Méthode de Newton

Leçons : *218*, 223, 226, 228

Théorème 1

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Si $f(a) = 0$ et $f'(a) > 0$, il existe $J = [a-h, a+h]$ tel qu'on ait $\forall x \in J, f'(x) > 0$ et que J soit stable par $\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Alors si $x_0 \in J$, la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a, et il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a|^2 \leqslant C^{2^n-1}|x_0 - a|^{2^n}$

De plus, si $f''(a) > 0$ et $x_0 > a$, la suite (x_n) est décroissante et

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f(a)}(x_n - a)^2$$

Démonstration. Comme f' est continue sur I et $f'(a) > 0$, on peut trouver $J = [a-h, a+h]$ tel que $\forall x \in J, f'(x) > 0$.

De plus, si $x \in J$, $\varphi(x) - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} = \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}$.

Selon l'égalité de Taylor appliquée à la fonction $\mathscr{C}^2$ f entre a et x, il existe $z_x \in [a, x]$ tel que $\varphi(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2$.

Ainsi, si $m = \min_J |f'| > 0$ (car f' est continue et strictement positive sur J compact) et $M = \max_J |f''|$, on a $|\varphi(x) - a| \leqslant \frac{1}{2}\frac{M}{m}|x-a|^2 = C|x-a|^2$

En particulier, si $Ch^2 \leqslant h$ soit $h \leqslant \frac{1}{C}$, J est un intervalle stable par φ. Quitte à prendre h plus petit, on suppose donc que cette hypothèse est vérifiée.

Ainsi, si $x_0 \in J$, la suite $(x_n)_n$ est bien définie et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - a| \leqslant C|x_n - a|^2$. Par conséquent, $C|x_{n+1} - a| \leqslant (C|x_n - a|^2)^2$ donc une récurrence immédiate nous assure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a|^2 \leqslant C^{2^n-1}|x_0 - a|^{2^n}$$

En particulier, (x_n) converge vers a.

Supposons à présent que $f''(a) > 0$. Par le même argument que pour f', on peut supposer, quitte à remplacer J par un sous-intervalle, que $\forall x \in J, f''(x) > 0$. Par suite, f' est croissante sur J et en particulier, si $x \geqslant a$, $f'(x) \geqslant f'(a) > 0$ donc f elle-même est croissante. Ainsi, $\forall x > a, f(x) > f(a) = 0$.

On obtient donc $\forall x > a, \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x$. De plus si $x \geqslant a$,

$$\varphi(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_x)}{f'(x)}(x-a)^2 \geqslant 0$$

car $a \leqslant z_x \leqslant x$ [1]. Par conséquent, si $x_0 > a$, la suite (x_n) est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geqslant a$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}(x_n - a)^2$ où $a \leqslant z_n \leqslant x_n$ donc comme $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, il en va de même pour (z_n) et par continuité de f' et f'', on a

1. Cette inégalité exprime simplement le fait que, par convexité de f, le graphe de f est au-dessus de ses tangentes.

$$x_{n+1} - a \simeq \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$$

□

Exemple. Application à l'approximation d'une racine carrée : si $y > 0$ et $f : x \mapsto x^2 - y$, $a = \sqrt{y}$ alors si $c > a$ et $c^2 > c$, l'intervalle $J = [a, +\infty[$ est stable et si $x_0 \in J$, on a la majoration de l'erreur

$$0 \leqslant x_n - a \leqslant 2a\left(\frac{x_0 - a}{2a}\right)^{2^n}$$

En effet, soit $F : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = \dfrac{x^2 + a^2}{2x}$. $F(x) - a = \dfrac{(x-a)^2}{2x}$ et $F(x) + a = \dfrac{(x+a)^2}{2x}$, de sorte que $\dfrac{F(x) - a}{F(x) + a} = \left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2$. Donc en notant $\varphi : x \mapsto \dfrac{x-a}{x+a}$ bijection de $]-a, +\infty[$ sur $]-\infty, 1[$, et $G : x \mapsto x^2$, on a $F = \varphi^{-1} \circ G \circ \varphi$.

Ainsi, si $x_0 \in J$, $x_{n+1} = F(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (\varphi^{-1} \circ G^n \circ \varphi)(x_0)$ soit $\dfrac{x_n - a}{x_n + a} = \left(\dfrac{x_0 - a}{x_0 + a}\right)^{2^n}$. D'où

$$1 + \frac{2a}{x_n - a} = \left(1 + \frac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n} \overset{x_0 > a}{\geqslant} 1 + \left(\frac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n}$$

Une simplification immédiate nous fournit la majoration voulue.

Remarque.
- Attention à bien adapter l'énoncé du théorème pour le rendre tout à fait général, les jurys y seront attentifs puisque c'est un développement très classique.
- L'énoncé du théorème peut être résumé en disant simplement que a est un point fixe superattractif de φ.
- Une généralisation existe en dimension n (et a une preuve identique) : Newton-Raphson. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est tel que $Df(a)$ est inversible et $f(a) = 0$, alors a est un point fixe superattractif de $\varphi : x \to x - (Df(x))^{-1}.f(x)$. (voir DEMAILLY 2006, p. 110).

Référence : François ROUVIÈRE (2003). *Petit guide de calcul différentiel*. 2e éd. Cassini p. 142.