigma(L_1 L_2) &\leqslant 1 + \frac{11}{6} \max\big(\sigma(L_1), \sigma(L_2), \sigma(L_1^*)\big) \\ &\leqslant 1 + \frac{11}{6} \max\big(\sigma(L_1) + \mathrm{ord}\,(L_1) - 1, \sigma(L_2)\big) \end{aligned}$$

et

$$\sigma(L_1 L_2) \leqslant \mathrm{ord}\,(L_1) + 2\sigma(L_1) + \sigma(L_2).$$

Démonstration. La proposition 1.8 nous assure que la suite

$$0 \to \mathcal{M}_{L_2} \to \mathcal{M}_{L_1 L_2} \to \mathcal{M}_{L_1} \to 0$$

est exacte. Par conséquent, $\mathcal{M}_{L_2}$ est un sous-module différentiel de $\mathcal{M}_{L_1 L_2}$ et $\mathcal{M}_{L_1} \simeq \mathcal{M}_{L_1 L_2} \big/ \mathcal{M}_{L_2}$. Il découle alors de la proposition 1.3 **a)** que

$$\max(\sigma(L_1), \sigma(L_2)) = \max\big(\sigma(\mathcal{M}_{L_1}), \sigma(\mathcal{M}_{L_2})\big) \leqslant \sigma(\mathcal{M}_{L_1 L_2}) = \sigma(L_1 L_2),$$

ce qui est la première égalité que nous voulions prouver.

Par ailleurs, l'équation (1.9) et la proposition 1.3 **b)** impliquent que

$$\sigma(L_1L_2) \leqslant 1 + \frac{11}{6}\max\bigl(\sigma(L_1), \sigma(L_2), \sigma(L_1^*)\bigr).$$

De plus, l'assertion (1.8) après la proposition 1.3 implique que $\sigma(L_1^*) \leqslant \sigma(L_1) + \operatorname{ord} L_1 - 1$, de sorte que

$$\sigma(L_1L_2) \leqslant 1 + \frac{11}{6}\max\bigl(\sigma(L_1) + \operatorname{ord} L_1 - 1, \sigma(L_2)\bigr).$$

De même, on obtient l'inégalité $\sigma(L_1L_2) \leqslant \operatorname{ord}(L_1) + 2\sigma(L_1) + \sigma(L_2)$ en appliquant l'assertion (1.10). □

Chapitre 2

Un analogue du théorème de Chudnovsky pour les séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique

2.1 Généralités sur les séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique

On s'intéresse dans ce chapitre une sous-classe de l'ensemble des séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique d'ordre 0. Les séries Nilsson-Gevrey d'exposant $\boldsymbol{\alpha}$ sont les fonctions de la forme

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\rho} \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} c_{k,\ell,m} f_{k,\ell,m}(z) z^{\alpha_\ell} \log(z)^k, \tag{2.1}$$

quand $(\mu, \nu, \rho) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f_{k,\ell,m}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$, $c_{k,\ell,m} \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_\mu) \in \overline{\mathbb{Q}}^\mu$. On appelle $\boldsymbol{\alpha}$ l'exposant de $f(z)$. Par le théorème de Frobenius (cf [32, Theorem 3.5.2, p. 349]), ces séries apparaissent naturellement comme solutions d'une équation différentielle $L(y(z)) = 0$, quand $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)\,[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ est un opérateur différentiel fuchsien.

On dit que $f(z)$ est de *type arithmétique et de type holonome d'ordre* 0 si tous les $f_{k,\ell,m}(z)$ sont des G-fonctions.

Dans [5], André a défini et étudié les propriétés des séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique d'ordre s. Les séries auxquelles nous allons nous intéresser dans ce chapitre correspondent à un cas particulier du cas $s = 0$.

On note, pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^\mu$, et $\mathbb{K}$ sous-anneau de $\mathbb{C}$ (en général, $\mathbb{K}$ sera soit un corps de nombres $\mathbb{L}$, soit l'anneau des entiers $\mathscr{O}_\mathbb{L}$ de $\mathbb{L}$), $\mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$ l'ensemble des séries de la forme

$$f(z) = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} f_{k,\ell}(z) z^{\alpha_\ell} \log(z)^k \tag{2.2}$$

telles que les $f_{k,\ell}(z) \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ sont des G-fonctions. Elles sont évidemment des séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique d'exposant $\boldsymbol{\alpha}$ et d'ordre 0. Dans ce cas, comme les $f_{k,\ell}(z)$ sont solutions d'une équation différentielle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, ainsi que les $z^{\alpha_\ell} \log(z)^k$, on en déduit que c'est également le cas de $f(z)$. On appelle ces séries « séries $\mathscr{S}$ » d'exposant $\boldsymbol{\alpha}$.

Notons que si $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_\mu) \in [0,1[^\mu$ et les α_i sont deux à deux distincts, alors les $f_{k,\ell}$ sont uniques. En d'autres termes, la famille $(z^{\alpha_\ell} \log(z)^k)_{k,\ell}$ est alors libre sur $\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$. A multiplication près par un monôme $z^{c(\boldsymbol{\alpha})}$, $c(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{Z}$, toute série $\mathscr{S}$ d'exposant $\boldsymbol{\alpha}$ s'écrit sous cette forme.

Le but de ce chapitre est de démontrer un analogue du théorème de Chudnovsky (théorème 0.3 en introduction) pour un cas particulier de ce type de séries pourvu qu'une certaine condition de liberté soit vérifiée. On obtiendra ainsi un lien entre la taille $\sigma(L)$ de l'opérateur minimal sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ d'une série $f(z)$ de la forme (2.2) et la taille étendue des $f_{k,\ell}(z)$. L'énoncé principal se trouve dans la partie 2.3. Il fournit une estimation de $\sigma(L)$ alternative à celle obtenue dans le chapitre 1 (théorème 1.2), qui s'avère meilleure dans certains cas (voir la comparaison menée dans la partie 3.3.3).

On note
$$\mathcal{S}(\mathbb{K})[\![z]\!] := \bigcup_{\substack{\mu\in\mathbb{N}^* \\ \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Q}^\mu}} \mathcal{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[\![z]\!].$$
On note aussi $\mathcal{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$ l'ensemble des séries de $\mathcal{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$, où $\alpha_\ell \geqslant 0$. Remarquons que toute série de $\mathcal{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$ peut s'écrire sous la forme (2.2), où les α_ℓ sont dans $[0,1[$ et deux à deux distincts, en rassemblant les termes d'exposants identiques et en regroupant les puissances entières positives dans les $f_{k,\ell}(z)\in\mathbb{K}[\![z]\!]$.

On définit l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[z]$ des *polynômes* $\mathcal{S}$ d'exposant $\boldsymbol{\alpha}$, c'est à dire des fonctions de la forme (2.2), où tous les $f_{k,\ell}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. De même, on définit l'anneau
$$\mathcal{S}(\mathbb{K})[z] := \bigcup_{\substack{\mu\in\mathbb{N}^* \\ \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Q}^\mu}} \mathcal{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[z].$$
On définit également
$$\mathcal{S}_0(\mathbb{K})[z] := \bigcup_{\substack{\mu\in\mathbb{N}^* \\ \boldsymbol{\alpha}\in(\mathbb{Q}_{\geqslant 0})^\mu}} \mathcal{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[z].$$
On note $\mathcal{RS}(\mathbb{K})[z]$ le corps des fractions de $\mathcal{S}(\mathbb{K})[z]$.

Pour $P=\sum\limits_{k,\ell} z^{\alpha_\ell}\log(z)^k P_{k,\ell}(z)\in\mathcal{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$, où $\alpha_\ell\in[0,1[$, le *degré* de P est
$$\deg(P) := \max_{k,\ell}\deg(P_{k,\ell}).$$

Lemme 2.1

a) *L'ensemble* $\mathcal{S}(\mathbb{K})[z]$ *est stable par dérivation. Plus précisément, si* $Q(z)\in\mathcal{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[z]$, *alors* $zQ'(z)\in\mathcal{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[z]$. *De plus,* $\deg(zQ')\leqslant\deg(Q)$.

b) *Soient* $A=\sum\limits_{k=0}^{\nu_A}\sum\limits_{\ell=1}^{\mu_A} A_{k,\ell}z^{\alpha_\ell}\log(z)^k\in\mathcal{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[z]$, $B=\sum\limits_{k=0}^{\nu_B}\sum\limits_{\ell=1}^{\mu_B} B_{k,\ell}z^{\beta_\ell}\log(z)^k\in\mathcal{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\beta})[z]$ *et* $C=AB$, *alors* $\deg(C)\leqslant\deg(A)+\deg(B)+1$.

Démonstration. **a)** Il suffit de le vérifier pour un élément de la forme $Q(z)=P(z)z^\beta\log(z)^k$, où $P(z)\in\mathbb{K}[z]$, et $k\in\mathbb{N}$.

Dans ce cas, on a, si $k\geqslant 1$, $zQ'(z)=zP'(z)z^\beta\log(z)^k+\beta P(z)z^\beta\log(z)^k+kz^\beta\log(z)^{k-1}\in\mathcal{S}(\mathbb{K},\beta)[z]$ et, si $k=0$, $zP'(z)z^\beta+\beta P(z)z^\beta\in\mathcal{S}(\mathbb{K},\beta)[z]$, ce qui prouve le résultat voulu. Remarquons de plus que
$$Q(z)=\sum_{\ell=1}^{\mu}\sum_{k=0}^{\nu} Q_{k,\ell}(z)z^{\alpha_\ell}\log(z)^k\in\mathcal{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[z],$$
alors les bornes μ et ν sont inchangées pour $zQ'(z)$, *i.e.*
$$zQ'(z)=\sum_{\ell=1}^{\mu}\sum_{k=0}^{\nu}\widetilde{Q}_{k,\ell}(z)z^{\alpha_\ell}\log(z)^k,\quad \widetilde{Q}_{k,\ell}\in\mathbb{K}[\![z]\!].$$
b) On a
$$C=\sum_{k''=0}^{\nu_C}\sum_{\ell''=1}^{\mu_C} C_{k'',\ell''}z^{\gamma_{\ell''}}\log(z)^{k''},$$

où pour tout k'', ℓ'', $C_{k'',\ell''} = \sum z^{\varepsilon_{k,k',\ell,\ell'}} A_{k,\ell} B_{k',\ell'}$, où la somme est sur les k, k', ℓ, ℓ' satisfaisant

$$k + k' = k'' \quad \text{et} \quad \varepsilon_{k,k',\ell,\ell'} := \gamma_{\ell''} - (\alpha_\ell + \beta_{\ell'}) \in \{0,1\}. \tag{2.3}$$

Donc pour tout k'', ℓ'', $\deg(C_{k'',\ell''}) \leqslant \deg(A) + \deg(B) + 1$. □

On dispose du théorème de structure suivants sur les solutions de l'équation différentielle non nulle d'ordre minimal satisfaite par une G-fonction. Il a déjà été énoncé dans l'introduction, nous le rappelons pour faciliter la tâche du lecteur.

Théorème 2.1 (*André-Chudnovsky-Katz*)

Soit $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ une G-fonction, et $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ un opérateur différentiel non nul d'ordre minimal pour f tel que $L(f(z)) = 0$. Alors l'opérateur différentiel L est globalement nilpotent. En particulier, tout point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un point singulier régulier de L et les exposants de L en tout point sont dans $\mathbb{Q}$. De plus, la condition de Galochkin définie dans l'introduction (définition 0.2) est satisfaite par la matrice compagnon de L.

Ce théorème implique en particulier que l'opérateur L admet en tout point $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ une base de solutions de la forme $(f_1(z-a), \dots, f_\mu(z-a))$, où les $f_i(u)$ sont des séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome d'ordre 0 d'exposants rationnels.

2.2 Condition de Galochkin

Cette partie est une partie de rappels autour de la condition de Galochkin et des théorèmes associés. Nous commençons par rappeler comment est définie la condition de Galochkin mentionnée dans le théorème 2.1, ainsi que la notion de taille utilisée au chapitre 1.

On considère $G \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ définissant un système différentiel $y' = Gy$. Pour $s \in \mathbb{N}$, soit $G_s \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ la matrice telle que pour toute solution y de $y' = Gy$, on a $y^{(s)} = G_s y$. En particulier, $G_0 = I_n$. On rappelle que les G_s, $s \in \mathbb{N}$, sont liées par la relation

$$G_{s+1} = G_s G + G_s', \tag{2.4}$$

où G_s' désigne la matrice G_s dérivée coefficient par coefficient. On prend $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ le plus petit dénominateur commun de tous les coefficients de la matrice $G(z)$.

On peut prouver que pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $T^s G_s \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$.

On note, dans toute la suite,

$$t := \max(\deg(T), \deg(TG)).$$

Définition 2.1 (*[27]*)

On note, pour $s \in \mathbb{N}$, q_s le plus petit dénominateur supérieur ou égal à 1 de tous les coefficients des coefficients des matrices $T(z)^m \dfrac{G_m(z)}{m!}$, quand $m \in \{1, \dots, s\}$. On dit que le système $y' = Gy$ vérifie la condition de Galochkin si

$$\exists C > 0 : \ \forall s \in \mathbb{N}, \quad q_s \leqslant C^{s+1}.$$

Définition 2.2 (*[4], pp. 74–76*)

*Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$. On dit que L est un G-*opérateur* si la matrice compagnon de L vérifie la condition de Galochkin.*

Cette appellation de G-opérateur est justifiée par le théorème de Chudnovsky (théorème 2.2 ci-dessous, également cité dans l'introduction) puisqu'il affirme que si f est une G-fonction, tout opérateur différentiel d'ordre minimal L tel que $L(f(z)) = 0$ est un G-opérateur.

Théorème 2.2 (*[17]*)

Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1, \dots, f_n) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]^n$ *un vecteur de G-fonctions telles que* $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$ *et* $(f_1, \dots, f_n)$ *est libre sur* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$*. Alors le système différentiel* $y' = Gy$ *vérifie la condition de Galochkin.*

On peut trouver dans les ouvrages d'André [4, pp. 120–123], puis Dwork [21, chapitres VII et VIII] une version « effective » du théorème de Chudnovsky; pour cela, il faut définir une quantité $\sigma(G)$, la *taille de* G, qui sera essentiellement la plus grande constante $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall s \in \mathbb{N}, q_s \leqslant C^{s(1+o(1))}$.

Définition 2.3 (*[21], p. 227*)

La taille *de* $G \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}(z))$*, où* $\mathbb{K}$ *est un corps de nombres, est*

$$\sigma(G) = \limsup_{s \to +\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} h(s, \mathfrak{p}),$$

où

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad h(s, \mathfrak{p}) = \sup_{m \leqslant s} \log^+ \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}.$$

La valeur absolue non archimédienne $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ associée au premier $\mathfrak{p}$ et la norme de Gauss $|\cdot|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$ construite à partir de cette valeur absolue sont définies dans [21, pp. 222-223].

Le lien entre la taille et le dénominateur q_s introduit dans la définition 2.1 est donné par la proposition 1.2 dans la section 1.2.2.

Définition 2.4

Si $f = \sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]^d$, $f_m = (f_{1,m}, \dots, f_{d,m})$*, on définit la* taille étendue *de* f *par* $\overline{\sigma}(f) := \sigma_0(f) + \sigma_\infty(f)$*, où*

$$\sigma_0(f) := \limsup_{s \to +\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{\substack{m \leqslant s \\ 1 \leqslant k \leqslant d}} \log^+ \left| f_{k,m} \right|_{\mathfrak{p}}$$

et

$$\sigma_\infty(f) := \limsup_{s \to +\infty} \frac{1}{s} \sum_{\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}} \sup_{\substack{m \leqslant s \\ 1 \leqslant k \leqslant d}} \log^+ |f_{k,m}|_\tau,$$

où pour tout plongement $\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ *et tout* $\zeta \in \mathbb{K}$*, on définit*

$$|\zeta|_\tau := \begin{cases} |\tau(\zeta)|^{1/[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} & \text{si } \tau(\mathbb{K}) \subset \mathbb{R} \\ |\tau(\zeta)|^{2/[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $f(z) = \sum_{k,\ell} z^{\alpha_\ell} \log(z)^k f_{k,\ell}(z)$ *une série* $\mathscr{S}$*, où les* α_ℓ *sont des éléments deux à deux distincts de* $[0, 1[$*, on pose* $\overline{\sigma}(f) := \max_{k,\ell} \overline{\sigma}(f_{k,\ell})$*.*

La version effective du théorème des Chudnovsky annoncée est alors donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.1 (*[21], p. 299*)

On a, si $n \geqslant 2$, $\sigma(G) \leqslant (5n^2(t+1) - (n-1)(t+1) - 1)\overline{\sigma}(\mathbf{f})$*, et si* $n = 1$, $\sigma(G) \leqslant (6(t+1) - 1)\overline{\sigma}(\mathbf{f})$*.*

Une conséquence des travaux d'André dans [5, p. 720] est la généralisation suivante du théorème des Chudnovsky aux séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique de type holonome d'ordre 0.

Théorème 2.3 (*André*)

Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^\mu$*,* $f(z)$ *une série Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome* *d'ordre* 0 *et d'exposant* $\boldsymbol{\alpha}$ *et* $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)\,[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ *un opérateur tel que* $L(f(z)) = 0$ *et d'ordre minimal. Alors* L *est un* G*-opérateur.*

En effet, André a prouvé la proposition suivante :

Proposition 2.2 (*André, [5], p. 720*)

Si $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^{\mu}$*, alors toute série Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome d'ordre* 0 *et d'exposant* $\boldsymbol{\alpha}$ *est solution d'un* G*-opérateur.*

En notant L_1 un tel opérateur, par minimalité, L est un diviseur à droite de L_1 dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)\,[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, donc un G-opérateur.

André démontre la proposition 2.2 en s'appuyant sur la théorie des modules différentiels. Cependant, cela ne permet pas a priori de donner un lien explicite entre le dénominateur q_s et le dénominateur des coefficients des G-fonctions $f_{k,\ell}$ telles que

$$f(z) = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} f_{k,\ell}(z) z^{\alpha_\ell} (\log(z))^k.$$

2.3 Énoncé du théorème principal

Énonçons maintenant le résultat principal de ce chapitre, le théorème 2.4 ci-dessous, qui est un analogue de la proposition 2.1 pour les séries $\mathscr{S}$.

Soient $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^{\mu}$ et $\mathbf{f} = {}^t(f_1, \dots, f_n) \in \mathscr{S}(\overline{\mathbb{Q}}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]^n$. On suppose trouvée une matrice $G \in \mathscr{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ telle que $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$. Rappelons qu'il existe un corps de nombres $\mathbb{K}$ tel que $\mathbf{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$. On suppose de plus que $\mathbb{K}/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne et que $G(z) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}(z))$. Enfin, on se donne $T(z) \in \mathbb{K}[z]$ tel que $T(z)G(z) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[z])$.

Dans la fin de cette section et dans les sections 2.4 et 2.5 , on note

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ \ f_i(z) = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} f_{i,k,\ell}(z) z^{\alpha_\ell} \log(z)^k, \quad f_{i,k,\ell}(z) \in \mathbb{K}[\![z]\!].$$

Théorème 2.4

Sous les hypothèses ci-dessus, si $(f_1, \dots, f_n)$ *est libre sur* $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$*, alors* G *vérifie la condition de Galochkin et, en reprenant les notations de la définition 2.1,*

$$\limsup_{s \to +\infty} \frac{1}{s} \log(q_s) \leqslant [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \big(2\log(\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})) + \nu + 2n(2n\mu(\nu+1)+1)(t+1)\overline{\sigma}(\mathbf{f})\big).$$

Donc

$$\sigma(G) \leqslant [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \big(2\log(\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})) + \nu + 2n(2n\mu(\nu+1)+1)(t+1)\overline{\sigma}(\mathbf{f})\big) - \frac{1}{[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]} h^-(T),$$

où $h^-(T) := \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \log\min\big(1, |T|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}\big)$.

La deuxième inégalité est déduite de la première en utilisant la proposition 1.2.

Remarques. ***i)*** Un corollaire de ce théorème est que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$ et $L \in \mathbb{K}(z)\,[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ est un opérateur non nul d'ordre minimal tel que $L(f(z)) = 0$, alors L est un G-opérateur et on dispose d'une estimation de $\sigma(L)$, définie comme la taille de la matrice compagnon de L, en fonction de $\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})$ et de la taille des G-fonctions apparaissant dans le développement en série $\mathscr{S}$ de $\mathbf{f}$.

ii) Ce théorème n'est pas une généralisation du théorème 2.3, d'une part car il s'applique seulement aux séries $\mathscr{S}$ et d'autre part parce qu'on demande la liberté de $(f_1, \dots, f_n)$ sur

$\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ et non sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Néanmoins, on peut lever ce dernier problème dans le cas particulier des opérateurs L_β considérés dans la partie 3.3.3.

Par ailleurs, le théorème 2.4 est moins général que le théorème principal du chapitre 1 (théorème 1.3) qui s'applique aux séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome d'ordre 0. Une comparaison quantitative des théorèmes 1.3 et 2.4 sera menée dans un cas particulier dans la partie 3.3.3.

iii) On retrouve une version quantitative du théorème des Chudnovsky (déjà obtenue dans [21, p. 299]) dans le cas où $(f_1,\dots,f_n) \in \mathbb{K}[\![z]\!]^n$ est libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. En effet, soit, pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $P_i := \sum_{k,\ell} z^{\alpha_\ell}\log(z)^k P_{i,k,\ell}(z)$, où les α_ℓ sont deux à deux non congrus modulo $\mathbb{Z}$ et $P_{i,k,\ell}(z) \in \mathbb{K}[z]$. Supposons que $\sum_{i=1}^n P_i f_i = 0$. Alors on a

$$0 = \sum_{k,\ell} z^{\alpha_\ell}\log(z)^k \sum_{i=1}^n P_{i,k,\ell}(z) f_i(z),$$

donc, par liberté de $(z^{\alpha_\ell}\log(z)^k)_{k,\ell}$ sur $\mathbb{K}[\![z]\!]$, on obtient, pour tout k,ℓ, $\sum_{i=1}^n P_{i,k,\ell}(z) f_i(z) = 0$, de sorte que la liberté de $(f_1,\dots,f_n)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ implique que $P_{i,k,\ell}(z) = 0$ pour tout i,k,ℓ , c'est à dire $P_1 = \cdots = P_n = 0$. Ainsi, $(f_1,\dots,f_n)$ est libre sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$.

iv) On peut supposer que $\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_n) \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]^n$ (*i.e.* les f_i sont représentables par des séries $\mathscr{S}$ à exposants positifs). En effet, dans le cas contraire, on peut trouver $c \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{g} = z^c\mathbf{f} \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]^n$. Soit $G \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}(z))$ tel que $\mathbf{g}' = G\mathbf{g}$.

Supposons que G vérifie la condition de Galochkin. Alors $\mathbf{f} = z^{-c}\mathbf{g}$ donc par la formule de Leibniz,

$$\frac{\mathbf{f}^{(s)}}{s!} = \sum_{k=0}^{s} \frac{(z^{-c})^{(k)}}{k!}\frac{\mathbf{g}^{(s-k)}}{(s-k)!} = \sum_{k=0}^{s} \frac{(-c-k-1)_k}{k!} z^{-c-k}\frac{G_{s-k}}{(s-k)!}\mathbf{g},$$

d'où $\mathbf{f}^{(s)} = F_s\mathbf{f}$, où

$$\frac{F_s}{s!} = \sum_{k=0}^{s} \frac{(-c-k-1)_k}{k!} z^{-k}\frac{G_{s-k}}{(s-k)!}.$$

Comme le dénominateur commun des $\dfrac{(-c-k-1)_k}{k!}$ pour $k \in \{0,\dots,s\}$ a une croissance géométrique en s (cf lemme 3.11) et G satisfait la condition de Galochkin, on en déduit que F satisfait également la condition de Galochkin.

La section suivante est consacrée à la preuve du théorème 2.4.

2.4 Démonstration du théorème 2.4

Le but de cette section est d'exposer la preuve du théorème 2.4. Elle consiste en une adaptation de la preuve originale des Chudnovsky (voir [38, pp. 27–33] ou la section 4.2.2 du chapitre 4), selon la trame donnée par Beukers dans [13, pp. 21–22].

L'existence d'un système différentiel satisfait par $\mathbf{f}$ sera cruciale dans la démonstration. En revanche, l'hypothèse de croissance géométrique des coefficients et des dénominateurs de la définition de G-fonction ne sera utilisée que dans l'étape 7.

Le résultat suivant, couramment appelé « lemme de Siegel », a été énoncé par Siegel dans [51]. Il s'agit d'un outil classique en approximation diophantienne qui nous servira au cours de la démonstration. Une preuve peut être trouvée dans [50, p. 37]. On rappelle que $\mathscr{O}_\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des entiers algébriques du corps de nombres $\mathbb{K}$.

Proposition 2.3 (*[50], p. 37*)

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres. Considérons un système de m équations linéaires

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{2.5}$$

où $\forall i, j, a_{ij} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}$. On note $A = \max_{i,j} \overline{|a_{ij}|}$. Alors si $n > m$, (2.5) *a une solution non nulle $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}^n$ vérifiant*

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \overline{|x_j|} \leqslant c_1 (c_1 n A)^{\frac{m}{n-m}},$$

où $c_1 > 0$ est une constante dépendant uniquement de $\mathbb{K}$.

La proposition 2.3 servira de manière essentielle dans l'étape 7 de la démonstration pour montrer l'existence de certains approximants de Padé.

Notations et hypothèses : On a $T(z) \in \mathbb{K}[z]$, mais quitte à multiplier par un entier adapté, on peut supposer que $T(z) \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$ et $T(z)G(z) \in \mathscr{M}_n(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z])$.

Selon le point ***iv)*** de la remarque finale de la partie 2.3, on peut supposer que pour tout $\ell \in \{1, \ldots, \mu\}$, $\alpha_\ell \geqslant 0$ et qui plus est, sans perte de généralité, on peut supposer que $\alpha_\ell < 1$. Cela revient à mettre les puissances entières de z dans les séries formelles $f_{i,k,\ell}(z)$. De plus, on peut supposer sans perte de généralité que les α_ℓ sont deux à deux distincts. On fait ces hypothèses dans tout ce qui suit.

On note $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ la dérivation usuelle sur $\mathbb{K}[\![z]\!]$.

Si $A \in \mathscr{S}(\mathbb{K})[\![z]\!]$ et $\ell \in \mathbb{R}$, on note $A = O\big(z^\ell\big)$ s'il existe une fonction $B \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$ telle que que $A = z^\ell B$. En particulier, si $A \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on a $A = O(z^\ell)$ si et seulement si il existe $B \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ tel que $A = z^\ell B$, ce qui est la notation usuelle dans $\mathbb{K}[\![z]\!]$.

On note $\Delta = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ le degré du corps de nombres $\mathbb{K}$.

Étape 1 : Soient $N, M \in \mathbb{N}$. On introduit des $\mathscr{S}$-approximants de Padé $(Q, \mathbf{P})$ de type II de paramètres (N, M) associés à $\mathbf{f}$ dont on laisse les paramètres libres pour l'instant, c'est-à-dire un polynôme $Q \in \mathbb{K}[z]$ et un vecteur de polynômes $\mathscr{S}$ $\mathbf{P} = {}^t(P_1, \ldots, P_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]^n$ tels que $\deg(Q) \leqslant N$, $\max_{1 \leqslant i \leqslant N} \deg(P_i) \leqslant N$ et si , alors

$$Q\mathbf{f} - \mathbf{P} = O\big(z^{N+M}\big). \tag{2.6}$$

On ne discutera des conditions d'existence de telles généralisations des approximants de Padé que dans l'étape 7. Ce type de généralisation a déjà été considéré dans [25].

L'équation (2.6) peut être traduite par un système d'équations de Padé de type II polynomiales. En effet, si $\mathbf{f}(z) = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} \mathbf{f}_{k,\ell}(z) z^{\alpha_\ell} \log(z)^k$ et $\mathbf{P} = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} \mathbf{P}_{k,\ell} z^{\alpha_\ell} \log(z)^k$, où $\mathbf{P}_{k,\ell} \in \mathbb{K}_N[z]^n$, alors on a

$$\sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} (Q(z)\mathbf{f}_{k,\ell}(z) - \mathbf{P}_{k,\ell}(z)) z^{\alpha_\ell} \log(z)^k = O\big(z^{N+M}\big),$$

ce qui est équivalent, en identifiant composante par composante selon la famille libre $(z^{\alpha_\ell} \times \log(z)^k)_{k,\ell}$, à

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant \nu, \ \forall 1 \leqslant \ell \leqslant \mu, \quad Q\mathbf{f}_{k,\ell} - \mathbf{P}_{k,\ell} = O\big(z^{N+M}\big). \tag{2.7}$$

Notons que dans (2.7), la notaiton O désigne la notion standard dans $\mathbb{K}[\![z]\!]$.

On a pour tout $m < N + M$, $z^m T^m (D - G)^m \mathbf{P} \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]$ (voir étape 4). De plus, on va montrer par récurrence sur m que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad (zT)^m Q^{(m)} \mathbf{f} - z^m T^m (D - G)^m \mathbf{P} = O\big(z^{N+M}\big). \tag{2.8}$$

Pour $m = 1$, c'est la définition de Q et $\mathbf{P}$.

Supposons la relation vraie au rang m. Alors en dérivant (2.8) et en multipliant par zT, on a

$$(m(zT)'(zT)^m Q^{(m)} + (zT)^{m+1} Q^{(m+1)}) \mathbf{f} + (zT)^{m+1} Q^{(m)} \mathbf{f}' \\ - m(zT)'(zT)^m (D-G)^m \mathbf{P} - (zT)^{m+1} D(D-G)^m \mathbf{P} = O\left(z^{N+M}\right).$$

En effet, selon le lemme 2.1 **a)**, si $g \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$ est dans $\mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$, alors $zg'(z) \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$ l'est aussi.

Or, $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$ donc en multipliant (2.8) par la matrice polynomiale zTG et en retranchant à l'équation précédente, on obtient

$$(m(zT)'(zT)^m Q^{(m)} + (zT)^{m+1} Q^{(m+1)}) \mathbf{f} - m(zT)'(zT)^m (D-G)^m \mathbf{P} \\ - (zT)^{m+1} (D-G)^{m+1} \mathbf{P} = O\left(z^{N+M}\right).$$

Finalement, comme $(zT)^m Q^{(m)} \mathbf{f} - (zT)^m (D-G)^m \mathbf{P} = O\left(z^{N+M}\right)$, on a le résultat voulu.

Étape 2 : On a

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{G_s}{s!} \mathbf{P} = \sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s-j} (D-G)^j \mathbf{P}. \tag{2.9}$$

Ceci est quelque chose de très général qui n'a pas de rapport avec le contexte dans lequel nous travaillons. Voir [21, p. 284] ou l'étape 2 de la sous-section 4.2.2 pour une preuve.

Étape 3 :

On note pour $h \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}_h = \dfrac{1}{h!}(D-G)^h \mathbf{P}$ et $R_{(h)} \in \mathscr{M}_n(\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z])$ la matrice dont la j-ième colonne est $\binom{h+j-1}{j-1} \mathbf{P}_{h+j-1}$. Il découle directement de l'étape 2 (formule (2.9)) que

$$\frac{G_s}{s!} R_{(0)} = \sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^j}{(s-j)!} D^{s-j} R_{(j)}.$$

A ce stade, on doit utiliser une variante du lemme de Shidlovskii, le théorème 2.5 qui sera démontré dans la partie 2.5. C'est ici que l'on va se servir de l'hypothèse de liberté de $(f_1, \ldots, f_n)$ sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$.

Selon le théorème 2.5, la matrice $R_{(0)}$ est inversible pourvu que M soit assez grand ce qui sera réalisé quand on spécifiera M et N dans l'étape 7. Donc

$$T^s \frac{G_s}{s!} = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j T^{j+n-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} T^{s-j} (T^{n-1} R_{(0)})^{-1}. \tag{2.10}$$

Étape 4 : Soit d_{N+M} le dénominateur commun des coefficients d'ordres inférieurs à $N+M$ du développement en série entière des $f_{i,k,\ell}$. On suppose trouvés des $\mathscr{S}$-approximants de Padé de type II $Q \in \mathbb{K}[z]$, $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]$ de $d\mathbf{f}$ tels que $\deg(Q) \leqslant N$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \deg(P_i) \leqslant N$ et

$$Q(d_{N+M}\mathbf{f}) - \mathbf{P} = O\left(z^{N+M}\right),$$

avec $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$. On fait l'hypothèse supplémentaire que Q est un polynôme à coefficients entiers algébriques. On peut alors appliquer les résultats des trois étapes précédentes, dont on conservera les notations, à Q et $\mathbf{P}$ puisque $d_{N+M}\mathbf{f}$ est encore solution du système différentiel $y' = Gy$.

Selon (2.8), on a

$$\forall m \leqslant N+M, \quad (zT)^m \frac{Q^{(m)}}{m!}(d\mathbf{f}) - z^m T^m \mathbf{P}_m = O\left(z^{N+M}\right). \tag{2.11}$$

Montrons par récurrence sur m que

$$\forall m \in \mathbb{N},\ z^m T^m \mathbf{P}_m \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z] \ \text{ et } \ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg(z^m T^m \mathbf{P}_{i,m}) \leqslant N + (t+1)m. \tag{2.12}$$

- Pour $m = 0$, il s'agit simplement du fait que les composantes de $\mathbf{P} \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]^n$ sont de degrés inférieurs à N.
- Pour $m = 1$, le lemme 2.1 implique que $z\mathbf{P}' \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]^n$ donc, comme les coefficients de $TG \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[z])$ sont de degrés inférieurs à t, les composantes du vecteur $zT\mathbf{P}' - zTG\mathbf{P}$ sont dans $\mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]$ et sont de degrés inférieurs à $N + t + 1$, car les coefficients de TG sont de degrés bornés par t.
- Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai au rang m. Alors

$$\begin{aligned}
&(D-G)(z^m T^m (D{-}G)^m \mathbf{P}) \\
&\qquad = m(zT)'(zT)^{m-1}(D-G)^m \mathbf{P} + z^m T^m D(D-G)^m \mathbf{P} - z^m T^m G(D-G)^m \mathbf{P} \\
&\qquad = m(zT)'(zT)^{m-1}(D-G)^m \mathbf{P} + z^m T^m (D-G)^{m+1} \mathbf{P}.
\end{aligned}$$

Donc

$$z^{m+1} T^{m+1} (D-G)^{m+1} \mathbf{P} = zT(D-G)(T^m (D-G)^m \mathbf{P}) - m(zT)' z^m T^m (D-G)^m \mathbf{P}.$$

Or, en utilisant à la fois l'hypothèse de récurrence et le cas $m = 1$, on voit que $T(D{-}G)(T^m(D{-}G)^m\mathbf{P}) \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]^n$ a ses composantes de degrés bornés par $N + m(t+1) + t + 1 = N + (m+1)(t+1)$; par ailleurs, l'hypothèse de récurrence nous assure que $m(zT)' z^m T^m (D-G)^m \mathbf{P}$ a des composantes de degrés inférieurs à $t + 1 + N + mt = N + (m+1)(t+1)$. On en déduit le résultat souhaité (2.12).

On remarque que $\dfrac{Q^{(m)}}{m!} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$ puisque Q est à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$. On déduit de l'équation (2.11), à condition que $N + M \geqslant N + (t+1)m \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg(\mathbf{P}_{i,m})$, c'est-à-dire

$$m \leqslant \frac{M}{t+1}, \tag{2.13}$$

que les coefficients de $(zT)^m \mathbf{P}_m$ sont des éléments de $\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})[z]$.

Ceci implique immédiatement que si j est un entier naturel tel que $j + n - 1 \leqslant \dfrac{M}{t+1}$, alors $(zT)^{j+n-1} R_{(j)}$ est une matrice à coefficients dans $\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})[z]$. En particulier, on obtient $(zT)^{n-1} R_{(0)} \in \mathscr{M}_n(\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})[z])$.

Montrons à présent que pour tout $s \leqslant \dfrac{M}{t+1} - (n-1)$ et tout $j \in \{0, \ldots, s\}$,

$$\operatorname{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s} \delta_{s-j}^{\nu} z^{s-j} \frac{(zT)^{s+n-1}}{(s-j)!} D^{s-j} R_{(j)} \in \mathscr{M}_n(\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})[z]). \tag{2.14}$$

avec $\delta_r = \operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, r)$.

Rappelons la formule de Leibniz : si $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_\ell$ sont ℓ fonctions dérivables k fois, alors

$$(f_1 \ldots f_\ell)^{(k)} = \sum_{i_1 + \cdots + i_\ell = k} \binom{k}{i_1, \ldots, i_\ell} \prod_{1 \leqslant t \leqslant k} f_t^{(i_t)}.$$

En particulier, considérons un élément quelconque $W = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} W_{k,\ell} z^{\alpha_\ell} \log(z)^k \in \mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})[z]$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{W^{(s)}(z)}{s!} &= \sum_{k,\ell} \sum_{i_1+i_2+i_3=s} \frac{W_{k,\ell}^{(i_1)(z)}}{(i_1)!} \frac{D^{i_2}(z^{\alpha_\ell})}{(i_2)!} \frac{D^{i_3}\left(\log^k\right)(z)}{i_3!} \\
&= \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{i_1+i_2=s} \frac{W_{0,\ell}^{(i_1)}}{(i_1)!} \binom{\alpha_\ell}{i_2} z^{\alpha_\ell - i_2} + \sum_{k,\ell \geqslant} \sum_{i_1+i_2+i_3=s} \frac{W_{k,\ell}^{(i_1)}}{(i_1)!} \binom{\alpha_\ell}{i_2} z^{\alpha_\ell - i_2} \\
&\qquad \times \sum_{j_1+\cdots+j_k=i_3} \log(z)^{\mathrm{Card}\{u : j_u=0\}} \times \prod_{j_u \neq 0} \frac{(-1)^{j_u-1}}{(j_u)!} (j_u-1)! z^{-j_u}.
\end{aligned}$$

On a pour tout k, ℓ, i_1, $W_{k,\ell}^{(i_1)}/(i_1)! \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$. De plus, comme $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^\mu$, le lemme 3.11 implique que pour tout $i_2 \leqslant s$,

$$\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2i_2} \binom{\alpha_\ell}{i_2} \in \mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

Enfin, on voit que si $j_1 + \cdots + j_k = i_3$, alors $z^{i_3} \delta_{i_3}^k \prod_{j_u \neq 0} \frac{(-1)^{j_u-1}}{(j_u)!} (j_u-1)! z^{-j_u} \in \mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})$. Par conséquent,

$$\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s} \delta_s^\nu z^s \frac{W^{(s)}}{s!} \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]. \tag{2.16}$$

De plus, on prouve dans l'étape 4 de la partie 4.2.2 que, comme $T \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$, alors

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ \forall k \leqslant \ell,\ \frac{(T^\ell)^{(k)}}{k!} \in T^{\ell-k} \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]. \tag{2.17}$$

Déduisons de cela par récurrence le résultat (2.14). On commence par montrer par récurrence sur s que pour tout $s \in \mathbb{N}$ tel que $s \leqslant \frac{M}{t+1} - (n-1)$,

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall j' \geqslant j, \quad \mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s} \delta_s^\nu z^{s+j+n-1} \frac{D^s(T^{j'+n-1} R_{(j)})}{s!} \in \mathscr{M}_n(\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})[z]). \tag{2.18}$$

- C'est clair pour $s = 0$, car $z^{n-1} T^{n-1} R_{(0)} \in \mathscr{M}_n(\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})[z])$.
- Soit $s \in \mathbb{N}$, supposons (2.18) vrai pour tout $s' < s$. Prenons $j \in \mathbb{N}$ et $j' \geqslant j$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{z^s}{s!} D^s\left(z^{j+n-1} T^{j'+n-1} R_{(j)}\right) &= z^s \sum_{k=0}^{s} \frac{D^k(z^{j+n-1})}{k!} \frac{D^{s-k}(T^{j'+n-1} R_{(j)})}{(s-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(s,j+n-1)} \binom{j+n-1}{k} z^{s+j+n-1-k} \frac{D^{s-k}(T^{j'+n-1} R_{(j)})}{(s-k)!} \\
&= z^{s+j+n-1} \frac{D^s(T^{j'+n-1} R_{(j)})}{s!} + \sum_{k=1}^{\min(s,j+n-1)} \binom{j+n-1}{k} z^{s+j+n-1-k} \frac{D^{s-k}(T^{j'+n-1} R_{(j)})}{(s-k)!}.
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2(s-k)} \delta_{s-k}^\nu z^{s-k+j+n-1} \frac{D^{s-k}(T^{j'+n-1} R_{(j)})}{(s-k)!} \in \mathscr{M}_n(\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})[z]).$$

Par ailleurs, comme $z^{j+n-1} T^{j'+n-1} R_{(j)} \in \mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})[z]$, on déduit de (2.16) appliqué à $W = z^{j+n-1} T^{j'+n-1} R_{(j)}$ que

$$\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s} \delta_s^\nu z^s \frac{D^s(z^{j+n-1} T^{j'+n-1} R_{(j)})}{s!} \in \mathscr{M}_n(\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \boldsymbol{\alpha})[z]).$$

Donc

$$\operatorname{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s}\delta_s^{\nu} z^{s+j+n-1}\frac{D^s(T^{j'+n-1}R_{(j)})}{s!} \in \mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}},\boldsymbol{\alpha})[z].$$

Prouvons à présent (2.14) par récurrence forte sur $s \in \mathbb{N}$, $s \leqslant \dfrac{M}{t+1} - (n-1)$.

- Pour $s = 0$, c'est évident.
- Soit $s \in \mathbb{N}^*$, supposons (2.14) vrai pour $s' \in \{0,\dots,s-1\}$. Par la formule de Leibniz, on a, pour $j \in \{0,\dots,s\}$,

$$\begin{aligned}
z^{s-j+j+n-1}\frac{D^{s-j}(T^{s+n-1}R_{(j)})}{(s-j)!} &= z^{s+n-1}\sum_{k=0}^{s-j}\binom{s-j}{k}\times\frac{1}{(s-j)!}(T^{s+n-1})^{(k)}D^{s-j-k}(R_{(j)})\\
&= z^{s+n-1}T^{s+n-1}\frac{D^{s-j}(R_{(j)})}{(s-j)!} + z^{s+n-1}\sum_{k=1}^{s-j}\frac{(T^{s+n-1})^{(k)}}{k!}\frac{D^{s-j-k}R_{(j)}}{(s-j-k)!}\\
&= z^{s+n-1}T^{s+n-1}\frac{D^{s-j}R_{(j)}}{(s-j)!} + \sum_{k=1}^{s-j}U_k T^{s+n-1-k}z^k z^{s-k-j+j+n-1}\frac{D^{s-k-j}(R_{(j)})}{(s-k-j)!},
\end{aligned}$$

avec $U_k \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$, en utilisant (2.17).

Or, d'une part, selon (2.18), $\operatorname{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2(s-j)}\delta_{s-j}^{\nu} z^{s+n-1}\dfrac{D^{s-j}(T^{s+n-1}R_{(j)})}{(s-j)!} \in \mathscr{M}_n\big(\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}},\boldsymbol{\alpha})[z]\big)$ et d'autre part, par hypothèse de récurrence,

$$\forall k \in \{1,\dots,s-j\}\,,\quad \operatorname{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2(s-j-k)}\delta_{s-j-k}^{\nu} z^{s-k+n-1}T^{s-k+n-1}\frac{D^{s-k-j}R_{(j)}}{(s-k-j)!} \in \mathscr{M}_n\big(\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}},\boldsymbol{\alpha})[z]\big).$$

Par conséquent,

$$\operatorname{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2(s-j)}\delta_{s-j}^{\nu} z^{s+n-1}T^{s+n-1}\frac{D^{s-j}R_{(j)}}{(s-j)!} \in \mathscr{M}_n\big(\mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}},\boldsymbol{\alpha})[z]\big),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Étape 5 : Lien entre q_s et taille des coefficients de $\det((zT)^{n-1}R_{(0)})$.

Selon (2.10), on a pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$(zT)^s\frac{G_s}{s!} = \frac{1}{V_s}\sum_{j=0}^{s}(-1)^j\operatorname{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s}\delta_s^{\nu}(zT)^{s+n-1}\frac{D^{s-j}R_{(j)}}{(s-j)!}\left(\operatorname{com}\left((zT)^{n-1}R_{(0)}\right)\right)^T, \tag{2.19}$$

où $V_s = \operatorname{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s}\delta_s^{\nu}\det\big((zT)^{n-1}R_{(0)}\big) \in \mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})[z]$, et selon (2.14), tous les termes de la somme sont à coefficients entiers algébriques à condition que $s+n-1 \leqslant \dfrac{M}{t+1}$.

Prenons pour $s \in \mathbb{N}$, q_s le dénominateur des coefficients des coefficients des matrices $TG, T^2\dfrac{G_2}{2!},\dots,T^s\dfrac{G_s}{s!}$, comme dans la définition 2.1. Pour estimer q_s sous la condition $s+n-1 \leqslant \dfrac{M}{t+1}$, il suffit donc d'obtenir une estimation de la maison des coefficients de V_s. C'est ce que permet de faire ce lemme :

Lemme 2.2

Soient $U \in \mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}},\boldsymbol{\beta})[z]$, $V \in \mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}},\boldsymbol{\beta})[z]$, où $\boldsymbol{\beta} \in [0,1[^{\mu}$ est de coefficients deux à deux distincts, et $W \in \mathbb{K}[z]$ tels que $U = VW$. Notons

$$V = \sum_{\ell=1}^{\mu}\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{i=0}^{d} v_{i,k,\ell}z^i z^{\beta_\ell}\log(z)^k.$$

Alors pour tous $k, \ell \leqslant \mu$ et tout $j \in \{0, \dots, d\}$ tels que $v_{j,k,\ell} \neq 0$, on a $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v_{j,k,\ell})W \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$.

Démonstration. Écrivons $V = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} V_{k,\ell} z^{\beta_\ell} \log(z)^k$, où $V_{k,\ell} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$. Alors

$$VW = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} V_{k,\ell} W z^{\beta_\ell} \log(z)^k,$$

donc pour tous k, ℓ, on a $V_{k,\ell}W \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$. Par suite, le lemme 4.2, démontré dans la partie 4.2.2, implique que $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}\left(v_{j,k,\ell}\right) W \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$ si $v_{j,k,\ell} \neq 0$. □

Pour $W = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{q} w_{k,\ell,i} z^i z^{\alpha_\ell} \log(z)^k \in \mathscr{S}(\mathbb{K})[z]$, on définit $\sigma(W) = \max_{k,\ell,i} \overline{|w_{k,\ell,i}|}$, la *maison* de W. Soit $s \in \mathbb{N}^*$ et $s' \leqslant s$. Alors on remarque que $V_s = \mathrm{den}(\alpha)^{2(s-s')} \frac{\delta_s^\nu}{\delta_{s'}^\nu} V_s$. Ainsi, on déduit du lemme 2.2 appliqué à la formule (2.19), avec

$$U = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s} \delta_s^\nu (zT)^{s'+n-1} \frac{D^{s'-j} R_{(j)}}{(s'-j)!} \left(\mathrm{com}\left((zT)^{n-1} R_{(0)}\right)\right)^T,$$

$V = V_{s'}$ et $W = (zT)^{s'} \frac{G_{s'}}{s'!}$ qu'il existe un coefficient v non nul du polynôme $\mathscr{S}$ V_s tel que $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v)(zT)^{s'} \frac{G_{s'}}{s'!}$, de sorte que q_s divise $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(V_s) \leqslant \sigma(V_{s'})^\Delta$. Par suite,

$$\forall s \in \mathbb{N} \text{ tel que } s + n - 1 \leqslant \frac{M}{t+1}, \text{ on a } q_s \leqslant \sigma(V_s)^\Delta. \tag{2.20}$$

Étape 6 : Majoration de la maison de $\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s} \delta_s^\nu \det((zT)^{n-1} R_{(0)}) \in \mathscr{S}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})[z]$ en fonction de la maison de Q.

Par commodité, on s'intéresse à

$$\widetilde{V} = \det(\mathbf{P}, zT\mathbf{P}_1, \dots, (zT)^{n-1}\mathbf{P}_{n-1}) = T^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(R_{(0)}) = \left(\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s} \delta_s (zT)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^{-1} V_s.$$

Le lemme suivant nous assure que ce changement n'introduit qu'une constante multiplicative dépendant seulement de G dans la majoration recherchée.

Lemme 2.3

Soient $A = \sum_{k=0}^{\nu_A} \sum_{\ell=1}^{\mu_A} A_{k,\ell}(z) z^{\alpha_\ell} \log(z)^k \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]$, $B = \sum_{k=0}^{\nu_B} \sum_{\ell=1}^{\mu_B} B_{k,\ell}(z) z^{\beta_\ell} \log(z)^k \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\beta})[z]$, où $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}^{\mu_A}$ et $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}^{\mu_B}$ sont de coefficients deux à deux distincts. Notons $C = AB$, alors

$$\sigma(C) \leqslant 2(\nu_A + \nu_B + 1) \max(\mu_A, \mu_B)(\deg(A) + \deg(B) + 1)\sigma(A)\sigma(B).$$

Dans le cas où A et B sont des polynômes ordinaires, le résultat est déjà connu (cf [38, lemme 4 p. 32])

Démonstration. On se ramène au cas où $\boldsymbol{\alpha} \in [0,1[^{\mu_A}$, $\boldsymbol{\beta} \in [0,1[^{\mu_B}$ Comme on l'a vu dans la preuve du lemme 2.1 **b)**, on a

$$C = \sum_{k''=0}^{\nu_C} \sum_{\ell''=1}^{\mu_C} C_{k'',\ell''} z^{\gamma_{\ell''}} \log(z)^{k''},$$

avec pour tout k'', ℓ'', $C_{k'',\ell''} = \sum z^{\varepsilon_{k,k',\ell,\ell'}} A_{k,\ell} B_{k',\ell'}$, où la somme est sur les k, k', ℓ, ℓ' satisfaisant

$$k + k' = k'' \quad \text{et} \quad \varepsilon_{k,k',\ell,\ell'} := \gamma_{\ell''} - (\alpha_\ell + \beta_{\ell'}) \in \{0, 1\}. \tag{2.21}$$

Cette condition implique que la somme définissant $C_{k'',\ell''}$ contient au plus $k'' \times 2 \max(\mu_A, \mu_B) \leqslant 2(\nu_A + \nu_B + 1) \max(\mu_A, \mu_B)$ termes. Remarquons de plus que $\sigma(z^{\varepsilon_{k,k',\ell,\ell'}} A_{k,\ell} B_{k',\ell'}) = \sigma(A_{k,\ell} B_{k',\ell'})$. On a donc par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\sigma(C_{k'',\ell''}) &\leqslant 2(\nu_A + \nu_B + 1) \max(\mu_A, \mu_B) \max_{\substack{k \leqslant \nu_A, \ell \leqslant \mu_A \\ k' \leqslant \nu_B, \ell' \leqslant \mu_B}} \sigma(A_{k,\ell} B_{k',\ell'}) \\ &\leqslant 2(\nu_A + \nu_B + 1) \max(\mu_A, \mu_B) \sigma(A) \sigma(B) (\deg(A) + \deg(B) + 1)\end{aligned}$$

selon le cas polynomial (lemme 4.1 de la sous-section 4.2.2). Ceci conclut la démonstration. □

Soit $m \in \{0, \ldots, n-1\}$. Si $Q = \sum_{i=0}^{N} q_i z^i$, alors

$$\frac{Q^{(m)}}{m!} = \sum_{i=0}^{N-m} \frac{(i+1)\ldots(i+m)}{m!} q_{m+i} z^i = \sum_{i=0}^{N-m} \binom{m+i}{i} q_{m+i} z^i.$$

Il suit de la majoration

$$\binom{m+i}{i} = \binom{m+i}{m} \leqslant \binom{N}{m} \sim_{N \to +\infty} \frac{N^m}{m!}$$

que $\sigma\left(\frac{Q^{(m)}}{m!}\right) \leqslant \varepsilon_{1,N} \sigma(Q)$, où $\limsup_{N \to +\infty} \varepsilon_{1,N}^{1/N} = 1$ Selon le lemme 2.3 appliqué à $A = (zT)^m$ et $B = Q^{(m)}/m!$, pour N suffisamment grand,

$$\sigma\left((zT)^m \frac{Q^{(m)}}{m!}\right) \leqslant \varepsilon_{1,N} \sigma(Q) \sigma(T^m)(mt + N - m + 1) \leqslant \varepsilon_{2,N} \sigma(Q) \sigma((zT)^m), \tag{2.22}$$

où $\limsup_{N \to +\infty} \varepsilon_{2,N}^{1/N} = 1$. Toutes les suites $(\varepsilon_{j,N})$ introduites par la suite vérifieront $\limsup \varepsilon_{j,N}^{1/N} = 1$.

En appliquant m fois le lemme 2.3 on obtient, pour N suffisamment grand,

$$\sigma((zT)^m) \leqslant \varepsilon_{3,N} \sigma(zT) \sigma((zT)^{m-1}) \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_{4,N} \sigma(zT)^m.$$

Ceci combiné à l'inégalité (2.22) donne donc

$$\sigma\left((zT)^m \frac{Q^{(m)}}{m!}\right) \leqslant \varepsilon_{5,N} \sigma(Q) \sigma(zT)^m.$$

Soit θ_{N+M} le maximum des maisons des $N + M$ premiers coefficients du développement en série entière des $f_{i,k,\ell}$, et d_{N+M} leur dénominateur commun. En répétant le raisonnement de la preuve du lemme 2.3, on voit que la maison de la partie dans $\mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]$ tronquée à l'ordre $N + (t+1)m$ de $(zT)^m \frac{Q^{(m)}}{m!} (d_{N+M} f_i)$ est majorée par

$$\varepsilon_{6,N} \sigma(Q)(d_{N+M} \theta_{N+M})(N + (t+1)m + 1) \leqslant \varepsilon_{7,N} \sigma(Q) d_{N+M} \theta_{N+M}.$$

Or, si $N + M \geqslant N + (t+1)(n-1)$, selon (2.11), cette partie « polynomiale » est $(zT)^m \mathbf{P}_m$, donc avec une extension de la notation σ aux vecteurs colonnes,

$$\forall m \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad \sigma((zT)^m \mathbf{P}_m) \leqslant \varepsilon_{7,N} \sigma(Q) d_{N+M} \theta_{N+M}.$$

On a $\widetilde{V} = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\tau) \prod_{j=0}^{n-1} (zT)^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}$, où $\varepsilon(\tau) \in \{-1,1\}$ est la signature de τ, et pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, selon le lemme 2.2 appliqué à $A = \mathbf{P}_{\tau(0),0}$ et $B = \prod_{j=1}^{n-1} (zT)^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}$,

$$\sigma\left(\prod_{j=0}^{n-1} (zT)^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}\right) \leqslant \varepsilon_{8,N}\sigma(\mathbf{P}_{\tau(0),0})\sigma\left(\prod_{j=1}^{n-1} (zT)^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}\right) n(N+(t+1)(n-1)+1)$$

en utilisant (2.12). En itérant le procédé, on obtient une suite $(\varepsilon_{9,N})$telle que

$$\sigma\left(\prod_{j=0}^{n-1} (zT)^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}\right) \leqslant \varepsilon_{9,N}\sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n.$$

Donc par inégalité triangulaire

$$\sigma(\widetilde{V}) \leqslant \varepsilon_{10,N}\sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n,$$

si bien que, comme $V_s = \mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s}\delta_s^\nu (zT)^{\frac{n(n-1)}{2}} \widetilde{V}$,

$$\sigma(V_s) \leqslant \varepsilon_{11,N}\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2s}\delta_s^\nu \sigma(Q)^n d_{N+M}^n \theta_{N+M}^n.$$

D'où selon (2.20), pour tout $s \in \mathbb{N}$ tel que $s+n-1 \leqslant \dfrac{M}{t+1}$,

$$q_s \leqslant \sigma(V_s)^\Delta \leqslant \varepsilon_{8,N}\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2\Delta s}\delta_s^{\nu\Delta}\sigma(Q)^{n\Delta} d_{N+M}^{n\Delta}\theta_{N+M}^{n\Delta}. \tag{2.23}$$

Étape 7 : Conclusion à l'aide du lemme de Siegel.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$, supposé suffisamment grand. On choisit dorénavant N et M de la forme suivante :

$$N := 2n\mu(\nu+1)(t+1)(s+n-1) \quad \text{et} \quad M := \frac{N}{2n\mu(\nu+1)} = (t+1)(s+n-1) \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier, on a bien $\dfrac{M}{t+1} \geqslant s+n-1$. Alors l'équation

$$Q(d_{N+M}\mathbf{f}) - \mathbf{P} = O\big(z^{N+M}\big)$$

se traduit par un système linéaire donné par l'équation (2.7) de

$$\frac{n\mu(\nu+1)N}{2n\mu(\nu+1)} = \frac{N}{2}$$

équations à $N+1$ inconnues (les coefficients de Q). Selon la proposition 2.3, il existe une solution $Q \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ telle que

$$\sigma(Q) \leqslant c_1(c_1(N+1)\theta_{N+M})^{\frac{N/2}{N+1-N/2}} \leqslant \varepsilon_{8,N}\theta_{N+M},$$

où c_1 est une constante, car $N/2 \leqslant N+1-N/2$. Puisque les composantes de $\mathbf{f}$ sont des G-fonctions, on peut trouver des constantes c_2 et c_3 telles que $\theta_{N+M} \leqslant c_2^{(N+M)(1+o(1))}$ et $d_{N+M} \leqslant c_3^{(N+M)(1+o(1))}$.

