

Свойства зависимых величин. Математическое ожидавание и дисперсия. чность оценки.

9 октября 2024 г.

Устин Золотиков

1. Доказать, что из $Pr(A) = Pr(A|B)$ автоматически следует, что $PrA = PrA|\bar{B}$.

Ответ:

(a) $P(A) = P(A|B)$

(b) $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

(c) $P(A) * P(B) = P(AB)$ - из этого следует независимость событий A и B ,
следовательно события B и \bar{B} не влияют на вероятность события A .

(d) Следовательно, $P(A\bar{B}) = P(A) * P(\bar{B})$

(e) $\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A)*P(\bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A)$

2. Доказать, что из $RR = 1$ следует, что случайные события – независимы.

Ответ:

(a) $RR = 1 \rightarrow \frac{P(A)}{P(A|B)} \rightarrow P(A) = P(A|B) \rightarrow P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow P(A) * P(B) =$
 $P(AB)$ - следовательно, события A и B независимы.

3. Количество циклов химиотерапии, требующихся пациенту в *дебюте* некоего заболевания, является случайной величиной со следующим распределением:

Количество циклов	1	2
Вероятность	0.5	0.5

При *рецидиве* распределение является следующим:

1. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа циклов терапии при первичном выявлении и при рецидиве (отдельно).

Количество циклов	2	3
Вероятность	0.25	0.75

2. Предположим, что мы изучаем только рецидивировавших пациентов.

- Постройте таблицу распределения общего числа циклов терапии у рецидивировавших пациентов («дебютных» + «рецидивных»).
- Найдите математическое ожидание и дисперсию этой величины. При расчете примите допущение о том, что выбор числа циклов при рецидиве не зависит от того, сколько циклов было в дебюте.

Ответ:

(а) Число циклов при дебюте:

$$M = 1 * 0.5 + 2 * 0.5 = 1.5$$

$$D = \frac{(1 - 1.5)^2 + (2 - 1.5)^2}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

(b) Число циклов при рецидиве:

$$M = 2 * 0.25 + 3 * 0.75 = 2.75$$

$$D = \frac{(2 - 2.75)^2 + (3 - 2.75)^2}{2} = \frac{0.625}{2} = 0.3125$$

(с) Общее число циклов у пациента с рецидивом(Таблица 1)

$$M = 3 * 0.125 + 4 * 0.5 + 5 * 0.375 = 4.25$$

$$D = \frac{(3 - 4.25)^2 + (4 - 4.25)^2 + (5 - 4.25)^2}{3} = \frac{2.1875}{3} = 0.7292$$

Таблица 1: Рассчёт вероятностей общего числа циклов у пациента с рецидивом

Количество циклов	P
3	$0.5 * 0.25 = 0.125$
4	$0.5 * 0.25 + 0.5 * 0.75 = 0.5$
5	$0.5 * 0.75 = 0.375$

4. На лекции мы работали со скриптом, в котором мы производили оценку математического ожидания случайной величины (прироста гемоглобина). Теперь

мы хотим провести виртуальный эксперимент, в котором мы будем оценивать вероятность некоего события (например полного исцеления после приема терапии). По-прежнему, дизайн однокрупновой. Переделайте скрипт так, чтобы в нем можно было бы анализировать ошибку в оценке вероятности события в зависимости от истинной вероятности и объема выборки. Какие закономерности вы можете вычислить, экспериментируя со скриптом?

Скрипт на github