Comme $M/(t+1) \geqslant s+n-1$, il découle de (2.23) que

$$q_s \leqslant \varepsilon_{9,N}\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2\Delta s}\delta_s^{\Delta\nu}\theta_{N+M}^{\Delta n} d_{N+M}^{\Delta n}\theta_{N+M}^{\Delta n} = \varepsilon_{9,N}\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2\Delta s}\delta_s^{\Delta\nu}\theta_{N+M}^{2\Delta n} d_{N+M}^{\Delta n}, \tag{2.24}$$

d'où

$$q_s \leqslant \varepsilon_{10,s}\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})^{2\Delta s}\delta_s^{\Delta\nu}c_2^{n\Delta(2n\mu(\nu+1)+1)(t+1)s)(1+o(1))}c_3^{2n\Delta(2n\mu(\nu+1)+1)+1)(t+1)s)(1+o(1))},$$

de sorte qu'on peut trouver une constante $c_4 > 0$ dépendant seulement de G telle que $\forall s \in \mathbb{N}^*, q_s \leqslant c_4^s$, ce qui prouve que G satisfait la condition de Galochkin.

Étape 8 : Nous allons donner une version quantitative du théorème 2.4.

Comme $\delta_s \leqslant e^{s(1+o(1))}$ en conséquence du théorème des nombres premiers, on a

$$\limsup \frac{1}{s}\log q_s \leqslant 2\Delta\log(\mathrm{den}(\boldsymbol{\alpha})) + \Delta\nu + 2n\Delta(2n\mu(\nu+1)+1)(t+1)(c_2+c_3)$$

et on peut prendre

$$c_2 = \limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\log\big(\mathrm{den}\left(f_{i,k,\ell,m},\ 0\leqslant m\leqslant N\right)\big) \leqslant \Delta\sigma_0(F),$$

où $F = (f_{i,k,\ell})_{i,k,\ell} \in \mathbb{K}[\![z]\!]^{n\mu(\nu+1)}$ et

$$c_3 = \limsup_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\max_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})}\max_{i,k,\ell}\log\left|\sigma(f_{i,k,\ell,N})\right|.$$

Ceci conclut la démonstration du théorème 2.4.

Remarque. L'hypothèse que $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^\mu$ est cruciale dans cette preuve. En effet, l'affirmation (2.15) dans l'étape 4 ne tient plus si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}\setminus\mathbb{Q}$.

De plus, par exemple, si $\alpha = \sqrt{2} \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$, l'opérateur minimal sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ de cette fonction est $L_0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \dfrac{\sqrt{2}}{z}$ qui n'est pas un G-opérateur selon le théorème d'André-Chudnovsky-Katz puisque son exposant en 0 est $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2.5 Un lemme de Shidlovskii pour les $\mathscr{S}$-approximants de Padé de type II

Dans l'étape 3 de la démonstration du théorème 2.4, nous avons utilisé une variante du lemme de Shidlovskii, et l'objet de cette partie est de le démontrer.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}^\mu$ et $\mathbf{f} = {}^t\big(f_1(z),\ldots,f_n(z)\big) \in \mathscr{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]^n$ une solution d'un système différentiel $\mathbf{y}' = G\mathbf{y}$, $G \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}(z))$. L'hypothèse que les séries formelles intervenant dans l'écriture des f_i en séries Nilsson-Gevrey sont des G-fonctions n'est ici pas nécessaire. On suppose de plus que *les composantes de* $\mathbf{f}$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$, ce qui est une hypothèse fondamentale dans la suite.

On note $T(z) \in \mathbb{K}[z]$ un dénominateur commun des coefficients de G et on définit t le maximum du degré de T et des degrés des coefficients de TG.

Soient $N, M \in \mathbb{N}$. On se donne $Q \in \mathbb{K}[z]$, $P_1,\ldots,P_n \in \mathscr{S}(\mathbb{K},\boldsymbol{\alpha})[z]$ des approximants de Padé $\mathscr{S}$ de type II de $\mathbf{f}$: $\deg(Q) \leqslant N$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\deg(P_i) \leqslant N$ et

$$Q\mathbf{f} - \mathbf{P} = O\big(z^{N+M}\big),$$

où $\mathbf{P} = {}^t(P_1,\ldots,P_n)$. Rappelons que $A = O\big(z^\ell\big)$ s'il existe une fonction $B \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$ telle que que $A = z^\ell B$.

Comme on l'a vu dans l'étape 1 de la section 2.4, on a alors pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$(zT)^m Q^{(m)}\mathbf{f} - (zT)^m(D-G)^m\mathbf{P} = O\big(z^{N+M}\big),$$

de sorte qu'en posant

$$Q_m = (zT)^m Q^{(m)} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_m = (zT)^m (D-G)^m \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{1,m} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n,m} \end{pmatrix},$$

$(Q_m, \mathbf{P}_{1,m}, \dots, \mathbf{P}_{n,m})$ est un système de $\mathscr{S}$-approximants de Padé de type II de $\mathbf{f}$.

On pose par convention $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$. On s'intéresse à la matrice $R_{(0)} \in \mathscr{M}_n(\mathscr{S}(\mathbb{K})[z])$ de j-ième colonne $\mathbf{P}_{j-1}$, et à son déterminant $\Delta(z) = \det(R_{(0)}) \in \mathscr{S}(\mathbb{K})[z]$. Le théorème suivant, qui est un point crucial de la démonstration du théorème 2.4, est un analogue d'un « lemme de Shidlovskii » prouvé dans [17, pp. 42–43], avec une correction issue de [4, pp. 115–119].

Théorème 2.5

Le déterminant $\Delta(z)$ n'est pas identiquement nul si M est assez grand.

Le reste de la section consiste à démontrer ce théorème. On commence par quelques lemmes techniques.

2.5.1 Lemmes techniques

La preuve du théorème 2.5 repose sur l'obtention de bornes inférieure et supérieure sur l'*ordre d'annulation* de $\Delta(z)$. On définit cette notion, ainsi que celle de degré total d'un élément de $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$, de la manière suivante :

Définition 2.5

- *L'*ordre d'annulation *de $h \in \mathscr{S}(\mathbb{K})[\![z]\!] \setminus \{0\}$ est la borne supérieure de l'ensemble des $m \in \mathbb{R}$ tel que $h = O(z^m)$. On le note* $\operatorname{ord}(h)$. *On pose* $\operatorname{ord}(0) = +\infty$.
- *Le* degré total *de $F \in \mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ est*

$$\deg_t(F) = \min\left\{\deg(P) + \deg(Q), F = \frac{P}{Q}, P \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[z], Q \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[z] \setminus \{0\}\right\}.$$

Remarque. Concrètement, si $h = \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} z^{\alpha_\ell} \log(z)^k z^{j_{k,\ell}} h_{k,\ell} \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$, où les α_ℓ sont deux à deux non congrus modulo $\mathbb{Z}$, $j_{k,\ell} \in \mathbb{N}$ et $h_{k,\ell}(0) \neq 0$, l'ordre d'annulation de h est le minimum des $\alpha_\ell + j_{k,\ell}$, quand $0 \leqslant k \leqslant \nu$ et $1 \leqslant \ell \leqslant \mu$. En particulier, la borne supérieure définissant l'ordre d'annulation de h est atteinte. On remarque que comme les α_ℓ sont deux à deux non congrus modulo $\mathbb{Z}$, tous les $\alpha_\ell + j_{\ell,k}$ sont distincts.

Proposition 2.4

a) *La fonction* ord *définit une valuation sur l'anneau $\mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$. On peut donc étendre la fonction* ord *à* $\operatorname{Frac}(\mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$ *en posant* $\operatorname{ord}(f/g) = \operatorname{ord}(f) - \operatorname{ord}(g)$.

b) *Soient $H, I \in \mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$. Alors*

$$\deg_t(HI) \leqslant \deg_t(H) + \deg_t(I) + 2 \quad \textit{et} \quad \deg_t(H+I) \leqslant 2(\deg_t(H) + \deg_t(I)) + 3.$$

Démonstration. **a)** La remarque ci-dessus nous assure que toute série $\mathscr{S}$ non nulle possède un ordre d'annulation finie et donc $\operatorname{ord}(f) = +\infty \Leftrightarrow f = 0$

Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{K})[\![z]\!]$. On note $m_i = \operatorname{ord}(f_i)$.
En notant $m = \min(m_1, m_2)$, on a $f_1 = z^m \widetilde{f_1}$ et $f_2 = z^m \widetilde{f_2}$, où $\widetilde{f_i} \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$. Donc $f_1 + f_2 = z^m(\widetilde{f_1} + \widetilde{f_2})$ et donc

$$\operatorname{ord}(f_1 + f_2) \geqslant \min(\operatorname{ord}(f_1), \operatorname{ord}(f_2)). \tag{2.25}$$

De plus, si $f_1 = z^{m_1}\widetilde{f}_1$ et $f_2 = z^{m_2}\widetilde{f}_2$, où $\widetilde{f}_i \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$, on a $f_1 f_2 = z^{m_1+m_2}\widetilde{f}_1\widetilde{f}_2$ donc

$$\operatorname{ord}(f_1 f_2) \geqslant \operatorname{ord}(f_1) + \operatorname{ord}(f_2). \tag{2.26}$$

Écrivons à présent $f_i = z^{m_i}\log(z)^{k_i} g_i(z) + \widetilde{f}_i(z)$, où $g_i(0) \neq 0$ et $\operatorname{ord}(\widetilde{f}_i) > m_i$. Alors on a

$$f_1(z) f_2(z) = z^{m_1+m_2}\log(z)^{k_1 k_2} g_1(z) g_2(z) + h(z),$$

où $(g_1 g_2)(0) \neq 0$ et

$$h(z) = z^{m_1}\log(z)^{k_i} g_1(z)\widetilde{f}_2(z) + z^{m_2}\log(z)^{k_2} g_2(z)\widetilde{f}_1(z) + \widetilde{f}_1(z)\widetilde{f}_2(z)$$

est d'ordre strictement supérieur à $m_1 + m_2$ selon (2.25) et (2.26). Donc selon la remarque précédente, $f_1(z) f_2(z)$ est d'ordre d'annulation exactement $\operatorname{ord}(f_1) + \operatorname{ord}(f_2)$, ce qui conclut la preuve de **a)**.

b) Écrivons $H = \dfrac{H_1}{H_2}$ et $I = \dfrac{I_1}{I_2}$ avec $\deg_t(H) = \deg(H_1) + \deg(H_2)$ et $\deg_t(I) = \deg(I_1) + \deg(I_2)$. Alors

$$\deg_t(HI) \leqslant \deg(H_1 I_1) + \deg(H_2 I_2) \leqslant \deg(H_1) + \deg(I_1) + 1 + \deg(H_2) + \deg(I_1) + 1$$

selon le lemme 2.1 **b)**. Par ailleurs, $H + I = \dfrac{H_1 I_2 + H_2 I_1}{H_2 I_2}$ donc

$$\begin{aligned}\deg_t(H+I) &\leqslant \deg(H_1 I_2 + H_2 I_1) + \deg(H_2 I_2)\\ &\leqslant \deg(H_1) + \deg(I_2) + 1 + \deg(H_2) + \deg(I_1) + 1 + \deg(H_2) + \deg(I_2) + 1\\ &\leqslant 2(\deg_t(H) + \deg_t(I)) + 3.\end{aligned}$$

□

Remarque. On a $\operatorname{Frac}(\mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]) = \operatorname{Frac}(\mathscr{S}(\mathbb{K})[\![z]\!])$ puisque toute série $f \in \mathscr{S}(\mathbb{K})[\![z]\!]$ s'écrit comme $f = z^c g$, $c \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$. De même, on voit que $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z] = \operatorname{Frac}(\mathscr{S}_0(\mathbb{K})[z])$.

On aura besoin dans la démonstration du théorème 2.5 de deux lemmes techniques, les lemmes 2.4 et 2.6 ci-dessous. Le premier est une adaptation d'un lemme de Baker [9, pp. 112–113]. Sa preuve est *mutatis mutandis* la même que dans le cas classique, mais nous la donnons ici par souci de complétude.

Lemme 2.4

Soient $G \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}(z))$ et $\mathbf{P} \in \mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]^n$, on définit $\widetilde{\mathbf{P}}_m = (D-G)^m\mathbf{P}$. Notons ℓ le rang sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ de la famille $(\mathbf{P}, \widetilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{P}}_{n-1})$. Alors $\widetilde{F} = (\widetilde{\mathbf{P}}, \widetilde{\mathbf{P}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{P}}_{\ell-1}) \in \mathscr{M}_{n,\ell}(\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z])$ est de rang ℓ. Quitte à renuméroter les composantes de $\mathbf{P}$, on peut supposer que la matrice $\widetilde{R} \in \mathscr{M}_\ell(\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z])$ formée des ℓ premières lignes de F est inversible. On note $\widetilde{S}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n-\ell,\ell}(\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z])$ formée des $n-\ell$ dernières lignes de $\widetilde{F}$.

Alors les coefficients de $\widetilde{S}\widetilde{R}^{-1}$ sont des éléments de $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ de degrés totaux bornés par une constante c_0 ne dépendant que de G.

Le lemme suivant, adapté de [49, p. 86], sera utilisé dans la démonstration du lemme 2.4.

Lemme 2.5

Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_s$, $\psi_1, \dots, \psi_m$ des éléments de $\mathbb{L}$ tels que les ψ_i ne sont pas tous nuls. Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{K}^s$ et $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{K}^m$ tels que $\sum_{i=1}^{m} \beta_i\psi_i \neq 0$,

$$\omega = \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \varphi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_i \psi_i\right)^{-1} \in \mathscr{RS}(\mathbb{K})[z] \Longrightarrow \deg_t(\omega) \leqslant N_0.$$

Démonstration. Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ comme dans l'énoncé du lemme. Soit r le rang sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_s, \psi_1, \ldots, \psi_m\}$. On choisit r fonctions extraites de cette famille $(g_1, \ldots, g_r)$ formant une famille libre sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$.

Notons pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}, \varphi_i = \sum_{j=1}^{r} A_{ij} g_j, A_{ij} \in \mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$, et pour $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\psi_i = \sum_{j=1}^{r} B_{ij} g_j$, $B_{ij} \in \mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$. Notons N le maximum des degrés totaux des A_{ij} et des B_{ij}. C'est un nombre qui dépend uniquement des φ_i et des ψ_i. On a donc

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i A_{ij} g_j}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \beta_i B_{ij} g_j} = \frac{\sum_{j=1}^{r} C_j g_j}{\sum_{j=1}^{r} D_j g_j},$$

où $C_j = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_{ij}$, $D_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_i B_{ij}$.

Par hypothèse, $\sum_{j=1}^{r} D_j g_j$ n'est pas nulle donc comme $(g_1, \ldots, g_r)$ est libre sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$, il existe $j_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $D_{j_0} \neq 0$.

De plus, $\omega \in \mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ et $\sum_{j=1}^{r} (D_j \omega - C_j) g_j = 0$, si bien que $\forall j \in \{1, \ldots, r\}, D_j \omega - C_j = 0$. En prenant $j = j_0$, on obtient $\omega = \dfrac{C_{j_0}}{D_{j_0}}$. On déduit de la proposition 2.4 **b)** que

$$\deg_t(C_{j_0}) \leqslant 2sN + 3s \quad \text{et} \quad \deg_t(D_{j_0}) \leqslant 2mN + 3m,$$

donc $\deg_t(\omega) \leqslant 2(s+m)(N+3)$ est borné par une constante ne dépendant que des φ_i et des ψ_i. □

Démonstration du lemme 2.4. Commençons par justifier que F est de rang ℓ en montrant que $(\mathbf{P}, \widetilde{\mathbf{P}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{P}}_{\ell-1})$ est libre sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$. En effet, supposons le contraire et fixons $k \in \{1, \ldots, \ell-1\}$ tel que $\widetilde{\mathbf{P}}_k \in \mathrm{Vect}_{\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]}(\mathbf{P}, \widetilde{\mathbf{P}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{P}}_{k-1})$. Alors on montre par récurrence, en utilisant la relation $\widetilde{\mathbf{P}}_m = (D-G)^m \mathbf{P}$, que $\widetilde{\mathbf{P}}_{k+s} \in \mathrm{Vect}_{\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]}(\mathbf{P}, \widetilde{\mathbf{P}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{P}}_{k-1})$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, de sorte que le rang de $(\mathbf{P}, \widetilde{\mathbf{P}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{P}}_{n-1})$ est strictement inférieur à ℓ, ce qui est absurde.

On considère à présent le système, dont l'inconnue est un vecteur ligne y,

$$y' = y(-{}^tG). \tag{2.27}$$

On peut trouver une matrice $Q \in \mathscr{M}_\ell(\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z])$ telle que si $y = (y_1, \ldots, y_n)$ est solution de (2.27), alors le vecteur ligne $Y = y\widetilde{F}$ vérifie $Y' = YQ$. En effet, notons $G = (g_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Alors, si $Y = (Y_1, \ldots, Y_\ell)$, on a, pour $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$,

$$Y_j' = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i' \widetilde{\mathbf{P}}_{i,j-1}\right)' = \sum_{i=1}^{n} y_i' \widetilde{\mathbf{P}}_{i,j-1} + y_i \widetilde{\mathbf{P}}'_{i,j-1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-a_{ki}) y_k \widetilde{\mathbf{P}}_{i,j-1} + y_i \widetilde{\mathbf{P}}'_{i,j-1}.$$

Or, $\widetilde{\mathbf{P}}_j = \widetilde{\mathbf{P}}'_{j-1} - G\widetilde{\mathbf{P}}_{j-1}$ donc

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \widetilde{\mathbf{P}}'_{i,j-1} = \widetilde{\mathbf{P}}_{i,j} + \sum_{k=1}^{n} g_{ik} \widetilde{\mathbf{P}}_{k,j-1},$$

de sorte que

$$Y_j' = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_{ki} y_k \widetilde{\mathbf{P}}_{i,j-1} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_{ik} \widetilde{\mathbf{P}}_{k,j-1} y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \widetilde{\mathbf{P}}_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} y_i \widetilde{\mathbf{P}}_{i,j} = Y_{j+1}.$$

Le même calcul nous donne $Y_\ell' = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \widetilde{\mathbf{P}}_{i,\ell}$ donc comme $\widetilde{\mathbf{P}}_\ell \in \mathrm{Vect}_{\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]}(\mathbf{P}, \widetilde{\mathbf{P}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{P}}_{\ell-1})$, Y_ℓ' est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ (ne dépendant pas de y) des $Y_j, 1 \leqslant j \leqslant \ell$ [1].

Soit $\mathbb{L}$ une extension de Picard-Vessiot de $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ telle que le système (2.27) a une base de solutions $(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{L}^n$ sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$. Par les propriétés du wronskien, c'est également une base sur $\mathbb{K}$ de ce système (voir [52, pp. 7–9]). On introduit la matrice wronskienne associée

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{L}).$$

Donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la $i^{\text{ième}}$ ligne $Y_i = w_i \widetilde{F}$ de $W\widetilde{F}$ vérifie $Y_i' = Y_i Q$. Or, le système $Y' = YQ$ n'a que ℓ solutions linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}$. Par suite, en effectuant des opérations à coefficients dans $\mathbb{K}$ sur les lignes et les colonnes de WQ, on obtient une matrice $M \in \mathscr{M}_{n-\ell,n}(\mathbb{K})$ de rang $n-\ell$ telle que $MWQ = 0$.

On note U la matrice formée des ℓ premières colonnes de MW et V la matrice composée des $n-\ell$ dernières colonnes de MW. En écrivant le produit de matrices par blocs, on constate que $U\widetilde{R} + V\widetilde{S} = 0$, de sorte que $U = -V\widetilde{S}\widetilde{R}^{-1}$. Donc $M = (-V\widetilde{S}\widetilde{R}^{-1} \quad V)$. Si $u = {}^t(u_1, \ldots, u_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z])$, alors

$$Mu = V\left((-\widetilde{S}\widetilde{R}^{-1})\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_\ell \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{\ell+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{Im}(V).$$

Donc le rang sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ de M est inférieur au rang de V. Or, $M \in \mathscr{M}_{n-\ell,n}(\mathbb{K})$ est de rang $n-\ell$ sur $\mathbb{K}$ donc également sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$, donc V est de rang $n-\ell$, car $V \in \mathscr{M}_{n-\ell}(\mathbb{L})$, et V est donc inversible. De plus, $\widetilde{S}\widetilde{R}^{-1} = -V^{-1}U$.

Mais si $W = (w_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors on voit avec la formule $V^{-1} = \dfrac{1}{\det V}(\mathrm{com}(V))^T$ (formule de la comatrice) que les coefficients de $V^{-1}U$ sont des fractions rationnelles en les $(w_{i,j})$ de degré total borné par une constante qui ne dépend que de n. De plus, comme $\widetilde{S}\widetilde{R}^{-1} \in \mathscr{M}_{n-\ell,\ell}(\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z])$, ces coefficients sont également des éléments de $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$.

Finalement, le lemme 2.5 nous fournit une borne supérieure $N_0 > 0$ ne dépendant que de W (donc *in fine* de G) sur les degrés totaux des coefficients de $V^{-1}U$, donc sur ceux des coefficients de $\widetilde{S}\widetilde{R}^{-1}$. □

Le résultat suivant est un analogue pour les séries $\mathscr{S}$ d'un lemme provenant de [49, p. 85].

Lemme 2.6

Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^\mu$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$ tous non nuls et $R_1, \ldots, R_n \in \mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ de degrés totaux bornés par $c > 0$. Alors $R \cdot f = \sum\limits_{i=1}^{n} R_i f_i$ a un ordre d'annulation au plus $d > 0$, où d est une constante dépendant uniquement des f_i, de $\boldsymbol{\alpha}$ et de c.

1. On peut en réalité montrer que Y_ℓ' est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}(z)$ des Y_j.

Démonstration. **Étape 1** : réduction au cas où $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, R_i \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[z]$.

Écrivons, pour tout i, $R_i = \dfrac{P_i}{Q_i}$, où $\deg(P_i) + \deg(Q_i) = \deg_t(R_i) \leqslant c$. Alors

$$R \cdot f = \frac{1}{Q_1 \dots Q_n} \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} Q_j \right) P_i f_i$$

et pour tout i, selon le lemme 2.1 **b)**,

$$\deg \left(\prod_{j \neq i} Q_j \right) P_i \leqslant \sum_{j \neq i} \deg(Q_j) + \deg(P) + n \leqslant (n-1)c + n - 1 + c = (n+1)c.$$

De plus, comme ord est une valuation sur $\mathrm{Frac}(\mathscr{S}(\mathbb{K})[\![z]\!])$,

$$\mathrm{ord}\,(R \cdot f) = \mathrm{ord}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} Q_j \right) P_i f_i \right) - \mathrm{ord}\,(Q_1 \dots Q_n) \leqslant \mathrm{ord}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} Q_j \right) f_i \right).$$

On peut donc se ramener au cas où $\forall i \in \{1, \dots, n\}, R_i \in \mathscr{S}(\mathbb{K})[z]$.

Étape 2 : réduction au cas où $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, R_i \in \mathbb{K}[z]$

Écrivons $R_i = \sum\limits_{\ell=1}^{\mu} \sum\limits_{k=0}^{\nu} R_{i,k,\ell}(z) z^{\alpha_\ell} \log(z)^k$, avec $R_{i,k,\ell}(z) \in \mathbb{K}[z]$. Alors

$$R \cdot f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} R_{i,k,\ell} z^{\alpha_\ell} \log(z)^k f_i(z) = \sum_{i,k,\ell} R_{i,k,\ell} g_{i,k,\ell},$$

où les $g_{i,k,\ell}(z) = z^{\alpha_\ell} \log(z)^k f_i(z) \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$ sont tous non nuls, car les f_i le sont.

Étape 3 : réduction au cas où $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, R_i \in \mathbb{K}$.

On écrit donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, R_i = \sum\limits_{j=0}^{c} r_{j,i} z^j$ avec $r_{j,i} \in \mathbb{K}$.

Donc $R \cdot f = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=0}^{c} r_{j,i} z^j f_i = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant c}} r_{j,i} g_{i,j}$, où $g_{i,j}(z) = z^j f_i(z) \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$. On remarque que les $g_{i,j}$ sont tous non nuls, car les f_i le sont.

Étape 4 : traitons le cas où, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $R_i \in \mathbb{K}$. Introduisons $\mathscr{E}$ l'ensemble des $R \in \mathbb{K}^n$ tel que $R \cdot f$ n'est pas identiquement nul. Remarquons que si $g_1, \dots, g_s \in \mathscr{S}(\mathbb{K}, \boldsymbol{\alpha})[\![z]\!]$ ont des ordres d'annulation en 0 deux à deux distincts, alors $(g_1, \dots, g_s)$ est libre sur $\mathbb{K}$.

En effet, supposons que $\mathrm{ord}\,(g_1) = m_1 < \mathrm{ord}\,(g_2) = m_2 < \dots < \mathrm{ord}\,(g_s) = m_s$ et prenons $(u_1, \dots, u_s) \in \mathbb{K}^s$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{s} u_i g_i = 0$. Supposons sans perte de généralité que $u_1 \neq 0$. Alors, comme ord est une valuation sur $\mathscr{S}(\mathbb{K})[\![z]\!]$,

$$g_1 = -\sum_{i=2}^{s} \frac{u_i}{u_1} g_i$$

est d'ordre au moins $\min\limits_{i \geqslant 2, u_i \neq 0} \mathrm{ord}\,(g_i) \geqslant m_2$ ce qui est absurde. Donc $u_1 = 0$.

En itérant le procédé, on obtient $u_1 = \dots = u_s = 0$, donc $(g_1, \dots, g_s)$ est libre sur $\mathbb{K}$.

Notons ν le maximum des $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{E}$ contient k éléments d'ordre deux à deux distincts. Selon ce qui précède, $\nu \leqslant \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$. Soient $R_1 \cdot f, \dots, R_\nu \cdot f \in \mathscr{E}$ d'ordres deux à deux distincts.

Si $R \in \mathscr{E}$, $(R \cdot f, R_1 \cdot f, \dots, R_\nu \cdot f)$ est une famille à $\nu + 1$ éléments donc elle contient au moins deux éléments d'ordre égal. D'où $\mathrm{ord}\,(R \cdot f) \in \left\{ \mathrm{ord}\,(R_i \cdot f), 1 \leqslant i \leqslant \nu \right\}$. $\square$

2.5.2 Démonstration du théorème 2.5

Cette partie est consacrée à la preuve du théorème 2.5. Elle est très similaire à la démonstration du lemme de Shidlovskii pour les approximants de Padé de type II ordinaires, mais nous donnons une preuve complète par souci de complétude.

Supposons que $\Delta(z)$ est identiquement nul. Notons ℓ le rang sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ de la famille $(\mathbf{P},\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_{n-1})$.

Notons $F=(\mathbf{P},\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_{\ell-1})\in\mathscr{M}_{n,\ell}(\mathscr{S}_0(\mathbb{K})[z])$. Alors en reprenant les notations du lemme 2.4, on a $\mathbf{P}_m=(zT)^m\widetilde{\mathbf{P}}_m$, de sorte que si $D=\mathrm{Diag}(1,zT,\ldots,(zT)^{\ell-1})$, on a $F=\widetilde{F}D$, donc comme $\widetilde{F}$ est de rang ℓ, il en va de même de F. Quitte à renuméroter les composantes de $\mathbf{f}$, on peut supposer que la matrice $R\in\mathscr{M}_\ell(\mathscr{S}_0(\mathbb{K})[z])$ formée des ℓ premières lignes de F est inversible. On note $S\in\mathscr{M}_{n-\ell,\ell}(\mathscr{S}_0(\mathbb{K})[z])$ la matrice formée des $n-\ell$ dernières lignes de F.

Le lemme 2.4 ci-dessous nous assure que les degrés totaux des coefficients de SR^{-1} sont bornés par une constante $c_0>0$ qui ne dépend que de G. En effet, toujours avec les notations du lemme 2.4, on a $R=\widetilde{R}D$ et $S=\widetilde{S}D$ donc $SR^{-1}=\widetilde{S}\widetilde{R}^{-1}$.

Considérons

$$H=\begin{pmatrix} f_n(z) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -f_1(z)\\ f_2(z) & -f_1(z) & \ldots & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & (0) & \\ f_\ell(z) & 0 & \ldots & -f_1(z) & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}.$$

On note $H_0\in\mathscr{M}_\ell(\mathscr{S}(\mathbb{K})[\![z]\!])$ la matrice composée des ℓ premières colonnes de H et $H_1\in\mathscr{M}_{\ell,n-\ell}(\mathscr{S}(\mathbb{K})[\![z]\!])$ la matrice formée des $n-\ell$ dernières colonnes de H. Notons $U=HF$. On a

$$\forall(i,j)\in\{1,\ldots,\ell\}^2,\quad U_{ij}=\begin{cases}\mathbf{P}_{1,j-1}f_n(z)-\mathbf{P}_{n,j-1}f_1(z) & \text{si } i=1\\ \mathbf{P}_{1,j-1}f_i(z)-\mathbf{P}_{i,j-1}f_1(z) & \text{si } i\geqslant 2.\end{cases}$$

Un calcul de matrices par blocs nous montre que $U=H_0R+H_1S$, soit $UR^{-1}=H_0+H_1SR^{-1}$.

Notons $B=SR^{-1}=(B_{i,j})_{i,j}\in\mathscr{M}_{n-\ell,\ell}(\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z])$. On a

$$H_1B=(-f_1(z)B_{n-\ell,1},\ldots,-f_1(z)B_{n-\ell,\ell})=(-b_1f_1(z),\ldots,-b_\ell f_1(z)),$$

avec $b_i=B_{n-\ell,i}\in\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ de degré total borné par c_0. Donc

$$UR^{-1}=\begin{pmatrix} f_n(z)-b_1f_1(z) & -b_2f_1(z) & \ldots & -b_\ell f_1(z)\\ f_2(z) & -f_1(z) & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_\ell(z) & 0 & \ldots & -f_1(z)\end{pmatrix}.$$

Par suite, en effectuant les opérations sur les lignes $L_1\leftarrow L_1-b_iL_i$ pour $i\in\{2,\ldots,\ell\}$, on obtient

$$\begin{aligned}\det(UR^{-1})&=\begin{vmatrix} f_n(z)-\sum_{i=1}^{\ell}b_1f_i(z) & 0 & \ldots & 0\\ f_2(z) & -f_1(z) & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f_\ell(z) & 0 & \ldots & -f_1(z)\end{vmatrix}\\ &=\left(f_n(z)-\sum_{i=1}^{\ell}b_if_i(z)\right)\times\det(-f_1(z)I_{\ell-1}) \qquad (2.28)\end{aligned}$$

en développant selon la première colonne. Donc

$$\det(UR^{-1}) = \left(f_n(z) - \sum_{i=1}^{\ell} b_i f_i(z)\right) \times (-f_1(z))^{\ell-1} \neq 0,$$

car $(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ est supposée libre sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ [2].

Pour aboutir à une contradiction, on va minorer puis majorer l'ordre d'annulation de $\det(UR^{-1})$. D'abord, si $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ et $i \in \{2, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{cases} Q_{j-1} f_1(z) - \mathbf{P}_{1,j-1} & = O\left(z^{N+M}\right) \\ Q_{j-1} f_i(z) - \mathbf{P}_{i,j-1} & = O\left(z^{N+M}\right). \end{cases}$$

Donc en multipliant la première ligne par $f_i(z) \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$, la deuxième par $-f_1(z) \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[\![z]\!]$ et en les additionnant, on obtient que

$$\mathbf{P}_{i,j-1} f_1(z) - \mathbf{P}_{1,j-1} f_i(z) = O\left(z^{N+M}\right).$$

Or, $\det(U)$ est une somme de produits de ℓ termes de cette forme, donc

$$\det(U) = O\left(z^{\ell(N+M)}\right).$$

Mais comme on l'a montré dans l'étape 4 de la section 2.4, si $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, les composantes de $\mathbf{P}_{j-1}$ sont de degrés inférieurs à $N + (t+1)(j-1) \leqslant N + (t+1)(\ell-1)$. Donc les coefficients de la matrice R sont de degrés inférieurs à $N + (t+1)(\ell-1)$. Ainsi, $\det R \in \mathscr{S}_0(\mathbb{K})[z]$ a un degré inférieur à $\ell(N + (t+1)(\ell-1))$, de sorte que $\det(UR^{-1}) = \det U (\det R)^{-1}$ a un ordre d'annulation en 0 au moins

$$\ell(N+M) - \ell(N + (t+1)(\ell-1)) = \ell[M - (t+1)(\ell-1)] \geqslant M - (t+1)(\ell-1),$$

car $\ell \geqslant 1$. D'autre part, comme $b_1, \ldots, b_\ell \in \mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ sont de degrés totaux bornés par c_0, le lemme 2.6 ci-dessous nous assure, puisque les $f_i(z)$ sont tous non nuls, que l'ordre d'annulation en 0 de $f_n(z) - \sum_{i=1}^{\ell} b_i f_i(z)$, donc de $\det(UR^{-1})$ selon (2.28), est borné par une constante $c_1 > 0$ dépendant uniquement du système $\mathbf{y}' = G\mathbf{y}$ et de $\mathbf{f}$.

Par conséquent, si $M - (t+1)(\ell-1) > c_1$, on aboutit à une contradiction. Donc $\Delta(z) \neq 0$, ce qui conclut la preuve.

2. La démonstration jusqu'ici suit pas à pas celle de Chudnovsky [17, pp. 42–43]. Il aurait été souhaitable que les b_i soient dans $\mathbb{K}(z)$ afin d'utiliser une hypothèse plus faible de liberté de $(f_1, \ldots, f_n)$ sur $\mathbb{K}(z)$, mais la preuve de Shidlovskii ne permet pas cela.

Chapitre 3

Sur l'indépendance linéaire des valeurs des G-fonctions

Ce chapitre correspond à l'article [36].

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, notre but est d'étudier le problème suivant, mentionné dans l'introduction, qui a d'abord été considéré dans un cas particulier (*i.e.*, $\beta = 0$) par Fischler et Rivoal [24], impliquant des G-fonctions et des G-opérateurs.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \in \mathbb{K}[[z]]$ une G-fonction non polynomiale. Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}[z, \mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ un opérateur tel que $L(F(z)) = 0$ et d'ordre minimal μ.

Prenons un paramètre $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$, qui restera fixé dans le reste de ce chapitre. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{N}$, on définit les G-fonctions

$$F_{\beta,n}^{[s]}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{(k+\beta+n)^s} z^{k+n}.$$

Elles sont liées à des primitives itérées de $F(z)$. Le but de chapitre est de trouver des bornes supérieures et inférieures sur la dimension de

$$\Phi_{\alpha,\beta,S} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\left(F_{\beta,n}^{[s]}(\alpha),\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant s \leqslant S\right),$$

quand S est un entier suffisamment grand et $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < R$, où R est le rayon de convergence de F. Notons qu'il n'est pas évident que $\Phi_{\alpha,\beta,S}$ est de dimension finie. Précisément, on veut prouver le théorème suivant :

Théorème 3.1

Supposons que F n'est pas un polynôme. Alors pour S suffisamment grand, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1+o(1)}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]C(F,\beta)} \log(S) \leqslant \dim_{\mathbb{K}} \Phi_{\alpha,\beta,S} \leqslant \ell_0(\beta)S + \mu.$$

Ici, si $\delta = \deg_z(L)$ et ω est l'ordre de 0 en tant que singularité de L, $\ell_0(\beta)$ est défini comme le maximum de $\ell := \delta - \omega$ et des nombres $f - \beta$, quand f est un exposant de L en l'infini tel que $f - \beta \in \mathbb{N}$, et $C(F,\beta)$ est une constante strictement positive dépendant de F et β, et pas de α.

Si $F(z) \in \mathbb{K}[z]$, alors $F_{\beta,n}^{[s]}(z) \in \mathbb{K}[z]$ également et $\Phi_{\alpha,\beta,S} \subset \mathbb{K}$.

Dans [24], Fischler et Rivoal ont prouvé ce théorème avec $\beta = 0$. Leur but était de généraliser des résultats antérieurs de Rivoal ([45], pour $\alpha \in \mathbb{Q}$) et Marcovecchio [40] sur la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par $\mathrm{Li}_s(\alpha)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $0 < |\alpha| < 1$, où $\mathrm{Li}_s(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ est la fonction polylogarithme d'ordre s. En effet, si l'on pose $A_k = 1$ pour tout entier naturel k, la famille de fonctions $\left(F_{0,n}^{[s]}(z)\right)_{n,s}$ est la famille des polylogarithmes $\mathrm{Li}_s(z)$ à un terme additif polynomial près. En utilisant une méthode différente, fondée sur une généralisation du lemme de Shidlovskii, Fischler et Rivoal ont prouvé ensuite dans [25] que le théorème 3.1 était aussi vrai pour $\beta = 0$ et α dans un ouvert étoilé en 0 dans lequel le disque de convergence de F est strictement contenu. Nous ne savons pas si ceci vaut également pour tout rationnel β, et cela semble être un problème difficile.

Nous allons adapter leur approche de [24] au cas plus général qui nous intéresse. Dans une première partie, nous nous appuyons sur les propriétés de G-fonction de F pour trouver une relation de récurrence entre les fonctions $F_{\beta,n}^{[s]}(z)$, ce qui démontrera la borne supérieure dans le théorème 3.1. Dans une deuxième partie, nous étudierons le comportement asymptotique quand $n \to +\infty$ d'une série $T_{S,r,n}(z)$, qui est une forme linéaire en les $F_{\beta,n}^{[s]}(z)$, de façon à utiliser un critère d'indépendance linéaire à la Nesterenko dû à Fischler et Rivoal, menant à la preuve de la borne inférieure du théorème 3.1. L'outil clé pour cela sera la méthode du point col.

Dans la section 3.4, nous donnerons une expression explicite originale de la constante $C(F,\beta)$. A cette fin, nous rappelons dans la section 3.3 des résultats de Dwork [21], André [4] et du chapitre 1 sur la notion de taille d'un G-opérateur, qui encode une condition de croissance modérée sur certains dénominateurs, la *condition de Galochkin* (voir définition 0.2). En particulier, une version explicite du théorème de Chudnovsky donne une relation entre la taille d'une G-fonction, encodant les conditions **b)** et **c)** de la définition 0.1 et la taille de son opérateur minimal.

Après simplification, l'estimation de $C(F,\beta)$ que nous obtenons dépend finalement de β (en fait, de son dénominateur), d'invariants arithmétiques et analytiques de l'opérateur minimal L de F et de la taille de F elle-même.

Afin de calculer $C(F,\beta)$, il est possible et plus pratique de réécrire L sous la forme

$$L = \frac{z^{\omega-\mu}}{u} \sum_{j=0}^{\ell} z^j Q_j(\theta + j), \quad \theta = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, \tag{3.1}$$

avec $\omega \in \mathbb{N}^*$, $Q_j(X) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ et $u \in \mathbb{N}^*$. On note que si $\ell = 0$, alors les seules séries entières solutions de $L(y(z)) = 0$ sont des polynômes (voir la remarque après (3.27), section 3.4).

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.2

Supposons que F n'est pas un polynôme. On note $\mathscr{D}$ le dénominateur de β. Alors l'entier ℓ défini dans (3.1) *plus haut est* $\geqslant 1$ *et une constante $C(F,\beta)$ qui convient dans le théorème 3.1 est*

$$C(F,\beta) = \log(2eC_1(F)C_2(F,\beta)), \tag{3.2}$$

avec

$$C_1(F) := \max\left(1, \lceil \gamma_0/\gamma_\ell \rceil, \Phi_0(L)^{\max(1,\ell-1)}\right) \tag{3.3}$$

et

$$C_2(F,\beta) := \mathrm{den}\left(1/\gamma_0\right)^3 \mathrm{den}(\mathbf{e},\beta)^{6\mu} \exp\left(3\max(1,\ell-1)[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\Lambda_0(L,\beta) + 3(\mu+1)\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)\right), \tag{3.4}$$

où les polynômes $Q_0(X) = \gamma_0 \prod_{i=1}^{\mu}(X - e_i)$ et $Q_\ell(X) = \gamma_\ell \prod_{i=1}^{\mu}(X + f_i - \ell)$ sont définis dans (3.1).

Les nombres e_i (resp. f_j) sont congrus modulo $\mathbb{Z}$ aux exposants de L en 0 (resp. ∞) et sont donc des nombres rationnels par le théorème de Katz [21, p. 98], puisque L est un opérateur d'ordre minimal annulant la G-fonction F. Les nombres $\Lambda_0(L,\beta)$ et $\Phi_0(L)$ seront définis respectivement dans les formules (3.36) et (3.42) de la section 3.4. Ce théorème fournit une constante $C(F,\beta)$ qui dépend en fin de compte uniquement de F et du dénominateur $\mathscr{D}$ de β.

Les termes $C_1(F)$ et $C_2(F,\beta)$ composant la constante $C(F,\beta)$ proviennent de calculs très différents : C_1 peut être vu comme la partie « analytique » de C, tandis que C_2 est lié à des invariants arithmétiques de F, L et β.

Dans la section 3.5, nous terminerons le chapitre en explicitant les résultats des théorèmes 3.1 et 3.2 dans les cas d'exemples classiques, incluant les polylogarithmes, les fonctions hypergéométriques et la fonction génératrice des nombres d'Apéry.

3.2 Preuve du résultat principal

3.2.1 Une relation de récurrence entre les $F^{[s]}_{\beta,n}(z)$

Comme F est une G-fonction, l'opérateur minimal non nul L de F est un G-opérateur par le théorème de Chudnovsky (voir [21, p. 267]). En particulier, le théorème d'André-Chudnovsky-Katz (cf [5, p. 719]) mentionnée dans la section 3.1 implique que L est un opérateur fuchsien à exposants rationnels en tout point de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$. En s'appuyant sur cette propriété, nous allons obtenir une relation de récurrence entre les séries $F^{[s]}_{\beta,n}(z)$, quand $s \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ (proposition 3.2 ci-dessous). Ici, et dans tout ce qui suit, $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^*$) désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls (resp. des entiers strictement positifs).

Cette méthode algébrique sera l'argument clef pour obtenir la borne supérieure dans le théorème 3.1 et sera aussi utile dans la sous-section 3.2.2, dans laquelle nous prouverons la borne inférieure.

Par [24, Lemma 1, p. 11], il existe des polynômes $Q_j(X) \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[X]$ et $u \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$uz^{\mu-\omega}L = \sum_{j=0}^{\ell} z^j Q_j(\theta + j), \tag{3.5}$$

où $\theta = z\mathrm{d}/\mathrm{d}z$, μ est l'ordre de L, ω la multiplicité de 0 en tant que singularité de L et $\ell = \delta - \omega$, où δ est le degré en z de L.

Lemme 3.1

Définissons, pour $j \in \{0,\dots,\ell\}$, $Q_{j,\beta}(X) = \mathscr{D}^\mu Q_j(X-\beta)$, où $\mathscr{D} := \mathrm{den}(\beta)$. Alors l'opérateur

$$L_\beta = \sum_{j=0}^{\ell} z^j Q_{j,\beta}(\theta + j)$$

est un opérateur dans $\overline{\mathbb{Q}}[z, \mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ annulant $z^\beta F(z)$ et d'ordre minimal pour $z^\beta F(z)$.

Avant de prouver le lemme 3.1, nous mentionnons la conséquence suivante du théorème de Chudnovsky, énoncée par Dwork [21, Corollary 4.2, p. 299].

Proposition 3.1

Soit L un opérateur $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ tel que l'équation différentielle $L(y(z)) = 0$ a une base de solutions au voisinage de 0 de la forme $(f_1(z),\dots,f_\mu(z))z^A$, où les $f_i(z)$ sont des G-fonctions et la matrice $A \in \mathscr{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ a ses valeurs propres rationnelles. Alors L est un G-opérateur.

On rappelle que z^A est définie dans une partie ouverte simplement connexe Ω de $\mathbb{C}^*$ par $z^A := \exp(A\log(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \log(z)^k A^k/k!$ pour $z \in \Omega$, où log est une détermination du logarithme complexe sur Ω.

La proposition 3.1 implique que L_β est un G-opérateur. En effet, si l'on fixe une base de solutions de $L(y(z)) = 0$ au voisinage de 0 de la forme $(f_1(z), \dots, f_\mu(z))z^C$, où $C \in \mathscr{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ a est à valeurs propres dans $\mathbb{Q}$, une base de solutions de $L_\beta(y(z)) = 0$ au voisinage de 0 est $(f_1(z), \dots, f_\mu(z))z^{C+\beta I_\mu}$.

Démonstration du lemme 3.1. Nous commençons par l'observation suivante : pour tout $m, j \in \mathbb{N}$,

$$(\theta - \beta + j)^m (z^\beta F(z)) = z^\beta (\theta + j)^m (F(z)).$$

Il suffit de le prouver pour $F(z) = z^k$. Dans ce cas, pour $m = 1$,

$$(\theta - \beta + j)(z^\beta z^k) = (\beta + k)z^{\beta+k} + (j - \beta)z^{\beta+k} = z^\beta (k + j)z^k = z^\beta (\theta + j)z^k$$

et le résultat s'ensuit par récurrence sur m.

Maintenant, avec $Q_j = \sum_{m=0}^{d_j} \rho_{j,m} X^m$, on a

$$\begin{aligned}
L_\beta(z^\beta F(z)) &= \mathscr{D}^\mu \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{d_j} z^j \rho_{j,m} (\theta - \beta + j)^m (z^\beta F(z)) = \mathscr{D}^\mu z^\beta \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{d_j} z^j \rho_{j,m} (\theta + j)^m (F(z)) \\
&= \mathscr{D}^\mu z^\beta \sum_{j=0}^{\ell} z^j Q_j(\theta + j)(F(z)) = 0.
\end{aligned}$$

Notons que L_β a le même ordre que L. Prouvons maintenant que cet ordre est minimal pour $z^\beta F(z)$. Soit $\widetilde{L}$ un opérateur d'ordre minimal pour $\widetilde{F}(z) := z^\beta F(z)$. Alors $F(z) = z^{-\beta}\widetilde{F}(z)$, donc $\widetilde{L}_{-\beta}(F) = 0$. Ainsi, $\mathrm{ord}(L) \leqslant \mathrm{ord}(\widetilde{L}_{-\beta}) = \mathrm{ord}(\widetilde{L})$, puisque L est minimal pour F. Par ailleurs, $L_\beta(\widetilde{F}) = 0$, de sorte que la minimalité de $\widetilde{L}$ implique que $\mathrm{ord}(\widetilde{L}) \leqslant \mathrm{ord}(L)$. Finalement, $\widetilde{L}$ est de même ordre que L et L_β, donc L_β bien minimal. □

De manière similaire à [24, Lemma 3, p. 17], on obtient le lemme clé suivant :

Lemme 3.2

Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, la suite de fonctions $(F^{[s]}_{\beta,n}(z))_{n\geqslant 1}$ satisfait la relation de récurrence inhomogène suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{j=0}^{\ell} Q_{j,\beta}(-n) F^{[s]}_{\beta,n+j}(z) = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{t=1}^{s-1} \gamma_{j,n,t,s,\beta} F^{[t]}_{\beta,n+j}(z) + \sum_{j=0}^{\ell} z^{n+j} B_{j,n,s,\beta}(\theta) F(z),$$

où $\gamma_{j,n,t,s,\beta} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}$ et chaque polynôme $B_{j,n,s,\beta}(X) \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[X]$ est de degré inférieur ou égal à $d_j - s$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $s \geqslant 1$.

- Pour $s = 1$, remarquons que pour $u \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^z x^{\beta+u} F(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \int_0^z x^{\beta+u+k}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\beta + u + k + 1} z^{\beta+u+k+1} = z^\beta F^{[1]}_{\beta,u+1}(z).$$

Donc, si l'on pose $L_1 = uz^{\mu-\omega}L$ comme dans (3.5) ci-dessus, on a

$$0 = \int_0^z x^{\beta+n-1} L_1(F(x))\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{d_j} \rho_{j,m} \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} j^{m-p} \int_0^z x^{\beta+n+j-1} \theta^p F(x)\mathrm{d}x.$$

Des intégrations par parties successives donnent alors

$$\int_0^z x^{\beta+n+j-1}\theta^p F(x)\mathrm{d}x = z^{\beta+n+j}\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^{p-q-1}(\beta+n+j)^{p-q-1}\theta^q F(z) \\ + (-1)^p(\beta+n+j)^p z^\beta F^{[1]}_{\beta,n+j}(z). \quad (3.6)$$

Par conséquent, en divisant les deux côtés de l'égalité par z^β et en utilisant l'égalité

$$\sum_{m=0}^{d_j}\rho_{j,m}\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}(-1)^p(\beta+n+j)^p j^{m-p} = Q_j(-n-\beta),$$

on obtient

$$\sum_{j=0}^{\ell} Q_j(-n-\beta)F^{[1]}_{\beta,n+j}(z) = \sum_{j=0}^{\ell} z^{n+j}B_{j,n,1,\beta}(\theta)F(z),$$

avec

$$B_{j,n,1,\beta} = \sum_{q=0}^{d_j-1} b_{j,n,1,q,\beta}X^q\,, \qquad b_{j,n,1,q,\beta} = \sum_{m=0}^{d_j}\rho_{j,m}\sum_{p=q+1}^{m}\binom{m}{p} j^{m-p}(\beta+n+j)^{p-q-1}(-1)^{p-q-1}.$$

En multipliant les deux côtés de l'égalité par $\mathscr{D}^\mu$, on voit que les coefficients de $\mathscr{D}^\mu B_{j,n,1,\beta}(X)$ sont des entiers algébriques qui sont aussi des polynômes en n à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$ de degrés inférieurs ou égaux à $d_j - q - 1$. Ceci est la conclusion voulue.

• Soit $s \in \mathbb{N}^*$. On suppose que le résultat est vrai pour s. On a vu dans le premier point que

$$\int_0^z x^{\beta-1}F^{[s]}_{\beta,n+j}(x)\mathrm{d}x = z^\beta F^{[s+1]}_{\beta,n+j}(z).$$

Donc, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\ell} Q_{j,\beta}(-n)F^{[s+1]}_{\beta,n+j}(z) &= \frac{1}{z^\beta}\int_0^z\sum_{j=0}^{\ell} Q_{j,\beta}(-n)x^{\beta-1}F^{[s]}_{\beta,n+j}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{z^\beta}\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{t=1}^{s-1}\gamma_{j,n,t,s,\beta}\int_0^z x^{\beta-1}F^{[t]}_{\beta,n+j}(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{z^\beta}\sum_{j=0}^{\ell}\int_0^z x^{\beta+n+j-1}B_{j,n,s,\beta}(\theta)F(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{\ell}\sum_{t=1}^{s-1}\gamma_{j,n,t,s,\beta}F^{[t+1]}_{\beta,n+j}(z) + \sum_{j=0}^{\ell}\sum_{q=0}^{d_j-s} b_{j,n,s,q,\beta}\frac{1}{z^\beta}\int_0^z x^{\beta+n+j-1}\theta^q F(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Finalement l'équation (3.6) implique

$$\sum_{j=0}^{\ell} Q_j(-n-\beta)F^{[s+1]}_{\beta,n+j}(z) = \sum_{j=0}^{\ell}\sum_{t=1}^{s}\gamma_{j,n,t,s+1,\beta}F^{[t]}_{\beta,n+j}(z) + \sum_{j=0}^{\ell} z^{n+j}B_{j,n,s+1,\beta}(\theta)F(z),$$

où

$$\gamma_{j,n,t,s+1,\beta} = \begin{cases}\gamma_{j,n,t-1,s,\beta}\,, & 2 \leqslant t \leqslant s+1 \\ \sum_{i=0}^{\ell}\sum_{q=0}^{d_j-s}(-1)^q(\beta+n+i)^q b_{i,n,s,q,\beta}\,, & t=1\end{cases}$$

et

$$B_{j,n,s+1,\beta}(X) = \sum_{q=0}^{d_j-s} b_{j,n,s,q,\beta}\sum_{p=0}^{q-1}(-1)^{q-p-1}(\beta+n+j)^{q-p-1}X^p \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[X]$$

est de degré inférieur ou égal à $d_j - s - 1$. □

Le lemme 3.2 implique la proposition suivante, qui est le résultat principal de cette sous-section. Elle fournit une relation de récurrence inhomogène satisfaite par la suite de G-fonctions $\left(F_{\beta,n}^{[s]}(z)\right)_{n\in\mathbb{N}^*,\, 0\leqslant s\leqslant S}$. Le fait important dans (3.7) est que la longueur des sommations sur j ne dépend pas de n.

Proposition 3.2

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > f - \ell - \beta$ pour tout exposant f de L en ∞ satisfaisant $f - \beta \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $s, n \geqslant 1$,

***a)** Il existe des nombres algébriques $\kappa_{j,t,s,n,\beta} \in \mathbb{K}$ et des polynômes $K_{j,s,n,\beta}(z) \in \mathbb{K}[z]$ de degré au plus $n + s(\ell-1)$ tels que*

$$F_{\beta,n}^{[s]}(z) = \sum_{t=1}^{s} \sum_{j=1}^{\ell+m-1} \kappa_{j,t,s,n,\beta} F_{\beta,j}^{[t]}(z) + \sum_{j=0}^{\mu-1} K_{j,s,n,\beta}(z)(\theta^j F)(z). \tag{3.7}$$

***b)** Il existe une constante $C_1(F,\beta) > 0$ telle que $\boxed{\kappa_{j,t,s,n,\beta}}(1 \leqslant j \leqslant \ell+m-1,\ 1 \leqslant t \leqslant s)$, et les maisons des coefficients des polynômes $K_{j,s,n,\beta}(z), 0 \leqslant j \leqslant \mu-1$ sont bornées par $H(F,\beta,s,n)$, avec*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall 1 \leqslant s \leqslant S, \quad H(F,\beta,s,n)^{1/n} \leqslant C_1(F,\beta)^S.$$

***c)** Soit $D(F,\beta,s,n)$ le plus petit dénominateur commun des nombres algébriques $\kappa_{j,t,s,n',\beta}$ $(1 \leqslant j \leqslant \ell+m-1,\ 1 \leqslant t \leqslant s,\ n' \leqslant n)$ et des coefficients des polynômes $K_{j,s,n',\beta}(z)$ $(0 \leqslant j \leqslant \mu-1,\ n' \leqslant n)$. Alors il existe une constante $C_2(F,\beta) > 0$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall 1 \leqslant s \leqslant S, \quad D(F,\beta,s,n)^{1/n} \leqslant C_2(F,\beta)^S.$$

La démonstration de cette proposition est, *mutatis mutandis*, la même que la démonstration de [24, Proposition 1, p. 16]. En effet, la proposition 3.1 implique que $L_\beta = \sum_{j=0}^{\ell} z^j Q_{j,\beta}(\theta + j)$ est un G-opérateur, ce qui nous permet d'utiliser [24, Lemma 2, p. 12] afin de déduire la proposition 3.2 du lemme 3.2 ci-dessus.

Cependant, nous présenterons dans la section 3.4 un moyen précis de calculer les constantes $C_1(F,\beta)$ et $C_2(F,\beta)$ qui n'a pas été donné dans [24]. En particulier, on verra que la constante $C_1(F,\beta)$ peut être choisie indépendante de β.

Dans les deux sous-sections suivantes et dans la section 3.4, l'indice β dans $\kappa_{j,t,s,n,\beta}$ et $K_{j,s,n,\beta}$ sera omis s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque. Notons $\mathscr{E}(\beta)$ l'ensemble des exposants f de L en ∞ tels que $f - \beta \in \mathbb{N}$. Alors la meilleure valeur possible pour m est $m = \max\left(\{1\} \cup \{f + 1 - \ell - \beta, f \in \mathscr{E}(\beta)\}\right) = \ell_0(\beta) - \ell + 1$, où

$$\ell_0(\beta) := \max\left(\{\ell\} \cup \{f - \beta, f \in \mathscr{E}(\beta)\}\right). \tag{3.8}$$

Le théorème de Katz (voir [21, Theorem 6.1, p. 98]) nous assure que les exposants de L en ∞ sont tous des nombres rationnels. Supposons que l'un d'entre eux, noté f est non nul, et posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\beta_k := \left(\mathrm{sign}(f) - k\,\mathrm{den}(f)\right)|f|$. Alors on a $f - \beta_k = k\,\mathrm{den}(f)|f| \in \mathbb{N}$, de sorte que pour tout k,

$$\ell_0(\beta_k) \geqslant \mathrm{den}(f)|f|k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty.$$

De même, si 0 est le seul exposant de L en ∞, alors $\beta_k = -k - \ell$ satisfait $\ell_0(\beta_k) = k + \ell \to +\infty$.

3.2.2 Étude d'une série auxiliaire

Comme dans [24, p. 24], nous définissons dans cette sous-section une série auxiliaire $T_{S,r,n}(z)$, qui dépend de β et s'avère être une forme linéaire à coefficients polynomiaux en les $F^{[s]}_{\beta,u}(z)$ (proposition 3.3).

Pour $S \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant S$, soit

$$T_{S,r,n}(z) = n!^{S-r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-rn+1)_{rn}}{(k+1+\beta)^S_{n+1}} A_k z^{-k}.$$

Cette série converge pour $|z| > R^{-1}$, où R est le rayon de convergence de $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k z^k$.

Le but de cette partie est d'obtenir diverses estimations sur $T_{S,r,n}(z)$ afin de pouvoir appliquer une généralisation du critère d'indépendance linéaire de Nesterenko [24, Section 3]. Ceci fournira la borne inférieure sur la dimension de $\Phi_{\alpha,\beta,S}$ dans le théorème 3.1. Le contrôle de la taille et du dénominateur des coefficients apparaissant dans la relation entre $T_{S,r,n}(z)$ et les $F^{[s]}_{\beta,u}[z)$ (lemmes 3.3 et 3.4) jouera un rôle central, mais la partie la plus fastidieuse dans le papier original de Fischler et Rivoal a consisté à utiliser la méthode du point col pour obtenir un développement asymptotique de $T_{S,r,n}(1/\alpha)$, quand $n \to +\infty$, pour $0 < |\alpha| < R$. Heureusement, nous pouvons adapter leur preuve avec seulement quelques changements mineurs (lemme 3.6).

Proposition 3.3

Pour $n \geqslant \ell_0(\beta)$, il existe des polynômes $C_{u,s,n}(z) \in \mathbb{K}[z]$ et $\tilde{C}_{u,n}(z) \in \mathbb{K}[z]$ de degrés respectifs au plus $n+1$ et $n+1+S(\ell-1)$ tels que

$$T_{S,r,n}(z) = \sum_{u=1}^{\ell_0(\beta)} \sum_{s=1}^{S} C_{u,s,n}(z) F^{[s]}_{\beta,u}\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{u=0}^{\mu-1} \widetilde{C}_{u,n}(z) z^{-S(\ell-1)} (\theta^u F)\left(\frac{1}{z}\right).$$

Démonstration. Écrivons la décomposition en éléments simples de

$$R_n(X) := n!^{S-r} \frac{X(X-1)\dots(X-rn+1)}{(X+\beta+1)^S \dots (X+\beta+n+1)^S} = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{s=1}^{S} \frac{c_{j,s,n}}{(X+\beta+j)^s}, \quad c_{j,s,n} \in \mathbb{Q}, \tag{3.9}$$

de sorte que

$$T_{S,r,n}(z) = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{s=1}^{S} c_{j,s,n} z^j F^{[s]}_{\beta,j}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Alors [24, Lemma 4, p. 24], la combinaison de l'équation (3.9) et de la proposition 3.2 implique que

$$T_{S,r,n}(z) = \sum_{u=1}^{\ell_0(\beta)} \sum_{s=1}^{S} C_{u,s,n}(z) F^{[s]}_{\beta,u}\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{u=0}^{\mu-1} \tilde{C}_{u,n}(z) z^{-S(\ell-1)} (\theta^u F)\left(\frac{1}{z}\right),$$

où

$$C_{u,s,n}(z) = c_{u,s,n} z^u + \sum_{j=\ell_0(\beta)+1}^{n+1} \sum_{\sigma=s}^{S} z^j c_{j,\sigma,n} \kappa_{u,s,\sigma,j},$$

et

$$\widetilde{C}_{u,n}(z) = \sum_{j=\ell_0(\beta)+1}^{n+1} \sum_{s=1}^{S} c_{j,s,n} z^{j+S(\ell-1)} K_{u,s,j}\left(\frac{1}{z}\right).$$

$\square$

On commence par calculer une borne supérieure sur la maison des coefficients des polynômes $C_{u,s,n}(z)$ et $\tilde{C}_{u,n}(z)$ apparaissant dans la proposition 3.3.

Lemme 3.3

Pour tout $z \in \overline{\mathbb{Q}}$, on a

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\max_{u,s}\overline{\left|C_{u,s,n}(z)\right|}\right)^{1/n} \leqslant C_1(F,\beta)^S r^r 2^{S+r+1}\max(1,\overline{|z|})$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\max_{u,s}\overline{\left|\widetilde{C}_{u,s,n}(z)\right|}\right)^{1/n} \leqslant C_1(F,\beta)^S r^r 2^{S+r+1}\max(1,\overline{|z|}).$$

Démonstration. Nous allons nous inspirer de la preuve donnée dans [45, pp. 6–7].

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $j_0 \in \{1,\dots,n+1\}$ et $s_0 \in \{1,\dots,S\}$. Le théorème des résidus donne

$$c_{j_0,s_0,n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z+\beta+j_0|=1/2} R_n(z)(z+\beta+j_0)^{s_0-1}\mathrm{d}z,$$

où $R_n(z)$ a été définie dans (3.9). Si $|z+\beta+j_0| = \dfrac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
|(z-rn+1)_{rn}| &= \prod_{k=0}^{rn-1}|z-rn+1+k| = \prod_{k=0}^{rn-1}\left|z+\beta+j_0-\left(rn-1-k+\beta+j_0\right)\right|\\
&\leqslant \prod_{k=0}^{rn-1}\left(\frac{1}{2}+rn-(k+1)+|\beta|+j_0\right) \leqslant \prod_{k=0}^{rn-1}\left(rn-k+|\beta|+j_0\right) = (|\beta|+j_0+1)_{rn}\\
&\leqslant (\widetilde{\beta}+j_0+2)_{rn} = \frac{(\widetilde{\beta}+j_0+rn+1)!}{(\widetilde{\beta}+j_0+1)!},
\end{aligned}$$

avec $\widetilde{\beta} := \lfloor|\beta|\rfloor$, où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la fonction partie entière. De plus,

$$\begin{aligned}
\left|(z+\beta+1)_{n+1}\right| &= \prod_{k=0}^{n}|z+\beta+k+1| = \prod_{k=0}^{n}\left|z+\beta+j_0-(j_0-k-1)\right|\\
&\geqslant \prod_{k=0}^{n}\left||j_0-k-1|-\frac{1}{2}\right| = \prod_{k=0}^{j_0-3}\left(j_0-k-1-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\prod_{k=j_0+1}^{n}\left(k+1-j_0-\frac{1}{2}\right)\\
&\geqslant \frac{1}{8}(j_0-2)!(n-j_0)!\ .
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|R_n(z)| &\leqslant n!^{S-r}\frac{(\widetilde{\beta}+j_0+rn+1)!}{(\widetilde{\beta}+j_0+1)!(j_0-2)!^S(n-j_0)!^S}8^S = \binom{\widetilde{\beta}+j_0+rn+1}{\widetilde{\beta}+j_0+1}\times\frac{(rn)!}{(j_0-2)!^S(n-j_0)!^S}8^S n!^{S-r}\\
&= \binom{\widetilde{\beta}+j_0+rn+1}{\widetilde{\beta}+j_0+1}\times\frac{(rn)!}{n!^r}\times\binom{n-2}{j_0-2}^S\times n^S(n-1)^S\times 8^S.
\end{aligned}$$

D'où

$$|c_{j_0,s,n}| \leqslant 2^{\widetilde{\beta}+j_0+rn+1}r^{rn}2^{S(n-2)}(n(n-1))^S8^S\left(\frac{1}{2}\right)^S \leqslant 2^{\widetilde{\beta}+(r+1)n+1}r^{rn}2^{S(n-2)}(n(n-1))^S8^S\left(\frac{1}{2}\right)^S,$$

de sorte que, puisque la dernière inégalité est indépendante de j_0, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n+1}|c_{j,s,n}|\right)^{1/n} \leqslant r^r2^{S+r+1}.$$

Le résultat voulu découle alors de cette inégalité et du point **b)** de la proposition 3.2. □

La lemme suivante fournit alors une borne supérieure sur le dénominateur des coefficients de $C_{u,s,n}(z)$ et $\tilde{C}_{u,n}(z)$. On rappelle que $\mathscr{D}$ est le dénominateur de β.

Lemme 3.4

Soit $z \in \mathbb{K}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $qz \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}$. Alors il existe une suite $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ d'entiers strictement positifs tels que, pour tout u, s :

$$\Delta_n C_{u,s,n}(z) \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \qquad \Delta_n \widetilde{C}_{u,n}(z) \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \Delta_n^{1/n} = qC_2(F,\beta)^S \mathscr{D}^{2r} e^S.$$

Démonstration du lemme 3.4. Nous suivons la preuve donnée par Rivoal dans [45, pp. 7–8]. Pour des raisons pratiques, nous travaillerons avec

$$\widetilde{R}_n(t) = R_n(t-1) = n!^{S-r} \frac{(t-rn)_{rn}}{(t+\beta)_{n+1}^S},$$

plutôt qu'avec $R_n(t)$. Pour tout $j_0 \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$\forall 1 \leqslant s \leqslant S, \quad c_{j_0+1,s,n} = D_{S-s}\left(\widetilde{R}_n(t)(t+\beta+j_0)^S\right)_{|t=-\beta-j_0}, \tag{3.10}$$

où $D_\lambda = \dfrac{1}{\lambda!}\dfrac{\mathrm{d}^\lambda}{\mathrm{d}t^\lambda}$. Considérons la décomposition suivante :

$$\widetilde{R}_n(t)(t+\beta+j_0)^S = \left(\prod_{\ell=1}^r F_\ell(t)\right) H(t)^{S-r},$$

avec, pour $1 \leqslant \ell \leqslant r$,

$$F_\ell(t) = \frac{(t-n\ell)_n}{(t+\beta)_{n+1}}(t+\beta+j_0), \quad \text{et} \quad H(t) = \frac{n!}{(t+\beta)_{n+1}}(t+\beta+j_0).$$

On obtient

$$F_\ell(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j_0}}^n \frac{j_0-p}{t+\beta+p} f_{p,\ell,n}, \quad f_{p,\ell,n} = (-1)^{n-p}\binom{n}{p}\binom{\beta+p+\ell n}{n}$$

et

$$H(t) = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j_0}}^n \frac{(j_0-p)h_{p,n}}{t+\beta+p}, \quad h_{p,n} = (-1)^p\binom{n}{p}.$$

Notons que $h_{p,n} \in \mathbb{N}^*$. D'où, si $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$D_\lambda(F_\ell(t))_{|t=-\beta-j_0} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j_0}}^n (-1)^\lambda \frac{(j_0-p)f_{p,\ell,n}}{(p-j_0)^{\lambda+1}} = \delta_{0,\lambda} - \sum_{\substack{p=0\\p\neq j_0}}^n \frac{f_{p,\ell,n}}{(j_0-p)^\lambda},$$

où $\delta_{0,\lambda} = 1$ si $\lambda = 0$ et 0 sinon, et

$$D_\lambda(H(t))_{|t=-\beta-j_0} = -\sum_{p=0}^n \frac{h_{p,n}}{(j_0-p)^\lambda}.$$

Ainsi, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant r$ et tout $\lambda \in \mathbb{N}$, on a

$$d_n^\lambda \Delta_n^{(1)} D_\lambda(F_\ell(t))_{|t=-\beta-j_0} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad d_n^\lambda D_\lambda(H(t))_{|t=-\beta-j_0} \in \mathbb{Z}$$

avec $d_n = \mathrm{ppcm}(1,2,\dots,n)$ et $\Delta_n^{(1)} \in \mathbb{N}^*$ un dénominateur commun des $f_{p,\ell,n}$ pour tout p, ℓ.

Le lemme 3.11 **b)** de la sous-section 3.4.2 nous assure que les entiers $\Delta_n^{(1)} = \mathscr{D}^{2n}$ conviennent.

De plus, la formule de Leibniz donne

$$D_{S-s}\left(\widetilde{R_n}(t)(t+\beta+j_0)^S\right) = \sum_{\boldsymbol{\mu}} D_{\mu_1}(F_1(t))\dots D_{\mu_r}(F_r(t))D_{\mu_{r+1}}(H(t))\dots D_{\mu_S}(H(t)),$$

où la somme porte sur les $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\dots,\mu_S) \in \mathbb{N}^S$ tels que $\mu_1+\dots+\mu_S = S-s$. Finalement, en utilisant (3.10), on voit que

$$\forall 0 \leqslant j \leqslant n,\ \forall 1 \leqslant s \leqslant S, \quad d_n^{S-s}\mathscr{D}^{2rn}c_{j+1,s,n} \in \mathbb{Z}.$$

Le théorème des nombres premiers donne $d_n \leqslant e^{n+o(n)}$, si bien que la conclusion voulue découle du point **c)** de la proposition 3.2. □

Expliquons à présent brièvement comment l'approche de Fischler et Rivoal dans [24] pour estimer $T_{S,r,n}(1/\alpha)$ quand $n \to +\infty$ pour $0 < |\alpha| < R$ avec la méthode du point col peut être adaptée à notre cas.

Dans [24], une famille de fonctions $B_1(z),\dots,B_p(z)$ analytiques sur un demi-plan $\mathrm{Re}(z) > u$ tel que $A(z) = \sum_{j=1}^{p} B_j(z)$ satisfait $A(k) = A_k$ pour tout entier k suffisamment grand a été construit. Ici, u est un réel positif tel que $|F(z)| = O(|z|^u)$ quand $z \to \infty$ dans $\mathbb{C}\setminus(L_0\cup\dots\cup L_p)$, où les L_i sont des demi-droites (voir [24, p. 28]). La théorie des points singuliers réguliers (voir [32, Chapter 9]) nous assure de l'existence de u. De plus, [24, Lemma 8, p. 29] donne, pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, le développement asymptotique suivant de $B_j(tn)$, quand n tend vers l'infini :

$$B_j(tn) = \kappa_j \frac{\log(n)^{s_j}}{(tn)^{b_j}\xi_j^{tn}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log(n)}\right)\right),$$

où $s_j \in \mathbb{N}$, $b_j \in \mathbb{Q}$, $\kappa_j \in \mathbb{C}^*$, et $\xi_1,\dots,\xi_p$ sont les singularités finies de $F(z)$. De plus, la constante implicite est uniforme sur tout demi-plan d'équation $\mathrm{Re}(t) \geqslant d$, $d > 0$.

On définit

$$\mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} B_j(tn)\frac{n!^{S-r}\Gamma((r-t)n)\Gamma(tn+\beta+1)^S\Gamma(tn+1)}{\Gamma((t+1)n+\beta+2)^S}(-\alpha)^{tn}\mathrm{d}t,$$

pour $1 \leqslant j \leqslant p$, où $0 < c < r$.

En adaptant les calculs faits dans [24, p. 31], utilisant la formule des résidus, on obtient le résultat suivant :

Lemme 3.5

Si $0 < |\alpha| < R$ *et* $r > u$*, alors pour* n *assez grand, on a*

$$T_{S,r,n}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_{j=1}^{p} \frac{(-1)^{rn}n}{2i\pi}\mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha).$$

Il s'agit maintenant d'étudier le comportement asymptotique de $\mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha)$ quand n tend vers l'infini ; c'est une étape délicate qui utilise la méthode du point col.

La formule de Stirling fournit le développement asymptotique suivant de $\mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha)$:

$$\mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha) = (2\pi)^{(S-r+2)/2}\kappa_j \frac{\log(n)^{s_j}}{n^{(S+r)/2+b_j}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g_{j,\beta}(t)e^{n\varphi(-\alpha/\xi_j,t)}\left(1+O\left(\frac{1}{\log(n)}\right)\right)\mathrm{d}t,$$

quand $n \to \infty$, où la constante dans O est uniforme en t,

$$g_{j,\beta}(t) = t^{(S+1)/2+S\beta-b_j}(r-t)^{-1/2}(t+1)^{-S(2\beta+3)/2}$$

et

$$\varphi(z,t) = t\log(z) + (S+1)\,t\log(t) + (r-t)\log(r-t) - S(t+1)\log(t+1).$$

On remarque que φ est la même fonction que dans [24]. Ainsi, l'application de la méthode du point col ne changera pas beaucoup dans ce cas, car β apparaît seulement dans $g_{j,\beta}(t)$. Nous aurons à vérifier que $g_{j,\beta}(t)$ est définie et prend une valeur non nulle au point col.

Lemme 3.6

Pour z tel que $0 < |z| < 1$ et $-\pi < \arg(z) \leqslant \pi$, soit $\tau_{S,r}(z)$ l'unique t tel que $\mathrm{Re}(t) > 0$ et $\varphi'(z,t) = 0$, où $\varphi'(z,t) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(z,t)$.

Supposons que $r = r(S)$ est une fonction croissante de S telle que $r = o(S)$ et $Se^{-S/(r+1)} = o(1)$ quand S tend vers l'infini. Alors si S est suffisamment grand (relativement au choix de la fonction $S \mapsto r(S)$), l'estimation asymptotique suivante vaut pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$:

$$\mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha) = (2\pi)^{(S-r+3)/2}\frac{\kappa_j\gamma_{j,\beta}}{\sqrt{-\psi_j}}\frac{\log(n)^{s_j}e^{\varphi_j n}}{n^{(S+r+1)/2+\beta_j}}(1+o(1)), \quad n \to +\infty,$$

où $\tau_j = \tau_{S,r}(-\alpha/\xi_j)$, $\varphi_j = \varphi(-\alpha/\xi_j,\tau_j)$, $\psi_j = \varphi''(-\alpha/\xi_j,\tau_j)$ $\gamma_{j,\beta} = g_{j,\beta}(\tau_j)$. De plus, pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, on a $\kappa_j\gamma_{j,\beta}\psi_j \neq 0$.

Notons que $\varphi_j, \psi_j, \tau_j$ sont les mêmes quantités que dans [24]. La condition de r est en particulier satisfaite par $r = \lfloor S/(\log(S))^2 \rfloor$.

Démonstration. Seule la quatrième étape de la preuve de [24] doit être adaptée à ce cas pour pouvoir appliquer la méthode du point col.

On a $g_{j,\beta}(t) = t^{(S+1)/2+S\beta-b_j}(r-t)^{-1/2}(t+1)^{-S(2\beta+3)/2}$. Donc, en notant $\tau = \tau_{S,r}(z)$,

$$g_{j,\beta}(\tau) = \frac{\tau^{(S+1)/2+S\beta}}{\tau^{b_j}(r-\tau)^{1/2}(\tau+1)^{S(2\beta+3)/2}}.$$

Mais, comme il est mentionné dans [24, Step 1, p. 33], on a $z\tau^{S+1} - (r-\tau)(\tau+1)^S = 0$, de sorte que $r - \tau = \dfrac{z\tau^{S+1}}{(\tau+1)^S}$, d'où

$$g_{j,\beta}(\tau) = \frac{\tau^{S\beta-(S+1)/2}}{\tau^{b_j}z^{1/2}(\tau+1)^{S(\beta+1)}} \neq 0,$$

car $\mathrm{Re}(z) > 0$. $\square$

On déduit ensuite du résultat ci-dessus la proposition suivante, qui est l'adaptation de [24, Lemma 7, p. 26]. Le point clé, qui est démontré dans [24, p. 41], est que les nombres e^{φ_j} sont deux à deux distincts si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que $r^\omega e^{-S/(r+1)} = o(1)$ pour tout $\omega > 0$. Elle est satisfaite par $r = \lfloor S/(\log(S))^2 \rfloor$.

Proposition 3.4

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\alpha| < R$. Supposons que S est suffisamment grand (relativement à F et α), et que r est la partie entière de $S/(\log S)^2$. Alors il existe des entiers $Q \geqslant 1$ et $\lambda \geqslant 0$, des nombres réels a et κ, des nombres complexes non nuls $c_{1,\beta},\dots,c_{Q,\beta}$, et des nombres complexes deux à deux distincts $\zeta_1,\dots,\zeta_Q$, tels que $|\zeta_q| = 1$ pour tout q et

$$T_{S,r,n}(1/\alpha) = a^n n^\kappa \log(n)^\lambda\left(\sum_{q=1}^{Q} c_{q,\beta}\zeta_q^n + o(1)\right) \text{ quand } n \to \infty,$$

et

$$0 < a \leqslant \frac{1}{r^{S-r}}.$$

La preuve de ce résultat est, *mutatis mutandis*, la même que dans [24, pp. 41–42] mais nous en donnons une esquisse pour la convenance du lecteur.

Démonstration (esquisse). Par le lemme 3.5, on a

$$T_{S,r,n}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_{j=1}^{p} \frac{(-1)^{rn} n}{2i\pi} \mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha).$$

Il découle alors du développement asymptotique de $\mathscr{B}_{S,r,n,j}(\alpha)$ donné par le lemme 3.6 que

$$T_{S,r,n}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{(-1)^{rn}}{2i\pi} \frac{(2\pi)^{(S-r+3)/2}}{n^{(S+r-1)/2}} \sum_{j=1}^{p} \frac{\kappa_j \gamma_{j,\beta}}{\sqrt{-\psi_j}} n^{-\beta_j} \log(n)^{s_j} e^{\varphi_j n}(1+o(1)), \quad n \to +\infty.$$

On considère $J = \{j_1, \dots, j_Q\}$ l'ensemble des $j \in \{1, \dots, p\}$ tels que $(\mathrm{Re}(\varphi_j), -\beta_j - (S+r-1)/2, s_j)$ est maximal pour l'ordre lexicographique, égal à un certain $(a, \kappa, \lambda) \in \mathbb{R}^3$. Alors on peut négliger les autres termes de la somme ; précisément, on a

$$T_{S,r,n}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = a^n n^\kappa \log(n)^s \sum_{q=1}^{Q} c_{q,\beta} \zeta_q^n (1+o(1)),$$

où $\zeta_q := \exp\left(i\mathrm{Im}(\varphi_{j_q})\right)$ et $c_{q,\beta} := \dfrac{(-1)^{rn}}{2i\pi}(2\pi)^{(S-r+3)/2} \dfrac{\kappa_{j_q}\gamma_{j_q,\beta}}{\sqrt{-\psi_{j_q}}}$.

Finalement, le point difficile est de démontrer que les ζ_q sont deux à deux distincts. Ceci vient du fait, prouvé dans [24, p. 42] que les φ_j sont deux à deux distincts. Comme nous l'avons mentionné plus haut, il est crucial pour cela de faire l'hypothèse que $r^\omega e^{-S/(r+1)} = o(1)$ pour tout $\omega > 0$. □

3.2.3 Démonstration du théorème 3.1

Nous allons maintenant prouver le résultat principal de ce chapitre. La borne supérieure sur la dimension $\Phi_{\alpha,\beta,S}$ provient de la relation de récurrence (3.7) de la proposition 3.2 ci-dessus. Par ailleurs, grâce aux estimations de la sous-section 3.2.2, on peut maintenant appliquer un critère d'indépendance linéaire à la Nesterenko [24, Theorem 4, p. 8] pour obtenir la borne inférieure.

Par souci de clarté, nous reproduisons ici, avec quelques adaptations, la preuve de [24, pp. 26-27].

Soit α un élément non nul de $\mathbb{K}$ tel que $|\alpha| < R$; choisissons $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{q}{\alpha} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}$. Par les lemmes 3.3 et 3.4, $p_{u,s,n} := \Delta_n C_{u,s,n}(1/\alpha)$ et $\tilde{p}_{u,n} := \Delta_n \widetilde{C}_{u,n}(1/\alpha)$ appartiennent à $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$ et pour tous u, s,

$$\limsup_{n\to+\infty} \max_{u,s}(\lceil\overline{p_{u,s,n}}\rceil^{1/n}, \lceil\overline{\tilde{p}_{u,n}}\rceil^{1/n}) \leqslant b := qC_1(F,\beta)^S C_2(F,\beta)^S \mathscr{D}^{2r} e^S r^r 2^{S+r+1} \max(1, \lceil\overline{1/\alpha}\rceil).$$

En utilisant la proposition 3.3, on considère

$$\tau_n := \Delta_n T_{S,r,n}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sum_{u=1}^{\ell_0(\beta)} \sum_{s=1}^{S} p_{u,s,n} F_{\beta,u}^{[s]}(\alpha) + \sum_{u=0}^{\mu-1} \tilde{p}_{u,n} \alpha^{S(\ell-1)} (\theta^u F)(\alpha).$$

En choisissant $r = \lfloor S/\log(S)^2 \rfloor$, le lemme 3.4 et la proposition 3.4 donnent, quand n tend vers l'infini,

$$\tau_n = a_0^{n(1+o(1))} \left(\sum_{q=1}^{Q} c_{q,\beta}\zeta_q^n + o(1)\right) \text{ avec } 0 < a_0 < \frac{qC_2(F,\beta)^S \mathscr{D}^{2r} e^S}{r^{S-r}}.$$

On note $\Psi_{\alpha,\beta,S}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par les nombres $F^{[s]}_{\beta,u}(\alpha)$ et $(\theta^v F)(\alpha)$, $1 \leqslant u \leqslant \ell_0(\beta)$, $1 \leqslant s \leqslant S$, $0 \leqslant v \leqslant \mu - 1$.

Par [24, Corollary 2, p. 9], on obtient

$$\dim_{\mathbb{K}}(\Psi_{\alpha,\beta,S}) \geqslant \frac{1}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}\left(1 - \frac{\log(a_0)}{\log(b)}\right).$$

De plus, quand S tend vers l'infini

$$\log(b) = \log(2eC_1(F,\beta)C_2(F,\beta))S + o(S) \text{ et } \log(a_0) \leqslant -S\log(S) + o(S\log S). \tag{3.11}$$

En effet,

$$\log(b) = S\log(2eC_1(F,\beta)C_2(F,\beta)) + r\left(\log(r) + \log(2) + 2\log(\mathscr{D})\right) + \log\Big(2q\max(1, \lceil 1/\alpha \rceil)\Big)$$

et on a $r = o(S)$ et

$$r\log(r) = \frac{S}{\log(S)^2}\log\left(\frac{S}{\log(S)^2}\right)(1+o(1)) = S\left(\frac{1}{\log(S)} - \frac{2\log\log(S)}{\log(S)^2}\right)(1+o(1)) = o(S).$$

Par ailleurs, $\log(a_0) \leqslant -(S-r)\log r + S\log(C_2(F,\beta)e) + 2r\log(\mathscr{D}) + \log(q)$ et

$$\begin{aligned}-(S-r)\log(r) = -(S-r)\left(\log\left(\frac{S}{\log(S)^2}\right) + o(1)\right) &= -S\log(S) - 2S\log\log(S) + o(S\log(S)) \\ &\leqslant -S\log(S) + o(S\log(S)),\end{aligned}$$

ce qui prouve la deuxième partie de (3.11), puisque $r = o(S) = o(S\log(S))$.

Par conséquent,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\Psi_{\alpha,S}) \geqslant \frac{1+o(1)}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\log(2eC_1(F,\beta)C_2(F,\beta))}\log(S) \qquad \text{quand } S \to +\infty. \tag{3.12}$$

L'application du point **a)** de la proposition 3.2 avec $m = \ell_0(\beta) - \ell + 1$ et $z = \alpha$ montre que $\Phi_{\alpha,\beta,S}$, qui est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par les $F^{[s]}_{\beta,u}(\alpha)$ pour $u \geqslant 1$ et $0 \leqslant s \leqslant S$, est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $\Psi_{\alpha,\beta,S}$. En particulier, pour tout $S \geqslant 0$,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\Phi_{\alpha,\beta,S}) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\Psi_{\alpha,\beta,S}) \leqslant \ell_0(\beta)S + \mu\,,$$

ce qui démontre la partie droite de l'inégalité du théorème 3.1. Par ailleurs, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(\Psi_{\alpha,\beta,S}) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(\Phi_{\alpha,\beta,S}) + \mu,$$

de sorte que la borne (3.12) vaut aussi pour $\Phi_{\alpha,\beta,S}$ à la place de $\Psi_{\alpha,\beta,S}$, car μ est indépendant de S. Ceci prouve la partie gauche de l'inégalité du théorème 3.1 avec

$$C(F,\beta) := \log(2eC_1(F,\beta)C_2(F,\beta)). \tag{3.13}$$

Les sections suivantes sont consacrées au calcul explicite de $C(F,\beta)$. Avant cela, nous présentons une généralisation du théorème 3.1.

3.2.4 Cas général

Dans cette partie, nous allons étudier une famille plus générale de séries construites à partir de F, dépendant de plusieurs paramètres rationnels β_i, et montrer comment une généralisation du théorème 3.1 à ces séries peut être déduite des constructions précédentes.

Fixons $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_\nu) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0})^\nu$. On définit, pour $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_\nu) \in \mathbb{N}^\nu$ et $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_\nu) \in \mathbb{N}^\nu$,

$$F^{[\mathbf{s}]}_{\boldsymbol{\beta},\mathbf{n}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\prod_{i=1}^{\nu} (k + n_i + \beta_i)^{s_i}} z^{k+n_1+\dots+n_\nu}.$$

Soit

$$\Phi_{\alpha,\mathbf{S},\boldsymbol{\beta}} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(F^{[\mathbf{s}]}_{\boldsymbol{\beta},\mathbf{n}}(\alpha), \mathbf{n} \in \mathbb{N}^\nu, 0 \leqslant s_i \leqslant S_i),$$

quand S est un entier suffisamment grand et $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < R$ (on rappelle que R est le rayon de convergence de F).

Théorème 3.3

Supposons que pour tout $i \neq j, \beta_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$. Quand les composantes S_i de $\mathbf{S}$ sont suffisamment grandes, on a

$$\dim_{\mathbb{K}} \Phi_{\alpha,\mathbf{S},\boldsymbol{\beta}} \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} \ell_0(\beta_i) S_i + \mu.$$

De plus, si $S_1 = \dots = S_\nu = S$, on note $\Phi_{\alpha,(S,\dots,S),\boldsymbol{\beta}} = \Phi_{\alpha,S,\boldsymbol{\beta}}$ et on a, si S est assez grand,

$$\frac{1 + o(1)}{[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] C(F, \boldsymbol{\beta})} \log(S) \leqslant \dim_{\mathbb{K}} \Phi_{\alpha,S,\boldsymbol{\beta}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\nu} \ell_0(\beta_i) \right) S + \mu,$$

où $C(F, \boldsymbol{\beta})$ est une constante dépendant seulement de F et $\boldsymbol{\beta}$.

Nous allons donner deux preuves du théorème 3.3, avec deux expressions différentes de la constante $C(F, \boldsymbol{\beta})$ données par les équations (3.14) et (3.15). La preuve la plus courte vient de l'observation suivante :

Lemme 3.7

On pose $\Phi_{\alpha,S,\beta_i} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(F^{[s]}_{\beta_i,n}(\alpha), n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant s \leqslant S)$. Alors $\Phi_{\alpha,\mathbf{S},\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{\nu} \Phi_{\alpha,S_i,\beta_i}$.

Démonstration. Comme les $\beta_i - \beta_j$ ne sont pas entiers, on peut écrire la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(x + \beta_1 + n_1)^{s_1} \dots (x + \beta_\nu + n_\nu)^{s_\nu}} = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\sigma=1}^{s_i} \frac{a_{i,\sigma}}{(x + \beta_i + n_i)^\sigma}, \quad a_{i,\sigma} \in \mathbb{Q}.$$

On a ainsi

$$F^{[\mathbf{s}]}_{\boldsymbol{\beta},\mathbf{n}}(z) = \sum_{i=1}^{\nu} z^{\sum_{j \neq i} n_j} \sum_{\sigma=1}^{s_i} a_{i,\sigma} F^{[\sigma]}_{\beta_i,n_i}(z).$$

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $0 < |\alpha| < R$, la formule ci-dessus montre que $F^{[\mathbf{s}]}_{\boldsymbol{\beta},\mathbf{n}}(\alpha)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ des $F^{[\sigma]}_{\beta_i,n}(\alpha)$, quand $1 \leqslant i \leqslant \nu$, $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant \sigma \leqslant S$. En d'autres termes, $\Phi_{\alpha,\mathbf{S},\boldsymbol{\beta}} \subset \sum_{i=1}^{\nu} \Phi_{\alpha,S_i,\beta_i}$.

Par ailleurs, on observe que si $1 \leqslant i \leqslant \nu$, $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant s \leqslant S$, on a $F^{[s]}_{\beta_i,n}(z) = F^{[\mathbf{s}]}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{n}}(z)$ avec $\mathbf{n} = (0, \dots, 0, n, 0, \dots, 0)$ et $\mathbf{s} = (0, \dots, 0, s, 0, \dots, 0)$. D'où $\Phi_{\alpha,S_i,\beta_i} \subset \Phi_{\alpha,\mathbf{S},\boldsymbol{\beta}}$. Ceci prouve l'autre inclusion. □

Démonstration du théorème 3.3. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $0 < |\alpha| < R$. Le lemme 3.7 ci-dessus nous assure que les $F^{[\mathbf{s}]}_{\boldsymbol{\beta},\mathbf{n}}(\alpha)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ des $F^{[s]}_{\beta_i,u}(\alpha)$ quand $1 \leqslant i \leqslant \nu$, $u \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant s \leqslant S$.

De plus, le point **a)** de la proposition 3.2 appliqué à tous les β_i avec $m = \ell_0(\beta_i) - \ell + 1$ et $z = \alpha$ montre que pour $u \geqslant 1$ et $0 \leqslant s \leqslant S_i$, $F^{[s]}_{\beta_i,u}(\alpha)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$ des $F^{[s]}_{\beta_i,u}(\alpha)$, $1 \leqslant u \leqslant \ell_0(\beta_i)$ et des $(\theta^v F)(\alpha)$, $0 \leqslant v \leqslant \mu - 1$. D'où, pour tout $S \geqslant 0$,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\Phi_{\alpha,\mathbf{S},\boldsymbol{\beta}}) \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} \ell_0(\beta_i) S_i + \mu\,,$$

ce qui prouve la partie droite de l'inégalité dans le théorème 3.3.

Par ailleurs, par le lemme 3.7, on a pour tout $i \in \{1, \ldots, \nu\}$, $\Phi_{\alpha,S,\beta_i} \subset \Phi_{\alpha,S,\boldsymbol{\beta}}$ donc $\dim_{\mathbb{K}} \Phi_{\alpha,S,\boldsymbol{\beta}} \geqslant \max\limits_{1\leqslant i \leqslant \nu} \dim_{\mathbb{K}} \Phi_{\alpha,S,\beta_i}$. Par conséquent, le théorème 3.1 appliqué à β_i donne

$$\dim \Phi_{\alpha,S,\boldsymbol{\beta}} \geqslant \frac{1+o(1)}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]C(F,\boldsymbol{\beta})} \log(S),$$

avec

$$C(F,\boldsymbol{\beta}) = \min_{1\leqslant i\leqslant \nu} C(F,\beta_i) = \min_{1\leqslant i\leqslant \nu} \log(2eC_1(F,\beta_i)C_2(F,\beta_i)). \tag{3.14}$$

□

Remarque. On peut donner une preuve alternative, fondée sur la méthode du point col, du théorème 3.3, qui donne une autre expression $\widetilde{C}(F,\boldsymbol{\beta})$ de $C(F,\boldsymbol{\beta})$. Elle consiste en l'adaptation de la preuve de la sous-section 3.2.2 à ce cas.

On définit, pour $S \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leqslant S$, la série auxiliaire

$$T_{S,r,n}(z) = n!^{\nu(S-r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-\nu r n+1)_{\nu r n}}{\prod_{i=1}^{\nu}(k+1+\beta_i)^s_{n+1}} A_k z^{-k}.$$

On peut prouver la proposition suivante, qui nous permet d'écrire $T_{S,r,n}(z)$ comme une forme linéaire en les $F^{[\mathbf{s}]}_{\boldsymbol{\beta},\mathbf{n}}$.

Proposition 3.5

Pour $n \geqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant \nu}(\ell_0(\beta_i))$, il existe des polynômes $C_{i,u,s,n}(z) \in \mathbb{K}[z]$ et $\tilde{C}_{u,n}(z) \in \mathbb{K}[z]$ de degrés respectifs inférieurs ou égaux à $n+1$ et $n+1+S(\ell-1)$ tels que

$$T_{S,r,n}(z) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{u=1}^{\ell_0(\beta_i)} \sum_{s=1}^{S} C_{i,u,s,n}(z) F^{[s]}_{\beta_i,u}\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{u=0}^{\mu-1} \widetilde{C}_{u,n}(z) z^{-S(\ell-1)} (\theta^u F)\left(\frac{1}{z}\right).$$

On obtient la formule suivante :

$$\widetilde{C}(F,\boldsymbol{\beta}) = \nu^{-1}\left(\log\left(\max_{1\leqslant i\leqslant \nu} C_1(F,\beta_i)\right) + \sum_{1\leqslant i\leqslant \nu} \log(C_2(F,\beta_i)) + \nu\log(2) + (3\nu+2)\mathscr{D} + 2\nu\log(\mathscr{D})\right). \tag{3.15}$$

Les constantes $C(F,\boldsymbol{\beta})$ et $\widetilde{C}(F,\boldsymbol{\beta})$ sont qualitativement du même ordre. En effet, si l'on prend par exemple $\beta_1 = \cdots = \beta_\nu$ (ce qui est en fait impossible sous les hypothèses du théorème 3.3), on a dans l'équation (3.14)

$$C(F,\boldsymbol{\beta}) = \log(2eC_1(F,\beta_1)C_2(F,\beta_2))$$

et dans l'équation (3.15)

$$C(F,\boldsymbol{\beta}) = \nu^{-1}\log(C_1(F,\beta_1)) + \log(C_2(F,\beta_1)) + \log(2) + 2\log(\mathscr{D}) + \frac{(3\nu+2)}{\nu}\mathscr{D}.$$

Ainsi, la différence entre ces deux quantités dépendra de $C_1(F,\beta_1)$, v et le dénominateur $\mathscr{D}$.

Les expérimentations numériques que nous avons faites tendent à nous faire penser que la seconde quantité est systématiquement supérieure à la première, mais cependant proche d'elle.

3.3 Résultats quantitatifs sur la taille d'un système différentiel

Dans cette section, nous rappelons la notion de taille d'un système différentiel introduite dans le chapitre 1 et donnons plusieurs résultats quantitatifs à son sujet. Cela sera utile pour donner une expression explicite de la constante $C(F,\beta)$ du théorème 3.1 dans la section 3.4.

3.3.1 Taille d'un système différentiel

Dans cette sous-section, nous rappelons la définition de la notion de taille donnée dans le chapitre 1 (définition 1.7)

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres et $G \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on définit G_s comme la matrice telle que, si y est un vecteur satisfaisant $y' = Gy$, alors $y^{(s)} = G_s y$. En particulier, G_0 est la matrice identité. Les matrices G_s satisfont la relation de récurrence

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad G_{s+1} = G_s G + G_s',$$

où G_s' est la dérivée de la matrice G_s.

Définition 3.1 (*Galochkin, [27]*)

Soit $T(z) \in \mathbb{K}[z]$ tel que $T(z)G(z) \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}[z])$. On note, pour $s \in \mathbb{N}$, q_s le plus petit dénominateur supérieur ou égal à 1 de tous les coefficients des coefficients des matrices $T(z)^m \dfrac{G_m(z)}{m!}$, quand $m \in \{1,\dots,s\}$. On dit que le système $y' = Gy$ vérifie la condition de Galochkin *si*

$$\exists C > 0 : \forall s \in \mathbb{N}, \quad q_s \leqslant C^{s+1}.$$

Le théorème des Chudnovsky (théorème 0.3) affirme que si G est la matrice compagnon de l'opérateur minimal non nul L associé à une G-fonction, alors le système $y' = Gy$ satisfait la condition de Galochkin. C'est pour cette raison que L est appelé *G-opérateur* (voir [5, pp. 717–719] pour une revue des propriétés des G-opérateurs). On rappelle la notion de taille (voir section 1.2, dont on reprend les notations), qui permet de reformuler la condition de Galochkin en termes p-adiques.

Définition 3.2 (*[21], p. 227*)

Soit $G \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$. La taille *de G est*

$$\sigma(G) := \limsup_{s\to+\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})} h(s,\mathfrak{p}),$$

où

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad h(s,\mathfrak{p}) = \sup_{m\leqslant s} \log^+ \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}},$$

avec $\log^+ : x \mapsto \log(\max(1,x))$. *La* taille *de $Y = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m z^m$, $Y_m \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est*

$$\sigma(Y) := \limsup_{s\to+\infty} \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})} \sup_{m\leqslant s} \log^+ \|Y_m\|_\mathfrak{p}.$$

Remarque. Si $u(z)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$, on a

$$\sigma(u)=\frac{1}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}\limsup_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\log(\mathrm{den}'(u_0,\dots,u_s))\geqslant\frac{1}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}\limsup_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\log(\mathrm{den}(u_0,\dots,u_s)),$$

de sorte que

$$\limsup_{s\to+\infty}\mathrm{den}(u_0,\dots,u_s)^{1/s}\leqslant e^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\sigma(u)}.$$

Le lien entre la condition de Galochkin et la taille est donné par la proposition 1.2 dans la section 1.2.2. Rappelons deux conséquences de cette proposition :

- On a $\sigma(G)<+\infty$ si et seulement si G satisfait la condition de Galochkin.
- Quand $G\in M_n(\mathbb{Q}(z))$ et $T(z)\in\mathbb{Z}[z]$ a au moins un coefficient égal à 1, on a l'égalité

$$\sigma(G)=\limsup_{s\to+\infty}\frac{1}{s}\log(q_s).$$

Les lemmes techniques suivants montrent que la taille d'un système différentiel ou d'un opérateur différentiel est invariante par changement de variable $u=z^{-1}$. On rappelle qu'elle est invariante par équivalence de systèmes différentiels (lemme 1.2).

Lemme 3.8

a) *Soient $G\in\mathcal{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$ et $G_\infty(u):=-u^{-2}G(u^{-1})$ la matrice telle que $y'=Gy\Leftrightarrow\widetilde{y}'=G_\infty\widetilde{y}$, où $\widetilde{y}(u)=y(u^{-1})$. Alors on a*

$$\forall s\in\mathbb{N}^*,\quad G_{\infty,s}(u)=(-1)^s\sum_{k=1}^{s}\frac{c_{s,k}}{u^{s+k}}G_k\left(\frac{1}{u}\right),\tag{3.16}$$

où

$$\forall s\in\mathbb{N}^*,\quad\forall 1\leqslant k\leqslant s,\quad c_{s,k}=\binom{s-1}{s-k}\frac{s!}{k!}\in\mathbb{Z}.\tag{3.17}$$

b) *Soit*

$$L=P_\mu(z)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\mu}+P_{\mu-1}(z)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\mu-1}+\dots+P_0(z)\in\mathbb{K}(z)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right],$$

on considère $L_\infty\in\mathbb{K}(u)[\mathrm{d}/\mathrm{d}u]$ tel que pour tout f, $L(f(z))=0\Leftrightarrow L_\infty(g(u))=0$, où $g(u)=f(u^{-1})$. Alors les systèmes différentiels $y'=(A_L)_\infty y$ et $y'=A_{L_\infty}y$ sont équivalents sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

c) *On a*

$$L_\infty=P_{\mu,\infty}(u)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{\mu}+P_{\mu-1,\infty}(u)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{\mu-1}+\dots+P_{0,\infty}(u),$$

où

$$\forall s\in\{1,\dots,\mu\},\quad P_{s,\infty}(u)=\sum_{s=k}^{\mu}(-1)^s c_{s,k}u^{s+k}P_s\left(\frac{1}{u}\right)\qquad\text{et}\quad P_{0,\infty}(u)=P_0\left(\frac{1}{u}\right).$$

Le lemme 3.8 implique que la taille est invariante par changement de variable $u=z^{-1}$, comme énoncé dans le lemme suivant.

Lemme 3.9

On garde les mêmes notations que dans le lemme 3.8. Alors

a) *Pour tout $G\in\mathcal{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$, on a $\sigma(G_\infty)=\sigma(G)$.*

b) *Pour tout* $M \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, *on a* $\sigma(M_\infty) = \sigma(M)$.

Démonstration du lemme 3.8. **a)** Nous allons montrer par récurrence sur s que

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad G_{\infty,s}(u) = (-1)^s \sum_{k=1}^{s} \frac{c_{s,k}}{u^{s+k}} G_k\left(\frac{1}{u}\right), \tag{3.18}$$

où $c_{1,1} = 1$ et

$$\forall s \in \mathbb{N}^*,\ \forall 1 \leqslant k \leqslant s+1, \quad c_{s+1,k} = \begin{cases} (s+1)c_{s,1} & \text{si } k=1 \\ c_{s,k-1} + (s+k)c_{s,k} & \text{si } 2 \leqslant k \leqslant s\,. \\ c_{s,s} & \text{si } k = s+1 \end{cases} \tag{3.19}$$

Pour $s = 1$, c'est la définition de G_∞. Supposons que (3.16) est vérifiée pour un certain $s \in \mathbb{N}^*$; alors, comme $G_{s+1} = G_s G + G'_s$,

$$\begin{aligned}
G_{\infty,s+1}(u) &= G_{\infty,s}(u)G_\infty(u) + G'_{\infty,s}(u) = -\frac{1}{u^2}G_{\infty,s}(u)G\left(\frac{1}{u}\right) + G'_{\infty,s}(u) \\
&= (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{s}\frac{c_{s,k}}{u^{s+k+2}}G_k\left(\frac{1}{u}\right)G\left(\frac{1}{u}\right) + (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{s}\frac{c_{s,k}}{u^{s+k+2}}G'_k\left(\frac{1}{u}\right) + (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{s}\frac{(s+k)c_{s,k}}{u^{s+k+1}}G_k\left(\frac{1}{u}\right) \\
&= (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{s}\frac{c_{s,k}}{u^{s+k+2}}\left(G_k\left(\frac{1}{u}\right)G\left(\frac{1}{u}\right) + A'_k\left(\frac{1}{u}\right)\right) + (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{s}\frac{(s+k)c_{s,k}}{u^{s+k+1}}G_k\left(\frac{1}{u}\right) \\
&= (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{s}\frac{c_{s,k}}{u^{s+k+2}}G_{k+1}\left(\frac{1}{u}\right) + (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{s}\frac{(s+k)c_{s,k}}{u^{s+k+1}}G_k\left(\frac{1}{u}\right) = (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^{s+1}\frac{c_{s+1,k}}{u^{s+1+k}}G_k\left(\frac{1}{u}\right),
\end{aligned}$$

où les coefficients $c_{s+1,k}$ vérifient (3.19). Ceci conclut la preuve de (3.16).

Il reste à expliciter les coefficients $c_{s,k}$. Montrons que

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad \forall 1 \leqslant \ell \leqslant s, \quad c_{s,\ell} = \binom{s-1}{s-\ell}\frac{s!}{\ell!} := \widetilde{c}_{s,\ell}. \tag{3.20}$$

Il suffit pour cela de vérifier que les suites $(c_{s,\ell})_{s,\ell}$ et $(\widetilde{c}_{s,\ell})_{s,\ell}$ vérifient la même relation de récurrence (3.19). En effet, on a $c_{1,1} = 1 = \widetilde{c}_{1,1}$.

Soient donc $s \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \ldots, s-2\}$, alors selon (3.16),

$$\begin{aligned}
(s+s-k)c_{s,s-k} + c_{s,s-(k+1)} &= (2s-k)\binom{s-1}{k}\frac{s!}{(s-k)!} + \binom{s-1}{k+1}\frac{s!}{(s-k-1)!} \\
&\overset{\text{triangle de Pascal}}{=} (2s-k)\binom{s}{k+1}\frac{s!}{(s-k)!} + \binom{s-1}{k+1}\left[\frac{s!}{(s-k-1)!} - (2s-k)\frac{s!}{(s-k)!}\right] \\
&= (2s-k)\binom{s}{k+1}\frac{s!}{(s-k)!} - \binom{s-1}{k+1}s\frac{s!}{(s-k)!} \\
&= \frac{s!}{(s-k)!}\left[(2s-k)\binom{s}{k+1} - \frac{s!}{(k+1)!(s-k-2)!}\right] \\
&= \frac{s!}{(k+1)!}\frac{s!}{(s-k)!}\left[\frac{2s-k}{(s-k-1)!} - \frac{1}{(s-k-2)!}\right] \\
&= \frac{s!}{(k+1)!}\frac{s!}{(s-k)!}\frac{s+1}{(s-k-1)!} = \binom{s+1}{k+1}\frac{(s+1)!}{(s+1-(k+1))!} = \widetilde{c}_{s+1,s+1-(k+1)}
\end{aligned}$$

De plus, $\widetilde{c}_{s+1,1} = (s+1)! = (s+1)\widetilde{c}_{s,1}$ et $\widetilde{c}_{s+1,s+1} = 1 = \widetilde{c}_{s,s}$. Par suite, $\left(\widetilde{c}_{s,h}\right)_{\substack{s\in\mathbb{N}^* \\ 0\leqslant h\leqslant s}}$ satisfait la relation de récurrence (3.19), ce qui prouve (3.17).

b) On a pour tout f, $L(f(z)) = 0 \Leftrightarrow L_\infty(g(u)) = 0$, où $g(u) = f(u^{-1})$. Notons $G = A_L$ la matrice compagnon de L. On pose, pour tout f satisfaisant $L(f(z)) = 0$,

$$y(z) := {}^t\left(f(z), f'(z), \dots, f^{(\mu-1)}(z)\right) \quad \text{et} \quad w(u) := {}^t\left(g(u), g'(u), \dots, g^{(\mu-1)}(u)\right),$$

de même que $\widetilde{y}(u) := y(u^{-1})$. Les solutions de $h' = G_\infty h$ (resp. $h' = A_{L_\infty} h$) sont les vecteurs $\widetilde{y}(u)$ (resp. $w(u)$), quand $L(f(z)) = 0$.

L'équation (3.16) ci-dessus donne pour tout $s \in \mathbb{N}^*$

$$\widetilde{y}^{(s)}(u) = G_{\infty,s}(u)\widetilde{y}(u) = (-1)^s \sum_{k=1}^{s} \frac{c_{s,k}}{u^{s+k}} G_k\left(\frac{1}{u}\right) y\left(\frac{1}{u}\right) = (-1)^s \sum_{k=1}^{s} \frac{c_{s,k}}{u^{s+k}} y^{(k)}\left(\frac{1}{u}\right), \tag{3.21}$$

de sorte qu'en prenant la première composante des vecteurs de chaque côté de l'égalité, on obtient

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad g^{(s)}(u) = (-1)^s \sum_{k=1}^{s} \frac{c_{s,k}}{u^{s+k}} f^{(k)}\left(\frac{1}{u}\right).$$

Par suite, $w(u) = P(u)\widetilde{y}(u)$, où $P(u)$ est une matrice triangulaire inférieure dont la diagonale ne comporte que des termes non nuls. Ainsi, $P \in \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}(u))$ et $\widetilde{y} \mapsto P\widetilde{y}$ est une bijection de l'ensemble des solutions de $h' = G_\infty h$ vers l'ensemble des solutions de $h' = A_{L_\infty}(u)h$. Ces deux systèmes différentiels sont donc équivalents sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

c) Comme $(G_\infty)_\infty = G$, on peut échanger les rôles de y et $\widetilde{y}$ dans (3.21) pour obtenir

$$y^{(s)}(z) = G_s(z) y(u) (-1)^s \sum_{k=1}^{s} \frac{c_{s,k}}{z^{s+k}} \widetilde{y}^{(k)}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{3.22}$$

En prenant de même la première composante des vecteurs de chaque côté de l'égalité (3.22), on obtient

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad f^{(s)}(z) = (-1)^s \sum_{k=1}^{s} \frac{c_{s,k}}{z^{s+k}} g^{(k)}\left(\frac{1}{z}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
L(f(z)) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{s=1}^{\mu} P_s(z) \sum_{k=1}^{s} \frac{c_{s,k}}{z^{s+k}} g^{(k)}\left(\frac{1}{z}\right) + P_0(z) g\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\mu} \left(\sum_{s=k}^{\mu} (-1)^s \frac{c_{s,k}}{z^{s+k}} P_s(z)\right) g^{(k)}\left(\frac{1}{z}\right) + P_0(z) g\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow P_{\mu,\infty}(u) g^{(\mu)}(u) + \cdots + P_{0,\infty}(u) g(u) = 0,
\end{aligned}$$

où les $P_{\ell,\infty}(u)$ sont définis dans l'énoncé du lemme. □

Démonstration du lemme 3.9. **a)** Par le lemme 3.8 **a)**, on a pour $s \in \mathbb{N}^*$,

$$G_{\infty,s}(u) = (-1)^s \sum_{k=1}^{s} \frac{c_{s,k}}{u^{s+k}} G_k\left(\frac{1}{u}\right), \quad \text{où } c_{s,k} = \binom{s-1}{s-k} \frac{s!}{k!} \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant k \leqslant s.$$

Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})$, alors $\left|\binom{s-1}{s-k}\right|_\mathfrak{p} \leqslant 1$, de sorte que

$$\left\|\frac{G_{\infty,s}}{s!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant s} \left(\left\|\frac{G_k(u^{-1})}{k!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}\right) = \max_{1 \leqslant k \leqslant s} \left(\left\|\frac{G_k(u)}{k!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}\right)$$

puisque, si $h(z) \in \mathbb{K}(z)$, alors $|h(z^{-1})|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} = |h(z)|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}}$. Par conséquent,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant s}\left(\left\|\frac{G_{\infty,k}(u)}{k!}\right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}}\right) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant s}\left(\left\|\frac{G_k(u)}{k!}\right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}}\right),$$

d'où $\sigma(G_\infty) \leqslant \sigma(G)$. Comme $(G_\infty)_\infty = G$, on a finalement $\sigma(G) = \sigma(G_\infty)$.

c) Si $G = A_M$ est la matrice compagnon de M et G_∞ est définie comme dans le point **a)**, alors $\sigma(G) = \sigma(G_\infty)$. Mais le lemme 3.8 **b)** implique que les systèmes différentiels $y' = A_{M_\infty}y$ et $y' = G_\infty y$ sont équivalents sur $\overline{\mathbb{Q}}(u)$. D'où, par le lemme 1.2, $\sigma(M_\infty) = \sigma(M)$. □

3.3.2 Une forme quantitative du théorème des Chudnovsky

Le but de cette sous-section est d'énoncer et généraliser des résultats de Dwork [21, chapitres VII et VIII] formulant une relation entre la taille de $\sigma(G)$ et la taille des G-fonctions qui sont solutions du système différentiel $y' = Gy$. Ceci sera un point clé de la méthode employée dans la section 3.4.

Rappelons que si $\zeta \in \mathbb{K}$, la *taille logarithmique absolue* de ζ est

$$h(\zeta) = \sum_{\tau:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{C}} |\zeta|_\tau + \sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})} |\zeta|_\mathfrak{p}$$

avec, pour tout plongement $\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$,

$$|\zeta|_\tau = \begin{cases} |\tau(\zeta)|^{1/[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} & \text{si } \tau(\mathbb{K}) \subset \mathbb{R} \\ |\tau(\zeta)|^{2/[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème suivant est une combinaison des théorèmes 2.1, p. 228, 3.3, p. 238 et 4.3, p. 243 dans [21, chapitre VII].

Théorème 3.4 (*[21]*)

Supposons que $G \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$ satisfait la condition de Galochkin $\sigma(G) < +\infty$ *Soit une matrice fondamentale de solutions du système $y' = Gy$ de la forme $Y(z)z^C$, où $C \in \mathscr{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ est une matrice à valeurs propres dans $\mathbb{Q}$ et $Y(z) \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}[\![z]\!])$, qui existe selon le théorème d'André-Chudnovsky-Katz . Alors on a*

$$\sigma(Y) \leqslant \Lambda(G) := \mu^2\sigma(G) + \mu^2 + \mu - 1 + \mu(\mu-1)H(N_C) + (\mu^2+1)\sum_{\zeta\neq 0,\infty} h(\zeta),$$

où la somme porte sur les singularités non apparentes ζ du système $y' = Gy$, N_C est le dénominateur commun des valeurs propres de C et

$$H(N) := \frac{N}{\varphi(N)}\sum_{(j,N)=1}\frac{1}{j}, \qquad \text{où } \varphi \text{ est la fonction indicatrice d'Euler.}$$

Remarques. • Dans le cas où G est une matrice compagnon A_L associé à un opérateur différentiel $L \in \mathbb{K}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, N_C est le dénominateur commun des exposants de L en 0.
• Par souci de simplicité, on notera $\Lambda(L) := \Lambda(A_L)$ dans ce cas.

Nous aimerions trouver une borne supérieure simple sur la taille $\sigma(G)$ apparaissant dans l'expression de $\Lambda(G)$ dans le théorème 3.4 ci-dessus. Il s'agit d'une constante qui peut être difficile à calculer, alors qu'il est parfois plus simple d'étudier le comportement d'une solution particulière de $y' = Gy$. C'est l'intérêt de la version quantitative du théorème des Chudnovsky suivante.

Théorème 3.5 (*[21], p. 299*)

Soit $y(z) \in \mathbb{K}[[z]]^\mu$ un vecteur de G-fonctions dont les composantes forment une famille libre sur $\mathbb{K}(z)$ et $G \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$ une matrice telle que $y' = Gy$. Soit $T(z) \in \mathbb{K}[z]$ tel que $T(z)G(z) \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{K}[z])$, et $t := \max(\deg(TG), \deg(T))$. Alors, si $\mu \geqslant 2$,

$$\sigma(G) \leqslant (5\mu^2(t+1) - 1 - (\mu-1)(t+1))\overline{\sigma}(y),$$

où $\overline{\sigma}(y) = \sigma(y) + \limsup\limits_{s\to+\infty} \dfrac{1}{s} \sum\limits_{\tau:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{C}} \sup\limits_{m\leqslant s} \log^+ |y_m|_\tau$. Si $\mu = 1$, on a

$$\sigma(G) \leqslant (6(t+1) - 1)\overline{\sigma}(y).$$

Remarques. • En particulier, si G est la matrice compagnon d'un opérateur différentiel L d'ordre minimal $\mu \geqslant 2$ annulant une G-fonction $F(z)$, le théorème 3.5 peut être reformulé en

$$\sigma(L) \leqslant (5\mu^2(\delta+1) - 1 - (\mu-1)(\delta+1))\overline{\sigma}(F), \quad \delta = \deg_z(L),$$

ou bien si $\mu = 1$, $\sigma(L) \leqslant (6(\delta+1) - 1)\overline{\sigma}(F)$.

• En pratique, on utilise la formule d'Hadamard-Cauchy pour estimer la partie analytique de $\overline{\sigma}(y)$. En notant R_τ le rayon de convergence de $\sum\limits_{m\geqslant 0} \tau(y_m) z^m$ pour tout plongement $\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$, on obtient

$$\limsup_{s\to+\infty} \frac{1}{s} \sum_{\tau:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{C}} \max_{m\leqslant s} \log^+ |y_m|_\tau \leqslant \frac{1}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} \sum_{\tau:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{C}} \varepsilon_\tau \max\big(0, -\log(R_\tau)\big)$$

avec $\varepsilon_\tau = 1$ si $\tau(\mathbb{K}) \subset \mathbb{R}$ et 2 sinon.

André a prouvé dans [5] un analogue du théorème des Chudnovsky pour des séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome d'ordre 0. Nous rappelons que nous avons prouvé dans le chapitre 1 le théorème 1.3 qui est une version quantitative de ce résultat, et ainsi une généralisation aux séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome du théorème 3.5.

3.3.3 Estimation de la taille de L_β

On a vu dans le lemme 3.1 que l'opérateur différentiel d'ordre μ

$$L_\beta := \sum_{j=0}^{\ell} z^j Q_{j,\beta}(\theta + j) \in \mathbb{K}\left[z, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right], \tag{3.23}$$

où $Q_{j,\beta}(X) := \mathscr{D}^\mu Q_j(X-\beta)$, est l'opérateur minimal sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de la série Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome $z^\beta F(z)$. On introduit $m \in \mathbb{N}^*$ et l'opérateur

$$\widetilde{L}_\beta = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^\ell z^{m-1} L_\beta.$$

Dans la section 3.4, un point crucial est l'évaluation de $\sigma(\widetilde{L}_\beta)$ en fonction de $\sigma(L)$ ou de $\overline{\sigma}(F)$. En effet, $\sigma(\widetilde{L}_\beta)$ apparaît dans l'expression de $C(F,\beta)$.

On peut maintenant répondre à cette question de deux manières différentes, en utilisant respectivement les résultats des chapitres 1 et 2.

1) D'une part, si $L_0 = (\mathrm{d}/\mathrm{d}z)^\ell$, le théorème 1.4 implique que

$$\sigma(\widetilde{L}_\beta) \leqslant \ell + 2\sigma(L_0) + \sigma(L_\beta) \tag{3.24}$$

puisque $\sigma(z^{m-1}L_\beta) = \sigma(L_\beta)$. De plus, une base de solutions de l'équation $L_0(y(z)) = 0$ est $(1, z, \dots, z^{\ell-1})$ de sorte qu'une matrice fondamentale de solutions du système $y' = A_{L_0} y$ est la matrice wronskienne

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & z & \dots & z^{\ell-1} \\ 0 & 1 & & (\ell-1)z^{\ell-2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\ell-1)! \end{pmatrix},$$

qui satisfait $Y^{(s)} = 0$ pour s assez grand. D'où $(A_{L_0})_s = Y^{(s)}Y^{-1} = 0$ pour s assez grand et par suite $\sigma(L_0) = 0$.

En appliquant le théorème 1.2 à la série Nilsson-Gevrey $z^\beta F(z)$, on obtient

$$\sigma(L_\beta) \leqslant \big(1 + \log(2)\big) \max\big(1, 2\log(\mathscr{D}), \big((5 + \varepsilon_{\mu,1})\mu^2(\delta+1) - 1 - (\mu-1)(\delta+1)\big)\overline{\sigma}(F)\big), \tag{3.25}$$

où $\varepsilon_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est le symbole de Kronecker, et

$$\sigma(\widetilde{L}_\beta) \leqslant \ell + \big(1 + \log(2)\big) \max\big(1, 2\log(\mathscr{D}), \big((5 + \varepsilon_{\mu,1})\mu^2(\delta+1) - 1 - (\mu-1)(\delta+1)\big)\overline{\sigma}(F)\big).$$

Ceci est la borne que l'on voulait.

2) Dans le chapitre 2, nous avons essayé une autre méthode pour obtenir une inégalité du type de (3.25) : nous avons adapté directement la preuve du théorème des Chudnovsky au cas d'une sous-classe de l'ensemble $\mathscr{S}(\mathbb{K})[\![z]\!]$ des séries Nilsson-Gevrey de type arithmétique. Ceci donne le théorème 2.4. Ses hypothèses sont plus fortes que celles du théorème 1.3, car il demande une condition de liberté sur le corps des fractions $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$ de $\mathscr{S}(\mathbb{K})[z]$.

Cependant, dans le cas particulier qui nous intéresse, on peut montrer que si $\beta \in \mathbb{Q}$ et L est l'opérateur minimal d'ordre μ de $F(z) \in \mathbb{K}[\![z]\!]$, alors L_β est l'opérateur minimal de $z^\beta F(z)$ sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$. En effet, notons $G(z) = z^\beta F(z)$, alors selon le lemme 3.1, L_β est l'opérateur minimal de $G(z)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Ainsi, $(G(z), G'(z), \dots, G^{(\mu-1)}(z))$ est libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Or,

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{N},\ G^{(s)}(z) &= \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \left(z^\beta\right)^{(s-k)} F^{(k)}(z) = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \binom{\beta}{s-k} (s-k)! z^{\beta-(s-k)} F^{(k)}(z) \\ &= z^\beta \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \binom{\beta}{s-k} (s-k)! z^{k-s} F^{(k)}(z) \in z^{\beta-\mu}\mathbb{K}[\![z]\!]. \end{aligned}$$

Selon le point ***iii)*** de la remarque finale de la section 2.3, $(z^{-\beta+\mu}G(z), \dots, z^{-\beta+\mu}G^{(\mu-1)}(z))$ est donc libre sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$; par conséquent, il en va de même de $(G(z), \dots, G^{(\mu-1)}(z))$.

Comme $L_\beta(G(z)) = 0$ et $L_\beta \in \mathbb{K}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ est d'ordre μ, on en déduit que L_β est l'opérateur minimal de G sur $\mathscr{RS}(\mathbb{K})[z]$. En appliquant le théorème 2.4 à la fonction $z^\beta F(z)$, on obtient donc

$$\sigma(L_\beta) \leqslant 2\log(\mathscr{D}) + 2[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]\mu(2\mu+1)(\delta+1)\overline{\sigma}(F), \tag{3.26}$$

donc selon (3.24),

$$\sigma(\widetilde{L}_\beta) \leqslant \ell + 2\log(\mathscr{D}) + 2[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]\mu(2\mu+1)(\delta+1)\overline{\sigma}(F).$$

Ceci est la borne que l'on voulait.

Comparons à présent les deux méthodes employées ci-dessus. Pour simplifier, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $\mathscr{D} \geqslant 2$ (*i.e.* $\beta \notin \mathbb{Z}$).

- Si $\mathscr{D} \geqslant \exp\big((5+\varepsilon_{\mu,1})\mu^2(\delta+1)-1-(\mu-1)(\delta+1))\overline{\sigma}(F)/2\big)$, alors (3.25) donne

$$\sigma(L_\beta) \leqslant 2\big(1+\log(2)\big)\log(\mathscr{D}),$$

qui est une meilleure estimation sur $\sigma(L_\beta)$ que (3.26) si et seulement si

$$\overline{\sigma}(F) > \frac{\log\big(\mathscr{D}+2\big)}{\mu(2\mu+1)(\delta+1)}.$$

- Sinon, on voit que la fonction

$$\begin{array}{rccl}\mathrm{Comp}: & \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mu,\delta) & \longmapsto & (1+\log(2))\big((5+\varepsilon_{\mu,1})\mu^2(\delta+1)-1-(\mu-1)(\delta+1)\big)-2\mu(2\mu+1)(\delta+1)\end{array}$$

est strictement positive. En effet, pour $\mu \geqslant 2$ $\mathrm{Comp}(\mu,\delta) = A(\mu)(\delta+1)-(1+\log(2))$, où

$$A(\mu) := (3+5\log(2))\mu^2-(3+\log(2))\mu+1+\log(2)$$

est strictement plus grand que $1+\log(2)$ pour tout $\mu \geqslant 2$. De plus, $\mathrm{Comp}(1,\delta) = 6\log(2)(\delta+1)-1-\log(2) \geqslant 0$ pour tout $\delta \in \mathbb{N}$.
D'où, si $(\mu,\delta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et $\mathscr{D} \leqslant \exp\big(\overline{\sigma}(F)\mathrm{Comp}(\mu,\delta)/2\big)$, alors (3.26) est une meilleure estimation que (3.25).
- Sinon, si $\mathscr{D} > \exp\big(\overline{\sigma}(F)\mathrm{Comp}(\mu,\delta)/2\big)$, alors (3.25) est une meilleure estimation que (3.26).

Considérons finalement l'exemple explicite suivant : soit $F(z)$ la G-fonction hypergéométrique

$$F(z) = {}_2F_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{11},\frac{1}{6};z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)_k\left(\frac{2}{11}\right)_k}{\left(\frac{1}{6}\right)_k k!}z^k$$

dont l'opérateur minimal sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est

$$L = z(z-1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^2+\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{11}+1\right)z-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{2}{11}.$$

On prend $\beta = 1/7$. Il satisfait $\delta = \mu = 2$. On obtient donc avec (3.25) $\sigma(L_\beta) \leqslant 1232$ et avec (3.26) $\sigma(L_\beta) \leqslant 784$. On voit donc que notre méthode alternative améliore la borne (3.25) sur $\sigma(L_\beta)$.

3.4 Calcul des constantes C_1 et C_2

Le but de cette section est de prouver le théorème 3.2 énoncé dans l'introduction du chapitre. Les résultats de la section 3.3 seront beaucoup utilisés.

A cette fin, nous rappelons que si $C_1(F,\beta)$ et $C_2(F,\beta)$ satisfont les conditions de la proposition 3.2 **b)** et **c)**, alors l'équation (3.2) de la sous-section 3.2.3 implique que

$$C(F,\beta) = \log(2eC_1(F,\beta)C_2(F,\beta))$$

est une constante convenable dans le théorème 3.1

Dans [24], l'existence de constantes $C_1(F,\beta)$ et $C_2(F,\beta)$ pour $\beta = 0$ de la proposition 3.2 a été démontrée, mais aucune formule ou algorithme n'a été donné pour les calculer explicitement. Nous voulons donner une expression explicite de ces constantes.

Commençons par expliquer comment les constantes $C_1(F,\beta)$ et $C_2(F,\beta)$ sont définies. On prend m tel que pour tout $n \geqslant m$, $Q_\ell(-n-\beta) \neq 0$ et $Q_0(-n-\beta) \neq 0$. Un m convenable est le plus petit entier positif tel que $m > -e-\beta$ et $m > f-\ell-\beta$ pour tout exposant e de L en 0 tel que $e+\beta \in \mathbb{Z}$ et tout exposant f de L en l'infini tel que $f-\beta \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_{1,\beta}(n))_{n\geqslant m}, \dots, (u_{\ell,\beta}(n))_{n\geqslant m}$ une base de solutions de la relation de récurrence linéaire homogène associé à l'opérateur $L_{\beta,\infty}$ obtenu à partir de L_β par un changement de variable $u = 1/z$:

$$\forall n \geqslant m\,, \quad \sum_{j=0}^{\ell} Q_j(-n-\beta)u(n+j) = 0. \tag{3.27}$$

Remarque. Si $\ell = 0$, la seule solution (3.27) est la suite nulle à partir de l'indice m. Donc les seules séries formelles $y(z) \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ solutions de $L_{\beta,\infty}(y(z)) = 0$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La réciproque est vraie : si L est un opérateur admettant au moins une solution série formelle au voisinage de 0 et tel que les seuls $y(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ satisfaisant $L(y(z)) = 0$ sont des polynômes, alors $\ell = 0$.

On suppose maintenant que $\ell \geqslant 1$. Définissons

$$W_\beta(n) = \begin{vmatrix} u_{1,\beta}(n+\ell-1) & \cdots & u_{\ell,\beta}(n+\ell-1) \\ u_{1,\beta}(n+\ell-2) & \cdots & u_{\ell,\beta}(n+\ell-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1,\beta}(n) & \cdots & u_{\ell,\beta}(n) \end{vmatrix}$$

le déterminant wronskien associé à la base $(u_{1,\beta}, \dots, u_{\ell,\beta})$ et

$$D_{j,\beta}(n) = (-1)^j \begin{vmatrix} u_{1,\beta}(n+\ell-2) & \cdots & u_{j-1,\beta}(n+\ell-2) & u_{j+1,\beta}(n+\ell-2) & \cdots & u_{\ell,\beta}(n+\ell-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1,\beta}(n) & \cdots & u_{j-1,\beta}(n) & u_{j+1,\beta}(n) & \cdots & u_{\ell,\beta}(n) \end{vmatrix} \tag{3.28}$$

un de ses mineurs d'ordre j.

Le même argument que dans [24, p. 20] montre que la constante $C_2(F,\beta)$ (resp. $C_1(F,\beta)$) peut être prise comme n'importe quelle borne supérieure sur $\limsup_{n\to+\infty} \delta_n^{3/n}$ (resp. $\limsup_{n\to+\infty} M_n^{1/n}$), où δ_n (resp. M_n) est un dénominateur commun (resp. le maximum des valeurs absolues) des nombres

$$\frac{1}{W_\beta(k)}, \ \frac{D_{j,\beta}(k)}{Q_\ell(1-k-\beta)}, \ u_{j,\beta}(k), \quad k \in \{m, \dots, n\}, \ j \in \{1, \dots, \ell\}.$$

Les quatre sous-sections suivantes sont consacrées au calcul de constantes convenables $C_1(F,\beta)$ et $C_2(F,\beta)$. Ceci prouvera le théorème 3.2. En particulier, nous verrons que $C_1(F,\beta)$ ne dépend en fin de compte que de F et pas de β.

Remarque préliminaire. La méthode que nous allons présenter pour calculer $C_2(F,\beta)$ peut être raffinée quand $\ell = 1$. Dans ce cas, il existe une façon beaucoup plus simple et directe de procéder.

En effet, si $\ell = 1$, alors (3.27) implique que

$$\forall n \geqslant m, \quad u(n+1) = \frac{Q_0(-n-\beta)}{Q_1(-n-\beta)} u(n),$$

de sorte que, en notant $Q_0(X) = \gamma_0 \prod_{i=1}^{\mu}(X-e_i)$ et $Q_1(X) = \gamma_1 \prod_{i=1}^{\mu}(X+f_i-1)$, on obtient

$$u(n) = \left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)^{n-m} \prod_{i=1}^{\mu} \frac{(m-f_i+1+\beta)_{n-m}}{(m+e_i-\beta)_{n-m}}.$$

Le même calcul que dans la sous-section 3.4.2 ci-dessous montre alors que

$$\limsup \delta_n^{3/n} \leqslant \mathrm{den}(1/\gamma_0)^3 \mathrm{den}(1/\gamma_1)^3 \mathrm{den}(\mathbf{e},\beta)^{6\mu} \mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)^{6\mu}$$
$$\exp\big(3(\mu+1)\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta) + 3\mu \mathrm{den}(\mathbf{e},\beta)\big) := C_2(F,\beta). \quad (3.29)$$

La constante $C_2(F,\beta)$ ainsi définie convient dans la proposition 3.2 dans le cas $\ell = 1$.

Dans tout ce qui suit, on suppose que $\ell \geqslant 2$. Notons que le théorème 3.2 est toujours vrai (mais d'intérêt moindre) si $\ell = 1$.

3.4.1 Estimation du dénominateur des $u_{j,\beta}(n)$

Dans cette sous-section, nous allons nous appuyer sur les résultats de la section 3.3 sur la taille des G-opérateurs pour estimer le dénominateur des $u_{j,\beta}(n)$ pour $j \in \{1,\dots,\ell\}$ quand n tend vers l'infini. Voici comment nous allons procéder.

On peut prouver comme dans [24, p. 13], que si $(u_n)_{n\geqslant m}$ est une solution de (3.27) (en particulier, $(u_{j,\beta}(n))_{n\geqslant m}$ est dans ce cas), alors $U(z^{-1}) = \sum_{n=m}^{\infty} u_n z^{-n}$ est une solution de $\widetilde{L}_\beta(U(z)) = 0$, avec

$$\widetilde{L}_\beta = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell} z^{m-1} L_\beta\,, \quad (3.30)$$

i.e. $U(z)$ est une solution de l'opérateur $\widetilde{L}_{\beta,\infty}$ obtenu par le changement de variable $u = z^{-1}$.

Le but de cette sous-section est de prouver la proposition suivante et de calculer la constante $\Lambda_0(L,\beta)$ qui y apparaît en fonction du paramètre β, de la fonction F et de son opérateur minimal L.

Proposition 3.6

Notons, pour $0 \leqslant j \leqslant \ell, Q_j(X) = \sum_{k=0}^{\mu} q_{j,k} X^k$. *Alors on a*

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{den}\big(u_{j,\beta}(k),\ 1 \leqslant j \leqslant \ell,\ m \leqslant k \leqslant n\big)^{1/n} \leqslant \exp\big([\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\Lambda_0(L,\beta)\big), \quad (3.31)$$

avec

$$\Lambda_0(L,\beta) = (\mu+\ell)^2\big(\ell+1+\log(2)\big)\max\big(1, 2\log(\mathscr{D}), \sigma(L)\big) + (\mu+\ell)^2 + \mu + \ell - 1$$
$$+ (\mu+\ell)(\mu+\ell-1)H\big(\mathrm{den}(f_1,\dots,f_\ell)\mathscr{D}\big) + \big((\mu+\ell)^2+1\big)\sum_{\zeta\neq 0,\infty} h(1/\zeta), \quad (3.32)$$

où la dernière somme porte sur les racines ζ *de* $\chi_L(z) := \sum_{j=0}^{\ell} q_{j,\mu} z^j$.

Le lemme suivant sera utile pour la preuve de la proposition 3.6, puisqu'il nous permet de trouver les singularités de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}$ en fonction des singularités de L_β. Nous donnons une preuve pour la convenance du lecteur.

Lemme 3.10

Soit $M \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$. *Alors les singularités* $\xi \in \mathbb{C}^*$ *de* M_∞ *sont les* ζ^{-1}, *quand* ζ *est une singularité non nulle finie de* M.

Démonstration du lemme 3.10. On pose

$$M = P_\mu(z)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\mu} + P_{\mu-1}(z)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\mu-1} + \dots + P_0(z).$$

Alors, par le lemme 3.8 **c)**, on a

$$M_\infty = P_{\mu,\infty}(u)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{\mu} + P_{\mu-1,\infty}(u)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{\mu-1} + \cdots + P_{0,\infty}(u),$$

où

$$\forall \ell \geqslant 1, \quad P_{\ell,\infty}(u) = \sum_{k=\ell}^{\mu} (-1)^k \binom{k-1}{k-\ell}\frac{k!}{\ell!}u^{\ell+k}P_k\left(\frac{1}{u}\right) \qquad \text{et} \quad P_{0,\infty}(u) = P_0\left(\frac{1}{u}\right). \tag{3.33}$$

Les singularités de M_∞ sont les ξ's tels qu'il existe $\ell \in \{0,\dots,\mu-1\}$ tel que $P_{\ell,\infty}/P_{\mu,\infty}$ a un pôle en ξ.

On écrit pour tout k

$$P_k(z) = \alpha_k u^{e_k}\prod_{i=1}^{d_k}(z-r_{i,k})^{\tau_{i,k}}. \tag{3.34}$$

Si $\zeta \neq 0,\infty$ n'est pas une singularité de M, alors pour tout k, ζ n'est pas un pôle de P_k/P_μ. En particulier, même dans le cas où ζ est une racine de $P_\mu(z)$, c'est une racine de multiplicité supérieure de P_k pour tout $k \in \{0,\dots,\mu-1\}$.

En observant que si $r \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{1}{u} - r = -\frac{1}{ru}\left(u - \frac{1}{r}\right),$$

l'expression (3.34) implique l'existence de $\gamma_k \in \mathbb{C}$ et $f_k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\frac{P_k(1/u)}{P_\mu(1/u)} = \gamma_k u^{f_k} Q_k(u),$$

où ζ^{-1} n'est pas un pôle de $Q_k(u) \in \overline{\mathbb{Q}}(u)$. Finalement, puisque $P_{\mu,\infty}(u) = (-1)^\mu u^{2\mu} P_\mu(u^{-1})$, l'équation (3.33) montre que pour tout $\ell \in \{0,\dots,\mu-1\}$, $P_{\ell,\infty}(u)/P_{\mu,\infty}(u)$ n'a pas de pôle en ζ^{-1}. En d'autres termes, ζ^{-1} est un point ordinaire de M_∞.

Puisque $(M_\infty)_\infty$ est égal à M à multiplication par un élément de $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ près, on obtient par symétrie que les points ordinaires $\xi \neq 0,\infty$ de M_∞ sont les ζ^{-1}, quand $\zeta \neq 0,\infty$ est un point ordinaire de M. Par conséquent, par définition, les singularités de M_∞ sont les ζ^{-1}, quand $\zeta \neq 0,\infty$ est une singularité de M. □

Démonstration de la proposition 3.6. Comme cela a été mentionné au début de cette sous-section, si $1 \leqslant j \leqslant \ell$, alors $U(z) = \sum_{n=m}^{\infty} u_{j,\beta}(n)z^n$ est une solution de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}(y(z)) = 0$, où $\widetilde{L}_{\beta,\infty}$ est défini par l'équation (3.30). Ainsi, par le théorème 3.4 et la remarque après l'équation (1.5), on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \operatorname{den}\big(u_{j,\beta}(k),\ 1 \leqslant j \leqslant \ell,\ m \leqslant k \leqslant n\big)^{1/n} \leqslant \exp\big([\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\Lambda\big(\widetilde{L}_{\beta,\infty}\big)\big). \tag{3.35}$$

La preuve consiste à présent essentiellement à majorer la constante $\Lambda(\widetilde{L}_{\beta,\infty})$ du théorème 3.4 en fonction de β, L et F.

- Puisque L_β est d'ordre μ, l'ordre de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}$ est $\mu+\ell$.
- L'ensemble des exposants de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}$ en 0 est l'ensemble des exposants de $\widetilde{L}_\beta$ en ∞, qui est l'union de l'ensemble des exposants de L_β en ∞ et de l'ensemble des exposants de $(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)^\ell z^{m-1}$ en ∞, qui sont tous entiers. Par conséquent, en notant $f_1,\dots,f_\ell$ les exposants de L en ∞, la constante N_C dans le théorème 3.4 est dans ce cas $\operatorname{den}(f_1+\beta,\dots,f_\ell+\beta)$, qui est un diviseur de $\operatorname{den}(f_1,\dots,f_\ell)\mathscr{D}$.

- Le lemme 3.10 nous assure que les points singuliers $\xi \neq 0, \infty$ de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}$ sont exactement les ζ^{-1}, quand ζ est une singularité finie non nulle de $\widetilde{L}_\beta$.
Mais $\widetilde{L}_\beta = (\mathrm{d}/\mathrm{d}z)^\ell\, z^{m-1} L_\beta$, de sorte que la formule de Leibniz montre que si

$$L_\beta = \sum_{k=0}^{\mu} P_{k,\beta}(z) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k, \quad \text{avec} \quad P_{k,\beta}(z) \in \mathbb{K}[z],$$

alors $\widetilde{L}_\beta = z^{m-1} P_{\mu,\beta}(z)\, (\mathrm{d}/\mathrm{d}z)^{\mu+\ell} + M$, où M est un opérateur différentiel d'ordre strictement inférieur à $\mu + \ell$. Donc les singularités finies non nulles de $\widetilde{L}_\beta$ sont parmi les racines de $P_{\mu,\beta}(z)$.
De plus, on peut écrire

$$\begin{aligned} \alpha z^{\mu-\omega} L &= \sum_{j=0}^{\ell} z^j Q_j(\theta + j) = \sum_{j=0}^{\ell} z^j \sum_{k=0}^{\mu} q_{j,k} (\theta + j)^k \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} z^j \sum_{k=0}^{\mu} q_{j,k} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} j^{k-s} \theta^s = \sum_{s=0}^{\mu} \left(\sum_{j=0}^{\ell} z^j \sum_{k=s}^{\mu} q_{j,k} j^{k-s} \right) \theta^s \end{aligned}$$

et de même

$$\frac{1}{\mathscr{D}^\mu} L_\beta = \sum_{j=0}^{\ell} z^j Q_j(\theta + j - \beta) = \sum_{s=0}^{\mu} \left(\sum_{j=0}^{\ell} z^j \sum_{k=s}^{\mu} q_{j,k} (j-\beta)^{k-s} \right) \theta^s.$$

Le coefficient devant θ^μ s'avère être le même pour L et $L_\beta/\mathscr{D}^\mu$; il est égal à $\chi_L(z) := \sum_{j=0}^{\ell} q_{j,\mu} z^j$ et est indépendant de β. Par conséquent, puisque

$$\theta^\mu = z^\mu \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^\mu + \sum_{k=1}^{\mu-1} a_k z^k \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k, \quad a_k \in \mathbb{C},$$

on a $L_\beta = z^\mu \chi_L(z) (\mathrm{d}/\mathrm{d}z)^\mu + M_\beta$, où M_β est d'ordre strictement inférieur à μ.
Donc, finalement, $P_{\mu,\beta}(z) = z^\mu \chi_L(z)$ et les singularités finies non nulles de $\widetilde{L}_\beta$ sont parmi les racines de $\chi_L(z)$, qui ne dépend pas de β. Il se peut que l'ensemble des singularités de $\widetilde{L}_\beta$ varie avec β au sein de l'ensemble des racines de χ_L, mais cela ne nous importe pas.
- On a $\sigma(\widetilde{L}_{\beta,\infty}) = \sigma(\widetilde{L}_\beta)$ par le lemme 3.9 **c)**.
- Selon les équations (3.24) et (**??**) de la partie 3.3.3, on a

$$\sigma(\widetilde{L}_\beta) \leqslant \ell + (1 + \log(2)) \max\big(1, 2\log(\mathscr{D}), \sigma(L)\big).$$

Tout cela donne, par le théorème 3.4 :

$$\begin{aligned} \Lambda(\widetilde{L}_{\beta,\infty}) \leqslant (\mu+\ell)^2 \Big(\ell + (1+\log(2)) \max\big(1, 2\log(\mathscr{D}), \sigma(L)\big)\Big) + (\mu+\ell)^2 + \mu + \ell - 1 \\ + (\mu+\ell)(\mu+\ell-1) H\big(\mathrm{den}(f_1, \ldots, f_\ell)\mathscr{D}\big) + ((\mu+\ell)^2 + 1) \sum_{\zeta \neq 0,\infty} h(1/\zeta) := \Lambda_0(L, \beta), \end{aligned} \tag{3.36}$$

où la dernière somme porte sur les racines de $\chi_L(z) = \sum_{j=0}^{\ell} q_{j,\mu} z^j$, qui ne dépend pas de β. □

Remarque. Puisque $\sigma(L) \leqslant \big(6\mu^2(\delta+1) - 1 - (\mu-1)(\delta+1)\big)\overline{\sigma}(F)$ par le théorème 3.5 ci-dessus, on a aussi

$$\sigma(\widetilde{L}_\beta) \leqslant \ell + \big(1 + \log(2)\big) \max\Big(1, 2\log(\mathscr{D}), \big(6\mu^2(\delta+1) - 1 - (\mu-1)(\delta+1)\big)\overline{\sigma}(F)\Big).$$

Ceci nous permet de calculer un majorant de $\Lambda_0(L, \beta)$ en termes de $\overline{\sigma}(F)$ plutôt que $\sigma(L)$.

3.4.2 Estimation du dénominateur de $1/W_\beta(n)$

Afin d'estimer le dénominateur de $1/W_\beta(n)$, nous allons nous appuyer sur une relation de récurrence d'ordre 1 satisfaite par $(W_\beta(n))_{n\geqslant m}$ qui nous permet de donner une expression de cette suite à l'aide de symboles de Pochhammer.

C'est pourquoi nous allons avoir besoin du lemme suivant. Il fournit des estimations sur le dénominateur d'un quotient de symboles de Pochhammer. Il est aussi nécessaire pour prouver le lemme 3.4 dans la sous-section 3.2.2 ci-dessus.

Lemme 3.11

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$. Alors

a) *On a*

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\mathrm{den}\left(\frac{(\alpha)_0}{(\beta)_0}, \dots, \frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n}\right)\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{den}(\alpha)^2 e^{\mathrm{den}(\beta)}. \tag{3.37}$$

b) *Dans le cas où $\beta = 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient binomial $\binom{\alpha+n-1}{n} := \frac{(\alpha)_n}{n!}$ satisfait*

$$\mathrm{den}(\alpha)^{2n}\binom{\alpha+n-1}{n} \in \mathbb{Z},$$

de sorte que

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\mathrm{den}\left(\frac{(\alpha)_0}{0!}, \dots, \frac{(\alpha)_n}{n!}\right)\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{den}(\alpha)^2. \tag{3.38}$$

Nous donnons une démonstration pour la convenance du lecteur. Elle est inspirée par un argument de Siegel dans [50, pp. 56–57]. Notons que (3.38) économise un facteur e par rapport à (3.37).

Démonstration. Écrivons $\alpha = a/b$, $\beta = c/d$ et supposons que a et b (resp. c et d) sont premiers entre eux. Soit

$$u_n = \frac{b^{2n}}{d^n}\frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n} = \frac{b^n a(a+b)\dots(a+(n-1)b)}{c(c+d)\dots(c+(n-1)d)}.$$

Si p est un facteur premier de $c(c+d)\dots(c+(n-1)d)$, alors, comme c et d sont premiers entre eux, p ne divise pas d. Si $\ell \in \mathbb{N}^*$, alors parmi p^ℓ entiers consécutifs de la forme $c+\nu d$, $\nu \in \{0,\dots,n-1\}$, un seul est divisible par p^ℓ. Ainsi, au moins $\lfloor n/p^\ell \rfloor$ et au plus $\lfloor n/p^\ell \rfloor + 1$ des $c+\nu d$ sont divisibles par p^ℓ. Ceci prouve que

$$\sum_{\ell=1}^{C_{n,p}}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^\ell}\right\rfloor + 1\right) \geqslant v_p(c(c+d)\dots(c+(n-1)d)) \geqslant \sum_{\ell=1}^{C_{n,p}}\left\lfloor \frac{n}{p^\ell}\right\rfloor = v_p(n!),$$

où $C_{n,p} = \lfloor \log(n)/\log(p) \rfloor$. De plus, en supposant que p ne divise pas b, on obtient de même

$$\sum_{\ell=1}^{C_{n,p}}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^\ell}\right\rfloor + 1\right) \geqslant v_p(a(a+b)\dots(a+(n-1)b)) \geqslant \sum_{\ell=1}^{C_{n,p}}\left\lfloor \frac{n}{p^\ell}\right\rfloor.$$

D'où

$$v_p(u_n) \geqslant -C_{n,p}.$$

Remarquons que si $\beta = 1$, on a $c = d = 1$ et $v_p(c(c+d)\dots(c+(n-1)d)) = v_p(n!) = \sum_{\ell=1}^{C_{n,p}} \lfloor n/p^\ell \rfloor$, si bien que $v_p(u_n) \geqslant 0$, d'où $\mathrm{den}(\alpha)^{2n}\frac{(\alpha)_n}{n!} \in \mathbb{Z}$. Cela prouve **b)**.

On revient au cas général $\beta \neq 1$. Si p divise b, alors

$$v_p(b^n a(a+b)\dots(a+(n-1)b)) \geqslant n v_p(b) \geqslant n,$$

et

$$v_p(c(c+d)\dots(c+(n-1)d)) \leqslant v_p(n!) + C_{n,p} \leqslant n + C_{n,p},$$

donc $v_p(u_n) \geqslant -C_{n,p}$. Par conséquent, $\Delta_n := \prod_{p \leqslant c+(n-1)d} p^{C_{n,p}}$ est un dénominateur commun de $u_0, \dots, u_n$, de sorte que $b^{2n}\Delta_n$ est un multiple de $\mathrm{den}\big((\alpha)_0/(\beta)_0, \dots, (\alpha)_n/(\beta)_n\big)$.

Et

$$\log \Delta_n = \sum_{p \leqslant c+(n-1)d} \log(p) \left\lfloor \frac{\log(n)}{\log(p)} \right\rfloor \leqslant \pi(c+(n-1)d)\log(n),$$

où π est la fonction de comptage des nombres premiers. Le théorème des nombres premiers implique alors que

$$\pi(c+(n-1)d) \sim \frac{c+(n-1)d}{\log(c+(n-1)d)} \sim d\frac{n}{\log(n)},$$

de sorte que $\log \Delta_n \leqslant dn + o(n)$. Puisque $b = \mathrm{den}(\alpha)$ et $d = \mathrm{den}(\beta)$, on obtient ainsi **a)**. □

Utilisons maintenant ce lemme pour majorer le dénomijnateur de $W_\beta(n)^{-1}$. On sait que $Q_0(X) = \gamma_0 \prod_{i=1}^{\mu}(X - e_i)$ et $Q_\ell(X) = \gamma_\ell \prod_{i=1}^{\mu}(X + f_i - \ell)$, où $\gamma_0, \gamma_\ell \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}$. Ainsi, on trouve avec le même calcul que dans [24, pp. 13–14] que

$$\forall n \geqslant m\,, \quad Q_\ell(-n-\beta)W_\beta(n+1) = (-1)^\ell Q_0(-n-\beta)W_\beta(n)$$

et par suite que

$$\forall n \geqslant m\,, \quad W_\beta(n) = W_\beta(m)\left((-1)^\ell \frac{\gamma_0}{\gamma_\ell}\right)^{n-m} \prod_{i=1}^{\mu} \frac{(m+e_i+\beta)_{n-m}}{(m-f_i+\ell+\beta)_{n-m}}. \tag{3.39}$$

D'où, par le lemme 3.11,

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{den}\left(\frac{1}{W_\beta(m)}, \frac{1}{W_\beta(m+1)}, \dots, \frac{1}{W_\beta(n)}\right)^{1/n} \leqslant \mathrm{den}(1/\gamma_0)\mathrm{den}(\mathbf{e},\beta)^{2\mu}\exp\big(\mu\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)\big), \tag{3.40}$$

où $\mathrm{den}(\mathbf{e},\beta) := \mathrm{den}(e_1, \dots, e_\mu, \beta)$ et $\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta) := \mathrm{den}(f_1, \dots, f_\mu, \beta)$.

3.4.3 Estimation du dénominateur des $D_{j,\beta}(n)/Q_\ell(1-n-\beta)$

On considère $\mathscr{D}_n := \mathrm{den}\big(u_{j,\beta}(k), 1 \leqslant j \leqslant \ell, m \leqslant k \leqslant n\big)$. Alors, par la formule du déterminant (3.28), on a

$$\forall m \leqslant k \leqslant n\,, \quad \mathscr{D}_{n+\ell-2}^{\ell-1} D_{j,\beta}(k) \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}.$$

De plus,

$$\frac{1}{Q_\ell(1-n-\beta)} = \frac{1}{\gamma_\ell}\prod_{i=1}^{\mu}\frac{1}{1-(n+\ell)+f_i-\beta} = \frac{\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)^\mu}{\gamma_\ell}\prod_{i=1}^{\mu}\frac{1}{\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)(1-(n+\ell))+\nu_i}$$

avec $\nu_i = \mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)(f_i - \beta)$. Pour $n \geqslant m$, on a

$$\forall k \leqslant n,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant \mu, \quad \big|\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)(1-(k+\ell)+\nu_i\big| \leqslant \mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)(n+\ell-1)+\nu_0,$$

où $v_0 = \max|v_i|$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant m,\ \forall m \leqslant k \leqslant n, \quad d^{\mu}_{\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)(n+\ell-1)+v_0} \mathrm{den}\big(1/\gamma_\ell\big) \frac{1}{Q_\ell(1-k-\beta)} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}},$$

avec $d_s = \mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,s)$. Finalement,

$$\forall m \leqslant k \leqslant n\,, \quad \mathscr{D}^{\ell-1}_{n+\ell-2} d^{\mu}_{\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)(n+\ell-1)+v_0} \mathrm{den}\big(1/\gamma_\ell\big) \frac{D_{j,\beta}(n)}{Q_\ell(1-n-\beta)} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}. \tag{3.41}$$

3.4.4 Conclusion de la preuve du théorème 3.2

Calcul de $C_2(F,\beta)$

On rappelle que δ_n est défini comme le dénominateur commun de $1/W_\beta(k), D_{j,\beta}(k)/Q_\ell(1-k-\beta)$ et $u_{j,\beta}(k)$, quand $k \in \{m,\ldots,n\}$ et $j \in \{1,\ldots,\ell\}$. Les équations (3.31), (3.40) et (3.41) donnent

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \delta_n^{1/n} &\leqslant \exp\big(\max(1,\ell-1)[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\Lambda_0(L,\beta)\big)\exp\big(\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)\big)\,\mathrm{den}\big(1/\gamma_0\big) \\ &\qquad \times \mathrm{den}(\mathbf{e},\beta)^{2\mu}\exp\big(\mu\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)\big) \\ &\leqslant \mathrm{den}\big(1/\gamma_0\big)\,\mathrm{den}(\mathbf{e},\beta)^{2\mu}\exp\big(\max(1,\ell-1)[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\Lambda_0(L,\beta)+(\mu+1)\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)\big),\end{aligned}$$

de sorte que

$$C_2(F,\beta) := \mathrm{den}\big(1/\gamma_0\big)^3\,\mathrm{den}(\mathbf{e},\beta)^{6\mu}\exp\big(3\max(1,\ell-1)[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\Lambda_0(L,\beta)+3(\mu+1)\mathrm{den}(\mathbf{f},\beta)\big)$$

majore $\limsup \delta_n^{3/n}$.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, nous observons que $C_2(F,\beta)$ dépend seulement de F et du dénominateur $\mathscr{D}$ de β.

Calcul de $C_1(F)$

Dans cette partie, nous allons trouver une constante explicite $C_1(F,\beta)$ satisfaisant la condition de la proposition 3.2 **b)**. Il s'avère qu'elle ne dépendra pas β.

- Comme toute série hypergéométrique de la forme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(a^{(1)})_k \ldots (a^{(p)})_k}{(b^{(1)})_k \ldots (b^{(p)})_k} z^k$ a rayon de convergence 1, en utilisant la formule (3.39), on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{W_\beta(n)}\right|^{1/n} \leqslant \left|\frac{\gamma_0}{\gamma_\ell}\right|.$$

- Soit $j \in \{1,\ldots,\ell\}$. On a vu dans la preuve de la proposition 3.6 que si $u_n = u_{j,\beta}(n)$ et $U(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} u_n z^n$, alors $\widetilde{L}_{\beta,\infty}(U(z)) = 0$.

Par le théorème de Frobenius [32, Theorem 3.5.2, p. 349], le rayon de convergence de U autour de 0 est exactement le plus grand $R > 0$ tel que les coefficients de la matrice compagnon associée à $\widetilde{L}_{\beta,\infty}$ sont holomorphes dans le disque $D(0,R)\setminus\{0\}$. Précisément, R est égal au minimum des $|\xi|$, quand ξ est une singularité non apparente et non nulle de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}$. La formule de Hadamard-Cauchy donne alors

$$\limsup_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = \frac{1}{R}.$$

De plus, on a vu dans la sous-section 3.4.1 que les singularités non nulles finies de $\widetilde{L}_{\beta,\infty}$ sont parmi les ζ^{-1}, quand $\zeta \neq 0$ est une racine de $\chi_L(z)$. Donc $R \geqslant \min_{\chi_L(\zeta)=0} |\zeta|^{-1}$, d'où

$$\limsup_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} \leqslant \Phi_0(L),$$

avec

$$\Phi_0(L) := \max_{\chi_L(\zeta)=0} |\zeta|\,,\ \text{ où }\ \chi_L(z) = \sum_{j=0}^{\ell} q_{j,\mu} z^j \ \text{ est indépendant de }\ \beta. \tag{3.42}$$

On rappelle que pour tout $j \in \{0,\ldots,\ell\}$, $Q_j(X) = \sum_{k=0}^{\mu} q_{j,k} X^j$.

- La formule du déterminant (3.28) implique alors que

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{D_{j,\beta}(n)}{Q_\ell(1-n-\beta)} \right|^{1/n} \leqslant \Phi_0(L)^{\ell-1}.$$

Finalement, $C_1(F) := \max\Big(1, \lceil \gamma_0/\gamma_\ell \rceil, \Phi_0(L)^{\max(1,\ell-1)}\Big)$ satisfait

$$\max_{m+1\leqslant k\leqslant n} \max\left(|u_{j,\beta}(k)|, \frac{1}{|W_\beta(k)|}, \frac{|D_{j,\beta}(k)|}{|Q_\ell(1-k-\beta)|} \right) \leqslant C_1(F)^{n(1+o(1))},$$

comme annoncé. Ceci achève la preuve du théorème 3.2. Notons que $C_1(F)$ ne dépend pas de β.

3.5 Exemples

Nous appliquons à présent le théorème 3.1 à des exemples classiques de G-fonctions, et calculons explicitement $C(F,\beta)$ dans ces cas particuliers. La seule vraie difficulté est de trouver une borne supérieure sur $\sigma(L)$, où L est l'opérateur minimal de la G-fonction $F(z)$, mais elle peut souvent être calculée à partir de ce que l'on sait du comportement arithmétique des coefficients de $F(z)$. Nous allons utiliser les résultats de la section 3.3 à cette fin. Nous avons implémenté sur Sage des programmes calculant $C(F,\beta)$ à supposer que l'on dispose d'une borne supérieure sur $\sigma(L)$.

Comme mentionné dans la remarque préliminaire de la section 3.4, les cas $\ell = 1$ et $\ell \geqslant 2$ utilisent des formules différentes – le premier cas étant beaucoup plus simple. C'est pourquoi les exemples suivants sont séparés selon ces deux catégories.

3.5.1 Exemples pour lesquels $\ell = 1$

- Considérons d'abord l'exemple simple de $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1/(1-z)$. L'opérateur minimal de F sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est

$$L = (1-z)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) - 1.$$

Il satisfait $\ell = \delta = 1$ et $\ell_0(0) = 1$ (voir (3.8)). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant s \leqslant S$, la G-fonction $F_{n,0}^{[s]}(z)$ est égale à

$$F_{n,0}^{[s]}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+n}}{(k+n)^s} = \mathrm{Li}_s(z) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^k}{k^s}, \tag{3.43}$$

de sorte que l'espace vectoriel engendré par les $F_{n,0}^{[s]}(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant s \leqslant S$ est égal à

$$\mathrm{Vect}\big(1, \mathrm{Li}_s(\alpha),\ 0 \leqslant s \leqslant S\big).$$

Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, Marcovecchio [40] a prouvé que

$$\dim \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}(\alpha)}\big(1, \mathrm{Li}_s(\alpha),\ 0 \leqslant s \leqslant S\big) \geqslant \frac{1+o(1)}{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]\,\big(1+\log(2)\big)} \log(S),$$

obtenant ainsi une constante convenable $\widetilde{C}(F,\beta) = 1+\log(2) \simeq 1.693$ pour le théorème 3.1 dans ce cas.
Avec notre méthode, puisque $\ell = 1$, on peut utiliser un raffinement de (3.29) autorisé par le lemme 3.11 **b)** et on trouve que $C(F,\beta) = 4+\log(2) \simeq 4.693$. Ainsi, notre méthode n'améliore pas dans ce cas la constante déjà connue dans la borne inférieure du théorème 3.1.

Remarque. L'opérateur L est un exemple de « cas trivial » pour nos estimations de la section 3.4, puisque $\ell = 1$ et de plus

$$\widetilde{L}_0 = (1-z)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^2 - 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)$$

satisfait $\sigma(\widetilde{L}_0) = 0$. En effet, soit A la matrice compagnon de $\widetilde{L}_0$; alors on peut prouver par récurrence que

$$A_s = \frac{(-1)^s s!}{(z-1)^s}\begin{pmatrix} 0 & 1-z \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}.$$

Si β est un nombre rationnel quelconque, l'étude de la suite $\left(F^{[s]}_{n,\beta}(z)\right)_{n,s}$ fournit un énoncé sur l'indépendance linéaire des valeurs des fonctions de Lerch, également citées dans [45, p. 2]. Elles sont définies pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\beta \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ par

$$\Phi_s(z,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\beta)^s}, \quad |z| < 1.$$

En effet, si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $0 < |\alpha| < 1$, le même raisonnement que dans (3.43) donne

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(F^{[s]}_{n,\beta}(\alpha), n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant s \leqslant S) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(1, \Phi_s(\alpha,\beta), 0 \leqslant s \leqslant S).$$

Par exemple, si $\beta = 1/2$, on calcule numériquement $C(F,\beta) \simeq 28.01$ de sorte qu'au moins $\dfrac{1+o(1)}{28.01}\log(S)$ des valeurs $\Phi_s(\alpha, 1/2)$ pour $0 \leqslant s \leqslant S$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, quand $S \to +\infty$.

- Soit $\nu \geqslant 2$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_\nu) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0})^\nu$ et $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_{\nu-1}) \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0})^{\nu-1}$. La fonction hypergéométrique $F(z) = {}_\nu F_{\nu-1}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; z)$ définie par

$${}_\nu F_{\nu-1}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_\nu)_k}{k!(b_1)_k \dots (b_{\nu-1})_k} z^k$$

est une G-fonction non polynomiale, qui est solution de l'équation hypergéométrique généralisée $\mathcal{H}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(y(z)) = 0$, où

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = z(\theta + a_1)\dots(\theta + a_\nu) - (\theta + b_1 - 1)\dots(\theta + b_{\nu-1} - 1)\theta \in \mathbb{Q}\left[z, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right].$$

Si pour tout i, j, $a_i - b_j \notin \mathbb{Z}$, alors $\mathcal{H}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ est un opérateur minimal sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de $F(z)$. Il satisfait $\mu = \nu$, $\delta \leqslant \nu + 1$ et $\omega = \nu$, donc $\ell = 1$.
Donc, par le théorème 3.5,

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{H}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) &\leqslant \big(5\nu^2(\nu+2) - 1 - (\nu-1)(\nu+2)\big)\overline{\sigma}(F) \\ &\leqslant \big(5\nu^2(\nu+2) - 1 - (\nu-1)(\nu+2)\big)\big(2\nu\log(\mathrm{den}(\boldsymbol{a}) + (\nu-1)\mathrm{den}(\boldsymbol{b})\big)\end{aligned}$$

puisque $F(z)$ a rayon de convergence 1, et en utilisant l'estimation sur le dénominateur d'un quotient de symboles de Pochhammer donnée par le lemme 3.11.
Les exposants de $\mathscr{H}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ en 0 sont $0, 1-b_1, \dots, 1-b_{\nu-1}$ et ses exposants en ∞ sont $a_1, \dots, a_\nu$.
Par exemple, pour $\nu = 2$, $a_1 = 1/3$, $a_2 = 2/11$, $b_1 = 1/6$, et $\beta = 1/7$, on trouve numériquement, d'une part $\sigma\left(\mathscr{H}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\right) \leqslant 1119$ et d'autre part $C(F,\beta) \simeq 2443$, de sorte que, si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ et $0 < |\alpha| < 1$, au moins $\dfrac{1+o(1)}{2443[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}\log(S)$ des nombres

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/3)_k(2/11)_k}{k!(1/6)_k} \frac{z^k}{(7k+1)^s}, \quad 0 \leqslant s \leqslant S$$

sont linéairement indépendants, quand S tend vers l'infini. Ceci fournit un raffinement de [24, Corollary 1, p. 4] dans ce cas, où la constante n'avait pas été donnée.

3.5.2 Exemples pour lesquels $\ell \geqslant 2$

- On considère d'abord la G-fonction suivante qui est algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{1-6z+z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \binom{k+j}{j}\binom{k}{j} z^k$$

dont l'opérateur minimal sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est

$$L = (z^2-6z+1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) + z - 3.$$

La série $F(z) \in \mathbb{Z}[\![z]\!]$ a pour rayon de convergence $3-2\sqrt{2}$, d'où $\overline{\sigma}(F) \leqslant -\log(3-2\sqrt{2})$. De plus, L satisfait $\ell = \delta = 2$, $\mu = 1$. Son exposant en 0 (resp. ∞) est 0 (resp. 1).
Avec $\beta = 3/5$, on obtient $\ell_0(\beta) = 2$ et $C(F,\beta) \simeq 3164$, de sorte que, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $0 < |\alpha| < 3-2\sqrt{2}$, au moins $\dfrac{1+o(1)}{3164[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}\log(S)$ des nombres

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k+j}{j} \frac{\alpha^k}{(5k+3)^s} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k+j}{j} \frac{\alpha^k}{(5k+8)^s}, \quad 0 \leqslant s \leqslant S.$$

sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}(\alpha)$, quand $S \to +\infty$.

Pour $\beta = 0$, on trouve $\ell_0(0) = 2$ et $C(F,0) \simeq 3083$.

- Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{L}_k = \left((1-z)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - 1\right)^k \times \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ l'opérateur minimal de $\log(1-z)^k$. C'est un opérateur d'ordre $k+1$, avec $\omega = 0$ et $\delta = k$. Ses exposants en 0 (resp. ∞) sont $0, 1, \dots, k$ (resp. 0).
En utilisant la proposition 1.6, on obtient que $\sigma(\mathscr{L}_k) \leqslant (1+\log(k))$.
Pour $k = 2$ et $\beta = 1/12$, on a $\ell_0(\beta) = 2$ et on obtient une constante $C(F,\beta) \simeq 1912$.
Puisque $\log(1-z)^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{i}\right) z^{k+1}$, ceci donne pour $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $0 < |\alpha| < 1$,

$$\dim_{\mathbb{Q}(\alpha)} \mathrm{Vect}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\frac{\alpha^{k+1}}{(12k+1)^s}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\frac{\alpha^{k+1}}{(12k+13)^s}, \quad 0 \leqslant s \leqslant S\right) \geqslant \frac{1+o(1)}{1912[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}\log(S).$$

Pour $\beta = 0$, on calcule $\ell_0(0) = 2$ et $C(F,0) \simeq 570$.

• Intéressons-nous finalement à l'exemple de la série génératrice des nombres d'Apéry, introduits par Apéry dans [8] pour prouver l'irrationalité de $\zeta(3)$:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+j}{j}^2 \binom{k}{j}^2 z^k \in \mathbb{Z}[\![z]\!].$$

C'est une G-fonction de rayon de convergence $(\sqrt{2}-1)^4 \leqslant 1$ et ses coefficients sont entiers donc $\overline{\sigma}(F) \leqslant -4\log(\sqrt{2}-1)$. L'opérateur différentiel minimal non nul de $F(z)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est

$$L = z^2(1-34z+z^2)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^3 + z(3-153z+6z^2)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^2 + (1-112z+7z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + z - 5.$$

Il est d'ordre 3, avec $\delta = 4$ et $\ell = 2$. En utilisant le théorème 3.5, on obtient, avec $\beta = 2/3$, $C(F,\beta) \simeq 209532$.
De plus, $\ell_0(\beta) = 2$. Ainsi, si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ et $0 < |\alpha| < \left(\sqrt{2}-1\right)^4$, la dimension sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ de l'espace vectoriel engendré par les nombres

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{k+j}{j}^2 \frac{\alpha^k}{(3k+5)^s} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{k+j}{j}^2 \frac{\alpha^k}{(3k+8)^s}, \quad 0 \leqslant s \leqslant S.$$

est au moins $\dfrac{1+o(1)}{209532[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}\log(S)$, quand $S \to +\infty$.

Pour $\beta = 0$, on trouve $\ell_0(0) = 2$ et $C(F,0) \simeq 209533$.

Chapitre 4

Le théorème d'André-Chudnovsky-Katz « au sens large »

Ce chapitre correspond à la prépublication [35, §1 à 5].

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier la structure des G-opérateurs *au sens large*. Rappelons d'abord la définition suivante.

Définition 4.1

*Une G-*fonction *au sens large est une série* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ *telle que*

- ***a)*** *f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$;*
- ***b)*** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1(\varepsilon), \overline{|a_n|} \leqslant (n!)^{\varepsilon}$, où $\overline{|a_n|}$ est la* maison *de a_n, c'est-à-dire le maximum des modules des conjugués (au sens de Galois) de a_n ;*
- ***c)*** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_2(\varepsilon), \mathrm{den}(a_0, \dots, a_n) \leqslant (n!)^{\varepsilon}$, où $\mathrm{den}(a_0, \dots, a_n)$ est le plus petit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $da_0, \dots, da_n$ sont des entiers algébriques.*

On dispose d'une notion de G-fonction *au sens strict*, plus restrictive que la définition 4.1, qui est en fait celle considérée par Siegel. On définit de la même manière les E-fonctions *au sens strict* (resp. *au sens large*), voir la définition 0.1 dans l'introduction.

Siegel a étudié les E-fonctions *au sens large* et les G-fonctions *au sens strict*, mais n'a fait qu'évoquer les G-fonctions *au sens large*. Il est conjecturé que les définitions large et stricte sont équivalentes pour les E- et G-fonctions, mais cela n'a pas été prouvé à ce jour. Précisément, on sait que la condition **b)** de la définition 4.1 implique, sous la condition **a)**, la condition **b)** de la définition 0.1, car on peut appliquer des estimation « Gevrey » dues à Perron (cf [42], voir aussi [44, pp. 85–86]) ; en revanche, on ne sait pas si la condition **c)** de la définition 4.1 implique la condition **c)** de la définition 0.1 (cf [5, p. 715]).

On dispose d'un théorème de structure sur les équations différentielles satisfaites par les G-fonctions *au sens strict* : lethéorème d'André-Chudnovsky-Katz (théorème 0.4).

Dans [6, pp. 746–747], André esquisse la preuve du fait que *la singularité en l'infini d'un opérateur ϕ d'ordre minimal annulant une G-fonction au sens large est régulière*. Son argument est le suivant :

« *Pour établir le point ci-dessus, le critère p-adique de régularité de Katz montre qu'il suffit d'établir que $\sum_{p(v)\leqslant n} \log R_v(\phi, 1) = o(\log n)$. Avec les notations de [4], on voit facilement que* *cette condition découle d'une estimation*

$$\sum_{v \text{ finie}} h_{v,n}(\phi) = \sum_{p(v) \leqslant n} h_{v,n}(\phi) = o(\log n)\,;$$

or les estimations de [4, p. 122] donnent

$$\sum_{v \text{ finie}} h_{v,n}(\phi) \leqslant C_1 \frac{1}{n} \sum_v \log\max(1, |a_0|_v, \ldots, |a_{nC_2}|_v) + C_3$$

(pour des constantes C_i indépendantes de n), et la condition $(\mathbf{G}^-)$ *équivaut à*

$$\frac{1}{n} \sum_{v \text{ finie}} \log\max(1, |a_0|_v, \ldots, |a_n|_v) = o(\log n).\, »$$

La condition $(\mathbf{G}^-)$ correspond aux points **b)** et **c)** de la définition 4.1 (cf [5, p. 714]).

Dans ce chapitre, nous commençons par donner les détails de l'esquisse d'André et nous complétons ensuite ses résultats. Précisément, nous allons donner la démonstration du théorème suivant. Il est implicite dans l'esquisse ci-dessus d'André, même s'il ne l'énonce pas formellement.

Théorème 4.1

Soit $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ une G-fonction au sens large*, et $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]$ un opérateur différentiel non nul d'ordre minimal μ tel que $L(f(z)) = 0$. Alors*

- *L'opérateur L est un G-opérateur* au sens large.
- *L'opérateur L est globalement nilpotent.*
- *Tout point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un point singulier régulier de L et les exposants de L en tout point sont dans $\mathbb{Q}$.*

La preuve de ce résultat fera l'objet des sections 4.2 et 4.3 Dans la partie 4.4, nous raffinerons le théorème 4.1 en précisant la forme d'une base de solutions d'un G-opérateur *au sens large* L d'ordre μ : au voisinage de tout point $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, il existe une base de solutions de l'équation $Ly(z) = 0$ de la forme

$$(f_1(z-\alpha), \ldots, f_\mu(z-\alpha))(z-\alpha)^{C_\alpha},$$

où C_α est une matrice triangulaire supérieure à valeurs propres rationnelles et les $f_i(u) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![u]\!]$ sont des G-fonctions *au sens large*. Ceci constitue un analogue complet du théorème d'André-Chudnovsky-Katz. Enfin, dans la partie 4.5, nous étudions les propriétés algébriques de l'ensemble des G-opérateurs au sens large, ce qui sera utile dans le chapitre 5.

4.2 Un analogue « large » du théorème des Chudnovsky

Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1(z), \ldots, f_\mu(z)) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]^\mu$ vérifiant $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$ avec $G \in \mathcal{M}_\mu\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$. Soit $G_s \in \mathcal{M}_\mu\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$ la matrice telle que $y^{(s)} = G_s y$ pour tout y tel que $y' = Gy$. On rappelle que G_s, $s \in \mathbb{N}$, sont liées par la relation

$$G_{s+1} = G_s G + G_s', \tag{4.1}$$

où G_s' désigne la matrice G_s dérivée coefficient par coefficient. On prend $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ le plus petit dénominateur commun de tous les coefficients de la matrice $G(z)$. On rappelle également que

$$\forall s \in \mathbb{N},\ \ T^s G_s \in \mathcal{M}_\mu\left(\overline{\mathbb{Q}}[z]\right). \tag{4.2}$$

4.2.1 Condition de Galochkin *au sens large*

Rappelons tout d'abord la définition de la condition de Galochkin *au sens strict*, introduite dans [27].

Définition 4.2 (*Galochkin*)

On note, pour $s \in \mathbb{N}$, q_s le plus petit dénominateur supérieur ou égal à 1 de tous les coefficients des coefficients des matrices $T(z)^m \frac{G_m(z)}{m!}$, quand $m \in \{1, \dots, s\}$. On dit que le système $y' = Gy$ vérifie la condition de Galochkin au sens strict *si*

$$\exists C > 0 : \forall s \in \mathbb{N}, \quad q_s \leqslant C^{s+1}.$$

On a alors le théorème fondamental suivant (cf [17, p. 17]), déjà mentionné dans l'introduction de cette thèse.

Théorème 4.2 (*Chudnovsky*)

Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, si pour tout $i \in \{1, \dots, \mu\}$, $f_i(z)$ est une G-fonction au sens strict *et $(f_1(z), \dots, f_\mu(z))$ est une famille libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, alors G vérifie la condition de Galochkin* au sens strict.

Dans [6, p. 747], André a introduit, en la formulant différemment, la condition suivante, qui est adaptée au contexte des G-fonctions *au sens large*.

Définition 4.3 (*André*)

Avec les notations de la définition précédente, on dit que le système $y' = Gy$ vérifie la condition de Galochkin *au sens large si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists s_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall s \geqslant s_0(\varepsilon), \ q_s \leqslant (s!)^\varepsilon.$$

Rappelons que si $L = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^\mu + a_1(z)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\mu-1} + \cdots + a_n(z) \not\equiv 0$ est un opérateur différentiel d'ordre μ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, la matrice compagnon de L est

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ -a_\mu & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}.$$

On sait que les solutions du système différentiel $y' = A_L y$ sont les vecteurs $\mathbf{f} = {}^t(f, f', \dots, f^{(\mu-1)})$ tels que $L(f(z)) = 0$.

Suivant la définition des G-opérateurs au sens strict (cf [5, p. 718]), on peut considérer une notion analogue *au sens large*.

Définition 4.4

*Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)\,[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$. On dit que L est un G-*opérateur *au sens large (resp.* au sens strict*) si la matrice compagnon de L vérifie la condition de Galochkin* au sens large *(resp.* au sens strict*).*

La dénomination de « G-opérateur » est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 4.1

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)\,[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ un G-opérateur au sens large *non nul d'ordre μ. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ un point ordinaire de L, alors il existe une base de solutions de l'équation $L(y(z)) = 0$ au voisinage de α de la forme $(f_1(z-\alpha), \dots, f_\mu(z-\alpha))$, où les $f_i(u)$ sont des G-fonctions* au sens large.

Il est bien connu que cette proposition est également vraie pour les G-opérateurs *au sens strict*, la preuve ci-dessous s'adaptant *mutatis mutandis*.

Le théorème d'André-Chudnovsky-Katz affirme entre autres qu'un G-opérateur *au sens strict* a au voisinage de toute singularité α une base de solutions de la forme $(f_1(z-\alpha),\dots,f_\mu(z-\alpha))(z-\alpha)^{C_\alpha}$, où $C_\alpha \in \mathcal{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ a ses valeurs propres rationnelles et les $f_i(u)$ sont des G-fonctions *au sens strict*. On verra dans la section 4.4 que ceci est également vrai *au sens large*.

Démonstration de la proposition 4.1. Notons $G(z) = A_L(z)$ la matrice compagnon de L. Comme α est un point ordinaire, on sait qu'il existe une base de solutions $(f_1(z-\alpha),\dots,f_\mu(z-\alpha))$ de l'équation $L(y(z)) = 0$, où les f_i sont holomorphes de coefficients de Taylor algébriques au voisinage de 0. On sait aussi que la matrice wronskienne de cette base $Y(z) \in \mathcal{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!])$ a un rayon de convergence non nul et est telle que $Y(\alpha) \in \mathrm{GL}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ et $Y'(z) = G(z)Y(z)$, de sorte que $Y^{(s)}(z) = G_s(z)Y(z)$ pour tout entier s. D'où

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n\right) Y(\alpha). \tag{4.3}$$

Puisque α est un point ordinaire, $G(z)$ n'a pas de pôle en α et la condition de Galochkin *au sens large* implique qu'il existe une suite d'entiers strictement positifs $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \leqslant n,\ q_n \frac{G_k(\alpha)}{k!} \in \mathcal{M}_\mu\left(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}\right) \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0(\varepsilon), q_n \leqslant (n!)^{\varepsilon}.$$

Ainsi, selon (4.3), on a $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{den}(Y(\alpha))q_n Y^{(n)}(\alpha) \in \mathcal{M}_\mu\left(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}\right)$. Ainsi, les $f_i(z)$ vérifient la condition **c)** de la définition 4.1.

Par ailleurs, soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres galoisien contenant α et les coefficients de Taylor des $f_i(u)$ tel que $L \in \mathbb{K}[z, \mathrm{d}/\mathrm{d}z]$. Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$. Si $L = \sum_{k=0}^{\mu} a_k(z)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k$, $a_k(z) \in \mathbb{K}[z]$, on définit $L^\tau := \sum_{k=0}^{\mu} a_k^\tau(z)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k$ en étendant l'action de τ à $\mathbb{K}[\![z]\!]$ coefficient par coefficient.

Alors pour tout $i \in \{1,\dots,\mu\}$, $L^\tau(f_i^\tau(z-\tau(\alpha))) = 0$. De plus, comme $a_\mu(\alpha) \neq 0$, on a $a_\mu^\tau(\tau(\alpha)) = \tau(a_\mu(\alpha)) \neq 0$, de sorte que $\tau(\alpha)$ est un point ordinaire de L^τ. Ainsi, f_i^τ est analytique au voisinage de 0. Ceci valant pour tout τ, on en déduit que, si $f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{i,n}z^n$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{b_{i,n}} \leqslant C^{n+1}$, ce qui prouve que les $f_i(z)$ vérifient la condition **b)** de la définition 4.1. □

L'ensemble des G-opérateurs *au sens large* possède une structure algébrique analogue à celle de l'ensemble des G-opérateurs *au sens strict*. On a les propriétés suivantes (listées par André dans le cas strict [5, p. 720]) :

- Un produit de G-opérateurs *au sens large* est un G-opérateur *au sens large*.
- Tout diviseur à droite d'un G-opérateur *au sens large* dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ est un G-opérateur *au sens large*.
- L'opérateur adjoint L^* d'un G-opérateur *au sens large* L est un G-opérateur *au sens large*.
- Si L et L' sont deux G-opérateurs *au sens large*, alors ils admettent un multiple commun à gauche qui est un G-opérateur *au sens large* (*propriété de Ore à gauche*).

La démonstration de ces propriétés est donnée dans la section 4.5. Elle consiste en l'adaptation de propriétés des modules différentiels données dans le cas strict par André [4, §IV], qui sont détaillées dans le chapitre 1 de cette thèse.

Le but de la suite de cette partie est de démontrer un analogue *au sens large* du théorème 4.2.

Théorème 4.3

Le théorème 4.2 reste vrai si l'on remplace « strict » par « large ».

Ceci implique en particulier que si f est une G-fonction *au sens large*, tout opérateur différentiel non nul L à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ tel que $L(f(z)) = 0$ et d'ordre minimal est un G-opérateur *au sens large*. En effet, la condition de minimalité sur l'ordre μ de L impose que $(f, \dots, f^{(\mu-1)})$ est libre sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Le théorème 4.3 assure donc que la condition de Galochkin *au sens large* est vérifiée pour A_L.

Notons que la proposition 4.1 constitue une réciproque partielle du théorème 4.3.

4.2.2 Démonstration du théorème 4.3

La preuve que nous allons présenter est une adaptation de la preuve originale du théorème 4.2 [17, pp. 38–50] au cas des G-fonctions *au sens large*. Les six premières étapes de la démonstration sont identiques dans les cas strict et large puisque les conditions **b)** et **c)** de la définition d'une G-fonction (définitions 0.1 ou 4.1) n'y sont pas utilisées, y compris dans le lemme de Shidlovskii évoqué dans l'étape 3. Dans [13, pp. 21–22], Beukers a reformulé les idées des Chudnovsky en une trame condensée ; à des fins de clarté, nous suivrons cette trame dans les étapes 1 à 6, en la détaillant. La nouveauté de cette démonstration est l'étape 7, dans laquelle les conditions **b)** et **c)** de la définition 4.1, spécifiques aux G-fonctions *au sens large*, seront utilisées. André a également mentionné dans [6, pp. 746–747] un argument qui permet d'adapter *au sens large* la preuve du théorème des Chudnovsky donnée dans [4, pp. 112–123], mais sans donner de détails.

Remarquons tout d'abord que si $\mathbb{K}$ est un corps de nombres contenant les coefficients des coefficients de $G(z)$ et les $f_i(0)$, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, alors $G \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$ et $\mathbf{f} \in \mathbb{K}[\![z]\!]^\mu$. En effet, cela découle de l'équation $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$ en écrivant G comme un élément de $\mathcal{M}_\mu\big(\mathbb{K}((z))\big)$ et identifiant les coefficients du développement en série de Laurent de part et d'autre.

Notations et hypothèses :

On a $T(z) \in \mathbb{K}[z]$, mais quitte à multiplier par un entier adapté, on peut supposer que $T(z) \in \mathcal{O}_\mathbb{K}[z]$ et $T(z)G(z) \in \mathcal{M}_\mu(\mathcal{O}_\mathbb{K}[z])$.

On note $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ la dérivation usuelle sur $\mathbb{K}[\![z]\!]$.

Si $A \in \mathbb{K}[\![z]\!]^d$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on note $A = O\big(z^\ell\big)$ s'il existe $B \in \mathbb{K}[\![z]\!]^d$ tel que $A = z^\ell B$.

On note $\delta = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ le degré du corps de nombres $\mathbb{K}$.

Étape 1 : Soient $N, M \in \mathbb{N}$. On introduit des approximants de Padé $(Q, \mathbf{P})$ de type II de paramètres (N, M) associés à $\mathbf{f}$ dont on laisse les paramètres libres pour l'instant, c'est-à-dire des polynômes $Q, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\mu \in \mathbb{K}[z]$ tels que $\deg(Q) \leqslant N$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant \mu} \deg(P_i) \leqslant N$ et si $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$, alors

$$Q\mathbf{f} - \mathbf{P} = O\big(z^{N+M}\big).$$

On ne discutera des conditions d'existence de tels approximants de Padé que dans l'étape 7.

On a pour tout $m < N + M$, $\dfrac{T^m}{m!}(D - G)^m \mathbf{P} \in \mathbb{K}[z]$, ce qui est immédiat en utilisant la formule de Leibniz. De plus, on va montrer par récurrence sur m que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \frac{T^m}{m!} Q^{(m)} \mathbf{f} - \frac{T^m}{m!}(D - G)^m \mathbf{P} = O\big(z^{N+M-m}\big). \tag{4.4}$$

Pour $m = 0$, c'est la définition.

Supposons la relation vraie au rang m. Alors en dérivant (4.4) et en multipliant par T, on a

$$(mT'T^mQ^{(m)} + T^{m+1}Q^{(m+1)})\mathbf{f} + T^{m+1}Q^{(m)}\mathbf{f}' \\ - mT'T^m(D-G)^m\mathbf{P} - T^{m+1}D(D-G)^m\mathbf{P} = O\big(z^{N+M-(m+1)}\big).$$

Or, $\mathbf{f}' = G\mathbf{f}$ donc en multipliant (4.4) par la matrice polynomiale TG et en retranchant à l'équation précédente, on obtient

$$(mT'T^mQ^{(m)} + T^{m+1}Q^{(m+1)})\mathbf{f} - mT'T^m(D-G)^m\mathbf{P} \\ - T^{m+1}(D-G)^{m+1}\mathbf{P} = O\big(z^{N+M-(m+1)}\big).$$

Finalement, comme $T^mQ^{(m)}\mathbf{f} - T^m(D-G)^m\mathbf{P} = O\big(z^{N+M-m}\big)$, on a le résultat voulu.

Étape 2 : Montrons que

$$\forall \mathbf{P} \in \mathbb{K}[\![z]\!]^\mu,\ \ \forall s \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{G_s}{s!}\mathbf{P} = \sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s-j}(D-G)^j\mathbf{P}. \tag{4.5}$$

On procède par récurrence :
- pour $s = 1$, $G_s = G$ et $G\mathbf{P} = D(\mathbf{P}) - (D-G)\mathbf{P}$.
- Soit $s \in \mathbb{N}^*$, supposons la formule (4.5) vraie pour s.

Alors $G_{s+1} = G_sG + G_s'$, donc $\dfrac{G_{s+1}}{(s+1)!} = \dfrac{1}{s+1}\left(\dfrac{G_s}{s!}G + \dfrac{G_s'}{s!}\right)$. Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence au vecteur $G\mathbf{P}$, on a

$$\frac{G_{s+1}}{(s+1)!}\mathbf{P} = \frac{1}{s+1}\left(\sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s-j}(D-G)^j(G\mathbf{P}) + \frac{G_s'}{s!}\mathbf{P}\right).$$

Or,

$$\frac{G_s'}{s!}\mathbf{P} = \left(\frac{G_s}{s!}\mathbf{P}\right)' - \frac{G_s}{s!}\mathbf{P}' = \sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s+1-j}(D-G)^j\mathbf{P} - \sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s-j}(D-G)^jD\mathbf{P}.$$

Donc, en remarquant que $\forall j \in \{0,\dots,s\}, (D-G)^jD = (D-G)^{j+1} + (D-G)^jG$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{G_{s+1}}{(s+1)!}\mathbf{P} &= \frac{1}{s+1}\left(\sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s+1-j}(D-G)^j\mathbf{P} - \sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s-j}(D-G)^{j+1}\mathbf{P}\right) \\
&= \frac{1}{s+1}\left(\sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^j}{(s-j)!j!} D^{s+1-j}(D-G)^j\mathbf{P} + \sum_{k=1}^{s+1} \frac{(-1)^k}{(s-k+1)!(k-1)!} D^{s+1-k}(D-G)^k\mathbf{P}\right) \\
&= \frac{1}{s+1}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{(-1)^j(s+1-j)+j}{(s+1-j)!j!} D^{s+1-j}(D-G)^j\mathbf{P} + \right. \\
&\qquad \left. \sum_{k=1}^{s+1} \frac{(-1)^k}{(s-k+1)!(k-1)!} D^{s+1-k}(D-G)^k\mathbf{P} + \frac{D^{s+1}}{s!}\mathbf{P} + \frac{(-1)^{s+1}}{s!}(D-G)^{s+1}\mathbf{P}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{s+1} \frac{(-1)^j}{(s+1-j)!j!} D^{s+1-j}(D-G)^j\mathbf{P}.
\end{aligned}$$

Cela conclut la récurrence.

Étape 3 : Utilisation du lemme de Shidlovskii.

On note pour $h \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}_h = \frac{1}{h!}(D-G)^h\mathbf{P}$ et $R_{(h)} \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$ la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\binom{h+j-1}{j-1}\mathbf{P}_{h+j-1}$. Alors la formule (4.5) implique immédiatement que

$$\frac{G_s}{s!}R_{(0)} = \sum_{j=0}^{s}\frac{(-1)^j}{(s-j)!}D^{s-j}R_{(j)}.$$

Selon le lemme de Shidlovskii pour les approximants de Padé de type II (voir [4, p. 115]), la matrice $R_{(0)}$ est inversible pourvu que M soit assez grand ce qui sera réalisé quand on spécifiera M et N dans l'étape 7. Donc

$$T^s\frac{G_s}{s!} = \sum_{j=0}^{s}(-1)^j T^{s+\mu-1}\frac{D^{s-j}R_{(j)}}{(s-j)!}(T^{\mu-1}R_{(0)})^{-1}. \tag{4.6}$$

Étape 4 : Soit d le plus petit dénominateur commun des coefficients d'ordres inférieurs à $N+M$ du développement en série entière de $\mathbf{f}$. On suppose trouvés des approximants de Padé $Q, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\mu \in \mathbb{K}[z]$ de $d\mathbf{f}$, c'est à dire des polynômes tels que $\deg(Q) \leqslant N$, $\max_{1\leqslant i\leqslant\mu}\deg(P_i) \leqslant N$ et

$$Q(d\mathbf{f}) - \mathbf{P} = O\left(z^{N+M}\right),$$

avec $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_\mu)$. On fait l'hypothèse supplémentaire que Q est un polynôme à coefficients entiers algébriques. On peut alors appliquer les résultats des trois étapes précédentes, dont on conservera les notations, à Q et $\mathbf{P}$ puisque $d\mathbf{f}$ est encore solution du système différentiel $y' = Gy$.

Selon (4.4), on a

$$\forall m \leqslant N+M, \quad \frac{T^m}{m!}Q^{(m)}(d\mathbf{f}) - T^m\mathbf{P}_m = O\left(z^{N+M-m}\right). \tag{4.7}$$

On remarque que $\frac{Q^{(m)}}{m!} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$ puisque Q est à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$. On en déduit que si $N+M-m > \max_{1\leqslant i\leqslant\mu}\deg(T^m\mathbf{P}_{i,m})$, les coefficients de $T^m\mathbf{P}_m$ sont des éléments de $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$.

Notons $t := \max(\deg(T), \deg(TG))$. Montrons par récurrence sur m que

$$\max_{1\leqslant i\leqslant\mu}\deg(T^m\mathbf{P}_{i,m}) \leqslant N + tm. \tag{4.8}$$

- Pour $m = 0$, il s'agit simplement du fait que les composantes de $\mathbf{P}$ sont de degrés inférieurs à N.
- Pour $m = 1$, $T\mathbf{P}' - TG\mathbf{P}$ a des composantes de degrés inférieurs à $N+t$, car T et les coefficients de TG sont de degrés bornés par t.
- Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai au rang m. Alors

$$\begin{aligned}(D-G)(T^m(D-G)^m\mathbf{P}) &= mT'T^{m-1}(D-G)^m\mathbf{P} + T^mD(D-G)^m\mathbf{P} - T^mG(D-G)^m\mathbf{P}\\ &= mT'T^{m-1}(D-G)^m\mathbf{P} + T^m(D-G)^{m+1}\mathbf{P}.\end{aligned}$$

Donc

$$T^{m+1}(D-G)^{m+1}\mathbf{P} = (D-G)(T^m(D-G)^m\mathbf{P}) - mT'T^m(D-G)^m\mathbf{P}.$$

Or, en utilisant à la fois l'hypothèse de récurrence et le cas $m=1$, on voit que $T(D-G)(T^m(D-G)^m\mathbf{P})$ a ses composantes de degrés bornés par $N + mt + t = N + (m+1)t$; par ailleurs, l'hypothèse de récurrence nous assure que $mT'T^m(D-G)^m\mathbf{P}$ a des composantes de degrés inférieurs à $t + N + mt = N + (m+1)t$. On en déduit le résultat souhaité (4.8).

On en déduit, à condition que $N+M-m > N+tm$, c'est-à-dire

$$m < \frac{M}{t+1}, \tag{4.9}$$

que $T^m\mathbf{P}_m \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]^{\mu}$. Ceci implique immédiatement que si j est un entier naturel tel que $j+\mu-1 < \dfrac{M}{t+1}$, alors $T^{j+\mu-1}R_{(j)}$ est une matrice à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$. En particulier, $T^{\mu-1}R_{(0)} \in \mathscr{M}_{\mu}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z])$.

Montrons à présent que

$$\forall s \in \mathbb{N},\ s+\mu-1 < \frac{M}{t+1},\ \forall j \in \{0,\dots,s\},\quad \frac{T^{s+\mu-1}}{(s-j)!}D^{s-j}R_{(j)} \in \mathscr{M}_{\mu}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]). \tag{4.10}$$

Rappelons la formule de Leibniz généralisée : si $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\dots,f_\ell$ sont ℓ fonctions dérivables k fois, alors

$$(f_1\dots f_\ell)^{(k)} = \sum_{i_1+\cdots+i_\ell=k}\binom{k}{i_1,\dots,i_\ell}\prod_{1\leqslant t\leqslant k} f_t^{(i_t)}.$$

En particulier, considérons un élément quelconque $W \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$. Alors

$$\frac{(W^\ell)^{(k)}}{k!} = \sum_{i_1+\cdots+i_\ell=k}\prod_{1\leqslant t\leqslant \ell}\frac{W^{(i_t)}}{i_t!}.$$

Si $k<\ell$, pour tout $(i_1,\dots,i_\ell)$ intervenant dans la somme, chaque terme $\displaystyle\prod_{1\leqslant t\leqslant \ell}\frac{W^{(i_t)}}{i_t!}$ contient au moins $\ell-k$ indices de dérivation nuls. Ainsi, comme pour tout entier s, $\dfrac{W^{(s)}}{s!} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$, on a $\dfrac{(W^\ell)^{(k)}}{k!} \in W^{\ell-k}\mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$.

Déduisons de cela par récurrence le résultat (4.10). Pour $s=0$, c'est évident.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$, supposons (4.10) vrai pour $s' \in \{0,\dots,s-1\}$. Par la formule de Leibniz, on a, pour $j \in \{0,\dots,s\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{D^{s-j}\big(T^{s+\mu-1}R_{(j)}\big)}{(s-j)!} &= \sum_{k=0}^{s-j}\binom{s-j}{k}\times\frac{1}{(s-j)!}\big(T^{s+\mu-1}\big)^{(k)}D^{s-j-k}R_{(j)}\\
&= T^{s+\mu-1}\frac{D^{s-j}R_{(j)}}{(s-j)!} + \sum_{k=1}^{s-j}\frac{\big(T^{s+\mu-1}\big)^{(k)}}{k!}\frac{D^{s-j-k}R_{(j)}}{(s-j-k)!}\\
&= T^{s+\mu-1}\frac{D^{s-j}R_{(j)}}{(s-j)!} + \sum_{k=1}^{s-j}U_kT^{s+\mu-1-k}\frac{D^{s-k-j}R_{(j)}}{(s-k-j)!},
\end{aligned}$$

avec $U_k \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$, en utilisant la remarque précédente.

Or, d'une part,

$$\frac{D^{s-j}\big(T^{s+\mu-1}R_{(j)}\big)}{(s-j)!} \in \mathscr{M}_{\mu}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]),$$

puisque $T^{s+\mu-1} = T^{s-j}T^{j+\mu-1}R_{(j)} \in \mathscr{M}_{\mu}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z])$, et d'autre part, par hypothèse de récurrence,

$$\forall k \in \{1,\dots,s-j\},\quad T^{s-k+\mu-1}\frac{D^{s-k-j}R_{(j)}}{(s-k-j)!} \in \mathscr{M}_{\mu}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]).$$

Par conséquent,

$$T^{s+\mu-1}\frac{D^{s-j}R_{(j)}}{(s-j)!} \in \mathscr{M}_{\mu}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Étape 5 : Lien entre q_s et taille des coefficients de $\det(T^{\mu-1}R_{(0)})$.

Selon (4.6), on a pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$T^s \frac{G_s}{s!} = \frac{1}{V} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j T^{s+\mu-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} \left(\mathrm{com}\left(T^{\mu-1} R_{(0)}\right)\right)^T, \tag{4.11}$$

où $V = \det(T^{\mu-1}R_{(0)}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, et selon (4.10), tous les termes de la somme sont à coefficients entiers algébriques à condition que $s+\mu-1 < \dfrac{M}{t+1}$.

Prenons pour $s \in \mathbb{N}$, q_s le dénominateur des coefficients des coefficients des matrices $TG, T^2\dfrac{G_2}{2!}, \ldots, T^s\dfrac{G_s}{s!}$, comme dans la définition 4.3. Pour estimer q_s sous la condition $s+\mu-1 < \dfrac{M}{t+1}$, il suffit donc d'obtenir une estimation de la maison des coefficients de V. C'est ce que permet de faire ce lemme :

Lemme 4.1

> *Soient $U \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, $V \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$, $W \in \mathbb{K}[z]$ tels que $U = VW$. Notons $V = \sum_{i=0}^{\ell} v_i z^i$, alors pour tout k tel que $v_k \neq 0$, on a $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v_k)W \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$.*

Démonstration. Introduisons la valuation de Gauss associée à un premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$:

$$v_{\mathfrak{p}}\left(\sum_{i=0}^{q} a_i z^i\right) := \min_{0 \leqslant i \leqslant q} (v_{\mathfrak{p}}(a_i)),$$

où $v_{\mathfrak{p}}$ est la valuation $\mathfrak{p}$-adique associée à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. En utilisant les propriétés de valuation, on a $v_{\mathfrak{p}}(U) = v_{\mathfrak{p}}(V) + v_{\mathfrak{p}}(W)$ donc $v_{\mathfrak{p}}(W) \geqslant -v_{\mathfrak{p}}(V)$ car, comme U est à coefficients entiers algébriques, $v_{\mathfrak{p}}(U) \geqslant 0$.

Notons S l'ensemble fini des premiers divisant tous les coefficients de V. Alors si $W = \sum_{i=0}^{d} w_i z^i$, pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$ et $\mathfrak{p} \in S$, on a $v_{\mathfrak{p}}(w_i) + v_{\mathfrak{p}}(V) \geqslant v_{\mathfrak{p}}(V) + v_{\mathfrak{p}}(W) \geqslant 0$, donc $\prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(V)}(w_i) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. En particulier, si $v_k \neq 0$, comme $v_k \in \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(V)} = \mathrm{pgcd}((v_0), \ldots, (v_\ell))$, on a

$$\forall i \in \{0, \ldots, d\}, \quad (v_k)(w_i) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}.$$

D'où comme $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v_k) \in (v_k) \cap \mathbb{Z}$, on a $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(v_k)W \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$. □

Pour $W = \sum_{i=0}^{\ell} w_i z^i \in \mathbb{K}[z]$, on définit $\sigma(W) = \max_{0 \leqslant i \leqslant \ell} \overline{|w_i|}$, la *maison* de W. Selon le lemme 4.1 appliqué à la formule (4.11) avec

$$U = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j T^{s+\mu-1} \frac{D^{s-j} R_{(j)}}{(s-j)!} \left(\mathrm{com}\left(T^{\mu-1} R_{(0)}\right)\right)^T,$$

$V = \det(T^{\mu-1}R_{(0)})$ et $W = T^s \dfrac{G_s}{s!}$, on a donc ici

$$\forall s \in \mathbb{N} \text{ tel que } s+\mu-1 < \frac{M}{t+1}, \; q_s \leqslant \sigma(V)^{\delta}. \tag{4.12}$$

Étape 6 : Majoration de la taille des coefficients de $\det(T^{\mu-1}R_{(0)}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[z]$ en fonction de la maison de Q.

Par commodité, on s'intéresse à

$$\widetilde{V} = \det(\mathbf{P}, T\mathbf{P}_1, \dots, T^{\mu-1}\mathbf{P}_{\mu-1}) = T^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \det(R_{(0)}) = T^{-\frac{\mu(\mu-1)}{2}} V.$$

Le lemme suivant nous assure que ce changement n'introduit qu'une constante multiplicative dépendant seulement de G dans la majoration recherchée.

Lemme 4.2

Soient $A, B \in \mathbb{K}[z]$ et $C = AB$, alors $\sigma(C) \leqslant (\deg(A) + \deg(B) + 1)\sigma(A)\sigma(B)$.

Démonstration. On écrit $A = \sum_{i=0}^{p} a_i z^i$ et $B = \sum_{i=0}^{q} b_i z^i$, de sorte que $C = \sum_{j=0}^{p+q} c_j z^j$, avec, pour tout $j \in \{0, \dots, p+q\}$, $c_j = \sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}$.

Soit $\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ un plongement. Alors

$$|\tau(c_j)| \leqslant \sum_{i=0}^{j} |\tau(a_i)||\tau(b_{j-i})| \leqslant (j+1)\sigma(A)\sigma(B) \leqslant (p+q+1)\sigma(A)\sigma(B),$$

si bien qu'en prenant le maximum sur j et sur τ, on obtient l'inégalité voulue. □

Soit $m \in \{0, \dots, \mu-1\}$. Si $Q = \sum_{i=0}^{N} q_i z^i$, alors

$$\frac{Q^{(m)}}{m!} = \sum_{i=0}^{N-m} \frac{(i+1)\dots(i+m)}{m!} q_{m+i} z^m = \sum_{i=0}^{N-m} \binom{m+i}{i} q_{m+i} z^m.$$

De la majoration $\binom{m+i}{i} \leqslant 2^{m+i} \leqslant 2^N$, il s'ensuit que $\sigma\left(\frac{Q^{(m)}}{m!}\right) \leqslant 2^N \sigma(Q)$. Selon le lemme 4.2 appliqué à $A = T^m$ et $B = Q^{(m)}/m!$,

$$\begin{aligned}\sigma\left(T^m \frac{Q^{(m)}}{m!}\right) &\leqslant 2^N \sigma(Q)\sigma(T^m)(mt + N - m + 1) \\ &\leqslant 2^N \sigma(Q)\sigma(T^m)((\mu-1)(t-1) + N + 1) \leqslant c_1^N \sigma(Q)\sigma(T^m),\end{aligned}$$

avec c_1 constante dépendant seulement de G pour N suffisamment grand.

En appliquant m fois le lemme 4.2, on obtient

$$\sigma(T^m) \leqslant c_2^N \sigma(T)\sigma(T^{m-1}) \leqslant \dots \leqslant c_3^N \sigma(T)^m,$$

où c_2 et c_3 sont des constantes. Dans ce qui suit, les c_i désigneront des constantes.

Ainsi, pour N suffisamment grand,

$$\sigma\left(T^m \frac{Q^{(m)}}{m!}\right) \leqslant c_4^N \sigma(Q)\sigma(T)^m \leqslant c_5^N \sigma(Q).$$

Soit θ_{N+M} le maximum des maisons des $N+M$ premiers coefficients du développement en série entière des f_i, et d_{N+M} leur dénominateur commun. En répétant le raisonnement de la preuve du lemme 4.2, on voit que la maison de la partie polynomiale tronquée à l'ordre $N + tm$ de $T^m \frac{Q^{(m)}}{m!}(d_{N+M} f_i)$ est majorée par

$$c_5^N \sigma(Q)(d_{N+M}\theta_{N+M})(N + tm + 1) \leqslant c_6^N \sigma(Q)(d_{N+M}\theta_{N+M}).$$

Or, si $N+M-(\mu-1) > N+t(\mu-1)$, selon (4.7), cette partie polynomiale est $T^m\mathbf{P}_m$, donc, avec une extension de la notation σ aux vecteurs colonnes,

$$\forall m \in \{0,\dots,\mu-1\}, \quad \sigma(T^m\mathbf{P}_m) \leqslant c_7^N \sigma(Q) d_{N+M}\theta_{N+M}.$$

On a $\widetilde{V} = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_\mu} \varepsilon(\tau) \prod_{j=0}^{\mu-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}$. Pour $\tau \in \mathfrak{S}_\mu$, en appliquant le lemme 4.2 à $A = \mathbf{P}_{\tau(0),0}$ et $B = \prod_{j=1}^{\mu-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}$, on a

$$\sigma\left(\prod_{j=0}^{\mu-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}\right) \leqslant \sigma(\mathbf{P}_{\tau(0),0})\sigma\left(\prod_{j=1}^{\mu-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}\right)(\mu(N+t(\mu-1)+1)$$

en utilisant (4.8). En itérant le procédé, on obtient une constante c_8 telle que

$$\sigma\left(\prod_{j=0}^{\mu-1} T^j \mathbf{P}_{\tau(j),j}\right) \leqslant c_7^{\mu N}\sigma(Q)^\mu d_{N+M}^\mu \theta_{N+M}^\mu c_8^N \leqslant c_9^N \sigma(Q)^\mu d_{N+M}^\mu \theta_{N+M}^\mu.$$

Donc par inégalité triangulaire

$$\sigma(\widetilde{V}) \leqslant c_{10}^N \sigma(Q)^\mu d_{N+M}^\mu \theta_{N+M}^\mu,$$

si bien que, comme $V = T^{\mu(\mu-1)/2}\widetilde{V}$, $\sigma(V) \leqslant c_{11}^N \sigma(Q)^\mu d_{N+M}^\mu \theta_{N+M}^\mu$. D'où selon (4.12),

$$\forall s \in \mathbb{N},\ s+\mu-1 < \frac{M}{t+1}, \quad q_s \leqslant \sigma(V)^\delta \leqslant c_{12}^N \sigma(Q)^{\mu\delta} d_{N+M}^{\mu\delta}\theta_{N+M}^{\mu\delta}. \tag{4.13}$$

Étape 7 : Conclusion à l'aide d'un lemme diophantien.

Rappelons le lemme classique suivant dont une preuve peut être trouvée dans [50, p. 37].

Lemme 4.3 (*Lemme de Siegel*)

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres. Considérons un système de m équations linéaires

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant m, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \tag{4.14}$$

où $\forall i,j, a_{ij} \in \mathcal{O}_\mathbb{K}$. On note $A = \max_{i,j} \overline{|a_{ij}|}$. Alors si $n > m$, (4.14) a une solution non nulle $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathcal{O}_\mathbb{K}^n$ vérifiant

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \overline{|x_j|} \leqslant c_1(c_1 nA)^{\frac{m}{n-m}},$$

où $c_1 > 0$ est une constante dépendant uniquement de $\mathbb{K}$.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$. On choisit dorénavant N et M de la forme suivante : $N := 2\mu(t+1)(s+\mu))$ et $M := N/(2\mu) = (t+1)(s+\mu) \in \mathbb{N}^*$. En particulier, on a bien $\dfrac{M}{t+1} > s+\mu-1$.

Alors l'équation de Padé $Q(d_{N+M}\mathbf{f}) - \mathbf{P} = O\big(z^{N+M}\big)$ se traduit par un système linéaire de $\dfrac{\mu N}{2\mu} = \dfrac{N}{2}$ équations à $N+1$ inconnues (les coefficients de Q). Selon le lemme 4.3, il existe une solution $Q \in \mathcal{O}_\mathbb{K}[z]$ telle que

$$\sigma(Q) \leqslant c_{10}(c_{10}(N+1)\theta_{N+M})^{\frac{N/2}{N+1-N/2}} \leqslant c_{13}^N \theta_{N+M},$$

car $\dfrac{N}{2} \leqslant N+1-\dfrac{N}{2}$.

C'est à partir de maintenant que l'on va se servir des propriétés **b)** et **c)** de la définition 4.1, qui sont propres aux G-fonctions *au sens large*.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les composantes de $\mathbf{f}$ sont des G-fonctions *au sens large*, on peut trouver une constante $c_{14}(\varepsilon)$ telle que $\theta_k \leqslant (k!)^{\varepsilon}$ et $d_k \leqslant (k!)^{\varepsilon}$ pour $k \geqslant c_{14}(\varepsilon)$.

On a $s = \lfloor N/(2\mu(t+1)) \rfloor - \mu$, de sorte que $M/(t+1) \geqslant s + \mu - 1$ donc selon (4.13),

$$q_s \leqslant c_{12}^N (c_{13}^N \theta_{N+M})^{\mu\delta} d_{N+M}^{\delta\mu} \theta_{N+M}^{\delta\mu}. \tag{4.15}$$

D'une part, les termes géométriques c_i^N peuvent être dominés à partir d'un certain rang qui dépend de ε par $(N!)^{\varepsilon}$. D'autre part, on a $(N+M) \leqslant 2N$. Or, si $\alpha > 1$, selon la formule de Stirling,

$$\frac{(\alpha k)!}{(k!)^{\alpha}} \sim \frac{\sqrt{2\pi\alpha k}}{(\sqrt{2\pi k})^{\alpha}} \frac{\left(\frac{\alpha k}{e}\right)^{\alpha k}}{\left(\frac{k}{e}\right)^{\alpha k}} = r_k \alpha^{\alpha k}, \tag{4.16}$$

avec $(r_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite tendant vers 0. Ainsi, si k est assez grand, $(\alpha k)! \leqslant (k!)^{\alpha+1}$.

Par conséquent, en reprenant l'équation (4.15), on obtient que $q_s \leqslant (N!)^{c_{15} \times \varepsilon}$ pour s plus grand qu'un certain rang dépendant de ε et de la constante c_{15}.

Mais $N \leqslant 2\mu(t+1)(s+\mu-1) \leqslant 4\mu(t+1)s$ pour s assez grand, donc à partir d'un certain rang, selon (4.16), $N! \leqslant (s!)^{4\mu(t+1)+1}$. Finalement, pour s assez grand (relativement à ε), on a

$$q_s \leqslant (s!)^{c_{16}\varepsilon}. \tag{4.17}$$

Il suffit d'appliquer ce résultat à $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{c_{16}}$ pour obtenir la majoration désirée.

4.3 Démonstration du théorème 4.1

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème 4.1 en suivant l'esquisse fournie par André [6, pp. 746–747].

4.3.1 Reformulation de la condition de Galochkin

On peut reformuler les conditions arithmétiques et analytiques définissant une G-fonction *au sens large* à l'aide des valeurs absolues sur le corps de nombres $\mathbb{K}$.

Proposition 4.2 (*André, [6]*)

*Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{K}[\![z]\!]$. Les conditions **b)** et **c)** de la définition 4.1 équivalent à*

$$\frac{1}{n} \sum_{v} \log \max(1, |a_0|_v, \ldots, |a_n|_v) = o(\log n), \tag{4.18}$$

où la somme porte sur toutes les valeurs absolues (à équivalence près) $|\cdot|_v$ sur $\mathbb{K}$, finies et infinies.

On rappelle que deux valeurs absolues $|\cdot|_v$ et $|\cdot|_{v'}$ sont dites équivalentes s'il existe $c > 0$ tel que $|\cdot|_{v'} = |\cdot|_v^c$. Les valeurs absolues sur un corps de nombres $\mathbb{K}$ sont, à équivalence près, les valeurs absolues $\mathfrak{p}$-adiques (dites *finies*) $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$ et les valeurs absolues *infinies* $|\cdot|_{\tau}$ pour tout plongement $\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$|\zeta|_{\tau} = \begin{cases} |\tau(\zeta)|^{1/[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} & \text{si } \tau(\mathbb{K}) \subset \mathbb{R} \\ |\tau(\zeta)|^{2/[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} & \text{sinon.} \end{cases} .$$

Pour la démonstration de la proposition 4.2, on aura besoin du lemme technique suivant :

Lemme 4.4

> ***a)*** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels et* $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *une fonction croissante tendant vers* $+\infty$ *en l'infini. Alors la condition*
>
> $$\max(0,u_n)=o(g(n)) \tag{4.19}$$
>
> *est équivalente à la condition*
>
> $$\max(0,u_0,\dots,u_n)=o(g(n)). \tag{4.20}$$
>
> ***b)*** *Étant donnée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs, on a*
>
> $$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geqslant n_0(\varepsilon),\quad u_n\leqslant(n!)^{\varepsilon} \tag{4.21}$$
>
> *si et seulement si* $\max(0,\log u_n)=o(n\log n)$.

Démonstration. **a)** Supposons que $\max(0,u_n)=o(g(n))$.

Soit $\varepsilon>0$ et $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0(\varepsilon)$, $|u_n|\leqslant\varepsilon g(n)$. Comme g est croissante, on a

$$\forall n\geqslant n_0(\varepsilon),\ \max(0,u_{n_0(\varepsilon)},\dots,u_n)\leqslant\varepsilon\max(g(n_0(\varepsilon)),\dots,g(n))\leqslant\varepsilon g(n).$$

Soit $n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\geqslant n_1(\varepsilon),\ \max(0,u_0,\dots,u_{n_0(\varepsilon)-1})\leqslant\varepsilon g(n).$$

Son existence est assurée par le fait que $g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. Posons $n_2(\varepsilon):=\max(n_0(\varepsilon),n_1(\varepsilon))$. Alors pour tout $n\geqslant n_2(\varepsilon)$,

$$\max(0,u_0,\dots,u_n)\leqslant\varepsilon g(n),$$

ce qui prouve (4.20)

La réciproque est évidente.

b) On a $\max(0,\log u_n)=o(n\log n)$ si et seulement si $\max(0,\log u_n)=o(\log n!)$ d'après la formule de Stirling, ce qui équivaut à

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ \forall n\geqslant n_0(\varepsilon),\ \log u_n\leqslant\varepsilon\log(n!),$$

ce qui est équivalent à (4.21) en passant à l'exponentielle de part et d'autre de l'inégalité. □

Démonstration de la proposition 4.2. On suppose sans perte de généralité que $\mathbb{K}$ est galoisien. Il est prouvé dans [21, p. 225] que si $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{K}$, alors

$$\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})}\sup_{0\leqslant i\leqslant n}\log^+|a_i|_{\mathfrak{p}}=\frac{1}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}\log\big(\mathrm{den}'(a_0,\dots,a_n)\big), \tag{4.22}$$

où $\log^+(x)=\log\max(1,x)$ et $\mathrm{den}'(a_0,\dots,a_n)$ est la norme $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$ du plus petit multiple commun $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}_0,\dots,\mathfrak{a}_n$ dans le sens des anneaux de Dedekind. On a alors

$$\mathrm{den}(a_0,\dots,a_n)\leqslant\mathrm{den}'(a_0,\dots,a_n)\leqslant\mathrm{den}(a_0,\dots,a_n)^{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} \tag{4.23}$$

(cf proposition 1.2). Ainsi, comme

$$\sum_{v\text{ valeur absolue}}\sup_{0\leqslant i\leqslant n}\log^+|a_i|_v=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})}\sup_{0\leqslant i\leqslant n}\log^+|a_i|_{\mathfrak{p}}+\sum_{\tau\in\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})}\sup_{0\leqslant i\leqslant n}\log^+|a_i|_{\tau},$$

la condition (4.18) est vérifiée si et seulement si

$$\frac{1}{n}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})}\log^{+}\sup_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|_{\mathfrak{p}} = o(\log n) \;\text{ et }\; \frac{1}{n}\sum_{\tau\in\mathrm{Gal}\,(\mathbb{K}/\mathbb{Q})}\log^{+}\sup_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|_{\tau} = o(\log n),$$

c'est à dire, selon (4.22) et (4.23), si

$$\log\mathrm{den}(a_0,\dots,a_n) = o(n\log n) \;\text{ et }\; \forall\tau\in\mathrm{Gal}\,(\mathbb{K}/\mathbb{Q}),\ \log\max(1,|\tau(a_0)|,\dots,|\tau(a_n)|) = o(n\log n). \tag{4.24}$$

Selon le lemme 4.4 **a)**, comme

$$\log\max(1,|\tau(a_0)|,\dots,|\tau(a_n)|) = \max(0,\log|\tau(a_0)|,\dots,\log|\tau(a_n)|),$$

la condition (4.24) équivaut à

$$\log\mathrm{den}(a_0,\dots,a_n) = o(n\log n) \;\text{ et }\; \forall\tau\in\mathrm{Gal}\,(\mathbb{K}/\mathbb{Q}),\ \max(0,\log|\tau(a_n)|) = o(n\log n). \tag{4.25}$$

Donc selon (4.25) et le lemme 4.4 **b)** la condition (4.18) est bien équivalente aux conditions **b)** et **c)** de la définition 4.1. □

Remarque. De la même manière, on montre que $f(z)$ vérifie les conditions **b)** et **c)** de la définition 0.1 si et seulement si

$$\frac{1}{n}\sum_{v}\log\max(1,|a_0|_v,\dots,|a_n|_v) = O(1).$$

Par un raisonnement analogue, on peut reformuler la condition de Galochkin introduite dans la sous-section 4.2.1 à l'aide d'une quantité $h(n,\mathfrak{p},G)$ définie en termes de valeurs absolues p-adiques sur $\mathbb{K}$.

Définition 4.5

Pour tout $G\in\mathcal{M}_{\mu}(\mathbb{K}(z))$ et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, la quantité $h(n,\mathfrak{p},G)$ est définie (cf [4, p. 70]) par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad h(n,\mathfrak{p},G) := \frac{1}{n}\max_{m\leqslant n}\log^{+}\left\|\frac{G_m}{m!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}.$$

Pour un opérateur différentiel $L\in\mathbb{K}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, on pose $h(n,\mathfrak{p},L) := h(n,\mathfrak{p},A_L)$, où A_L est la matrice compagnon de L.

Proposition 4.3

Soit $G\in\mathcal{M}_{\mu}(\mathbb{K}(z))$. La condition de Galochkin au sens large *introduite dans la définition 4.3 est équivalente à $\sigma_n(G) = o(\log n)$, où*

$$\sigma_n(G) := \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} h(n,\mathfrak{p},G).$$

Dans le cas strict, la condition de Galochkin *au sens strict* est équivalente au fait que $\sigma(G)<\infty$, où

$$\sigma(G) := \limsup_{n\to+\infty}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} h(n,\mathfrak{p},G)$$

est la *taille* de G introduite dans le chapitre 1 (définition 1.7).

Démonstration de la proposition 4.3. On a vu dans la preuve de la proposition 4.2 que si $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} \log^+ |a_i|_{\mathfrak{p}} = o(\log n) \Leftrightarrow \log \mathrm{den}(a_0, \dots, a_n) = o(n \log n).$$

Donc, ici, en notant q_s le plus petit dénominateur commun des coefficients des coefficients des matrices $\dfrac{G_m}{m!}$ pour $m \leqslant s$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \max_{m \leqslant n} \log^+ \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} = o(\log n)$$

si et seulement si $\log q_n = o(n \log n)$, c'est-à-dire, comme $q_n \geqslant 1$, selon le lemme 4.4 **b)**, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant s_0(\varepsilon), \;\; q_n \leqslant n!^{\varepsilon},$$

ce qui n'est autre que la condition de Galochkin au sens large (définition 4.1). □

Remarque. Montrons comment la preuve du théorème 4.3 présentée dans la partie 4.2.2 permet de relier quantitativement $\sigma_n(G)$ et les quantités

$$\sigma_n(\mathbf{f}) = \frac{1}{n} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \max_{\substack{m \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant \mu}} |f_{i,m}|_{\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad \sigma_{n,\infty}(\mathbf{f}) = \frac{1}{n} \sum_{\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}} \max_{\substack{m \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant \mu}} |f_{i,m}|_{\tau}$$

encodant respectivement les conditions **b)** et **c)** de la définition 4.1 (Proposition 4.2), les composantes du vecteur $\mathbf{f} = {}^t(f_1(z), \dots, f_\mu(z))$ étant écrites sous la forme $f_i(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{i,m} z^m \in \mathbb{K}[\![z]\!]$.

On commence par appliquer le logarithme de part et d'autre de l'inégalité (4.15) dans la partie 4.2.2. On obtient

$$\frac{\log q_s}{s} \leqslant N \frac{\log c_{12}}{s} + N\mu[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \frac{\log c_{13}}{s} + 2\mu[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \frac{\theta_{N+M}}{s} + \mu[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \frac{\log d_{N+M}}{s},$$

où c_{12} et c_{13} sont des constantes explicitables.

Or, $N = 2\mu(t+1)(s+\mu-1)$ et $M = (t+1)(s+\mu-1)$ donc en posant, pour tout k, $U_k = \dfrac{\log \theta_k}{k}$ et $V_k = \dfrac{\log d_k}{k}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\log q_s}{s} \leqslant\; & 2\mu(t+1)(1+o(1)) \log c_{12} + 2\mu^2 [\mathbb{K} : \mathbb{Q}](t+1)(1+o(1)) \log c_{13} + \\ & 2\mu[\mathbb{K} : \mathbb{Q}](2\mu+1)(t+1)(1+o(1)) U_{N+M} + \mu[\mathbb{K} : \mathbb{Q}](2\mu+1)(t+1)(1+o(1)) V_{N+M} \\ \leqslant\; & O(1) + \mu[\mathbb{K} : \mathbb{Q}](2\mu+1)(t+1)(1+o(1))[2U_{N+M} + V_{N+M}]. \end{aligned}$$

Or, l'équation (4.22) ci-dessus implique que

$$U_k = \frac{1}{k} \log \mathrm{den}(f_{i,m}, 1 \leqslant i \leqslant \mu, m \leqslant k) \leqslant \frac{[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]}{k} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})} \sup_{\substack{m \leqslant k \\ 1 \leqslant i \leqslant \mu}} |f_{i,k}|_{\mathfrak{p}} = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \sigma_k(\mathbf{f}).$$

De même, on montre que $\sigma_s(G) \leqslant \dfrac{1}{s} \log q_s$ et par ailleurs que $V_k \leqslant [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \sigma_{\infty,k}(\mathbf{f})$. Finalement, on obtient l'inégalité explicite

$$\begin{aligned} \sigma_s(G) \leqslant O(1) + [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]^2 \mu(2\mu+1)(t+1)(1+o(1))[2\sigma_{(2\mu+1)(t+1)(s+\mu-1)}(\mathbf{f}) + \\ \sigma_{\infty,(2\mu+1)(t+1)(s+\mu-1)}(\mathbf{f})], \end{aligned} \tag{4.26}$$

où les termes $O(1)$ et $o(1)$ peuvent être explicités.

Dans le cas des G-fonctions *au sens strict*, une majoration analogue est déjà connue : voir la preuve de Dwork du théorème des Chudnovsky [21, p. 299].

4.3.2 Condition de Bombieri *au sens large*

Le théorème de Katz affirme qu'un opérateur *globalement nilpotent* (selon la terminologie de [21, p. 95, p. 98]) est fuchsien à exposants rationnels en tout point de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ (voir [21, p. 98]). Dans cette section, nous allons introduire une *condition de Bombieri* au sens large (définition 4.8) qui implique la nilpotence globale des opérateurs qui la vérifient. Nous verrons dans la sous-section 4.3.3 que les G-opérateurs *au sens large* vérifient la condition de Bombieri *au sens large*. Cette condition est donc adaptée au contexte des G-fonctions *au sens large*.

On se donne un corps de nombres $\mathbb{K}$. Rappelons que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$, on note $p(\mathfrak{p})$ le nombre premier engendrant l'idéal $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$.

Définissons d'abord une notion de densité qui sera utilisée par la suite (cf [19, pp. 255-257]).

Définition 4.6

Soit $\mathscr{S} \subset \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})$. *On note* $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p})$ *la norme d'un idéal* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$.

On dit que $\mathscr{S}$ *admet* $d \geqslant 0$ *pour* densité de Dirichlet *(ou* densité analytique*) lorsque*

$$\frac{-1}{\log(s-1)} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathscr{S}} \frac{1}{N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^s} \longrightarrow d$$

quand s *tend vers* 1 *pour* s *réel,* $s > 1$.

On prend le choix de normalisation pour la valeur absolue $\mathfrak{p}$-adique $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ donné dans [21, p. 222], c'est-à-dire $|p(\mathfrak{p})|_{\mathfrak{p}} = p^{-d_{\mathfrak{p}}/[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}$ où $d_{\mathfrak{p}} = [\mathbb{K}_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{p(\mathfrak{p})}]$.

Définition 4.7

Soit $\mathbb{K}$ *un corps de nombres. Un système différentiel* $y' = Gy$, $G \in \mathscr{M}_{\mu}(\mathbb{K}(z))$, *est dit* globalement nilpotent *si on a* $R_{\mathfrak{p}}(G) > |p(\mathfrak{p})|_{\mathfrak{p}}^{1/(p(\mathfrak{p})-1)}$ *pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$ *en dehors d'un ensemble de densité de Dirichlet nulle*[1].

En suivant la constuction faite au sens strict dans [21], nous allons maintenant définir, en suivant [6, p. 747], une condition de Bombieri adaptée à notre situation.

Si G est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}(z)$ et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$, on définit $R_{\mathfrak{p}}(G)$ comme le rayon de convergence d'une matrice fondamentale de solutions du système $y' = Gy$ au voisinage du *point générique* $\mathfrak{p}$*-adique* tel que construit dans [21, pp. 92–97].

Définition 4.8 (*André, [6], p. 747*)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n(G) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}) \\ p(\mathfrak{p}) \leqslant n}} \log^+\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(G)}\right)$. *On dit que le système* $y' = Gy$ *satisfait la* condition de Bombieri *au sens large quand*

$$\rho_n(G) = o(\log n).$$

Dans le cas strict, la condition de Bombieri *au sens strict* est $\rho(G) < \infty$ où

$$\rho(G) := \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \log^+\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(G)}\right)$$

est le *rayon de convergence générique global inverse* de G (cf [21, pp. 226–227]).

1. Dans la caractérisation de la nilpotence donnée par Dwork dans [21, p. 99], il est indiqué que la condition serait $R_{\mathfrak{p}}(G) > |\pi| = |p(\mathfrak{p})|_{\mathfrak{p}}^{1/(1-p(\mathfrak{p}))}$, où $\pi^{p-1} = -p$. L'égalité $|\pi| = |p(\mathfrak{p})|_{\mathfrak{p}}^{1/(1-p(\mathfrak{p}))}$ est une erreur, étant donnée la définition de π.

La proposition suivante illustre, comme annoncé au début de la section, l'intérêt de la condition de Bombieri : les systèmes différentiels la satisfaisant font partie de ceux auxquels on peut appliquer le théorème de Katz sur la rationalité des exposants.

Proposition 4.4

Si la matrice G satisfait la condition de Bombieri au sens large*, alors $y' = Gy$ est un système différentiel globalement nilpotent.*

La démonstration fera usage du résultat suivant :

Proposition 4.5

Soit $\mathscr{S} \subset \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Si $\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \dfrac{\log p}{p} = o(\log n)$, alors $\mathscr{S}$ a une densité de Dirichlet nulle.

Démonstration. La preuve repose sur une transformation d'Abel de la série $\sum_{p\in\mathscr{S}} p^{-s}$.

Pour tout $s > 1$, on définit la fonction de classe $\mathscr{C}^1$

$$\begin{array}{rccc} g_s : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^{s-1}\log t}. \end{array}$$

Selon [53, Theorem 1, p. 3], on a pour tout $x \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant x}} \frac{1}{p^s} = \sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant x}} \frac{\log p}{p}\frac{1}{p^{s-1}\log p} &= T(x)g_s(x) - \int_2^x T(t)g_s'(t)\mathrm{d}t \\ &= T(x)g_s(x) + (s-1)\int_2^x \frac{T(t)}{t^s\log(t)}\mathrm{d}t + \int_2^x \frac{T(t)}{t^s(\log(t))^2}\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4.27}$$

où $T(t) = \sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant t}} \dfrac{\log p}{p} = o(\log t)$ par hypothèse.

En particulier, $T(x)g_s(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et Tg_s' est intégrable sur $[2,+\infty[$. Ainsi, en passant à la limite $x \to +\infty$, on obtient

$$Z(s) := \sum_{p\in\mathscr{S}} \frac{1}{p^s} = (s-1)\int_2^{+\infty} \frac{E(t)}{t^s}\mathrm{d}t + \int_2^{+\infty} \frac{E(t)}{t^s\log(t)}\mathrm{d}t, \tag{4.28}$$

où $E(t) := \dfrac{T(t)}{\log t} = o(1)$. On veut montrer que $\dfrac{Z(s)}{-\log(s-1)} \xrightarrow[s\to1^+]{} 0$.

- D'une part, soit $M > 0$ tel que $\forall\, t \geqslant 2,\ 0 \leqslant E(t) \leqslant M$. Alors

$$\forall\, s \in]1,2[,\ 0 \leqslant \frac{(s-1)}{-\log(s-1)}\int_2^{+\infty} \frac{E(t)}{t^s}\mathrm{d}t \leqslant \frac{M(s-1)}{-\log(s-1)}\left[\frac{t^{-s+1}}{-s+1}\right]_2^{+\infty} = \frac{-M}{2^{s-1}\log(s-1)} \xrightarrow[s\to1^+]{} 0.$$

- D'autre part, on va montrer que

$$G(s) := \frac{1}{-\log(s-1)}\int_2^{+\infty} \frac{E(t)}{t^s\log(t)}\mathrm{d}t \xrightarrow[s\to1^+]{} 0.$$

Par un changement de variable $u = (s-1)\log t$, on voit que pour tout $h \geqslant 2$,

$$\int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s\log(t)} = \mathrm{Ei}\big(-(s-1)\log h\big),$$

où $\mathrm{Ei} : x \mapsto -\displaystyle\int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est la fonction exponentielle intégrale. Par suite, il découle de l'équivalent (cf [1, pp. 229–230]) $\mathrm{Ei}(u) \sim_{u\to 0^+} \log(-u)$ que

$$\forall h \geqslant 2, \quad \frac{1}{-\log(s-1)} \int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s \log(t)} \xrightarrow[s\to 1^+]{} 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme E tend vers 0 en l'infini, on peut fixer $h \geqslant 2$ tel que $\forall t \geqslant h, E(t) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. D'où

$$\begin{aligned} 0 \leqslant G(s) &\leqslant \frac{M}{-\log(s-1)} \int_2^h \frac{\mathrm{d}t}{t^s \log(t)} + \frac{\varepsilon}{-3\log(s-1)} \int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s \log(t)} \\ &\leqslant \frac{M}{-\log(s-1)} \int_2^h \frac{\mathrm{d}t}{t \log(t)} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{\mathrm{Ei}\big(-(s-1)\log h\big)}{-\log(s-1)}, \end{aligned}$$

car $t^s \geqslant t$ pour $t > 1$. Le premier terme de la dernière somme tend vers 0 et le second tend vers 1 quand s tend vers 1, $s > 1$, on peut donc fixer $\eta > 0$ tel que pour tout $s \in]1, 1+\eta[$,

$$\frac{M}{-\log(s-1)} \int_2^h \frac{\mathrm{d}t}{t\log(t)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{Ei}\big(-(s-1)\log h\big)}{-\log(s-1)} \leqslant 2$$

de sorte que

$$\forall s \in]1, 1+\eta[, \quad 0 \leqslant G(s) \leqslant \varepsilon.$$

En d'autres termes, $G(s)$ tend vers 0 quand s tend vers 1^+.

Selon ces deux points et (4.28), on a bien $\displaystyle\lim_{s\to 1^+} \frac{Z(s)}{\log(s-1)} = 0$, soit selon la définition 4.6, $\mathscr{S}$ a une densité de Dirichlet nulle. □

On peut à présent démontrer la proposition 4.4, en s'inspirant de la preuve du fait que la *condition de Bombieri* au sens strict $\rho(G) < \infty$ implique que $y' = Gy$ est globalement nilpotent dans [21, pp. 226–227] (voir aussi celle présentée par André, [4, p. 77]).

Démonstration de la proposition 4.4. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des nombres premiers p de $\mathbb{Z}$ tels qu'il existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})$ au-dessus de p tel que $R_{\mathfrak{p}}(G) \leqslant |p|_{\mathfrak{p}}^{\frac{1}{p-1}}$. Selon [21, Proposition 5.1, p. 95], $\mathscr{S}$ est l'ensemble des p tels que $y' = (G \mod \mathfrak{p})y$ est non nilpotent pour au moins un premier $\mathfrak{p}$ au-dessus de p. Fixons pour chaque $p \in \mathscr{S}$ un tel premier $\mathfrak{p}(p)$. Alors

$$\rho_n(G) \geqslant \sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \log^+\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}(p)}(G)}\right) \geqslant \sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \frac{1}{\delta} \frac{\log p}{p-1}.$$

En effet, $|p|_{\mathfrak{p}} = p^{-f_{\mathfrak{p}}/\delta}$ avec la normalisation choisie.

Grâce à l'hypothèse $\rho_n(G) = o(\log n)$, on a donc $\displaystyle\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \frac{\log p}{p-1} = o(\log n)$. Donc selon la proposition 4.5, $\mathscr{S}$ a une densité de Dirichlet nulle.

Or, si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})$ est tel que $y' = (G \mod \mathfrak{p})y$ est non nilpotent, alors $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \in \mathscr{S}$ donc l'ensemble $\mathscr{S}'$ des idéaux premiers vérifiant cette propriété est de densité de Dirichlet nulle. En effet, si $s > 1$,

$$\sum_{\mathfrak{p}\in\mathscr{S}'} \frac{1}{N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^s} = \sum_{p\in\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathscr{S}\\ \mathfrak{p}|p}} \frac{1}{p^{f_{\mathfrak{p}} s}} \leqslant \sum_{p\in\mathscr{S}} \frac{\mathrm{Card}\{\mathfrak{p} \in \mathscr{S}' : \mathfrak{p} \mid p\}}{p^s} \leqslant \delta \sum_{p\in\mathscr{S}} \frac{1}{p^s},$$

car le nombre de premiers $\mathfrak{p}$ au-dessus de p est borné par δ selon la formule $\sum_{\mathfrak{p}|p} d_{\mathfrak{p}} = \delta$. Donc en divisant par $-\log(s-1)$ de part et d'autre de l'inégalité et en passant à la limite, on obtient que $\mathscr{S}'$ a une densité de Dirichlet nulle. Par définition, le système $y' = Gy$ est donc globalement nilpotent. □

Remarques. ***i)*** L'assertion minimale pour que la preuve de la proposition 4.4 fonctionne est la suivante.

Assertion (A) : « Soit $\mathscr{S} \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Si $\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \dfrac{\log p}{p} = o(\log n)$, alors $\mathscr{S}$ a une densité de Dirichlet $d < \dfrac{1}{2}$ »

En effet, en reprenant les notations de la preuve, si $\mathscr{S}$ vérifie **(A)**, alors $\mathscr{S}'$ est un ensemble de premiers de $\mathbb{K}$ divisant un ensemble de premiers de $\mathbb{Z}$ de densité de Dirichlet $< 1/2$ et selon [21, Remark 6.3, p. 100], on peut appliquer le théorème de Katz au système $y' = Gy$, bien qu'il ne soit pas *stricto sensu* globalement nilpotent, puisque $\mathscr{S}'$ n'a pas nécessairement dans ce cas une densité de Dirichlet nulle.

ii) On considère les assertions **(A')** et **(A")** :

Assertion (A') :

« Soit $\mathscr{S} \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Si $\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \dfrac{\log p}{p} = o(\log n)$, alors $\sum_{p\in\mathscr{S}} \dfrac{1}{p} < \infty$. »

Assertion (A") : « Soit $\mathscr{S} \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Si $\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \dfrac{\log p}{p} = o(\log n)$, alors $\mathscr{S}$ a une densité naturelle nulle, c'est à dire

$$\frac{\mathrm{Card}\{p \in \mathscr{S}, p \leqslant x\}}{\mathrm{Card}\{p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), p \leqslant x\}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0. \text{ »}$$

Puisqu'un ensemble de premiers de densité naturelle d a également une densité de Dirichlet, qui est égale à d, un ensemble $\mathscr{S}$ vérifiant l'hypothèse de **(A')** a également une densité de Dirichlet nulle. Ce n'est cependant pas une équivalence puisqu'il existe un ensemble de premiers ayant une densité de Dirichlet (non nulle) mais pas de densité naturelle (voir [48, p. 126]).

Si **(A')** est vraie, l'ensemble $\mathscr{S}$ considéré dans la preuve de la proposition 4.4 a une densité de Dirichlet nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\log(s-1)} \sum_{p\in\mathscr{S}} p^{-s} \to 0$$

quand s tend vers 1, $s > 1$. Il en va de même si **(A")** est vraie.

Néanmoins, les assertions **(A')** et **(A")** sont fausses en général, comme on le verra dans la section annexe 6.2. En particulier, on ne peut pas calquer telle quelle la preuve de l'équivalent de la proposition 4.4 donnée par André dans le cas des G-opérateurs au sens strict [4, p. 77]. En effet, André commence par prouver que l'ensemble de premiers $\mathscr{S}$ considéré vérifie $\sum_{p\in\mathscr{S}} \dfrac{1}{p} < \infty$ pour en déduire que $\mathscr{S}$ a une densité de Dirichlet nulle.

4.3.3 Théorème d'André-Bombieri *au sens large*

L'objectif de cette section est de démontrer la proposition 4.6 ci-dessous, qui est l'analogue du théorème d'André-Bombieri [21, pp. 228–234] pour les G-fonctions *au sens large.* Ce résultat fait le lien entre les conditions de Galochkin et de Bombieri, présentées respectivement dans les parties 4.2.1 et 4.3.2. Voir la proposition 4.8 dans la sous-section 4.5.1 pour une version quantitative.

Proposition 4.6

Soit $G \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$. La condition de Galochkin au sens large *est vérifiée si et seulement si* *la condition de Bombieri* au sens large $\rho_n(G) = o(\log n)$ *est vérifiée.*

Nous aurons besoin pour la démonstration du lemme suivant. On rappelle que si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})$, $p(\mathfrak{p})$ est défini comme l'unique premier positif de $\mathbb{Z}$ engendrant $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$.

Lemme 4.5

Si $G \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$, on a

$$\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} h(n, \mathfrak{p}, G) = \sum_{p(\mathfrak{p}) \leqslant n} h(n, \mathfrak{p}, G) + O(1).$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})$. On suppose que $\|G\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \leqslant 1$. A l'aide de la formule de récurrence $G_{s+1} = G_s G + G_s'$, comme $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ est une valeur absolue non archimédienne, on montre que $\|G_s\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \leqslant 1$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Donc

$$\frac{1}{n} \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \log^+ \max_{m \leqslant n} \left\| \frac{G_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} = h(n, \mathfrak{p}, G) \leqslant \frac{1}{n} \log^+ \max_{s \leqslant n} \left| \frac{1}{s!} \right|_{\mathfrak{p}} \leqslant \frac{-1}{n} \log \min\left(1, \min_{s \leqslant n} |s!|_{\mathfrak{p}}\right).$$

Or si $s \leqslant n$, les diviseurs premiers p de $s!$ vérifient $p \leqslant n$. Par suite, si $p(\mathfrak{p}) > n$, on a $|s!|_{\mathfrak{p}} = 1$ et donc $h(n, \mathfrak{p}, G) = 0$.

Si $\|G\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} > 1$, on prend $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha|_{\mathfrak{p}} \geqslant \|G\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}}$. Ainsi, $\|G/\alpha\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \leqslant 1$. De plus, si $\|G_s/\alpha^s\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \leqslant 1$, alors

$$\frac{G_{s+1}}{\alpha^{s+1}} = \left(\frac{G_s}{\alpha^s}\right)\left(\frac{G}{\alpha}\right) + \left(\frac{G_s}{\alpha^s}\right)' \frac{1}{\alpha}$$

est une somme de produits de termes dont la norme de Gauss associée à $\mathfrak{p}$ est inférieure à 1, si bien que $\left\|G_{s+1}/\alpha^{s+1}\right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \leqslant 1$. Ceci montre par récurrence que $\|G_s/\alpha^s\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \leqslant 1$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

Donc comme ci-dessus, il en découle que si $p(\mathfrak{p}) > n$, on a $\log^+ \max_{s \leqslant n} \left\| \frac{G_s}{\alpha^s s!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} = 0$. Or

$$\log^+ \max_{s \leqslant n} \left\| \frac{G_s}{s!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} \leqslant \log^+ \max_{s \leqslant n} \left\| \frac{G_s}{\alpha^s s!} \right\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} + n \log^+ |\alpha|_{\mathfrak{p}},$$

de sorte que $h(n, \mathfrak{p}, G) \leqslant \log|\alpha|_{\mathfrak{p}}$, car $|\alpha|_{\mathfrak{p}} > 1$.

Comme on a $\|G\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} > 1$ pour un nombre fini de premiers de $\mathbb{K}$, on peut prendre α tel que $|\alpha|_{\mathfrak{p}} \geqslant \|G\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}}$ pour tout tel premier. On a alors

$$\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} h(n, \mathfrak{p}, G) = \sum_{p(\mathfrak{p}) \leqslant n} h(n, \mathfrak{p}, G) + \sum_{\|G\|_{\mathfrak{p},\text{Gauss}} > 1} \log|\alpha|_{\mathfrak{p}},$$

ce qui est le résultat voulu, c'est-à-dire

$$\sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} h(n, \mathfrak{p}, G) = \sum_{p(\mathfrak{p}) \leqslant n} h(n, \mathfrak{p}, G) + O(1).$$

□

Démonstration de la proposition 4.6. Selon la proposition 4.3 et le lemme 4.5, la condition de Galochkin *au sens large* est vérifiée si et seulement si

$$\sum_{p(\mathfrak{p}) \leqslant n} h(n, \mathfrak{p}, G) = o(\log n), \quad n \to +\infty.$$

• Selon [21, p. 234], on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$,

$$\log^+\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(G)}\right) = \limsup_{n\to+\infty} h(n,\mathfrak{p},G) \leqslant h(n,\mathfrak{p},G) + \frac{\log p(\mathfrak{p})}{n} + \frac{\log n}{n}.$$

Donc

$$\rho_n(G) \leqslant \sum_{p(\mathfrak{p})\leqslant n} h(n,\mathfrak{p},G) + C_1 \sum_{\substack{p\in\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})\\ p\leqslant n}} \frac{\log p}{n} + C_1 \frac{\log n}{n}\pi(n),$$

où C_1 est une constante majorant le nombre d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ au-dessus d'un nombre premier p donné, et π est la fonction de comptage des nombres premiers.
Par le théorème des nombres premiers, on a donc

$$\rho_n(G) \leqslant \sum_{p(\mathfrak{p})\leqslant n} h(n,\mathfrak{p},G) + 2C_1(1+o(1)),$$

de sorte que si $\sum\limits_{p(\mathfrak{p})\leqslant n} h(n,\mathfrak{p},G) = o(\log n)$, alors $\rho_n(G) = o(\log n)$.
• Réciproquement, l'équation (2.6) de [21, p. 229] donne

$$h(n,\mathfrak{p},G) \leqslant \log^+\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(G)}\right) + \mathbb{1}_{p(\mathfrak{p})\leqslant n} \frac{d_{\mathfrak{p}}}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}(\mu-1)\frac{\log n}{n} + \frac{C_{\mathfrak{p}}}{n},$$

où $d_{\mathfrak{p}}$ est un entier tel que pour tout premier p, $\sum\limits_{\mathfrak{p}|p} d_{\mathfrak{p}} = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$, et $C_{\mathfrak{p}}$ est une constante nulle pour tous les premiers $\mathfrak{p}$ sauf un nombre fini.
On peut donc trouver une constante C telle que, pour tout n,

$$\begin{aligned}\sum_{p(\mathfrak{p})\leqslant n} h(n,\mathfrak{p},G) &\leqslant \rho_n(G) + \sum_{p\leqslant n}\left(\sum_{\mathfrak{p}|p}\frac{d_{\mathfrak{p}}}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}\right)(\mu-1)\frac{\log n}{n} + \frac{C}{n}\\ &= \rho_n(G) + (\mu-1)\frac{\log n}{n}\pi(n) + \frac{C}{n} = \rho_n(G) + (\mu-1)(1+o(1)),\end{aligned}$$

puisque selon le théorème des nombres premiers, $\pi(n) \sim \dfrac{n}{\log n}$. Ainsi, si $\rho_n(G) = o(\log n)$, alors $\sum\limits_{p(\mathfrak{p})\leqslant n} h(n,\mathfrak{p},G) = o(\log n)$. □

4.3.4 Conclusion de la démonstration du théorème 4.1

Nous pouvons à présent synthétiser les différents résultats des sections précédentes pour prouver le théorème 4.1.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{K}[\![z]\!]$ une G-fonction et $L \in \mathbb{K}\left[z, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]$ un opérateur d'ordre minimal non nul tel que $L(f(z)) = 0$.

• Selon le théorème 4.3 (partie 4.2.1), la matrice compagnon A_L de L vérifie la condition de Galochkin *au sens large*.
• La proposition 4.6 (partie 4.3.3) implique alors que A_L vérifie la condition de Bombieri *au sens large* (définition 4.8).
• Selon la proposition 4.4 (partie 4.3.2), L est donc un opérateur différentiel globalement nilpotent. Par le théorème de Katz [21, p. 98], on en déduit que L est donc un opérateur fuchsien à exposants rationnels en tout point de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$. Ceci conclut la preuve du théorème 4.1.

4.4 Existence d'une base de type ACK au voisinage d'un point singulier

Le théorème d'André-Chudnovsky-Katz dans le cas des G-fonctions *au sens strict* est un résultat plus fort que l'analogue strict du théorème 4.1.

Théorème 4.4 (*André-Chudnovsky-Katz*)

Soit $f(z)$ une G-fonction au sens strict *et $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ un opérateur différentiel tel que $L(f(z)) = 0$ et d'ordre minimal μ.*

Alors au voisinage de tout $\alpha \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$, il existe une base de solutions de $Ly(z) = 0$ de la forme

$$(f_1(z-\alpha), \dots, f_\mu(z-\alpha))(z-\alpha)^{C_\alpha},$$

où $C_\alpha \in \mathcal{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ est triangulaire supérieure à valeurs propres dans $\mathbb{Q}$ et les $f_i(u) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![u]\!]$ sont des G-fonctions au sens strict.

Le but de cette partie est d'en montrer l'analogue *au sens large*, qui n'avait pas été mentionné par André dans [6].

Théorème 4.5

Le théorème 4.4 reste vrai si l'on remplace partout « strict » par « large ».

Les valeurs propres de la matrice C_α sont, modulo $\mathbb{Z}$, les exposants de L en α, le théorème 4.1 implique donc qu'elles sont rationnelles. Il reste donc à prouver que les f_i sont des G-fonctions.

La partie suivante permet de montrer un point essentiel de la preuve du théorème 4.5 (section 4.4.2), puisqu'il permet de ramener l'étude au voisinage du point 0 dans l'étape 4.

4.4.1 Invariance des G-opérateurs *au sens large* par changement de variable

Le but de cette partie est de démontrer la proposition suivante affirmant que la condition de Galochkin *au sens large* est invariante par changement de variable $u = z - \alpha$ si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ ou $u = z^{-1}$ en l'infini. La proposition 4.7 est également utilisée dans la preuve de la proposition 6.1 (section annexe 6.1).

Proposition 4.7

a) *Soit $G \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$ et $\alpha \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$. On définit $G_\alpha \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$ la matrice telle que, pour tout vecteur colonne y,*

$$y'(z) = G(z)y(z) \Leftrightarrow \widetilde{y}'(u) = G_\alpha(u)\widetilde{y}(u),$$

où $\widetilde{y}(u) := y(u-\alpha)$ si $\alpha \neq \infty$ et $\widetilde{y}(u) = y(u^{-1})$ si $\alpha = \infty$. Alors la condition de Galochkin au sens large *est vérifiée par G_α si et seulement si elle est vérifiée par G.*

b) *Soit $L \in \mathbb{K}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$. On définit $L_\alpha \in \mathbb{K}(u)[\mathrm{d}/\mathrm{d}u]$ tel que, pour toute fonction $f(z)$, $L(f(z)) = 0 \Leftrightarrow L_\alpha(\widetilde{f}(u))$, où $\widetilde{f}(u) = f(u-\alpha)$ si $\alpha \neq \infty$ et $\widetilde{f}(u) = f(u^{-1})$ si $\alpha = \infty$.*

Alors L_α est un G-opérateur au sens large *si et seulement si L est un G-opérateur* au sens large.

Remarque. En reproduisant la même preuve *mutatis mutandis*, on prouve l'énoncé analogue concernant la condition de Galochkin *au sens strict*.

Nous aurons besoin pour prouver la proposition 4.7 du lemme 4.6 ci-dessous, dû à André, qui montre que la condition de Galochkin est invariante par équivalence de systèmes différentiels. Commençons par rappeler cette notion d'équivalence (cf [47, p. 120]) :

Définition 4.9

Soient $A, B \in \mathscr{M}_\mu\left(\overline{\mathbb{Q}}((z))\right)$. On dit que les systèmes différentiels $y' = Ay$ et $y' = By$ sont équivalents sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_\mu(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ tel que $B = P[A]$, où $P[A] = PAP^{-1} + P'P^{-1}$. Ceci est équivalent à dire que $y \mapsto Py$ réalise une bijection de l'ensemble des solutions de $y' = Ay$ sur l'ensemble des solutions de $y' = By$.

Lemme 4.6 (*André, [4], Lemma 1 p. 71*)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_\mu\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$ définissant deux systèmes différentiels équivalents $y' = Ay$ et $y' = By$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors A satisfait la condition de Galochkin au sens strict *(resp. large) si et seulement si B satisfait la condition de Galochkin* au sens strict *(resp. large).*

André a déjà prouvé le cas strict et nous donnons ici une preuve différente de celle de [4, pp. 71–72], afin d'éviter d'utiliser la notion de module différentiel. Notons que le lemme 4.6 a déjà été prouvé dans le cas strict dans le chapitre 1 (lemme 1.2).

Démonstration du lemme 4.6. Soit $P \in \mathrm{GL}_\mu(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ tel que $y \mapsto Py$ induit une bijection de l'ensemble des solutions de $y' = Ay$ sur l'ensemble des solutions de $y' = By$.

Si $y' = Ay$ et $s \in \mathbb{N}$, on a, $y^{(s)} = A_s y$ et $(Py)^{(s)} = B_s P y$. Or,

$$B_s P y = (Py)^{(s)} = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} P^{(s-k)} y^{(k)} = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} P^{(s-k)} A_k y.$$

L'égalité étant valable pour toute solution y de $y' = Ay$, on en déduit

$$B_s = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} P^{(s-k)} A_k P^{-1}.$$

Soit $T(z) \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]$ tel que $T(z)A(z) \in \mathscr{M}_\mu(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $T(z)P(z) \in \mathscr{M}_\mu(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$ et $T(z)P^{-1}(z) \in \mathscr{M}_\mu(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$. On montre par récurrence sur ℓ que

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad T^{\ell+1} \frac{P^{(\ell)}}{\ell!} \in \mathscr{M}_\mu(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]). \tag{4.29}$$

En effet, c'est clair pour $\ell = 0$ et si (4.29) est vraie au rang $\ell - 1$ pour un certain $\ell \geqslant 1$, alors par la formule de Leibniz,

$$T^{\ell} \frac{(TP)^{(\ell)}}{\ell!} = T^{\ell+1} \frac{P^{(\ell)}}{\ell!} + \sum_{k=0}^{\ell-1} T^{\ell-(k+1)} \frac{T^{(\ell-k)}}{(\ell-k)!} T^{k+1} \frac{P^{(k)}}{k!}.$$

Le membre de gauche est à coefficients dans $\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]$ par le cas $\ell = 0$ et les termes d'ordre $k \leqslant \ell - 1$ du membre de droite le sont également par hypothèse de récurrence. On obtient donc $T^{\ell+1} \dfrac{P^{(\ell)}}{\ell!} \in \mathscr{M}_\mu(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$, ce qui conclut la récurrence.

Ainsi, si q_s est le dénominateur des coefficients des coefficients des matrices TA, $\dfrac{T^2 A_2}{2!}$, …, $T^s \dfrac{A_s}{s!}$, et $\widetilde{T} = T^3$, on a

$$\forall 1 \leqslant \ell \leqslant s, \quad q_s \frac{\widetilde{T}^{\ell} B_\ell}{s!} = \sum_{k=0}^{\ell} T^{2\ell-2} \frac{T^{\ell-k+1} P^{(\ell-k)}}{(\ell-k)!} \left(q_s \frac{T^k A_k}{k!} \right) T P^{-1} \in \mathscr{M}_\mu(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]).$$

Donc, en notant $\widetilde{q}_s$ le dénominateur des coefficients des coefficients de $\widetilde{T}B, \widetilde{T}^2\frac{B_2}{2!}, \dots, \widetilde{T}^s\frac{B_s}{s!}$, on obtient que $\widetilde{q}_s$ divise q_s pour tout entier s.

On en déduit que si A vérifie la condition de Galochkin *au sens strict* (resp. *large*), il en va de même de B. Par symétrie de la relation d'équivalence des systèmes différentiels, on obtient l'implication réciproque, ce qui achève la preuve. $\square$

La preuve de la proposition 4.7 a déjà été donnée par André [4, p. 83] dans le cas où $\alpha \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$, nous donnons une preuve complète par souci d'exhaustivité.

Démonstration de la proposition 4.7. **a)** Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. On a $\forall s \in \mathbb{N}, G_{\alpha,s}(u) = G_s(u+\alpha)$. De plus, le polynôme $T_\alpha(u) := d_\alpha^t T(u+\alpha) \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[u]$, où $d_\alpha \alpha \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$, vérifie $T_\alpha(u)G_\alpha(u) \in \overline{\mathbb{Q}}[u]$.

On voit que pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ et $p \leqslant s$,

$$q_s \frac{T_\alpha(u)^p G_{\alpha,p}(u)}{p!} = d_\alpha^{pt}\left(\frac{q_s T^p G_p}{p!}\right)(u+\alpha) \in \mathscr{M}_\mu\left(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[u]\right)$$

puisque $q_s T(z)^p G_p(z)/p! \in \mathscr{M}_\mu\left(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]\right)$ et on montre par récurrence que les coefficients de $T^p G_p$ sont de degrés au plus pt.

Donc si G satisfait la condition de Galochkin *au sens large*, G_α également. En remarquant que $G = (G_\alpha)_{-\alpha}$, on en déduit l'implication réciproque.

Le résultat au point à l'infini découle essentiellement du 3.8. Remarquons que si $T(z)G(z) \in \mathscr{M}_\mu\left(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z]\right)$, alors $T_\infty(u) := u^{t+2}T(u^{-1}) \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[u]$ vérifie $T_\infty(u)G_\infty(u) \in \mathscr{M}_\mu\left(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}(u)\right)$, de sorte que, selon (4.2), $T_\infty^s G_{\infty,s} \in \mathscr{M}_\mu\left(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[u]\right)$ pour tout entier s.

On a montré dans le lemme 3.8 que

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad G_{\infty,s}(u) = (-1)^s \sum_{k=1}^{s} \frac{c_{s,k}}{u^{s+k}} G_k\left(\frac{1}{u}\right), \tag{4.30}$$

où

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant s, \quad c_{s,k} = \binom{s-1}{s-k}\frac{s!}{k!} \in \mathbb{Z}. \tag{4.31}$$

Ainsi, si $s \in \mathbb{N}^*$ et $p \leqslant s$, on a, selon (4.30),

$$\begin{aligned} q_s \frac{T_\infty(u)^p G_{\infty,p}(u)}{p!} &= (-1)^p \sum_{\ell=1}^{p} \frac{c_{p,\ell}}{p!} u^{-(p+\ell)} \left(u^2 u^t T\left(\frac{1}{u}\right)\right)^p q_s G_\ell\left(\frac{1}{u}\right) \\ &= (-1)^p \sum_{\ell=1}^{p} \binom{p-1}{p-\ell} u^{p-\ell} u^{(p-\ell)t} T\left(\frac{1}{u}\right)^{p-\ell} q_s u^{\ell t}\left(\frac{T^\ell G_\ell}{\ell!}\right)\left(\frac{1}{u}\right) \in \mathscr{M}_\mu\left(\mathscr{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[u]\right) \end{aligned}$$

de sorte qu'en notant $q_{\infty,s}$ le dénominateur des coefficients des coefficients des matrices

$$T_\infty G_\infty, \frac{T_\infty^2 G_{\infty,2}}{2!}, \dots, \frac{T_\infty^s G_{\infty,s}}{s!},$$

on a $\forall s \in \mathbb{N}^*, q_{\infty,s} \leqslant q_s$. Donc si la condition de Galochkin *au sens large* est vérifiée par G, elle l'est également par G_∞. Puisque $(G_\infty)_\infty = G$, on en déduit l'implication réciproque.

b) Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, on note $G = A_L$ la matrice compagnon de L.

Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, la matrice G vérifie $G_\alpha = A_{L_\alpha}$, donc selon **a)**, L est un G-opérateur *au sens large* si et seulement si L_α l'est.

Si $\alpha = \infty$, selon le lemme 3.8 **b)**, le système $h' = G_\infty h$ est équivalent au système $h' = A_{L_\infty} h$. La conclusion voulue découle ainsi du lemme 4.6.

Supposons que L est un G-opérateur *au sens large*. Selon **a)**, G_∞ vérifie alors la condition de Galochkin *au sens large*. Il en va donc de même de A_{L_∞} selon le lemme 4.6. Par conséquent, L_∞ est un G-opérateur *au sens large*. □

4.4.2 Démonstration du théorème 4.5

Le but de cette section est de prouver le théorème 4.5 en adaptant la démonstration donnée dans le cas strict par Dwork dans [21, pp. 234–248], et en utilisant également les résultats de la section 4.4.1.

On considère $\mathbb{K}$ un corps de nombres tel que $G \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{K}(z))$ et on se donne $C \in \mathcal{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ une matrice à valeurs propres rationnelles, et $Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m z^m \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{K}[\![z]\!]) \cap \mathrm{GL}_\mu\big(\mathbb{K}((z))\big)$ telle que $Y(z)z^C$ est une matrice de solutions du système $y' = Gy$. Quitte à remplacer $\mathbb{K}$ par une extension de degré supérieur, on peut supposer que $C \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{K})$.

Commençons par démontrer que les coefficients de Y vérifient les points **a)** et **b)** de la définition 4.1.

- D'abord, selon [4, Corollary, p. 109], si $\widetilde{Y}(z) = Y(z)z^C$ avec $Y(z) \in \mathcal{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!])$ et $C \in \mathcal{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}})$ vérifie $\widetilde{Y}' = G\widetilde{Y}$, $G \in \mathcal{M}_\mu(\overline{\mathbb{Q}}(z))$, alors chaque coefficient de $Y(z)$ est solution d'une équation différentielle non nulle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ (qui plus est d'ordre inférieur à μ^2) . Autrement dit, les coefficients de $Y(z)$ satisfont le point **a)** de la définition 4.1. Ce fait est indépendant du contexte des G-fonctions (voir [4, Remark 2, p. 53]).
- Soit $\tau : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ un plongement. On note $R_\tau(Y)$ le rayon de convergence de la série $Y^\tau := \sum_{m=0}^{\infty} \tau(Y_m) z^m$. Alors [21, Equation (3.5), p. 242] implique que

$$R_\tau(Y) \geqslant \rho := \min_{\zeta \neq 0,\infty} |\zeta|_\tau > 0,$$

où le minimum porte sur les singularités non apparentes du système $y' = Gy$. D'où selon la formule d'Hadamard-Cauchy,

$$\limsup_{n\to+\infty} \|\tau(Y_m)\|_\infty^{1/n} = \frac{1}{R_\tau(Y)} \leqslant \frac{1}{\rho}.$$

Ainsi, pour tout entier m, les maisons des coefficients de Y_m sont bornées par κ^{m+1}, où $\kappa > 0$ est une constante. On rappelle que la maison de $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ est $\overline{|\alpha|} = \max_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} |\sigma(\alpha)|$. Ceci prouve que les coefficients de $Y(z)$ vérifient la condition **b)** de la définition 4.1.

Le reste de la démonstration est consacré à la vérification de la condition arithmétique **c)** de la définition 4.1.

Étape 1. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, on désigne par $R_{\mathfrak{p}}(Y)$ le rayon de convergence pour la norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}}$ de la série $Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m z^m$. On note alors

$$\rho_n(Y) := \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}) \\ p(\mathfrak{p}) \leqslant n}} \log^+\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(Y)}\right),$$

où $p(\mathfrak{p})$ est l'unique premier positif de $\mathbb{Z}$ engendrant $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$.

Le but de cette étape est d'établir un lien entre $\rho_n(Y)$ et la quantité $\rho_n(G)$ introduite dans la définition 4.8 en suivant la démonstration de [21, Theorem 3.3, p. 238].

Dwork a obtenu dans [21, Equation (3.4), p. 240], sous les hypothèses sur C et Y ci-dessus, que pour tout premier $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{O}_{\mathbb{K}}$,

$$\log^+\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(Y)}\right) \leqslant \mu^2 \log\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(G)}\right) + (\mu^2+1) \sum_{\zeta\neq 0,\infty} \log^+ \left|\frac{1}{\zeta}\right|_{\mathfrak{p}},$$

où la dernière somme porte sur toutes les singularités non apparentes $\zeta \notin \{0,\infty\}$ du système $y' = Gy$.

Donc en sommant sur tous les premiers $\mathfrak{p}$ tels que $p(\mathfrak{p}) \leqslant n$, on obtient

$$\rho_n(Y) \leqslant \mu^2 \rho_n(G) + (\mu^2+1) \sum_{\zeta\neq 0,\infty} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}) \\ p(\mathfrak{p})\leqslant n}} \log^+ \left|\frac{1}{\zeta}\right|_{\mathfrak{p}} \leqslant \mu^2 \rho_n(G) + \beta,$$

où $\beta := (\mu^2+1) \sum_{\zeta\neq 0,\infty} \sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \log^+ \left|\frac{1}{\zeta}\right|_{\mathfrak{p}}$ est une constante ne dépendant que de G. La constante β est finie, car pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha|_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout premier $\mathfrak{p}$ sauf un nombre fini.

Ainsi, si G vérifie la condition de Bombieri *au sens large* $\rho_n(G) = o(\log n)$, on a $\rho_n(Y) = o(\log n)$.

Étape 2. On note

$$\sigma_n(Y) := \frac{1}{n} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}}) \\ p(\mathfrak{p})\leqslant n}} \sup_{m\leqslant n} \log^+ |Y_m|_{\mathfrak{p}}.$$

Le but de cette étape est de lier $\sigma_n(Y)$ et $\rho_n(Y)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un dénominateur commun des valeurs propres de C, qui sont par hypothèse rationnelles. Alors Dwork prouve dans [21, p. 247] qu'on peut trouver des constantes positives ℓ_0 et h_0 telles que si $\mathfrak{p}$ est en dehors d'un ensemble fini de premiers $\mathscr{S} \subset \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sup_{m\leqslant n} \log^+ |Y_m|_{\mathfrak{p}} \leqslant{}& \frac{1}{n}\left(n + \frac{\ell_0+h_0}{N}\right) \log^+\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(Y)}\right) \\ &+ \frac{\mu-1}{n} \frac{d_{\mathfrak{p}}}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]} \mathbb{1}_{nN+h_0+\ell_0 \geqslant p(\mathfrak{p})} \log(nN+\ell_0+h_0), \end{aligned} \tag{4.32}$$

où $d_{\mathfrak{p}} = [\mathbb{K}_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{p(\mathfrak{p})}]$ est le degré de la complétion $\mathfrak{p}$-adique de $\mathbb{K}$ sur le corps $\mathbb{Q}_p$ adapté. Cette inégalité découle essentiellement de l'application du théorème de Christol-Dwork [21, Theorem 2.1, p. 159].

On obtient alors en sommant l'inégalité (4.32) sur tous les premiers $\mathfrak{p}$ tels que $p(\mathfrak{p}) \leqslant n$ et $\mathfrak{p} \notin \mathscr{S}$

$$\sigma_n(Y) \leqslant \left(1 + \frac{\ell_0+h_0}{nN}\right)\rho_n(Y) + \frac{\mu-1}{n}\log(nN+\ell_0+h_0) \sum_{u<p\leqslant n} \left(\sum_{\mathfrak{p}|p} \frac{d_{\mathfrak{p}}}{[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]}\right) + \sum_{\mathfrak{p}\in\mathscr{S}} \frac{1}{n} \sup_{m\leqslant n} \log^+ |Y_m|_{\mathfrak{p}},$$

où u est le maximum de l'ensemble fini $\mathscr{S}$.

Or, selon la formule d'Hadamard, on a pour tout $\mathfrak{p}$, $\limsup |Y_s|_{\mathfrak{p}}^{1/s} = \dfrac{1}{R_{\mathfrak{p}}(Y)}$, donc $|Y_m|_{\mathfrak{p}}^{1/m} \leqslant \dfrac{1}{R_{\mathfrak{p}}(Y)} + o(1)$, d'où si $m \leqslant n$,

$$\log |Y_m|_{\mathfrak{p}} \leqslant m \log\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(Y)} + o(1)\right) \leqslant n \log\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(Y)}\right) + n\nu,$$

où $\nu > 0$ est une constante. Ainsi,

$$\frac{1}{n}\sup_{m\leqslant n} \log^+ |Y_m|_{\mathfrak{p}} \leqslant \max\left(0, \log\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(Y)}\right) + \nu\right) \leqslant \log^+\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(Y)}\right) + \nu.$$

Donc

$$\sum_{\mathfrak{p}\in\mathscr{S}} \frac{1}{n} \sup_{m\leqslant n} \log^+ |Y_m|_{\mathfrak{p}} \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{S})\nu + \sum_{\mathfrak{p}\in\mathscr{S}} \log^+\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}(Y)}\right) =: \gamma$$

et γ est une constante ne dépendant que de Y.

De plus, on a, pour tout nombre premier p, $\sum_{\mathfrak{p}|p} d_{\mathfrak{p}} = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$ (cf [21, p. 222]), d'où, en notant π la fonction de comptage des nombres premiers,

$$\begin{aligned}\sigma_n(Y) &\leqslant \left(1+\frac{\ell_0+h_0}{nN}\right)\rho_n(Y) + \frac{\mu-1}{n}\log(nN+\ell_0+h_0)\,(\pi(n)-\pi(u))+\gamma \\ &\leqslant (1+o(1))\rho_n(Y) + \frac{\mu-1}{n}\log(n)(1+o(1))\frac{n}{\log n}(1+o(1))+\gamma\end{aligned}$$

selon le théorème des nombres premiers. Finalement,

$$\sigma_n(Y) \leqslant (1+o(1))\rho_n(Y) + (\mu-1)(1+o(1))+\gamma,$$

de sorte que si $\rho_n(Y) = o(\log n)$, alors $\sigma_n(Y) = o(\log n)$ également.

Donc selon les étapes 1 et 2 précédentes, si G vérifie la condition de Bombieri *au sens large*, alors $\sigma_n(Y) = o(\log n)$. Or, en reprenant la preuve de la proposition 4.2, on voit que $\sigma_n(Y) = o(\log n)$ si et seulement si tous les coefficients de Y vérifient la condition **c)** de la définition 4.1. Ainsi, les coefficients de la matrice Y sont des G-fonctions *au sens large*.

Étape 3. Soit $L \in \mathbb{K}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ un G-opérateur *au sens large* d'ordre μ. Selon le théorème 4.1 et le théorème de Frobenius [32, Theorem 3.5.2, p. 349], on peut trouver une base de solutions de l'équation $L(y(z)) = 0$ au voisinage de 0 de la forme

$$\widetilde{F} = (\widetilde{f}_1(z), \dots, \widetilde{f}_\mu(z)) = (f_1(z), \dots, f_\mu(z))z^C = Fz^C,$$

où $C \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K})$ est à valeurs propres rationnelles.

Donc si $G = A_L$ est la matrice compagnon de L, et $U(z)$ est la matrice wronskienne de la famille $(\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_\mu)$, on a $U = {}^t\left(\widetilde{F}, \widetilde{F}', \dots, \widetilde{F}^{(\mu-1)}\right)$ et U est inversible, car $\widetilde{F}$ est une base de solutions de $L(y(z)) = 0$. De plus, U vérifie $U' = A_L U$. Or, selon la formule de Leibniz, pour tout $s \leqslant \mu-1$,

$$\begin{aligned}\widetilde{F}^{(s)} &= \sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}F^{(k)}(z^C)^{(s-k)} = \sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}F^{(k)}C(C-I_n)\dots(C-(s-k-1)I_n)z^{C-(s-k)I_n} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}z^{\mu-1-s+k}F^{(k)}C(C-I_n)\dots(C-(s-k-1)I_n)\right)z^{C-(\mu-1)I_n} =: H_s z^{C-(\mu-1)I_n}\end{aligned}$$

donc la matrice U s'écrit sous la forme $U(z) = H(z)z^{\widetilde{C}}$, où $\widetilde{C} = C-(\mu-1)I_n$ est à valeurs propres rationnelles et $H \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K}[\![z]\!])$ est la matrice de $s^{\text{ème}}$ ligne H_{s-1}. Comme U est inversible, $H = Uz^{-\widetilde{C}}$ l'est également.

Donc selon la conclusion de l'étape 2, les coefficients de H sont des G-fonctions *au sens large*. En effet, la proposition 4.6 nous assure que G vérifie la condition de Bombieri *au sens large*, puisque L est un G-opérateur au sens large.

De plus, la première ligne de H est $H_0 = z^{\mu-1}F$, si bien que les $f_i(z)$ sont des G-fonctions *au sens large*.

Étape 4 : changement de variable. Soit $L \in \mathbb{K}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ un G-opérateur *au sens large* d'ordre μ et $\alpha \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$. Selon la proposition 4.7 **b)**, l'opérateur obtenu par changement de variable $u = z-\alpha$ (avec la convention que $z-\alpha = z^{-1}$ si $\alpha = \infty$) est un G-opérateur *au sens* *large*. Donc selon l'étape 3, il existe une base de solutions de $L_\alpha(y(u)) = 0$ au voisinage de 0 de la forme $\big(f_1(u), \ldots, f_\mu(u)\big)u^C$, où les $f_i(u) \in \mathbb{K}[\![u]\!]$ sont des G-fonctions *au sens large* et $C \in \mathscr{M}_\mu(\mathbb{K})$ est à valeurs propres rationnelles. Par changement de variable $z = u + \alpha$, on obtient donc pour base de solutions de $L(y(z)) = 0$ au voisinage de α la famille

$$\big(f_1(z-\alpha), \ldots, f_\mu(z-\alpha)\big)(z-\alpha)^C,$$

qui est bien de la forme annoncée dans l'énoncé du théorème 4.5.

4.5 Taille *au sens large* d'un opérateur différentiel

Le but de cette partie est d'adapter les résultats du chapitre 1 aux G-opérateurs *au sens large*, ce qui permettra de prouver des propriétés algébriques des G-opérateurs *au sens large* cruciales pour les applications aux E-opérateurs *au sens large* définis et étudiés dans le chapitre 5.

4.5.1 Taille *au sens large* d'un module différentiel

Commençons par définir une notion de taille *au sens large* pour les modules différentiels. Pour cela, il convient d'étudier le comportement de la suite $(\sigma_s(G))_{s\in\mathbb{N}}$ par équivalence de systèmes différentiels.

Lemme 4.7

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres, $G \in M_n(\mathbb{K}(z))$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}(z))$, soit $H = P[G] = PGP^{-1} + P'P^{-1}$ une matrice définissant un système $y' = Hy$ équivalent à $y' = Gy$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors $\sigma_s(H) = \sigma_s(G) + o(1)$

En particulier, on retrouve le fait, énoncé dans le lemme 4.6 que H satisfait la condition de Galochkin *au sens large* si et seulement si G la satisfait.

Démonstration.

Par l'équation (1.6) dans la preuve du lemme 1.2, on a

$$\max_{0\leqslant m\leqslant s}\left\|\frac{H_m}{m!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \leqslant C(\mathfrak{p})\max_{0\leqslant m\leqslant s}\left\|\frac{G_m}{m!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}},$$

où $C(\mathfrak{p}) = 0$ pour tout premier sauf un nombre fini. Donc

$$\sigma_s(H) \leqslant \frac{1}{s}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})}\log^+ C(\mathfrak{p}) + \sigma_s(G) = \sigma_s(G) + o(1).$$

Symétriquement, puisque $G = P^{-1}[H]$, on a $\sigma_s(G) \leqslant \sigma_s(H) + o(1)$. Ceci donne l'égalité voulue. □

Le lemme 4.7 implique que l'on peut définir sans ambiguïté la *taille au sens large* d'un module différentiel $\mathscr{M}$ par la suite $\sigma_s(\mathscr{M}) := \sigma_s(A)$, car tout module différentiel $\mathscr{M}$ peut être associé à une unique classe d'équivalence de systèmes différentiels $[A]$. Précisément, $(\sigma_s(\mathscr{M}))_{s\in\mathbb{N}^*}$ est une classe d'équivalence dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ pour la relation d'équivalence

$$(u_n) \sim (v_n) \Leftrightarrow u_n - v_n = o(1).$$

On note $u_n \lesssim v_n$ s'il existe (ε_n) tendant vers 0 quand n tend vers l'infini et tel que $u_n \leqslant v_n + \varepsilon_n$. Cette notation sera utile, car toutes les inégalités énoncées ci-dessous sont vraies à un terme négligeable en $o(1)$ près.

On rappelle qu'un opérateur L est un G-opérateur *au sens large* si et seulement si

$$\sigma_s(L) = o(\log s).$$

Comme, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{K}$ et $G \in M_n(\mathbb{K}(z))$, la quantité $R_{\mathfrak{p}}(G)$ est invariante par équivalence de systèmes différentiels, on peut associer à un module différentiel $\mathcal{M}$ représentant un système $y' = Gy$ une quantité $\rho_s(\mathcal{M}) = \rho_s(G)$ (voir [4, p. 67]). On dit que $(\rho_s(G))_{s\in\mathbb{N}}$ est le rayon de convergence global *au sens large* de $\mathcal{M}$.

Le résultat suivant est l'analogue *au sens large* du théorème d'André-Bombieri. C'est une version quantitative de la proposition 4.6.

Proposition 4.8

On a, pour $G \in M_\mu(\mathbb{K}(z))$,

$$\rho_s(G) \lesssim \sigma_s(G) \lesssim \rho_s(G) + \mu - 1. \tag{4.33}$$

Par conséquent, la condition de Bombieri au sens large $\rho_s(G) = o(\log s)$ *est vérifiée si et seulement la condition de Galochkin* au sens large *est satisfaite par G.*

La preuve découle immédiatement de celle de la proposition 4.6.

Remarque. Si $\limsup_{s\to+\infty} \sigma_s(G) < +\infty$, la matrice G satisfait la condition de Galochkin *au sens strict* et de manière équivalente, par le théorème d'André-Bombieri, la condition de Bombieri *au sens strict* $\rho_s(G) \xrightarrow[s\to+\infty]{} \rho(G) < +\infty$. Cette situation a déjà été étudiée dans le chapitre 1, si bien que l'on peut supposer que G ne satisfait pas la condition de Galochkin *au sens strict.*

Le résultat suivant montre le comportement de la notion de taille *au sens large* est compatible sous les opérations usuelles sur les modules différentiels.

Proposition 4.9

Soient $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ des modules différentiels sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors

a) *Si $\mathcal{M}_2$ est un sous-module différentiel de $\mathcal{M}_1$, alors*

$$\sigma_s(\mathcal{M}_2) \lesssim \sigma_s(\mathcal{M}_1) \quad \text{et} \quad \sigma_s(\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2) \lesssim \sigma_s(\mathcal{M}_1).$$

b) *On a $\sigma_s(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2) = \max(\sigma_s(\mathcal{M}_1), \sigma_s(\mathcal{M}_2)) \lesssim \sigma_s(\mathcal{M}_1) + \sigma_s(\mathcal{M}_2)$.*

c) *On a $\sigma_s(\mathcal{M}_1^*) \lesssim \sigma_s(\mathcal{M}_1) + \mu_1 - 1$, où $\mu_1 = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \mathcal{M}_1$.*

d) *Si la suite $0 \to \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_3 \to 0$ est exacte, alors on a*

$$\sigma_s(\mathcal{M}_1) \lesssim 1 + \sigma_s(\mathcal{M}_2) + \sigma_s(\mathcal{M}_3) + \sigma_s(\mathcal{M}_3^*). \tag{4.34}$$

e) *On a $\sigma_s(\mathrm{Sym}^N \mathcal{M}_1) \lesssim N\sigma_s(\mathcal{M}_1)$.*

La preuve est l'adaptation de celle donnée dans le chapitre 1 pour la proposition 1.3.

Démonstration de la proposition 4.9. On rappelle que si $A \in M_n\left(\overline{\mathbb{Q}}(z)\right)$, la suite de matrices $(A_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est définie par $A_0 = I_n$ et $A_{s+1} = A_s A + A_s'$ pour tout s.

a) est une conséquence directe du lemme 1.3, et **b)** suit directement de la définition.

Prouvons l'inégalité **c)** avec l'aide de la proposition 4.8.

On a $\rho_s(\mathcal{M}_1^*) = \rho_s(\mathcal{M}_1)$, puisque $R_{\mathfrak{p}}(\mathcal{M}_1^*) = R_{\mathfrak{p}}(\mathcal{M}_1)$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres $\mathbb{K}$ [4, Proposition 1, p. 67].

Ainsi, l'application de la proposition 4.8 au module adjoint de $\mathcal{M}_1^*$ donne

$$\sigma_s(\mathcal{M}_1^*) \lesssim \rho_s(\mathcal{M}_1^*) + \mu_1 - 1 = \rho_s(\mathcal{M}_1) + \mu_1 - 1 \lesssim \sigma_s(\mathcal{M}_1) + \mu_1 - 1,$$

où $\mu_1 = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \mathscr{M}_1$. Ceci démontre **c)**.

On passe à la preuve de **d)**.

Par le lemme 1.3, on peut trouver des bases adaptées de $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$, $\mathscr{M}_3$ telles que, dans ces bases, $\mathscr{M}_1$ (resp. $\mathscr{M}_2$, $\mathscr{M}_3$) représente le système $\partial y = Gy$ (resp. $\partial y = G^{(2)} y$ et $\partial y = G^{(3)} y$), où

$$G = \begin{pmatrix} G^{(2)} & G^{(0)} \\ 0 & G^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres tel que $G \in M_n(\mathbb{K}(z))$. On fixe $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})$. On considère $t_{\mathfrak{p}}$ une variable libre sur $\mathbb{K}$ appelée *point générique*. On peut alors construire une extension $\Omega_{\mathfrak{p}}$ complète et algébriquement close de $\left(\mathbb{K}(t_{\mathfrak{p}}), |\cdot|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}\right)$.

On pose

$$X^{(2)}_{t_{\mathfrak{p}}}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{G^{(2)}_s(t_{\mathfrak{p}})}{s!}(z-t_{\mathfrak{p}})^s \in \mathrm{GL}_n(\Omega_{\mathfrak{p}}[\![z-t_{\mathfrak{p}}]\!])$$

(resp. $X^{(3)}_{t_{\mathfrak{p}}} \in \mathrm{GL}_m(\Omega_{\mathfrak{p}}[\![z-t_{\mathfrak{p}}]\!])$) une matrice fondamentale de solutions de $\partial y = G^{(2)} y$ (resp. $\partial y = G^{(3)} y$) au point générique $t_{\mathfrak{p}}$ telle que $X^{(2)}_{t_{\mathfrak{p}}}(t_{\mathfrak{p}}) = I_n$ (resp. $X^{(3)}_{t_{\mathfrak{p}}}(t_{\mathfrak{p}}) = I_m$). On considère $X^{(0)}_{t_{\mathfrak{p}}} \in M_{n,m}(\Omega_{\mathfrak{p}}[\![z-t_{\mathfrak{p}}]\!])$ une solution de

$$\partial X^{(0)}_{t_{\mathfrak{p}}} = G^{(3)} X^{(0)}_{t_{\mathfrak{p}}} + G^{(0)} X^{(2)}_{t_{\mathfrak{p}}} \tag{4.35}$$

telle que $X^{(0)}_{t_{\mathfrak{p}}}(t_{\mathfrak{p}}) = 0$.

Alors $X_{t_{\mathfrak{p}}} = \begin{pmatrix} X^{(2)}_{t_{\mathfrak{p}}} & X^{(0)}_{t_{\mathfrak{p}}} \\ 0 & X^{(3)}_{t_{\mathfrak{p}}} \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale de solutions de $\partial y = Gy$ telle que $X_{t_{\mathfrak{p}}}(t_{\mathfrak{p}}) = I_{n+m}$. Ainsi, on a $\forall s \in \mathbb{N}$, $\partial^s(X_{t_{\mathfrak{p}}})(t_{\mathfrak{p}}) = G_s(t_{\mathfrak{p}})$. Puisque l'on sait que $\partial^s(X^{(2)}_{t_{\mathfrak{p}}})(t_{\mathfrak{p}}) = G^{(2)}_s(t_{\mathfrak{p}})$ (et de même pour $X^{(3)}_{t_{\mathfrak{p}}}$), il suffit d'estimer la norme de Gauss de $\partial^s(X^{(0)}_{t_{\mathfrak{p}}})(t_{\mathfrak{p}})$ pour obtenir une estimation sur la taille de G.

Par souci de simplicité, on omettra l'indice $t_{\mathfrak{p}}$ dans ce qui suit.

Selon l'équation (1.14) dans la preuve de la proposition 1.3, on a, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant \ell$,

$$\begin{aligned}\log^+ \left\| \frac{\partial^{\ell}(X^{(0)})(t_{\mathfrak{p}})}{\ell!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} &\lesssim h(N,\mathfrak{p},G^{(3)}) + h(N,\mathfrak{p},-{}^tG^{(3)}) + h(N,\mathfrak{p},G^{(2)}) \\ &\qquad + \log^+ \|G^{(0)}\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} + \log \max_{0\leqslant i\leqslant N} \frac{1}{|i|_p}.\end{aligned}$$

De plus, quand $N \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{G_{\ell}}{\ell!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} &= \left\| \frac{\partial^{\ell}(X)(t_{\mathfrak{p}})}{\ell!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \\ &= \max\left(\left\| \frac{\partial^{\ell}(X^{(0)})(t_{\mathfrak{p}})}{\ell!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}, \left\| \frac{\partial^{\ell}(X^{(2)})(t_{\mathfrak{p}})}{\ell!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}, \left\| \frac{\partial^{\ell}(X^{(3)})(t_{\mathfrak{p}})}{\ell!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \right),\end{aligned}$$

donc finalement, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$,

$$\sigma_s(\mathscr{M}_1) \lesssim 1 + \sigma_s(\mathscr{M}_3) + \sigma_s(\mathscr{M}_3^*) + \sigma_s(\mathscr{M}_2) + \frac{1}{s} \sum_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathbb{K}})} \log^+ \left\| G^{(0)} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \tag{4.36}$$

et le dernier terme de la somme tend vers 0 quand s tend vers l'infini.

Passons à présent à la preuve de **e)**. On notera $a_1\dots a_N$ la classe de $a_1\otimes\cdots\otimes a_N\in\mathscr{M}^{\otimes N}$ dans le quotient $\mathrm{Sym}^N(\mathscr{M})$.

Soit une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathscr{M}_1$ telle que $\mathscr{M}_1$ représente le système $\partial y=Gy$, $G\in M_n(\mathbb{K}(z))$. Alors on peut trouver une matrice G_{sym} à coefficients dans $\mathbb{K}(z)$ telle que dans la base $\mathscr{B}_{\mathrm{sym}}=\{e_{i_1}\dots e_{i_N},1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_N\leqslant n\}$, $\mathrm{Sym}^N(\mathscr{M}_1)$ représente le système $\partial y=G_{\mathrm{sym}}y$. Suivant André dans [4, p. 72], introduisons, pour $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})$, $X_{t_\mathfrak{p}}$ une matrice fondamentale de solutions de $\partial y=Gy$ au voisinage du point générique $t_\mathfrak{p}$ telle que $X_{t_\mathfrak{p}}(t_\mathfrak{p})=I_n$. Alors on a que $\partial\mathrm{Sym}^N(X_{t_\mathfrak{p}})=G_{\mathrm{sym}}\mathrm{Sym}^N(X_{t_\mathfrak{p}})$.

On omettra l'indice $t_\mathfrak{p}$ dans ce qui suit. Rappelons que si $\mathscr{C}=(f_1,\dots,f_n)$ est la base canonique de $\Omega_\mathfrak{p}^n$, $X=\mathrm{Mat}_\mathscr{C}(u)$, alors $\mathrm{Sym}^N(X)$ est la matrice représentant l'endomorphisme $\mathrm{Sym}^N(u)$ dans la base $\mathscr{C}_{\mathrm{sym}}:=\{f_{j_1}\dots f_{j_N},1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_N\leqslant m\}$, où

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}^N(u)(f_{j_1}\dots f_{j_N})=u(f_{j_1})\dots u(f_{j_N})&=\left(\sum_{i_1=1}^n X_{i_1j_1}f_{i_1}\right)\dots\left(\sum_{i_N=1}^n X_{i_Nj_N}f_{i_N}\right)\\&=\sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_N\leqslant n}X_{i_1j_1}\dots X_{i_Nj_N}f_{i_1}\dots f_{i_N}\\&=\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_N\leqslant n}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(\{i_1,\dots i_N\})}X_{\sigma(i_1)j_1}\dots X_{\sigma(i_N)j_N}f_{i_1}\dots f_{i_N}.\end{aligned}$$

Donc les coefficients de $\mathrm{Sym}^N(X)$ sont les $\sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}(\{i_1,\dots i_N\})}X_{\sigma(i_1)j_1}\dots X_{\sigma(i_N)j_N}$. On constate en particulier, en regardant les coefficients pour $(i_1,\dots,i_N)=(j_1,\dots,j_N)$, que $\mathrm{Sym}^N(X)(t_\mathfrak{p})$ est la matrice identité, de sorte que pour tout s, $\left(\partial^s\mathrm{Sym}^N(X)\right)(t_\mathfrak{p})=(G_{\mathrm{sym}})_s(t_\mathfrak{p})$.

Comme $|\cdot|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$ est non archimédienne, il s'agit donc de majorer, à $(j_1,\dots,j_N)$ fixé, $|X_{i_1j_1}\dots X_{i_Nj_N}|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}$ pour tout $(i_1,\dots,i_N)$.

Soit $s\in\mathbb{N}^*$ et $m\leqslant s$. Selon la formule de Leibniz généralisée, on a

$$\frac{1}{m!}\partial^m(X_{i_1j_1}\dots X_{i_Nj_N})=\sum_{k_1+\cdots+k_N=m}\frac{\partial^{k_1}X_{i_1j_1}}{k_1!}\dots\frac{\partial^{k_N}X_{i_Nj_N}}{k_N!}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\log^+\left|\frac{1}{m!}\partial^m(X_{i_1j_1}\dots X_{i_Nj_N})(t_\mathfrak{p})\right|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}&\leqslant\log^+\max_{k_1\leqslant m}\left|\frac{\partial^{k_1}X_{i_1j_1}}{k_1!}(t_\mathfrak{p})\right|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}+\dots\\&\qquad+\log^+\max_{k_N\leqslant m}\left|\frac{\partial^{k_N}X_{i_Nj_N}}{k_N!}(t_\mathfrak{p})\right|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}\\&\leqslant N\log^+\max_{k\leqslant s}\left\|\frac{\partial^kX}{k!}(t_\mathfrak{p})\right\|=N\log^+\max_{k\leqslant s}\left\|\frac{G_k}{k!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Ainsi, si c est un coefficient de la matrice Sym^NX, et $m\leqslant s$, on a

$$\log^+\left|\frac{\partial^mc}{m!}(t_\mathfrak{p})\right|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}\leqslant N\log^+\max_{k\leqslant s}\left\|\frac{G_k}{k!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}.$$

En prenant le maximum sur tous les coefficients de Sym^NX et sur tous les $m\leqslant s$, on obtient donc

$$\log^+\max_{m\leqslant s}\left\|\frac{\partial^m\mathrm{Sym}^NX}{m!}(t_\mathfrak{p})\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}}\leqslant N\log^+\max_{k\leqslant s}\left\|\frac{G_k}{k!}\right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}},$$

c'est-à-dire $h(s,\mathfrak{p},G_{\mathrm{sym}})\leqslant Nh(s,\mathfrak{p},G)$. Donc en sommant sur tous les $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})$, on a $\sigma_s(G_{\mathrm{sym}})\leqslant N\sigma_s(G)$. D'où finalement

$$\sigma_s(\mathrm{Sym}^N\mathscr{M}_1)\lesssim N\sigma_s(\mathscr{M}_1).$$

Ceci conclut la preuve de la proposition 4.9. □

Remarque. Dans le cas strict, on obtient une inégalité $\sigma(\mathrm{Sym}^N \mathscr{M}_1) \leqslant (1+\log(N))\sigma(\mathscr{M}_1)$, énoncée dans [4, Lemma 2 c), p. 72].

En effet, dans l'équation (4.37), on peut supposer quitte à réordonner les termes du produit que $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_N$, de sorte que, pour tout ℓ, $m \geqslant k_1 + \cdots + k_\ell \geqslant \ell k_\ell$ et donc $k_\ell \leqslant \dfrac{m}{\ell}$.

On obtient ainsi

$$\log^+ \left| \frac{1}{m!} \partial^m (X_{i_1 j_1} \dots X_{i_N j_N})(t_\mathfrak{p}) \right|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \leqslant \log^+ \max_{k \leqslant s} \left\| \frac{G_k}{k!}(t_\mathfrak{p}) \right\| + \cdots + \log^+ \max_{k \leqslant \lfloor s/N \rfloor} \left\| \frac{G_k}{k!}(t_\mathfrak{p}) \right\|,$$

de sorte que

$$\frac{1}{s} \log^+ \max_{m \leqslant s} \left\| \frac{(G_{\mathrm{sym}})_m}{m!} \right\|_{\mathfrak{p},\mathrm{Gauss}} \leqslant \frac{1}{s} \log^+ \max_{k \leqslant s} \left\| \frac{G_k}{k!}(t_\mathfrak{p}) \right\| + \cdots + \frac{1}{s} \log^+ \max_{k \leqslant \lfloor s/N \rfloor} \left\| \frac{G_k}{k!}(t_\mathfrak{p}) \right\|.$$

En d'autres termes,

$$h(s, \mathfrak{p}, G_{\mathrm{sym}}) \leqslant h(s, \mathfrak{p}, G) + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \frac{1}{s} h\left(\left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor, \mathfrak{p}, G \right) + \cdots + \left\lfloor \frac{s}{N} \right\rfloor \frac{1}{s} h\left(\left\lfloor \frac{s}{N} \right\rfloor, \mathfrak{p}, G \right).$$

En sommant sur tous les $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_\mathbb{K})$, on obtient

$$\sigma_s(G_{\mathrm{sym}}) \leqslant \sigma_s(G) + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \frac{1}{s} \sigma_{\lfloor s/2 \rfloor}(G) + \cdots + \left\lfloor \frac{s}{N} \right\rfloor \frac{1}{s} \sigma_{\lfloor s/N \rfloor}(G), \tag{4.38}$$

ce qui est une inégalité alternative au point **e)** de la proposition 4.9, mais est peu exploitable.

En revanche, en passant à la limite supérieure $s \to +\infty$ dans (4.38), on obtient

$$\sigma(G_{\mathrm{sym}}) \leqslant \sigma(G) + \frac{1}{2}\sigma(G) + \cdots + \frac{1}{N}\sigma(G) \leqslant (1 + \log(N))\sigma(G), \tag{4.39}$$

ce qui est le résultat annoncé pour la taille *au sens strict*.

4.5.2 Propriétés algébriques des G-opérateurs *au sens large*

Dans ce qui suit, on note ∂ la dérivation standard $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Nous allons utiliser les résultats de la section précédente pour en déduire des propriétés de stabilité algébriques sur l'ensemble des G-opérateurs *au sens large* qui ont été énoncées dans la partie 4.2.1. Toutes les propriétés listées ci-dessous sont également vraies pour les G-opérateurs *au sens strict*.

Proposition 4.10

Soit L un G-opérateur au sens large. *Alors :*

- ***a)*** *Tout diviseur à droite de L dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$ est un G-opérateur* au sens large.
- ***b)*** *L'opérateur adjoint L^* de L est un G-opérateur* au sens large.
- ***c)*** *L'ensemble des G-opérateurs* au sens large *satisfait la* propriété de Ore à gauche *: si L et M sont des G-opérateurs* au sens large*, il existe un multiple commun à gauche de L et M qui est un G-opérateur* au sens large.

Démonstration. Les assertions **a)** et **b)** découlent directement des points **a)** et **c)** de la proposition 4.9, puisque, d'une part, si N est un diviseur à droite de L, le module différentiel $\mathscr{M}_N$ est un sous-module différentiel de $\mathscr{M}_L$ et d'autre part, $\mathscr{M}_{L^*} \simeq (\mathscr{M}_L)^*$.

Il reste à prouver **c)**. Soit $N = \mathrm{LCLM}(L, M)$ le générateur de l'idéal à gauche $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L \cap \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]N$. Alors N est un multiple commun à gauche de L et M et il y a un morphisme injectif de modules différentiels

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]N & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L \times \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]M \\ & P \mod N & \longmapsto & (P \mod L, P \mod M) \end{array},$$

qui fait de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]N$ un sous-module différentiel du module produit $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]L \times \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]M$. De plus, $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]/\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]N \simeq \mathscr{M}_{N^*}$ et de même pour L et M.

D'où, par la proposition 4.9 **a)** et **b)**, on a $\sigma_s(N^*) \lesssim \max(\sigma_s(L^*), \sigma_s(M^*))$.

Le point **b)** nous assure alors, puisque L et M sont des G-opérateurs *au sens large* que N est un G-opérateur *au sens large.* □

Corollaire 4.1

Si y_1 (resp. y_2) est une solution d'un G-opérateur au sens large L_1 *(resp. L_2), alors $y_1 + y_2$ est solution d'un G-opérateur* au sens large L_3.

Démonstration. En utilisant la proposition 4.10 **c)**, on considère $M = M_1 L_1 = M_2 L_2$ un multiple commun à gauche de L_1 et L_2 dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$ qui est un G-opérateur *au sens large.* Alors on a $M(y_1) = M(y_2) = 0$, de sorte que $M(y_1 + y_2) = 0$. □

La proposition 4.9 implique aussi le résultat suivant. On rappelle que $u_n \lesssim v_n$ si $u_n = v_n + o(1)$.

Proposition 4.11

Pour tout $L_1, L_2 \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$, on a les inégalités suivantes :

$$\max\big(\sigma_s(L_1), \sigma_s(L_2)\big) \lesssim \sigma_s(L_1 L_2) \lesssim \sigma_s(L_1) + 2\sigma_s(L_2) + \operatorname{ord}(L_2) - 1.$$

Ainsi, un produit de G-opérateurs au sens large *est un G-opérateur* au sens large.

Démonstration de la proposition 4.11. La proposition 1.8 dans la partie 1.4 nous assure que la suite

$$0 \to \mathscr{M}_{L_2} \to \mathscr{M}_{L_1 L_2} \to \mathscr{M}_{L_1} \to 0$$

est exacte. Par conséquent, $\mathscr{M}_{L_2}$ est un sous-module différentiel de $\mathscr{M}_{L_1 L_2}$ et on a $\mathscr{M}_{L_1} \simeq \mathscr{M}_{L_1 L_2} \big/ \mathscr{M}_{L_2}$. Il découle alors de la proposition 4.9 **a)** que

$$\max(\sigma_s(L_1), \sigma_s(L_2)) = \max\big(\sigma_s(\mathscr{M}_{L_1}), \sigma_s(\mathscr{M}_{L_2})\big) \lesssim \sigma_s(\mathscr{M}_{L_1 L_2}) = \sigma_s(L_1 L_2),$$

ce qui est la première inégalité que l'on voulait prouver.

D'autre part, la proposition 4.9 **d)** donne $\sigma_s(L_1 L_2) \lesssim \sigma_s(L_1) + \sigma_s(L_2) + \sigma_s(L_2^*)$. En utilisant finalement la proposition 4.9 **b)**, on obtient

$$\sigma_s(L_1 L_2) \lesssim \sigma_s(L_1) + 2\sigma_s(L_2) + \operatorname{ord}(L_2) - 1,$$

ce qui est le résultat voulu. □

4.5.3 Produit de solutions d'un G-opérateur *au sens large*

Le résultat suivant est une conséquence des points **a)** et **e)** du théorème 4.9. La preuve est, *mutatis mutandis*, la même que celle de la proposition 1.4.

Proposition 4.12

Soit $(\mathscr{M}_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ une famille de modules différentiels sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Alors

$$\sigma_s(\mathscr{M}_1 \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \cdots \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \mathscr{M}_N) \lesssim N \max\big(\sigma_s(\mathscr{M}_1), \ldots, \sigma(\mathscr{M}_N)\big).$$

En particulier, on a $\sigma_s\left(\mathscr{M}_1^{\otimes N}\right) \lesssim N \sigma_s(\mathscr{M}_1)$.

Remarque. Dans le cas strict, on a (voir la remarque finale de la sous-section 4.5.1) :

$$\sigma(\mathcal{M}_1 \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \cdots \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}(z)} \mathcal{M}_N) \leqslant (1+\log(N)) \max\big(\sigma_s(\mathcal{M}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{M}_N)\big).$$

Proposition 4.13

Soient y_1 et y_2 des solutions respectives de G-opérateurs au sens large *L_1 et L_2. On suppose que chaque L_i est d'ordre minimal pour y_i. Alors $y_1 y_2$ est solution d'un G-opérateur* au sens large *L_3 et on peut trouver un tel L_3 vérifiant*

$$\sigma_s(L_3) \lesssim 2\max\big(\sigma_s(L_1), \sigma_s(L_2)\big).$$

Remarque. En utilisant la proposition 4.12, on peut généraliser la proposition 4.13 à un produit quelconque $y_1 \ldots y_N$ de solutions de G-opérateurs : si L_0 est l'opérateur minimal de $y_1 \ldots y_N$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ et L_i est l'opérateur minimal de y_i, on obtient

$$\sigma_s(L_0) \lesssim N\max\big(\sigma_s(L_1), \ldots, \sigma_s(L_N)\big).$$

Démonstration de la proposition 4.13. On reprend les notations de la preuve de la proposition 1.5. On définit le morphisme

$$\begin{array}{rrcl} \psi : & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1, y_2) \\ & K(y_1) \otimes L(y_2) & \longmapsto & K(y_1)L(y_2). \end{array}$$

De plus, l'ensemble $\mathcal{M} = \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1 y_2)$ est un sous-module différentiel de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1, y_2)$, comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 1.5 **b)**.

Par définition, la restriction de ψ à $\psi^{-1}(\mathcal{M})$ est une surjection $\widetilde{\psi} : \psi^{-1}(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$.

La factorisation de $\widetilde{\psi}$ par son noyau fournit un isomorphisme entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N} / \ker(\widetilde{\psi})$, où $\mathcal{N} = \psi^{-1}(\mathcal{M})$ est un sous-module différentiel de $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)$.

En passant aux modules duaux, on obtient $\mathcal{M}^* \simeq \mathcal{N}^* / \mathrm{Im}(\widetilde{\psi}^*)$ donc par la proposition 4.9 **a)**, si L_3 est l'opérateur minimal non nul de $y_1 y_2$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$,

$$\sigma_s(L_3) = \sigma_s(\mathcal{M}^*) \lesssim \sigma_s(\mathcal{N}^*). \tag{4.40}$$

Par ailleurs, le morphisme dual de $\mathcal{N} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)$ est une surjection

$$\Big(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\Big)^* \twoheadrightarrow \mathcal{N}^*$$

et on a

$$\Big(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1) \otimes \overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\Big)^* \simeq \Big(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1)\Big)^* \otimes \Big(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\Big)^*,$$

de sorte que, par les propositions 4.9 **a)** et 4.12,

$$\sigma_s(\mathcal{N}^*) \lesssim \sigma\left(\Big(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_1)\Big)^* \otimes \Big(\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial](y_2)\Big)^*\right) \lesssim 2\max\big(\sigma_s(L_1), \sigma_s(L_2)\big). \tag{4.41}$$

Ainsi, la combinaison de (4.40) et (4.41) montre que $\sigma_s(L_3) \lesssim 2\max\big(\sigma_s(L_1), \sigma_s(L_2)\big)$, si bien que L_4 est un G-opérateur *au sens large.* □

Une autre application est que l'opérateur minimal d'une série Nilsson-Gevrey *au sens large* de type arithmétique et de type holonome d'ordre 0 est un G-opérateur *au sens large.* On définit la notion de série Nilsson-Gevrey *au sens large* de type arithmétique d'après André, qui a étudié les propriétés de leurs analogues *au sens strict* dans [5].

Définition 4.10

- *Soit* $s \in \mathbb{Q}$. *Les* séries Nilsson-Gevrey *au sens large* de type arithmétique d'ordre s *sont les*
$$y(z) = \sum_{(\alpha,k,\ell)\in S} c_{\alpha,k,\ell} z^{\alpha} \left(\log z\right)^{k} y_{\alpha,k,\ell}(z), \tag{4.42}$$
où $S \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{N}^2$ *est fini,* $c_{\alpha,k,\ell} \in \mathbb{C}$ *et*
$$y_{\alpha,k,\ell}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n!^s a_{\alpha,k,\ell,n} z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$$
est tel que $(a_{\alpha,k,\ell,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie les conditions* ***b)*** *et* ***c)*** *de la définition 4.1. On note* $\mathrm{NGA}^{\ell}\{z\}_s$ *l'ensemble de ces séries.*
- *On dit de plus que* $y(z)$ *est* de type holonome *si les* $y_{\alpha,k,\ell}(z)$ *satisfont la condition* ***a)*** *de la définition 4.1. On note* $\mathrm{NGA}^{\ell}_{h}\{z\}_s$ *l'ensemble des séries Nilsson-Gevrey* au sens large *de type arithmétique et de type holonome d'ordre* s.

Une conséquence immédiate de la proposition 4.13 et du corollaire 4.1 est la proposition suivante :

Proposition 4.14

Soit $S \subset \mathbb{Q}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *un ensemble fini,* $(c_{\alpha,k,\ell})_{(\alpha,k,\ell)\in S} \in (\mathbb{C}^*)^S$ *et une famille* $(f_{\alpha,k,\ell}(z))_{(\alpha,k,\ell)\in S}$ *de* G*-fonctions* au sens large *non nulles. On considère*
$$f(z) = \sum_{(\alpha,k,\ell)\in S} c_{\alpha,k,\ell} z^{\alpha} \log(z)^k f_{\alpha,k,\ell}(z),$$
qui est une série Nilsson-Gevrey au sens large *de type arithmétique et de type holonome d'ordre* 0. *Alors* $f(z)$ *est solution d'une équation différentielle linéaire non nulle à coefficients dans* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ *et l'opérateur minimal* L *de* $f(z)$ *sur* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ *est un* G*-opérateur* au sens large.

Démonstration. La fonction $f(z)$ s'écrit comme une somme de produits de solutions de G-opérateurs puisque toute G-fonction *au sens large* est solution d'un G-opérateur au sens large. Donc selon la proposition 4.13 et le corollaire 4.1, $f(z)$ est solution d'un G-opérateur au sens large L. Le point **a)** de la proposition 4.10 nous assure alors que l'opérateur minimal de $f(z)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est un G-opérateur *au sens large.* □

Chapitre 5

Structure des E-opérateurs *au sens large*

Ce chapitre correspond à la prépublication [35, §6 et 7].

L'étude, menée dans le chapitre 4 de la structure des G-opérateurs *au sens large*, permet d'obtenir des informations sur les équations différentielles satisfaites par les E-fonctions *au sens large*. En effet, via la transformée de Fourier-Laplace des opérateurs différentiels, André (cf [5, 6]) en a déduit que toute E-fonction *au sens strict* était annulée par un E*-opérateur* au sens strict dont les seules singularités sont 0 et ∞, la première étant régulière. André a déduit du théorème d'André-Chudnovsky-Katz un théorème de structure sur les E-opérateurs. Ce chapitre est consacrée à la définition et à l'étude des E-opérateurs *au sens large*, à l'aide du théorème 4.5, et à ses conséquences diophantiennes sur les valeurs des E-fonctions *au sens large*.

5.1 E-opérateurs *au sens large*

Le but de cette partie est de définir la notion d'E-opérateur *au sens large* et de donner quelques propriétés de ces opérateurs. Nous suivons la définition des E-opérateurs *au sens strict* d'André.

Si $f(z)$ est une fonction suffisamment régulière, sa *transformée de Laplace* est la fonction

$$\mathscr{F}(f) : x \mapsto \int_0^\infty e^{-xz} f(z)\mathrm{d}z. \tag{5.1}$$

Dans le cas où $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ est une E-fonction *au sens large*, $\mathscr{F}(f)$ est bien définie, car, comme mentionné dans la section 4.1, la suite $(|a_n|)_n$ est en réalité majorée par une suite géométrique $(C^{n+1})_n$ à partir d'un certain rang, ce qui assure la convergence de l'intégrale de (5.1) pour $\mathrm{Re}(x) > \frac{1}{C}$.

Considérons

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{F}^* : & \overline{\mathbb{Q}}\left[z, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right] & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}\left[z, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right] \\ & z & \longmapsto & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} & \longmapsto & -z \end{array}$$

la *transformée de Fourier-Laplace* des opérateurs différentiels. Il s'agit d'un automorphisme d'anneaux non commutatifs de $\overline{\mathbb{Q}}[z, \mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ d'ordre 4 et d'inverse $\overline{\mathscr{F}^*} = s \circ \mathscr{F}^* \circ s$, où s est la symétrie définie par $(s(z), s(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}z, z)$.

Les propriétés essentielles des transformées de Laplace et Fourier-Laplace sont rappelées dans [5, p. 716]. Signalons que ce qu'André entend par transformée de Fourier-Laplace est, avec nos notations, $\overline{\mathscr{F}^*}$, ce qui n'influe pas sur la définition de la notion d'E-opérateur (voir [5, §4.1, p. 720]). De plus, l'argument de [5, §4.1, p. 720] prouve *mutatis mutandis* que L est un E-opérateur *au sens large* si et seulement si $\mathscr{F}^*(L)$ est un G-opérateur *au sens large*.

Les faits suivants découlent des calculs de [13, p. 25] :

i) Si f est une E-fonction *au sens large*, alors sa transformée de Laplace $g(x) = \mathscr{F}(f)(x)$ est une G-fonction *au sens large* en $1/x$. La transformée de Laplace établit ainsi une correspondance entre E- et G-fonctions *au sens large*. Ceci est également vrai au sens strict.

ii) Si L est un opérateur différentiel tel que $L(\mathscr{F}(f)) = 0$, alors on a $\mathscr{F}^*(L)(f) = 0$, ce qui explique le nom donné à $\mathscr{F}^*$.

André a défini un E-opérateur *au sens strict* comme la transformée de Fourier-Laplace d'un G-opérateur *au sens strict*. Par analogie, on définit une notion d'E-opérateur *au sens large*.

Définition 5.1

On désigne par E-opérateur au sens large *la transformée de Fourier-Laplace d'un G-opérateur* au sens large.

Les propriétés de morphisme d'anneaux de la transformée de Fourier-Laplace permettent de déduire que l'ensemble des E-opérateurs *au sens large* a les propriétés algébriques de l'ensemble des G-opérateurs *au sens large* (proposition 4.10). C'est ce qu'affirme la proposition suivante.

Proposition 5.1

Soient L et M des E-opérateurs au sens large. *Alors :*

a) *Tout diviseur à droite de L dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\partial]$ est un E-opérateur* au sens large.

b) *L'opérateur adjoint L^* de L est un E-opérateur* au sens large.

c) *Il existe un multiple commun à gauche de L et M qui est un E-opérateur* au sens large *(propriété de Ore à gauche).*

d) *Le produit LM est un E-opérateur* au sens large.

Ceci découle des propositions 4.10 et 4.11 et du fait que $\mathscr{F}^*$ est un morphisme d'anneaux de l'ensemble des G-opérateurs *au sens large* vers l'ensemble des E-opérateurs *au sens large*.

De plus, pour le point **b)**, on rappelle que l'opérateur adjoint $(\mathscr{F}^*(L))^*$ est la transformée de Fourier-Laplace $\mathscr{F}^*(L^*)$ de L^* (cf [39, §V.3.6]).

Un résultat similaire vaut pour les E-opérateurs *au sens strict*, comme cela avait été remarqué par André [5, p. 720].

L'appellation d'« E-opérateur » *au sens large* est justifiée par la proposition suivante, adaptation du résultat déjà connu dans le cas strict [5, Théorème 4.2, p. 720]. C'est une conséquence du théorème 4.1 de la partie 4.1.

Proposition 5.2

Toute E-fonction au sens large *est solution d'une équation différentielle $L(y(z)) = 0$, où L est un E-opérateur* au sens large.

De manière générale, soit une série Nilsson-Gevrey au sens large *de type arithmétique et de type holonome d'ordre -1, c'est-à-dire une fonction*

$$f(z) = \sum_{(\alpha,k,\ell)\in S} c_{\alpha,k,\ell} z^{\alpha} \log(z)^k f_{\alpha,k,\ell}(z), \tag{5.2}$$

où $S \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{N}^2$ est un ensemble fini, $c_{\alpha,k,\ell} \in \mathbb{C}$, et les $f_{\alpha,k,\ell}(z)$ sont des E-fonctions au sens large. *Alors f est solution d'un E-opérateur* au sens large.

Pour la démonstration, nous aurons besoin de la proposition 4.14 ci-dessus, qui affirme que toute série Nilsson-Gevrey de type arithmétique et de type holonome d'ordre 0 *au sens large* est solution d'un G-opérateur *au sens large*.

Démonstration de la proposition 5.2. Soit $f(z)$ une E-fonction *au sens large*. Alors il existe une G-fonction g telle que $\mathscr{F}(f)(x) = g(1/x)$.

Selon le théorème 4.1, l'opérateur minimal M_0 de $g(u)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(u)$ est un G-opérateur *au sens large*. Donc comme la notion de G-opérateur *au sens large* est invariante par changement de variable $u = 1/x$ (Proposition 4.7 **b)** ci-dessus), l'opérateur minimal M de $\mathscr{F}(f)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(x)$ est un G-opérateur *au sens large*.

Or, l'assertion ***ii)*** précédant la définition 5.1 implique que $M(\mathscr{F}(f)) = 0 \Rightarrow \mathscr{F}^*(M)(f) = 0$, de sorte que $\mathscr{F}^*(M)$ est un E-opérateur *au sens large* annulant $f(z)$.

Traitons le cas plus général où $f(z)$ est de la forme (5.2). Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}\left[z, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]$ tel que $L(f(z)) = 0$. Alors, en notant $g(z) = \mathscr{F}(f)(z)$, selon les formules (5.3.7) et (5.3.8) de [5, pp. 729–730], on peut trouver $\rho \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\mathrm{d}^\rho}{\mathrm{d}z^\rho}\overline{\mathscr{F}^*}(L)(g(z)) = 0$. Donc $g(z)$ est holonome. De plus, selon le lemme 5.2 ci-dessous, on peut écrire

$$g(z) = \sum_{(\alpha,k,\ell)\in T} \lambda_{\alpha,k,\ell} z^\alpha \log(z)^k g_{\alpha,k,\ell}\left(\frac{1}{z}\right),$$

où $T \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{N}^2$ est un ensemble fini, $\lambda_{\alpha,k,\ell} \in \mathbb{C}$, et les $g_{\alpha,k,\ell}(z)$ sont des G-fonctions au sens large.

Ainsi, selon la proposition 4.14, $g(1/z)$ est annulée par un G-opérateur *au sens large*. En effectuant le changement de variable $u = 1/z$, on obtient en conséquence de la proposition 4.7 **b)** que $g(z)$ est annulée par un G-opérateur *au sens large* M. On a alors, selon [5, (5.3.7) et (5.3.8), p. 729], $\mathscr{F}^*(M)(f(z)) = 0$ et $\mathscr{F}^*(M)$ est un E-opérateur *au sens large* par définition. Ceci est le résultat voulu. $\square$

On peut traiter de manière plus directe le cas où $f(z) = z^\alpha F(z)$, où F est une E-fonction *au sens large*. On utilise pour cela la même formule que celle donnée dans [5, p. 721], c'est-à-dire

$$\mathscr{F}(f)(x) = \Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha-1}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} \star x\mathscr{F}(F)(x)\right],$$

où $\star$ désigne le produit de Hadamard. On voit que $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-\alpha} \star x\mathscr{F}(F)(x)$ est une G-fonction *au sens large* en $1/x$, car $\alpha \in \mathbb{Q}$ et F est une E-fonction *au sens large*.

On se sert alors du lemme suivant :

Lemme 5.1

> *Soit L un G-opérateur* au sens large *(resp.* au sens strict*), $a \in \mathbb{Q}$ et $L_a = z^a L z^{-a} \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$. Alors L_a est un G-opérateur* au sens large *(resp.* au sens strict*).*

Selon ce lemme, $\mathscr{F}(f)(x)$ est donc solution d'un G-opérateur *au sens large*. Le raisonnement ci-dessus s'applique donc encore à $\mathscr{F}(f)(x)$.

La preuve du lemme 5.1 ci-dessous est plus directe que celle de la proposition 4.14.

Démonstration du lemme 5.1. On fait la démonstration dans le cas large. Les solutions de l'équation $L_a(w(z)) = 0$ sont les $z^a y(z)$ quand $L(y(z)) = 0$. On note G (resp. G_a) la matrice compagnon de L (resp. L_a). Soit

$$Y(z) = \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_\mu \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(\mu-1)} & \cdots & f_\mu^{(\mu-1)} \end{pmatrix}$$

une matrice fondamentale de solutions du système $y' = Gy$. En notant $g_i(z) = z^a f_i(z)$, on voit donc que

$$Z(z) = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_\mu \\ \vdots & & \vdots \\ g_1^{(\mu-1)} & \cdots & g_\mu^{(\mu-1)} \end{pmatrix}$$

est une matrice fondamentale de solutions du système $y' = G_a y$. De plus, on a $G_s = Y^{(s)} Y^{-1}$ et $(G_a)_s = Z^{(s)} Z^{(-1)}$ pour tout s.

Calculons la matrice Z en fonction de Y. Selon la formule de Leibniz pour tout $\ell \in \{0, \dots, \mu - 1\}$,

$$g_i^{(\ell)}(z) = \sum_{k=0} \binom{\ell}{k} (z^a)^{(\ell-k)} f_i^{(k)}(z) = \sum_{k=0}^{\ell} (a - (\ell - k) + 1)_{\ell-k} z^{a-(\ell-k)} f_i^{(k)}(z).$$

Ainsi, $Z = UY$, où $U := \left(u_{\ell,k}\right)_{k,\ell} \in z^a \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$, $u_{\ell,k} := \binom{\ell}{k}(a - (\ell - k) + 1)_{\ell-k} z^{a-(\ell-k)}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible. En notant $v_{\ell,k} = \binom{\ell}{k}(a - (\ell - k) + 1)_{\ell-k}$, on a, pour tout $k \leqslant \ell$,

$$\frac{u_{\ell,k}^{(s)}}{s!} = v_{\ell,k} \frac{(z^{a-(\ell-k)})^{(s)}}{s!} = v_{\ell,k} \frac{(a - (\ell - k) - s + 1)_s}{s!} \frac{(z^{a-(\ell-k)})^{(s)}}{s!}.$$

Or, pour tout $\gamma \in \mathbb{Q}$, le dénominateur commun de $(\gamma)_0/0!, \dots, (\gamma)_s/s!$ divise $\mathrm{den}(\gamma)^{2s}$ (voir lemme 3.11). Donc on peut trouver une constante $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{den}(a)^{2s} c \dfrac{U^{(s)}}{s!} \in z^a \mathcal{M}_n\left(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z, 1/z]\right)$.

Donc par la formule de Leibniz, on a pour $s \in \mathbb{N}$,

$$\frac{Z^{(s)} Z^{-1}}{s!} = (UY)^{(s)} = \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{s!} \binom{s}{k} U^{(s-k)} Y^{(k)} Y^{-1} U^{-1} = \sum_{k=0}^{s} \frac{U^{(s-k)}}{(s-k)!} \frac{G_k}{k!} U^{-1}.$$

Considérons $T \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ tel que $TG \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $z^q U \in z^a \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$. Comme G vérifie la condition de Galochkin *au sens large*, on peut trouver pour tout s un entier q_s non nul tel que $q_s \dfrac{T^k G_k}{k!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$ et vérifiant, pour tout $\varepsilon > 0$, $q_s \leqslant s!^{\varepsilon}$ pour tout s suffisamment grand relativement à ε. Prenons un polynôme D tel que $DU^{-1} \in z^a \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$.

Ainsi, on obtient finalement

$$z^{qs} D T^s q_s \mathrm{den}(a)^{2s} c \frac{Z^{(s)} Z^{-1}}{s!} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}[z])$$

et $\tilde{q}_s := z^{qs} D T^s q_s \mathrm{den}(a)^{2s}$ satisfait, pour tout $\varepsilon > 0$, la condition $\tilde{q}_s \leqslant s!^{\varepsilon}$ pour tout s suffisamment grand relativement à ε.

Le cas strict se traite *mutatis mutandis*. Ceci achève la preuve du lemme 5.1. □

5.2 Structure des E-opérateurs *au sens large*

Le but de cette partie est de déduire du théorème de structure des G-opérateurs *au sens large* (théorème 4.5) le théorème 5.1 sur les équations différentielles satisfaites par les E-fonctions *au sens large*, en adaptant la théorie d'André des E-opérateurs *au sens strict* développée dans [5, pp. 715–724].

Par analogie avec les $\mathfrak{Z}$-fonctions introduites dans [5, p. 713], on définit la famille de fonctions suivante, qui apparaît dans le théorème de structure des E-opérateurs *au sens large* (théorème 5.1 ci-dessous) :

Définition 5.2

Une $\mathfrak{Z}$*-fonction* au sens large *est une série* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ *vérifiant la condition* ***a)*** *de la définition 4.1 et telle que les* a_n *vérifient les conditions* ***b)*** *et* ***c)*** *de la définition 4.1.*

Dans [5, Théorème 4.3, p. 721], André a précisé la structure des E-opérateurs *au sens strict*. Le théorème suivant est l'analogue de son résultat *au sens large*. La démonstration, adaptée de celle donnée par André dans le cas strict, fera l'objet de la partie 5.3.

Théorème 5.1

Soit $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ *un* E*-opérateur* au sens large *d'ordre* ν*. Alors*

- ***a)*** *Les seules singularités de* L *sont* 0 *et l'infini, qui est en général un point irrégulier ;*
- ***b)*** *L'opérateur* L *est singulier régulier en* 0*. Les exposants de* L *en* 0 *sont rationnels, ceux qui ne sont pas entiers sont (modulo* $\mathbb{Z}$ *et comptés sans multiplicité), les exposants en* ∞ *de* $\mathscr{F}^*(L)$*.*
- ***c)*** *Les pentes du polygone de Newton de* L *en l'infini sont dans* $\{0,1\}$*.*
- ***d)*** *Il existe une base de solutions en* 0 *de l'équation* $L(y(z)) = 0$ *de la forme*

$$(F_1(z), \dots, F_\nu(z)) \cdot z^{\Gamma_0},$$

  où les F_j *sont des* E*-fonctions* au sens large *et* $\Gamma_0 \in \mathscr{M}_\nu(\mathbb{Q})$ *est triangulaire supérieure.*
- ***e)*** *Il existe une base de solutions en* ∞ *de l'équation* $L(y(z)) = 0$ *de la forme*

$$\left(f_1\left(\frac{1}{z}\right), \dots, f_\nu\left(\frac{1}{z}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{\Gamma_\infty} e^{-\Delta z},$$

  où les f_j *sont des* $\mathfrak{Z}$*-fonctions* au sens large*,* Δ *est la matrice diagonale dont les coefficients sont les singularités à distance finie de* $\mathscr{F}^*(L)$ *(comptées avec multiplicité), et* Γ_∞ *désigne une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans* $\mathbb{Q}$ *qui commute avec* Δ*.*

En conséquence de la proposition 5.2 et du théorème 5.1, si $f(z)$ est une E-fonction *au sens large*, toutes les singularités différentes de 0 et ∞ de son opérateur minimal non nul L sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ sont apparentes. En effet, l'opérateur minimal de $f(z)$ est facteur à droite d'un opérateur n'ayant que 0 et ∞ pour singularités. Ce fait a été énoncé par André dans [6, p. 747]. De plus, la singularité 0 vérifie les propriétés **b)** et **d)** du théorème 5.1 (cf [5, Corollaire 4.4, p. 724]).

Remarques. ***i)*** Le lemme 4, p. 518, de [28] affirme que tout point $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ est un point régulier ou une singularité régulière de l'équation différentielle minimale d'une E-fonction, ce qui est une conséquence du théorème 5.1. En effet, si $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ est un opérateur singulier régulier en $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ et M divise L dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, alors M est singulier régulier en a. Ceci est un résultat connu qui découle de la définition de la régularité des singularités. La preuve de Gorelov exploite directement les propriétés des E-fonctions *au sens large* sans passer par la transformée de Fourier-Laplace.

ii) Gorelov [28, Theorem 1, p. 514] a obtenu le résultat suivant sur les E-fonctions d'ordre 2 : si $f(z)$ une E-fonction *au sens large* dont l'opérateur minimal L sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ est d'ordre 2, on peut écrire

$$f(z) = a(z) e^{\mu z} {}_1F_1(\alpha; \beta; \lambda z) + b(z) e^{\mu z} {}_1F_1'(\alpha; \beta; \lambda z), \tag{5.3}$$

où $a(z), b(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\mu \in \overline{\mathbb{Q}}$, et $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$.

Dans [46], Rivoal et Roques ont démontré, en s'appuyant sur la théorie d'André des E-opérateurs, un énoncé analogue à (5.3) dans le cas où $f(z)$ est une E-fonction *au sens strict*, en ajoutant que $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$ mais avec l'affirmation plus faible que $a(z), b(z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Le théorème 5.1 ci-dessus permet d'obtenir l'analogue du résultat de Rivoal et Roques pour les E-fonctions *au sens large* en adaptant la démarche de [46]. En effet, selon le théorème 5.1, l'opérateur minimal de $f(z)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ vérifie les hypothèses de [46, Theorem 5, p. 8], ainsi que les conditions (1), (2) et (3) de [46, §5.2, p. 12–13].

Le théorème de Gorelov constitue une réponse positive au *problème de Siegel* pour les E-fonctions d'ordre 2. Le problème de Siegel consiste en la question suivante : *toute E-fonction est-elle dans la $\overline{\mathbb{Q}}[z]$-algèbre engendrée par les fonctions hypergéométriques de la forme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \lambda^n z^{n(q-p)},$$

quand $0 \leqslant p < q$, $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{Q}$, $b_1, \dots, b_q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ *et* $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$ *?*

Dans le cas général, on sait que la réponse à cette question est négative. En effet, dans [26], Fresán et Jossen ont exhibé un exemple de E-fonction non hypergéométrique.

5.3 Démonstration du théorème 5.1

Cette section est consacrée à la preuve du théorème 5.1, en suivant et adaptant la démonstration du Théorème 3.4.1 de [5] détaillée dans [5, §5, pp. 725–735].

Puisqu'un G-opérateur *au sens large* est fuchsien selon le théorème 4.1, le point **a)**, ainsi que la régularité de L en 0, découlent des calculs menés dans [13, p. 25]. En réalité, pour avoir la régularité de L en 0, il suffit d'invoquer le fait que ∞ est une singularité régulière du G-opérateur *au sens large* $\mathscr{F}^*(L)$.

Passons au point **b)**. Pour $M \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, on note $\mathrm{NR}(M)$ le polygone de Newton-Ramis de M, tel que défini dans [44, pp. 7–8]. On sait que M est un opérateur singulier régulier en 0 et ∞ si et seulement si $\mathrm{NR}(M)$ admet pour seule pente 0, c'est-à-dire si on peut trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{NR}(M) = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant u \leqslant b \text{ et } v \leqslant c\right\}.$$

Or, selon [5, p. 726], $\mathrm{NR}(\overline{\mathscr{F}^*}(M)) = \tau(\mathrm{NR}(M))$, où $\tau : (u, v) \mapsto (u + v, -v)$. Comme τ est involutive, on en déduit que $\mathrm{NR}(\mathscr{F}^*(M)) = \tau(\mathrm{NR}(M))$. De plus, si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $\tau(u, v) = (u', v')$, on a

$$\begin{cases} a \leqslant v \leqslant b \\ u \leqslant c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b \leqslant v' \leqslant -a \\ v' \leqslant c - u', \end{cases}$$

de sorte que M est singulier régulier en 0 et ∞ si et seulement si les seules pentes du polygone de Newton $\mathrm{NR}(\mathscr{F}^*(M))$ sont 0 et -1. Puisque les pentes négatives correspondent aux pentes du polygone de Newton classique de $\mathscr{F}^*(M)$ en ∞, il en découle que M est singulier régulier en 0 et ∞ si et seulement si $\mathscr{F}^*(M)$ est singulier régulier en 0 et irrégulier de pentes dans $\{0, 1\}$ en ∞.

En appliquant cette assertion au G-opérateur M tel que $L = \mathscr{F}^*(M)$, qui est un opérateur fuchsien selon le théorème 4.1, on obtient le point **c)**.

On peut répéter le même raisonnement au voisinage de tout point a de $\overline{\mathbb{Q}}$. Il découle du caractère fuchsien de M que les pentes de $\mathscr{F}^*(M_a)$, où M_a est l'opérateur obtenu par changement de variable $u = z - a$, sont dans $\{0, 1\}$.

On obtient ainsi en reproduisant *mutatis mutandis* l'argument de [5, p. 720], qui utilise le théorème de Turritin-Levelt, une base de solutions en ∞ de l'équation $L(y(z)) = 0$ de la forme

$$\left(\hat{f}_1\left(\frac{1}{z}\right),\ldots,\hat{f}_\nu\left(\frac{1}{z}\right)\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{\Delta_\infty} e^{-\Delta z},$$

où les $\hat{f}_j$ sont des séries de Laurent à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, Δ est une matrice diagonale, et Γ_∞ désigne une matrice triangulaire supérieure sous forme de Jordan qui commute avec Δ.

Par construction (voir [5, p. 725]), si $M \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ est fuchsien, alors $\overline{\mathscr{F}^*}(M)$ est *de type exponentiel* selon la terminologie de [39, p. 195] (ou *exponentiel élémentaire* avec les mots d'André). On peut donc utiliser le raisonnement de [5, §5.2, pp. 726–728], fondé sur des arguments généraux sur les microsolutions des opérateurs de type exponentiel. Il nous assure alors que, puisque $\mathscr{F}^*(L)$ est fuchsien à exposants rationnels, les exposants non entiers de L sont (modulo $\mathbb{Z}$ et comptés sans multiplicité) les exposants en ∞ de $\mathscr{F}^*(L)$. Ceci prouve le point **b)** du théorème 5.1.

La partie 5.3 pp. 728–730 de [5] a permis de construire à partir de la transformée de Laplace deux applications injectives $\mathbb{C}$-linéaires

$$\overline{\mathbb{C}[\![z]\!]}[\log z] \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \overline{\mathbb{C}\left[\!\!\left[\frac{1}{z}\right]\!\!\right]}\left[\log\frac{1}{z}\right], \tag{5.4}$$

$\overline{\mathbb{C}[\![u]\!]}$ désignant l'anneau des séries de Puiseux en u.

Un ingrédient essentiel de la preuve des points **d)** et **e)** du théorème 5.1 est le lemme suivant, analogue de [5, Proposition 5.4.1]. Il est également utilisé dans la preuve de la proposition 5.2 ci-dessus. On rappelle que les ensembles $\mathrm{NGA}_h^\ell\{z\}_s$ ont été introduits dans la définition 4.10.

Lemme 5.2

Les applications définies en (5.4) *induisent des applications $\mathbb{C}$-linéaires injectives*

$$\mathrm{NGA}_h^\ell\{z\}_{-1} \rightleftarrows \mathrm{NGA}_h^\ell\left\{\frac{1}{z}\right\}_0, \qquad \mathrm{NGA}_h^\ell\{z\}_0 \rightleftarrows \mathrm{NGA}_h^\ell\left\{\frac{1}{z}\right\}_1.$$

De plus, on a

$$\varphi^{-1}\left(\mathrm{NGA}_h^\ell\left\{\frac{1}{z}\right\}_0\right) = \mathrm{NGA}_h^\ell\{z\}_{-1}, \quad \psi^{-1}\left(\mathrm{NGA}_h^\ell\{z\}_{-1}\right) = \mathrm{NGA}_h^\ell\left\{\frac{1}{z}\right\}_0$$

et de même pour $\mathrm{NGA}_h^\ell\{z\}_0$ *et* $\mathrm{NGA}_h^\ell\left\{\frac{1}{z}\right\}_1$.

Démonstration. Il s'agit de montrer l'analogue *au sens large* des assertions (5.4.2) et (5.4.3) de la démonstration d'André dans le cas strict [5, pp. 731–732]. Dans ce qui suit, on appelle « suite holonome » toute suite $(a_n)_n$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est solution d'une équation différentielle non nulle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

Le seul point de l'argumentation d'André qui nécessite une adaptation *au sens large* consiste à prouver que les formules (5.4.4) et (5.4.7) de [5], issues de calculs génériques sur la transformée de Laplace, définissent des suites holonomes vérifiant les conditions **b)** et **c)** de la définition 4.1.

Soient donc $\underline{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite holonome de nombres algébriques vérifiant les conditions **b)** et **c)** de la définition 4.1, $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit respectivement la E-fonction *au sens large* et la $\mathfrak{Z}$-fonction *au sens large* en la variable $1/z$

$$F_{\underline{a}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \quad \text{et} \quad \mathfrak{f}_{\underline{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^{-n}.$$

Alors André a prouvé que

$$\mathscr{F}\left(z^\alpha \log^k(z) F_{\underline{a}}(z)\right) = \sum_{j=0}^{j_0}\sum_{n=0}^{\infty} b_{n,j} z^{-\alpha-1-n}\log^j z \tag{5.5}$$

$$\text{et } \mathscr{F}\left(z^\alpha \log^k(z) \mathfrak{f}_{\underline{a}}(z)\right) = \sum_{j=0}^{j_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_{n,j} z^{-\alpha-1-n}\log^j z, \tag{5.6}$$

où, si $\alpha \notin \mathbb{Z}_-$ (resp. $\alpha \notin \mathbb{N}$) la suite $(b_{n,j_0})_n$ (resp. $(c_{n,j_1})_n$) correspondant à la plus haute puissance du logarithme apparaissant dans (5.5) (resp. (5.6)) est définie par l'équation (5.4.4) de [5] :

$$\begin{aligned}
j_0 = k \text{ et } b_{n,j_0} &= (-1)^{j_0}\Gamma(\alpha+1)\frac{(\alpha+1)_n}{n!}a_n \\
j_1 = k \text{ et } c_{n,j_1} &= (-1)^{j_1+n}\Gamma(\alpha+1)\frac{n!}{(-\alpha-1)_n}a_n \qquad \text{si } \alpha\notin\mathbb{Z} \\
j_1 = k+1 \text{ et } c_{n,j_1} &= (-1)^{\alpha+n}\frac{1}{j_1\begin{pmatrix} n \\ -\alpha-1\end{pmatrix}}a_n \qquad \text{si } \alpha\in\mathbb{Z},\ \alpha<0
\end{aligned}$$

et dans le cas contraire, comme l'a remarqué André, on se ramène au cas précédent en retranchant de $F_{\underline{a}}(z)$ (resp. $\mathfrak{f}_{\underline{a}}(z)$) un élément de $\overline{\mathbb{Q}}[1/z]$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}[z]$).

Il s'agit donc de démontrer que les suites $(b_{n,j_0})_n$ et $(c_{n,j_1})_n$ vérifient les points **b)** et **c)** de la définition 4.1. Comme le maximum des dénominateurs (resp. des tailles) d'un quotient de symboles de Pochhammer $(u)_0/(v)_0,\dots,(u)_n/(v)_n$ a une croissance au plus géométrique en n (cf [50, §9, pp. 54–58]), (5.4.4) de [5] fournit bien des suites dont le dénominateur et la taille croissent au plus en $n!^\varepsilon$, pour tout $\varepsilon>0$ fixé.

De plus, comme toute série hypergéométrique $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\dots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n\dots(\beta_q)_n}z^n$ est holonome et qu'un produit ou une somme de suites holonomes est holonome, l'équation (5.4.4) de [5] définit bien des multiples dans $\mathbb{C}$ de suites holonomes.

Soit maintenant $j\in\{0,\dots,k-1\}$. De la même manière, les suites apparaissant dans la formule (5.4.7) de [5] :

$$\begin{aligned}
b_{n,j} &= \frac{n!}{(-\alpha-1)_n}\rho_{n,j}a_n \qquad (\alpha\notin\mathbb{Z}_-^*) \\
c_{n,j} &= (-1)^n\frac{n!}{(-\alpha-1)_n}\rho_{-n,j}a_n \qquad \text{si } \alpha\notin\mathbb{Z} \\
c_{n,j} &= \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ -\alpha-1\end{pmatrix}}\rho_{-n,j}a_n \qquad \text{si } \alpha\in\mathbb{Z}_-^*
\end{aligned}$$

sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}$ de suites satisfaisant les conditions **b)** et **c)** de la définition 4.1. En effet, la formule (5.4.6) implique l'existence de suites $(r_{m,i})_{m\in\mathbb{Z}}$ pour $0\leqslant i\leqslant k+1$ et de nombres complexes $\rho_0,\dots,\rho_{k+1}$ tels que

$$\forall m\in\mathbb{Z},\ r_{m,j} = \sum_{i=0}^{k+1} r_{m,i}\rho_i,$$

où pour tout i, $(r_{m,i})_{m\in\mathbb{N}}$ et $(r_{-m,i})_{m\in\mathbb{N}}$ satisfont les conditions **b)** et **c)** de la définition 0.1. De plus, l'holonomie des suites $(r_{m,i})_m$ et $(r_{-m,i})_m$ est assurée par la formule (5.4.6) de [5] :

$$\rho_{m,j} = \rho_{m-1,j} - \frac{j+1}{\alpha+m}\rho_{m-1,j+1}.$$

Ainsi, la formule (5.4.7) de [5] fournit bien des suites $(b_{n,j})$ et $(c_{n,j})$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}$ de suites holonomes. □

On démontre le point **d)** en remplaçant « E-opérateur » par « E-opérateur *au sens large* », et de même pour les G-opérateurs, dans [5, p. 734]. En effet, la preuve d'André utilise les résultats de [5, §5.3, pp. 728–730] qui ne concernent pas les E-fonctions et la proposition 5.4.1 d'André dont le lemme 5.2 est l'analogue *au sens large*. De plus, on prouve les trois faits suivants :

• Si Φ est un E-opérateur *au sens large* et $\rho \in \mathbb{N}$, alors $\Psi := \dfrac{\mathrm{d}^\rho}{\mathrm{d}z^\rho}\overline{\mathscr{F}^*}(\Phi)$ est un G-opérateur *au sens large*, car la transformée de Fourier-Laplace d'un E-opérateur *au sens large* est un G-opérateur *au sens large* et l'ensemble des G-opérateurs *au sens large* est stable par produit.

• Selon le théorème 4.5 appliqué en ∞, si $y(z) \in \overline{\mathbb{C}\left[\!\left[\frac{1}{z}\right]\!\right]}\left[\log\frac{1}{z}\right]$ est tel que $\Psi(y(z)) = 0$, alors $y(z) \in \mathrm{NGA}_h^\ell\left\{\frac{1}{z}\right\}_0$.

• Si $\mathscr{F}(y)(z) \in \mathrm{NGA}_h^\ell\left\{\frac{1}{z}\right\}_0$ alors, selon le lemme 5.2, on a $y(z) \in \mathrm{NGA}_h^\ell\{z\}_{-1}$.

On obtient ainsi une base de solutions de l'équation $L(y(z)) = 0$ de la forme

$$(y_1(z),\dots,y_\nu(z)) = (F_1(z),\dots,F_\nu(z))\cdot z^{\Gamma_0} \in \mathrm{NGA}_h^\ell\{z\}_1,$$

où $\Gamma_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$ est triangulaire supérieure.

Enfin, la preuve du point **e)** issue de [5, §5.6, pp. 733–734] s'adapte également au sens large. Elle utilise une nouvelle fois les résultats de [5, §5.3, pp. 728–730] ainsi que le lemme 5.2.

Les points spécifiques aux E-opérateurs à adapter – et les arguments qui permettent cette adaptation – sont les suivants :

• $\Phi \otimes e^{-\zeta_j z}$ *[...] est encore de type E, car* $\overline{\mathscr{F}^*}(\Phi\otimes e^{-\zeta_j z})$ *est le G-opérateur translaté de* $\mathscr{F}^*\Phi$ *par* ζ_j. Dans le cas large, ceci découle de ce que l'ensemble des G-opérateurs *au sens large* est invariant par changement de variable $u = z - a$, $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ (Proposition 4.7 **b)**). De plus, la transformée de Fourier-Laplace d'un E-opérateur *au sens large* est un G-opérateur *au sens large*.

• $\tilde{y}_j^+(-z)$ *est solution du G-opérateur* $\mathscr{F}^*\Phi$ *[...], on a donc* $\tilde{y}_j^+ \in \mathrm{NGA}\{z\}_0$ (ici, y_j^+ désigne la transformée de Laplace de y_j). Dans le cas large, ceci découle du théorème 4.5. De plus, y_j^+ est de type holonome, toujours selon le théorème 4.5.

La conclusion de la preuve du point **e)** du théorème 5.1 repose alors sur le lemme suivant, analogue au sens large de [5, Proposition 5.6.3, p. 734] :

Lemme 5.3

Soient $\hat{f} \in \mathbb{C}\left(\!\left(\frac{1}{z}\right)\!\right)$ *et* $\alpha \in \mathbb{Q}$. *Alors* $\hat{f}$ *est solution d'un E-opérateur* au sens large *si et seulement si* $z^\alpha\hat{f}$ *est solution d'un E-opérateur* au sens large.

Démonstration. La preuve est la même *mutatis mutandis* que celle de [5, Proposition 5.6.3, p. 734]. En effet :

• Tout E-opérateur *au sens large* Φ a ses pentes à l'infini dans $\{0,1\}$ selon le point **c)** du théorème 5.1. Si 1 est effectivement une pente de Φ à l'infini, alors toute solution $g \in \mathbb{C}[\![1/z]\!]$ de $\Phi(y(z)) = 0$ au voisinage de ∞ est 1-sommable au sens de Ramis (voir [43, p. 34]) dans toute direction non singulière. Ceci est a fortiori vrai si 0 est la seule pente de Φ à l'infini, car ∞ est alors un point singulier régulier de Φ, ce qui assure la croissance modérée des solutions de $\Phi(y(z)) = 0$ dans les secteurs. C'est cette 1-sommabilité qui est nécessaire dans la preuve d'André que nous adaptons.

• Soit V un secteur de $\mathbb{C}$ inclus dans un plan fendu $\mathbb{C}\setminus\mathscr{D}$, où $\mathscr{D}$ est une demi-droite d'origine 0. Selon le théorème 5.1 **d)**, toute fonction $\tilde{y}(z)$ vérifiant $L(\tilde{y}(z)) = 0$ dans V est la restriction d'un certain élément $y(z)$ de $\mathrm{NGA}_h^\ell\{z\}_{-1}$.

- Si $w(z) \in \mathrm{NGA}_h^{\ell}\{z\}_{-1}$, alors la proposition 5.2 nous assure de l'existence d'un E-opérateur *au sens large* L' tel que $L'(w(z)) = 0$.

$\square$

5.4 Nouvelle preuve d'un théorème d'André sur les E-fonctions *au sens large*

Le but de cette partie est de déduire du théorème de structure des E-opérateurs *au sens large* (théorème 5.1) une nouvelle démonstration d'un résultat diophantien sur les valeurs des E-fonctions *au sens large*, dû à André [7], qui généralise le théorème fondamental suivant de Siegel-Shidlovskii.

Théorème 5.2 (*Siegel–Shidlovskii, 1929/1956, [49], p. 139*)

> *Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de E-fonctions* au sens large. *Soit $\mathbf{f} = {}^t(f_1, \dots, f_n)$, supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z)$ tel que $\mathbf{f}' = A\mathbf{f}$. Prenons $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\alpha T(\alpha) \neq 0$, où $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ est tel que $T(z)A(z) \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$.*
>
> *Alors le degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de $(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$ est égal au degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de $(f_1(z), \dots, f_n(z))$.*

Ce théorème généralise le théorème de Lindemann-Weierstrass. En effet, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ est une famille libre sur $\mathbb{Q}$, alors $(e^{\alpha_1 z}, \dots, e^{\alpha_n z})$ est une famille de E-fonctions *au sens large* vérifiant les hypothèses du théorème dont les composantes sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, de sorte qu'en évaluant en 1, le théorème 5.2 nous assure que $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ sont algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Beukers a ensuite démontré le théorème suivant dans [14]. Il constitue un raffinement du théorème 5.2 dans le cas strict. En effet, le théorème 5.2 est vrai quant à lui pour les E-fonctions *au sens large*.

Théorème 5.3 (*Beukers, 2006, [14], Theorem 1.3, p. 370*)

> *Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de E-fonctions* au sens strict *vérifiant les hypothèses du théorème 5.2. Alors pour tout polynôme homogène $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_n]$ tel que $P(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)) = 0$, il existe un polynôme $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[Z, X_1, \dots, X_n]$ homogène en les variables $X_1, \dots, X_n$ tel que*
>
> $$Q(\alpha, X_1, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad Q(z, f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0.$$

Finalement, le théorème suivant, déjà cité dans l'introduction (théorème 0.2), a été prouvé par André dans l'article [7] dans lequel il développe une généralisation de la correspondance de Galois différentielle. C'est une conséquence de [7, Corollaire 1.7.1, p. 6], qui s'applique non seulement, sous certaines hypothèses, à une famille de fonctions de la forme $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$, quand y est solution d'une équation différentielle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, mais plus généralement à tout vecteur de fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ solution d'un système différentiel $y' = Ay$, $A \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$, comme Y. André nous l'a confirmé. Les hypothèses du corollaire 1.7.1 sont satisfaites si $(f_1, \dots, f_n)$ est un vecteur de E-fonctions *au sens large* car, d'une part, toute E-fonction *au sens large* non polynomiale est transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ puisque c'est une fonction entière, et d'autre part, le théorème 5.2 nous assure que le degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de $(f_1(\xi), \dots, f_n(\xi))$ est égal au degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ de la famille $(f_1(z), \dots, f_n(z))$.

Théorème 5.4 (*André, 2014, [7]*)

> *Le théorème 5.3 reste vrai si l'on remplace partout « strict » par « large ».*

Notre but dans cette partie est de fournir une nouvelle preuve du théorème 5.4 plus proche de l'esprit initial de la preuve de Beukers, à l'aide de l'étude des E-opérateurs *au sens large* menée dans la section 5.1.

Le point central de la preuve est la proposition suivante, conséquence du théorème 5.1. Beukers en a prouvé l'analogue au sens strict dans [14, p. 372].

Proposition 5.3

Soit f une E-fonction au sens large *à coefficients rationnels. Alors si $f(1) = 0$, l'équation différentielle minimale de f admet* 1 *pour singularité, et elle est apparente.*

Démonstration. Écrivons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} z^n = (1-z)g(z)$, où $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n!} z^n$. Alors, puisque $f(1) = 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{g_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{k!} = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f_k}{k!}.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant n_0(\varepsilon), |f_n| \leqslant (n!)^{\varepsilon}$. On déduit d'une majoration du reste de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (n!)^{\varepsilon-1}$ que

$$\forall n \geqslant n_0(\varepsilon), \quad |g_n| \leqslant n! \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^{1-\varepsilon}} \right| \leqslant \frac{n!}{(n!)^{1-\varepsilon}} \leqslant (n!)^{\varepsilon},$$

et de plus si $d_n = \mathrm{den}(f_0, \ldots, f_n)$, on a $\forall k \leqslant n, d_n g_k \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}}$, donc $\mathrm{den}(g_0, \ldots, g_n) \leqslant d_n \leqslant (n!)^{\varepsilon}$ pour n suffisamment grand. Ainsi, comme g est solution de $L((1-z)g(z)) = 0$ si f vérifie $L(f(z)) = 0$, $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)\,[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, on en conclut que g est une E-fonction *au sens large.*

Selon le théorème 5.1 **a)**, si $M(y(z)) = 0$ est une équation différentielle minimale de g, $M \neq 0$, alors elle a une base de solutions holomorphes au voisinage de 1, notée $(g_1(z), \ldots, g_\mu(z))$. Donc si $L = M \circ (1-z) \in \overline{\mathbb{Q}}(z)\,[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$, l'équation différentielle $L(y(z)) = 0$ est d'ordre minimal μ pour f et possède au voisinage de 0 une base de solutions $((1-z)g_1(z), \ldots, (1-z)g_\mu(z))$ holomorphes s'annulant en 1. Donc elle a une singularité en 1, mais elle est apparente. □

En répétant *mutatis mutandis* la preuve, basée sur des arguments de théorie de Galois différentielle, de [14, pp. 373–374], on en déduit le théorème suivant. Les points clefs qui permettent de généraliser sa démonstration au cas large sont le fait qu'une E-fonction *au sens large* est une fonction entière et la proposition 5.3, le reste relève d'arguments généraux sur les groupes algébriques.

Théorème 5.5

Soit $f(z)$ une E-fonction au sens large *d'équation différentielle minimale $L(y(z)) = 0$. Soit $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ tel que $f(\xi) = 0$. Alors L a une singularité en ξ, qui est apparente.*

Le théorème 5.4 s'ensuit par une preuve identique à celle de [14, pp. 375–377].

Remarque. Avec les notations du théorème 5.5, Gorelov a montré par des moyens différents dans [28, Lemma 6, p. 520] que toute singularité $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ de L est apparente, ce qui est une partie de ce théorème.

5.5 D'autres résultats diophantiens

Le théorème suivant a été aussi démontré dans [14]. Nous allons en prouver un analogue *au sens large.*

Théorème 5.6 (*Beukers, [14], Theorem 1.5, p. 371*)

> *Soit* $\mathbf{f} = {}^t(f_1,\ldots,f_n)$ *une famille de* E*-fonctions* au sens strict *libre sur* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ *telle que* $\mathbf{f}' = A\mathbf{f}$*, où* $A \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$.
>
> *Alors il existe des* E*-fonctions* au sens strict $e_1,\ldots,e_n$ *et une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}[z])$ *telles que :*
>
> - *On a* $\mathbf{f} = M\,{}^t(e_1,\ldots,e_n)$ *;*
> - *La famille* $(e_1,\ldots,e_n)$ *est solution d'un système de* n *équations différentielles homogènes du premier ordre à coefficients dans* $\overline{\mathbb{Q}}\left[z,z^{-1}\right]$.

Théorème 5.7

> *Le théorème 5.6 reste vrai si l'on remplace partout « strict » par « large ».*

La preuve est une conséquence du théorème 5.5, elle consiste à décrire un algorithme de désingularisation d'un système différentiel du premier ordre, en montrant qu'à chaque étape les fonctions obtenues restent des E-fonctions *au sens large*. C'est ce que la proposition suivante permet de prouver.

Proposition 5.4

> *Soient* $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ *une* E*-fonction* au sens large *et* $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ *tel que* $f(\xi) = 0$. *Alors* $\dfrac{f(z)}{z-\xi}$ *est une* E*-fonction* au sens large.

On peut trouver une version plus faible de cette proposition dans [28, Lemma 9, p. 522], qui donne le même résultat sous l'hypothèse supplémentaire que $f(z)$, $f'(z)$, …, $f^{(m-1)}(z)$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, m étant l'ordre de l'équation différentielle minimale de $f(z)$.

Démonstration de la proposition 5.4. Quitte à remplacer $f(z)$ par $f(\xi z)$, qui est une E-fonction *au sens large*, on peut supposer que $\xi = 1$. En effet, si $h(z) = f(\xi z)$, on a

$$\frac{f(z)}{z-\xi} = \frac{1}{\xi}\frac{h(\xi^{-1}z)}{\xi^{-1}z-1}.$$

Selon le théorème 5.5, comme $f(1) = 0$, toutes les solutions de l'équation différentielle minimale $L(y) = 0$ de f sont holomorphes et s'annulent en 1.

Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. En définissant L^σ comme dans la preuve de la proposition 4.1, on voit que $L^\sigma(y^\sigma) = L(y)^\sigma$ pour tout $y \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$, donc l'espace des solutions de $L^\sigma(y) = 0$ est l'image par σ des solutions de $L(y) = 0$. En particulier, L^σ a une base de solutions holomorphes s'annulant en $1 = \sigma(1)$. D'où $f^\sigma(1) = 0$. En répétant l'argument utilisé dans la preuve de la proposition 5.3, on obtient que si

$$g(z) := \frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n!} z^n,$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, $|\sigma(g_n)| \leqslant (n!)^\varepsilon$ pour $n \geqslant n_0(\sigma,\varepsilon)$. Comme $g(z)$ est à coefficients dans un corps de nombres, il n'y a qu'un nombre fini de σ à considérer, si bien que $\overline{|g_n|} \leqslant (n!)^\varepsilon$ pour $n \geqslant n_1(\varepsilon)$.

La condition sur les dénominateurs étant vérifiée de la même manière que dans la preuve de la proposition 5.3, on en déduit que g est une E-fonction *au sens large*. □

Une fois cette proposition prouvée, on obtient le théorème 5.7 en répétant *mutatis mutandis* la démonstration de [14, p. 378], à l'aide également du théorème 5.1 **a)** et du théorème 5.5.

Dans [2], Adamczewski et Rivoal ont construit, à partir de l'algorithme de la preuve du théorème 5.6, un algorithme permettant de déterminer les points auxquels une E-fonction *au sens strict* donnée prend des valeurs algébriques.

Théorème 5.8 (*Adamczewski, Rivoal*)

Il existe un algorithme qui, étant donnée une E-fonction au sens strict $f(z)$*, indique si $f(z)$ est transcendante sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ ou non et, si elle est transcendante, fournit la liste finie des nombres algébriques α tels que $f(\alpha)$ est algébrique, ainsi que la liste des valeurs $f(\alpha)$ correspondantes.*

Proposition 5.5

L'algorithme du théorème précédent fonctionne si $f(z)$ est une E-fonction au sens large.

En effet, l'algorithme en question est décomposé en trois étapes, les deux premières n'étant pas particulières aux E-fonctions.

• D'abord, il détermine une équation différentielle homogène minimale $M(y(z)) = 0$ sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaite par $f(z)$. La preuve de la terminaison de cette étape vient essentiellement d'une borne sur le degré en z de M issue d'un théorème de Grigoriev [30, p. 8], rendu pleinement explicite par Bostan, Rivoal et Salvy [16, Theorem 1, p. 54], d'une borne sur les modules des exposants de M dûe à Bertrand, Chirskii et Yebbou [12, p. 246, p. 252] et enfin d'un lemme de zéros de Bertrand et Beukers [11, p. 182]. Ces trois résultats sont valables sur les opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ en général.

• Puis il détermine, à partir de l'équation de l'étape précédente, une équation différentielle minimale inhomogène sur $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, $u_0(z)y^{(s)}(z) + \cdots + u_s(z)y(z) + u_{s+1}(z) = 0$, avec $u_0 \not\equiv 0$, dont $f(z)$ est solution. Là encore, cette procédure est valable pour n'importe quel opérateur différentiel.

• La troisième étape détermine quels éléments α parmi les racines du polynôme $u_0(z)$ vérifient $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Le fait que les autres nombres algébriques sont exclus est une conséquence du théorème 5.3, qui reste vrai au sens large selon le théorème 5.4. Cette étape consiste principalement à appliquer l'algorithme de désingularisation de Beukers décrit et utilisé dans la preuve du théorème 5.6, qui est valable au sens large selon le théorème 5.7.

Notons pour finir que Fischler et Rivoal [23] ont obtenu la généralisation suivante du théorème 5.8.

Théorème 5.9

On peut construire un algorithme qui permet, étant donné une famille de E-fonctions au sens large $F_1(z), \ldots, F_p(z)$*, de :*

• *calculer un système de générateurs de l'idéal des relations polynomiales entre les $F_i(z)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$;*

• *étant donné $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, calculer un système de générateurs de l'idéal des relations polynomiales entre les $F_i(\alpha)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$;*

• *si $F_1(z), \ldots, F_p(z)$ sont algébriquement indépendantes dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$, déterminer l'ensemble fini des $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tels que les valeurs $F_1(\alpha), \ldots, F_p(\alpha)$ sont algébriquement dépendantes sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

La preuve s'appuie sur le théorème 5.7 du présent article (cf [23, p. 4]).

Chapitre 6

Annexes

6.1 Démonstration directe du caractère fuchsien des G-opérateurs *au sens large*

Dans cette annexe, nous allons démontrer le résultat de structure sur les G-opérateurs *au sens large* suivant, qui est une partie du théorème 4.1. La preuve n'utilise pas le théorème d'André-Bombieri *au sens large*, elle est donc plus directe que celle qui a été présentée dans la sous-section 4.3.4.

Proposition 6.1

a) *Soit* $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ *un G-opérateur* au sens large. *Alors L est fuchsien, c'est-à-dire que tout élément de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *est un point singulier régulier de L.*

b) *En particulier, si f est une G-fonction* au sens large, *alors l'opérateur différentiel d'ordre minimal* $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z] \setminus \{0\}$ *tel que* $L(f(z)) = 0$ *est fuchsien.*

Démonstration de la proposition 6.1. Remarquons d'abord que le point **b)** est une conséquence du point **a)**. En effet, selon le théorème 4.3, l'équation différentielle minimale sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ satisfaite par une G-fonction *au sens large* $f(z)$ vérifie la condition de Galochkin *au sens large*. Passons donc à la preuve de **a)**.

Étape 1 : montrons que si $L \in \overline{\mathbb{Q}}(z)[\mathrm{d}/\mathrm{d}z]$ vérifie la condition de Galochkin *au sens large*, alors 0 est un point singulier régulier de L.

Nous adaptons la preuve donnée par Beukers dans le cas des G-opérateurs *au sens strict* [13, pp. 23-24]. Ce qui précède l'équation (6.5) n'est pas spécifique aux G-opérateurs *au sens large*.

Quitte à diviser par un élément de $\mathbb{K}(z)$ adapté, on peut supposer que, pour toute fonction $y(z)$,

$$L(y(z)) = z^n y^{(n)}(z) - z^{n-1} B_{n-1}(z) y^{(n-1)}(z) - \cdots - z B_1(z) y'(z) - B_0(z) y(z),$$

avec $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $B_k(z) \in \mathbb{K}(z)$, où $\mathbb{K}$ est un corps de nombres, qu'on peut supposer galoisien sans perte de généralité.

Par le théorème de Fuchs, 0 est un point singulier régulier de L si et seulement si pour tout k, $\dfrac{B_{n-k}(z) z^{n-k}}{z^n}$ admet un pôle d'ordre au plus k en 0, c'est-à-dire si $B_{n-k}(z)$ admet un pôle d'ordre au plus 0 en 0. Ainsi, en notant $v(B_{n-k})$ l'ordre du pôle de $B_{n-k}(z)$ en 0 et

$$\lambda := \max\left(v(B_{n-1}), \frac{1}{2} v(B_{n-2}), \dots, \frac{1}{n} v(B_0) \right),$$

on voit que L est régulier singulier en 0 si et seulement si $\lambda \leqslant 0$.

Supposons donc que 0 est un point irrégulier de L et montrons qu'alors la condition de Galochkin *au sens large* ne peut être satisfaite.

On considère $T(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$ le plus petit dénominateur commun des fractions rationnelles $B_k(z)z^{k-n}$, $k \in \{0,\ldots,n-1\}$. On peut supposer, quitte à le multiplier par un entier adapté que $T(z) \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$.

Pour $m \geqslant n$, considérons les fractions rationnelles $A_{m,0}(z),\ldots,A_{m,n-1}(z)$ définies par

$$z^m y^{(m)}(z) = \sum_{r=0}^{n-1} z^r A_{m,r}(z) y^{(r)}(z). \tag{6.1}$$

Les $z^{r-m}A_{m,r}(z)$ sont les coefficients de la dernière ligne de la matrice itérée $A_{L,m-(n-1)}$ de la matrice compagnon A_L associée à L. Par conséquent, selon (4.2), pour tout $r \in \{0,\ldots,n-1\}$, $T(z)^{m-n+1}z^{m-r}A_{m,r}(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$.

Nous allons montrer par récurrence sur m que

$$\forall m \geqslant n,\ \forall r \in \{0,\ldots,n-1\},\quad \widetilde{A}_{m,r}(z) := z^{(m-r)\lambda}A_{m-r}(z)$$

admet une limite en 0. On en déduira des relations entre les quantités $\lim\limits_{z\to 0}\widetilde{A}_{m,r}(z)$.

Pour $m = n$, par définition de λ, pour tout $r \in \{0,\ldots,n-1\}$, $B_r(z)$ a un pôle d'ordre au plus $(n-r)\lambda$ en 0 donc $\widetilde{B}_r(z) := z^{(n-r)\lambda}B_r(z)$ admet une limite en 0. Notons que $\beta_r := \lim\limits_{z\to 0}\widetilde{B}_r(z)$ est non nul pour au moins un r.

Soit $m \geqslant n$. Dérivons (6.1) et multiplions-la par z :

$$\begin{aligned}
z(mz^{m-1}y^{(m)}(z) + z^m y^{(m+1)}(z)) &= \sum_{r=0}^{n-1}(zA'_{m,r} + rA_{m,r})z^r y^{(r)}(z) + \sum_{r=0}^{n-1} A_{m,r}z^{r+1}y^{(r+1)}(z)\\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(zA'_{m,r} + rA_{m,r})z^r y^{(r)}(z) + A_{m,n-1}\left(\sum_{r=0}^{n-1} B_r z^r y^{(r)}(z)\right) + \sum_{r=1}^{n-1} A_{m,r-1}z^r y^{(r)}(z)\\
&= \sum_{r=0}^{n-1}(zA'_{m,r} + rA_{m,r} + A_{m,n-1}B_r + A_{m,r-1})z^r y^{(r)}(z)
\end{aligned}$$

en posant $A_{m,-1} = 0$. Donc

$$z^{m+1}y^{(m+1)}(z) = \sum_{r=0}^{n-1}(zA'_{m,r} + (r-m)A_{m,r} + A_{m,n-1}B_r + A_{m,r-1})z^r y^{(r)}(z),$$

de sorte que

$$A_{m+1,r} = zA'_{m,r} + (r-m)A_{m,r} + A_{m,n-1}B_r + A_{m,r-1},$$

si bien qu'en posant $\widetilde{B}_r = z^{(n-r)\lambda}B_r$, on a

$$\widetilde{A}_{m+1,r} = z^{\lambda+1}\widetilde{A}'_{m,r} + (r-m)(\lambda+1)z^{\lambda}\widetilde{A}_{m,r} + \widetilde{A}_{m,n-1}\widetilde{B}_r + \widetilde{A}_{m,r-1}. \tag{6.2}$$

En effet, $(\widetilde{A}_{m,r})' = z^{(m-r)\lambda}A'_{m,r} + (m-r)\lambda z^{(m-r)\lambda-1}A_{m,r}$, d'où

$$z^{(m+1-r)\lambda}A_{m+1,r} = z^{\lambda+1}\widetilde{A}'_{m,r} - \frac{(m-r)\lambda}{z}\widetilde{A}_{m,r} + (r-m)z^{\lambda}\widetilde{A}_{m,r} + \widetilde{A}_{m,n-1}\widetilde{B}_r + \widetilde{A}_{m,r-1},$$

ce qui donne après simplification la formule (6.2). L'hypothèse de récurrence et (6.2) impliquent alors que $\widetilde{A}_{m+1,r}$ admet une limite en 0, ce qui achève la récurrence.

De plus, la formule (6.2) nous assure que si $m \geqslant n$, en posant $\alpha_{m,r} := \lim\limits_{z\to 0}\widetilde{A}_{m,r}(z)$ et $\beta_r = \lim\limits_{z\to 0}\widetilde{B}_r(z)$, on a

$$\alpha_{m+1,r} = \beta_r\alpha_{m,n-1} + \alpha_{m,r-1},$$

si bien que

$$\boldsymbol{\alpha}_{m+1} := \begin{pmatrix} \alpha_{m+1,n-1} \\ \vdots \\ \alpha_{m+1,0} \end{pmatrix} = B\boldsymbol{\alpha}_m, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{n-1} & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ \beta_1 & (0) & & 1 \\ \beta_0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où finalement

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ \boldsymbol{\alpha}_m = B^m \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = {}^t(0,\dots,0,1). \tag{6.3}$$

On en déduit que

$$\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q}), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \sigma(\boldsymbol{\alpha}_m) = \sigma(B)^m \mathbf{e}. \tag{6.4}$$

en faisant agir σ coefficient par coefficient sur les vecteurs et matrices.

Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{\alpha}_m = 0$. Alors on aurait pour tout $r \in \{0,\dots,n-1\}$, $B^m(B^r\mathbf{e}) = 0$. Mais $(\mathbf{e},\dots,B^{n-1}\mathbf{e})$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$ donc $B^m = 0$. En particulier, B est nilpotente. Le théorème de Cayley-Hamilton permet alors d'affirmer que son indice de nilpotence est au plus n, d'où $B^n = 0$. Ainsi, en vertu de (6.3), $(\beta_0,\dots,\beta_{n-1}) = 0$, ce qui est faux par définition de λ. Donc les $\boldsymbol{\alpha}_m$ sont tous non nuls. Par suite, il en va de même des $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_m)$, quand $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$ est fixé.

Pour $N \geqslant n$, notons q_N le dénominateur commun des coefficients des polynômes

$$\frac{T(z)^{m-n+1}}{m!} z^{r-m} A_{m,r}(z), \quad 0 \leqslant r \leqslant n-1, \ n \leqslant m \leqslant N.$$

Si $T(z) = z^u T_1(z)$ avec $z \nmid T_1(z)$ et $T_1(z) \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}[z]$, on constate que q_N est également le dénominateur commun des coefficients des $T_1(z)^{m-n+1}A_{m,r}(z)/m! \in \overline{\mathbb{Q}}\left[z,z^{-1}\right]$, puisque q_N est invariant par multiplication des polynômes considérés par une puissance de z.

De plus, si $C(z) = \sum_{k=-\ell}^{\ell'} c_k z^k \in \overline{\mathbb{Q}}\left[z,z^{-1}\right]$ a un pôle d'ordre ℓ en 0 et $\rho \in \mathbb{C}$, $z^\rho C(z)$ admet une limite en 0 si et seulement si $\rho \geqslant \ell$ et dans ce cas, elle tend vers 0 si $\rho > \ell$ et vers $c_{-\ell}$ si $\rho = \ell$.

Donc, en passant à la limite en 0, on obtient

$$w_N := \frac{q_N \gamma^{N-n+1} \alpha_{N,r}}{N!} \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}}, \quad \text{avec } \gamma := T_1(0) \in \mathscr{O}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}.$$

Comme les $\boldsymbol{\alpha}_N$ sont tous non nuls, il existe r tel que $(\alpha_{N,r})_{N\geqslant n}$ soit non nulle pour une infinité de N. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\forall N \in \mathbb{N}, \alpha_{N,r} \neq 0$. Par ailleurs, si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, selon (6.4), la suite $\left(\left|\sigma(\alpha_{N,r})\right|\right)_{N\geqslant n}$ est bornée par une suite géométrique $\left(C_\sigma^{N+1}\right)_{N\geqslant n}$. Donc si la condition de Galochkin *au sens large* était vérifiée, on aurait pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ et N suffisamment grand,

$$|\sigma(w_N)| \leqslant \left| \frac{q_N \sigma(\gamma)^{N-n+1}\sigma(\alpha_{N,r})}{N!} \right| \leqslant \frac{N!^\varepsilon}{N!} C_\sigma^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0. \tag{6.5}$$

Ceci valant pour tout automorphisme de corps de $\mathbb{K}$, on en déduit en passant à la norme que $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(w_N) = \prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})} \sigma(w_N)$ est une suite d'entiers non nuls tendant vers 0, ce qui est impossible.

Par contraposée, on obtient le résultat annoncé.

Étape 2 : changement de variable.

Soit $\alpha \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$. Selon la proposition 4.7, l'opérateur L_α obtenu par changement de variable $u = z - \alpha$ (ou $u = z^{-1}$ si $\alpha = \infty$) est un G-opérateur *au sens large*. Donc selon l'étape 1, 0 est un point singulier régulier de L_α. En d'autres termes, α est un point singulier régulier de L. Donc L est un opérateur fuchsien. □

Remarques. ***i)*** Dans l'étape 1, si l'on suppose que $q_N = O(N!^{\rho})$ pour un certain $\rho \in]0,1[$ fixé, alors l'inégalité (6.5) permet encore d'obtenir une contradiction. Cependant, l'étape 7 de la preuve du théorème 4.3 ne s'adapte pas. En effet, définissons une notion de E et G-fonction au sens « très large » en remplaçant dans la définition 4.1 les conditions **b)** et **c)** par : il existe $\rho \in]0,1[$ tel que $\boxed{a_n} = O(n!^{\rho})$ et $\mathrm{den}(a_0, \dots, a_n) = O(n!^{\rho})$, et considérons une condition de Galochkin associée en remplaçant dans la définition 4.2 « $\exists C > 0 : q_s \leqslant C^{s+1}$ » par « $\exists \rho \in]0,1[: q_s = O(s!^{\rho})$ ». L'obstruction à l'adaptation de l'étape 7 à ce cas provient de la constante c_{14} dans l'inégalité (4.17), qui n'est pas *a priori* dans $]0,1[$.

ii) Comme nous l'avons mentionné au cours de la preuve, Beukers avait déjà montré par l'argument de l'étape 1 que 0 est un point singulier régulier de tout G-opérateur *au sens strict*, sans passer par le théorème d'André-Bombieri. Une légère adaptation de la démonstration de la proposition 6.1 permet de prouver un énoncé plus fort : la condition de Galochkin *au sens strict* implique que tout G-opérateur *au sens strict* est fuchsien.

6.2 Construction d'un contre-exemple à (A') et (A'')

Le but de cette partie est de construire un contre-exemple aux assertions **(A')** et **(A'')** mentionnées dans la remarque finale de la section 4.3.2. Commençons par rappeler ces deux énoncés.

Assertion (A') :

« Soit $\mathscr{S} \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Si $\sum\limits_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \dfrac{\log p}{p} = o(\log n)$, alors $\sum\limits_{p\in\mathscr{S}} \dfrac{1}{p} < \infty$. »

Assertion (A'') : « Soit $\mathscr{S} \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Si $\sum\limits_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \dfrac{\log p}{p} = o(\log n)$, alors $\mathscr{S}$ a une densité naturelle nulle, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{Card}\{p \in \mathscr{S}, p \leqslant x\}}{\mathrm{Card}\{p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), p \leqslant x\}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0. \text{ »}$$

Nous allons construire dans la partie 6.2.1 un ensemble $\mathscr{S}$ de premiers n'ayant pas de densité naturelle mais vérifiant $\sum\limits_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \dfrac{\log p}{p} = o(\log n)$. Nous montrerons dans un deuxième temps que $\sum\limits_{p\in\mathscr{S}} \dfrac{1}{p}$ diverge (sous-section 6.2.2).

Remarque. L'ensemble $\mathscr{S}$ ainsi construit donne un nouvel exemple d'ensemble de premiers ayant une densité de Dirichlet (ici égale à 0 selon la proposition 4.5) mais pas de densité naturelle. Un autre exemple, dû à Bombieri, est mentionné par Serre dans [48, p. 126].

6.2.1 Construction d'un ensemble sans densité naturelle

On se donne une suite d'entiers $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strictement croissante, vérifiant $N_0 = 1$ et les quatre conditions suivantes :

- (c_0) : $\forall j \in \mathbb{N}, 2N_j < N_{j+1}$.
- (c_1) : $\dfrac{N_j}{\log N_j} = o\left(\dfrac{N_{j+1}}{\log N_{j+1}}\right)$.
- (c_2) : $j = o(\log N_j)$.
- (c_3) : $\log N_{j+1} = O(\log N_j)$.

On définit $\mathscr{S}$ l'ensemble

$$\mathscr{S} := \bigcup_{j=0}^{\infty} [N_j, 2N_j] \cap \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}),$$

de sorte que, pour tout j, $[2N_j, N_{j+1}] \cap \mathscr{S} = \emptyset$.

On note π la fonction de comptage des nombres premiers. On rappelle qu'en vertu du théorème des nombres premiers,

$$\pi(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x}.$$

Enfin, posons $\pi_{\mathscr{S}}(x) := \mathrm{Card}\{p \in \mathscr{S}, p \leqslant x\}$.

Étape 1 : montrons que $\liminf\limits_{x\to+\infty} \pi_{\mathscr{S}}(x)\dfrac{\log(x)}{x} = 0$.

Soit $j \leqslant 1$. Comme $\mathscr{S}$ ne contient pas de premiers de l'intervalle $[2N_{j-1}, N_j]$, on a

$$\pi_{\mathscr{S}}(N_j) = \pi_{\mathscr{S}}(2N_{j-1}) \leqslant \pi(2N_{j-1}) \sim 2\frac{N_{j-1}}{\log N_{j-1}} = o(\pi(N_j))$$

selon la condition (c_1), en appliquant le théorème des nombres premiers. En d'autres termes,

$$\frac{\pi_{\mathscr{S}}(N_j)}{\pi(N_j)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0,$$

ce qui prouve le résultat voulu.

Étape 2 : prouvons que $\limsup\limits_{x\to+\infty} \pi_{\mathscr{S}}(x)\dfrac{\log(x)}{x} > 0$.

On a

$$\pi_{\mathscr{S}}(2N_j) \geqslant \pi_{\mathscr{S}}(2N_j) - \pi_{\mathscr{S}}(N_j) \geqslant \pi(2N_j) - \pi(N_j),$$

puisqu'il y a par construction autant de premiers dans $\mathscr{S} \cap [N_j, 2N_j]$ que dans $[N_j, 2N_j]$. Or,

$$\pi(2N_j) - \pi(N_j) = 2\frac{N_j}{\log N_j}(1+o(1)) - \frac{N_j}{\log N_j}(1+o(1)) \sim \frac{N_j}{\log N_j},$$

d'où

$$\frac{\pi_{\mathscr{S}}(2N_j)}{\pi(2N_j)} \geqslant \frac{1}{2}\frac{\log N_j}{N_j} \times \frac{N_j}{\log N_j}(1+o(1)) \geqslant \frac{1}{2}(1+o(1)),$$

si bien que

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\pi_{\mathscr{S}}(x)}{\pi(x)} \geqslant \limsup_{j\to+\infty} \frac{\pi_{\mathscr{S}}(2N_j)}{\pi(2N_j)} \geqslant \frac{1}{2},$$

ce qui conclut.

Étape 3 : montrons que $\sum\limits_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \dfrac{\log p}{p} = o(\log n)$.

On remarque que, pour tout entier k positif, $\pi_{\mathscr{S}}(k) - \pi_{\mathscr{S}}(k-1) > 0$ si et seulement si $k \in \mathscr{S}$. D'où

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant n}} \frac{\log p}{p} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\pi_{\mathscr{S}}(k) - \pi_{\mathscr{S}}(k-1)}{k}\log k = \sum_{k=2}^{n} \frac{\pi_{\mathscr{S}}(k)}{k}\log k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi_{\mathscr{S}}(k)}{k+1}\log(k+1) \\ &= \frac{\pi_{\mathscr{S}}(n)}{n}\log n + \sum_{k=2}^{n-1} \pi_{\mathscr{S}}(k)\left(\frac{\log k}{k} - \frac{\log(k+1)}{k+1}\right). \qquad (6.6)\end{aligned}$$

Le terme $\dfrac{\pi_{\mathscr{S}}(n)}{n}\log n$ étant borné selon le théorème des nombres premiers, il s'agit d'étudier l'autre terme de la somme. On a

$$\frac{\log k}{k}-\frac{\log(k+1)}{k+1}=\frac{(k+1)\log k-k\log(k+1)}{k(k+1)}\sim\frac{k(\log k-\log(k+1))+\log k}{k^2}$$

et $\log k-\log(k+1)\sim\dfrac{1}{k}$ donc

$$\frac{\log k}{k}-\frac{\log(k+1)}{k+1}=\frac{\log k}{k^2}+O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Ainsi,

$$\sum_{k=2}^{n-1}\pi_{\mathscr{S}}(k)\left(\frac{\log k}{k}-\frac{\log(k+1)}{k+1}\right)=\sum_{k=2}^{n-1}\pi_{\mathscr{S}}(k)\frac{\log k}{k^2}+O\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\pi_{\mathscr{S}}(k)}{k^2}\right)$$

en supposant que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\pi_{\mathscr{S}}(k)/k^2$ est divergente (dans le cas contraire, on obtient un terme $O(1)$ qui permet également de conclure).

D'une part,

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\pi_{\mathscr{S}}(k)}{k^2}\leqslant\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k^2}\sim\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\log k},$$

car la série de Bertrand $\sum_k\dfrac{1}{k\log k}$ est divergente. De plus, on a $\sum_{k=2}^{n-1}\dfrac{1}{k\log k}=O(\log\log n)$, d'où

$$O\left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\pi_{\mathscr{S}}(k)}{k^2}\right)=O(\log\log n)=o(\log n).$$

D'autre part, notons $S(n):=\sum_{k=2}^{n}\pi_{\mathscr{S}}(k)\dfrac{\log k}{k^2}$. On a

$$S(N_j)=\sum_{\ell=1}^{j}\sum_{k=N_{\ell-1}+1}^{N_\ell}\pi_{\mathscr{S}}(k)\frac{\log k}{k^2}.$$

Étant donné $k\in\{N_{\ell-1}+1,\dots,N_\ell\}$, on déduit de l'absence de premiers de S entre $2N_{\ell-1}$ et N_ℓ que

$$\pi_{\mathscr{S}}(k)\leqslant\pi(2N_{\ell-1})\leqslant\alpha_1\frac{N_{\ell-1}}{\log N_{\ell-1}},$$

où $\alpha_1>0$ est une constante. De plus, une comparaison série-intégrale fournit une constante $\alpha_2>0$ telle que

$$\sum_{k=N_{\ell-1}+1}^{N_\ell}\frac{\log k}{k^2}\leqslant\sum_{k=N_{\ell-1}}^{\infty}\frac{\log k}{k^2}\leqslant\alpha_2\frac{\log N_{\ell-1}}{N_{\ell-1}}.$$

Ainsi,

$$S(N_j)\leqslant\sum_{\ell=1}^{j}\alpha_1\frac{N_{\ell-1}}{\log N_{\ell-1}}\times\alpha_2\frac{\log N_{\ell-1}}{N_{\ell-1}}=\alpha_1\alpha_2 j=O(j).$$

Il découle alors de (c_2) et (c_3) que

$$S(N_j)=o(\log N_j)=o(\log N_{j-1}).$$

Déduisons-en finalement que $S(n)=o(\log n)$. On considère la fonction $\varphi:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ qui à tout entier n associe l'unique $j\in\mathbb{N}$ tel que $N_j\leqslant n\leqslant N_{j+1}$. On peut trouver une suite $(\varepsilon_j)_j$ tendant vers 0 telle que si $\varphi(n)=j$,

$$0\leqslant S(n)\leqslant S(N_{j+1})=\varepsilon_j\log N_j\leqslant\varepsilon_j\log n=\varepsilon_{\varphi(n)}\log n.$$

Comme $\varphi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a donc bien $S(n) = o(\log n)$. En utilisant (6.6), on en déduit que

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\in\mathscr{S}}} \frac{\log p}{p} = o(\log n).$$

Ainsi, selon les étapes 1 et 2, $\mathscr{S}$ n'a pas de densité naturelle, et selon l'étape 3, $\mathscr{S}$ vérifie l'hypothèse de **(A")**. Cet ensemble est donc un contre-exemple à l'assertion **(A")**. Pour conclure, il reste à trouver une suite $(N_j)_j$ vérifiant les conditions (c_i) pour $i \in 0,\dots,3$.

Posons $N_j = j^j$. Alors :

- Pour $j \geqslant 3$, on a $2j^j < (j+1)^{j+1}$.
- On a

$$\frac{j^j}{j\log j} \times \frac{(j+1)\log(j+1)}{(j+1)^{j+1}} \sim \left(\frac{j}{j+1}\right)^j \times \frac{1}{j+1}$$

et

$$\left(\frac{j}{j+1}\right)^j = \exp\left(-j\log\left(1+\frac{1}{j}\right)\right) = e^{-1+o(1)} = O(1) \tag{6.7}$$

donc (c_1) est vérifiée.

- On a $\log N_j = j\log j$ donc $j = o(\log N_j)$.
- Enfin, $\log N_{j+1} = (j+1)\log(j+1) \sim j\log j$.

6.2.2 Divergence de la série des inverses

On considère le même ensemble $\mathscr{S}$ et la même suite $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ que dans la sous-section précédente. Notre objectif à présent est de démontrer que $\sum_{p\in\mathscr{S}} \frac{1}{p}$ ne converge pas. Précisément, nous allons établir

$$\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant N_j}} \frac{1}{p} \geqslant (\log\log\log N_j)(1+o(1)).$$

En effectuant la même transformation sur la série $\sum \frac{1}{p}$ que celle effectuée sur la série $\sum \frac{\log p}{p}$ dans l'étape 3 de la partie 6.2.1, on obtient

$$\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant N_j}} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{N_j} \frac{\pi_{\mathscr{S}}(k)-\pi_{\mathscr{S}}(k-1)}{k} = \frac{\pi_{\mathscr{S}}(N_j)}{N_j} + \sum_{k=1}^{N_j-1} \frac{\pi_{\mathscr{S}}(k)}{k(k+1)} = \frac{\pi_{\mathscr{S}}(N_j)}{N_j} + \sum_{\ell=1}^{j} \sum_{k=N_{\ell-1}}^{N_\ell-1} \frac{\pi_{\mathscr{S}}(k)}{k(k+1)}.$$

Donc, puisque $\mathscr{S}$ contient tous les premiers entre $N_{\ell-1}$ et $2N_{\ell-1}$, on a

$$\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant N_j}} \frac{1}{p} \geqslant \sum_{\ell=1}^{j} \sum_{k=2N_{\ell-1}}^{N_\ell-1} \frac{\pi(2N_{\ell-1})-\pi(N_{\ell-1})}{k(k+1)} = \sum_{\ell=1}^{j} \frac{N_{\ell-1}}{\log(N_{\ell-1}+1)}(1+o(1)) \sum_{k=2N_{\ell-1}}^{N_\ell-1} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Or,

$$\sum_{k=2N_{\ell-1}}^{N_\ell-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2N_{\ell-1}}^{N_\ell-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2N_{\ell-1}} - \frac{1}{N_\ell},$$

de sorte que

$$\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant N_j}} \frac{1}{p} \geqslant \sum_{\ell=1}^{j} \frac{1}{2\log N_{\ell-1}}(1+o(1)) - \sum_{\ell=1}^{j} \frac{N_{\ell-1}}{N_\ell \log N_{\ell-1}}(1+o(1)).$$

Ici, $N_\ell = \ell^\ell$ pour tout ℓ, et on a vu dans l'équation (6.7) de la section 6.2.1 que $\dfrac{N_{\ell-1}}{N_\ell} \leqslant \dfrac{\beta}{\ell}$ où β est une constante, si bien que

$$\sum_{\ell=1}^{j} \frac{N_{\ell-1}}{N_\ell \log(N_{\ell-1}+1)} \leqslant \beta' \sum_{\ell=1}^{j} \frac{1}{\ell^2 \log \ell} = O(1)$$

et donc

$$\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant N_j}} \frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{j} \frac{1}{\ell \log \ell} + o\left(\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{j} \frac{1}{\ell \log \ell}\right) \sim_{j\to+\infty} \log\log j.$$

On en déduit que $\sum_{p\in\mathscr{S}} \dfrac{1}{p}$ diverge, ce qui montre que **(A')** n'est pas vérifiée par $\mathscr{S}$.

Par ailleurs,

$$\log\log\log N_j = \log(\log j + \log\log j) = \log\big((1+o(1))\log j\big) \sim \log\log j,$$

si bien que

$$\sum_{\substack{p\in\mathscr{S}\\ p\leqslant N_j}} \frac{1}{p} \geqslant (1+o(1))\log\log\log N_j.$$

Bibliographie

[1] M. Abramowitz et I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* 10e éd. United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1972.

[2] B. Adamczewski et T. Rivoal. “Exceptional values of E-functions at algebraic points”. In : *Bull. London Math. Soc.* 50.4 (2018), p. 697-708.

[3] K. Alladi et M.L. Robinson. “Legendre polynomials and irrationality”. In : *J. reine angew. Math.* 318 (1980), p. 137-155.

[4] Y. André. *G-Functions and Geometry : A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn.* 1re éd. Aspects of Mathematics. Vieweg+Teubner Verlag, 1989.

[5] Y. André. “Séries Gevrey de type arithmétique I. Théorèmes de pureté et de dualité”. In : *Annals of Mathematics* 151 (2000), p. 705-740.

[6] Y. André. “Séries Gevrey de type arithmétique II. Transcendance sans transcendance”. In : *Annals of Mathematics* 151 (2000), p. 741-756.

[7] Y. André. “Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties : a new differential Galois correspondence”. In : *Annales scientifiques de l'ENS* 47 (2 2014), p. 449-467.

[8] R. Apéry. “Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$”. In : *Astérisque* 61 (4 1979). actes des Journées arithmétiques (Luminy,1978), p. 11-13.

[9] A. Baker. *Transcendental number theory.* 1re éd. Cambridge University Press, 1975.

[10] K. M. Ball et T. Rivoal. “Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs”. In : *Invent. Math.* 146 (1 2001), p. 193-207.

[11] D. Bertrand et F. Beukers. “Equations différentielles linéaires et majorations de multiplicités”. In : *Annales scientifiques ENS* 18.1 (1985), p. 191-192.

[12] D. Bertrand, V. Chirskii et J. Yebbou. “Effective estimates for global relations on Euler-type series”. In : *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques.* 6e sér. 13.2 (2004), p. 241-260.

[13] F. Beukers. *E-functions and G-functions.* notes disponibles sur `swc.math.arizona.edu/aws/2008/08BeukersNotesDraft.pdf`. 2008.

[14] F. Beukers. “A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem”. In : *Annals of Math.* 163 (2006), p. 369-379.

[15] E. Bombieri. “On G-functions”. In : *Recent progress in analytic number theory.* T. 2. Acad. Press, 1981, p. 1-67.

[16] A. Bostan, T. Rivoal et B. Salvy. “Explicit degree bounds for factors of linear differential operators”. In : *Bull. London Math. Soc.* 53 (1 2021), p. 53-62.

[17] D. Chudnovsky et G. Chudnovsky. “Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions”. In : *Number Theory.* Lecture Notes in Mathematics 1135. Springer Berlin, 1984, p. 9-51.

[18] G.V. CHUDNOVSKY. "Padé approximations to the generalized hypergeometric functions. I." In : *J. Math. Pures Appl., IX. Sér.* 58 (1979), p. 445-476.

[19] R. DESCOMBES. *Éléments de théorie des nombres.* P.U.F, 1986.

[20] B. DWORK. "On the size of differential modules". In : *Duke Math J.* 96 (2), p. 225-239.

[21] B. DWORK, G. GEROTTO et F. J. SULLIVAN. *Introduction to G-functions.* AM 133. Princeton University Press, 1994.

[22] S. FISCHLER et T. RIVOAL. *A note on G-operators of order* 2. 2021. URL : `http://rivoal.perso.math.cnrs.fr/articles/gopinh.pdf`.

[23] S. FISCHLER et T. RIVOAL. *Effective algebraic independence of values of E-functions.* 2020. arXiv : `1906.05589 [math.NT]`.

[24] S. FISCHLER et T. RIVOAL. "Linear independance of values of *G*-functions". In : *Journal of the EMS* 22 (5 2020), p. 1531-1576.

[25] S. FISCHLER et T. RIVOAL. "Linear independance of values of *G*-functions, II. Outside the disk of convergence". In : *Annales Mathématiques du Québec* 45 (1 2021).

[26] J. FRESÁN et P. JOSSEN. *A non-hypergeometric E-function.* 2020. URL : `http://javier.fresan.perso.math.cnrs.fr/Siegel.pdf`.

[27] A. I. GALOCHKIN. "Estimates from below of polynomials in the values of analytic functions of a certain class". In : *Mathematics of the USSR-Sbornik* 24 (1974), p. 385-407.

[28] V.A. GORELOV. "On the Siegel Conjecture for Second-Order Homogeneous Linear Differential Equations". In : *Mathematical Notes* 75.4 (2004). Traduit de *Matematicheskie Zametki*, vol. 75, no. 4, 2004, pp. 549–565., p. 513-529.

[29] W. GREUB. *Multilinear algebra.* 2e éd. Universitext. Springer-Verlag, 1978.

[30] Yu. GRIGORIEV. "Complexity of factoring and calculating the GCD of linear ordinary differential operators". In : *J. Symb. Comput.* 10 (1990), p. 7-37.

[31] M. HATA. "On the linear independence of values of polylogarithmic functions". In : *J.Math. Pures Appl.* 69 (2 1990), p. 133-173.

[32] E. HILLE. *Ordinary differential equations in the complex domain.* Pure and Applied Mathematics, Monographs and Texts. Willey, 1976.

[33] N. JACOBSON. *Lectures in abstract algebra : Linear algebra.* 1st ed. 1953. 2nd printing. T. 2. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1984.

[34] N. KATZ. "A conjecture in the arithmetic theory of differential equations". In : *Bulletin de la S.M.F.* 110 (1982), p. 203-239.

[35] G. LEPETIT. "Le théorème d'André-Chudnovsky-Katz « au sens large »". In : *NWEJM* (2021). Accepté pour publication. URL : `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02521687`.

[36] G. LEPETIT. "On the linear independance of values of *G*-functions". In : *Journal of Number Theory* 219 (2021), p. 300-343.

[37] G. LEPETIT. "Quantitative problems on the size of *G*-operators". In : *manuscripta mathematica* (2021). DOI : `https://doi.org/10.1007/s00229-021-01322-6`.

[38] Gabriel LEPETIT. *Le théorème d'André-Chudnovsky-Katz.* 2018. arXiv : `2109.10239 [math.NT]`.

[39] B. MALGRANGE. *Équations différentielles à coefficients polynômiaux.* T. 96. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1991.

[40] R. MARCOVECCHIO. “Linear independence of linear forms in polylogarithms”. In : *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa.* Cl. Sci. (5) 5.1 (2006), p. 1-11.

[41] Yu. V. NESTERENKO et A. B. SHIDLOVSKII. “On the linear independence of values of E-functions”. In : *Math Sb.* 187 (1996). traduit en anglais dans Sb. Math 187 (1996), 1197–1211, p. 93-108.

[42] O. PERRON. “Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten”. In : *Acta Mathematica* 34 (1911), p. 139-163.

[43] J.-P. RAMIS. “Séries Divergentes et Théories Asymptotiques”. In : *Séries divergentes et procédé de resommation.* Journées X-UPS 1991. 1991, p. 7-67.

[44] J.-P. RAMIS. “Théorèmes d’indice Gevrey pour les équations différentielles ordinaires”. In : *Memoirs A.M.S.* 48.296 (1984).

[45] T. RIVOAL. “Indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes”. In : *J. Théorie des Nombres de Bordeaux* 15.2 (2003), p. 551-559.

[46] T. RIVOAL et J. ROQUES. “Siegel’s problem for E-functions of order 2”. In : *Proceedings of the conference Transient Transcendence in Transylvania.* Éditeurs : A. BOSTAN et K. RASCHEL. A paraître. URL : `http://rivoal.perso.math.cnrs.fr/articles/efnorder2.pdf`.

[47] J. SAULOY. *Differential Galois Theory through Riemann-Hilbert Correspondence : An Elementary Introduction.* T. 177. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2016.

[48] J.-P. SERRE. *Cours d’arithmétique.* 4^{e} éd. P.U.F., 1994.

[49] A. B. SHIDLOVSKII. *Transcendental Numbers.* T. 12. Degruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter, 1989.

[50] C. L. SIEGEL. *Transcendental Numbers.* Princeton University Press, 1949.

[51] C. L. SIEGEL. “Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen”. In : *Abh. Preuss. Akad. Wiss.* (1929), p. 41-69.

[52] M. F. SINGER et M. VAN DER PUT. *Galois Theory of Linear Differential Equations.* T. 328. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2003.

[53] G. TENENBAUM. *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory.* T. 46. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.