Линейная алгебра
Нормированные пространства

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Пространства со скалярным произведением (Inner product spaces)

Скалярное произведение

Пусть $\mathbb{V}$ — векторное пространство. Скалярное произведение на $\mathbb{V}$ — это **функция**, которая каждой паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ сопоставляет скаляр, обозначаемый как $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, так что выполняются свойства 1–4 ниже.

1. Симметричность (сопряжённая): $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
2. Линейность: $(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ и любых скаляров α, β,
3. Неотрицательность: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}$,
4. Невырожденность: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Слайд для записей

Скалярное произведение в координатных пространствах

Definition

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ — это число, вычисляемое по формуле:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Геометрический смысл:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \theta$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Обозначения скалярного произведения

Различные способы записи

1. Через транспонирование

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v}$$

Матричная форма:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Результат:

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

2. Через угловые скобки

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

Альтернативно: - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ — точечное произведение

Обозначения эквивалентны:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Нормированные пространства

Свойства нормы:

1. Однородность: $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$ для любых $\mathbf{v}$ и скаляров α.

Определение (норма и нормированное пространство)

Пусть в векторном пространстве V каждой вектору $\mathbf{v}$ сопоставлено число $\|\mathbf{v}\|$ так, что выполняются свойства 1–4 выше. Тогда функция $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ называется нормой. Векторное пространство V, оснащённое нормой, называется нормированным пространством.

Нормированные пространства

Свойства нормы:

1. Однородность: $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$ для любых $\mathbf{v}$ и скаляров α.
2. Неравенство треугольника: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Определение (норма и нормированное пространство)

Пусть в векторном пространстве V каждой вектору $\mathbf{v}$ сопоставлено число $\|\mathbf{v}\|$ так, что выполняются свойства 1–4 выше. Тогда функция $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ называется нормой. Векторное пространство V, оснащённое нормой, называется нормированным пространством.

Нормированные пространства

Свойства нормы:

1. Однородность: $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$ для любых $\mathbf{v}$ и скаляров α.
2. Неравенство треугольника: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
3. Неотрицательность: $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ для всех векторов $\mathbf{v}$.

Определение (норма и нормированное пространство)

Пусть в векторном пространстве V каждой вектору $\mathbf{v}$ сопоставлено число $\|\mathbf{v}\|$ так, что выполняются свойства 1–4 выше. Тогда функция $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ называется нормой. Векторное пространство V, оснащённое нормой, называется нормированным пространством.

Нормированные пространства

Свойства нормы:

1. Однородность: $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$ для любых $\mathbf{v}$ и скаляров α.
2. Неравенство треугольника: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
3. Неотрицательность: $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ для всех векторов $\mathbf{v}$.
4. Невырожденность: $\|\mathbf{v}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Определение (норма и нормированное пространство)

Пусть в векторном пространстве V каждой вектору $\mathbf{v}$ сопоставлено число $\|\mathbf{v}\|$ так, что выполняются свойства 1–4 выше. Тогда функция $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ называется нормой. Векторное пространство V, оснащённое нормой, называется нормированным пространством.

Разные нормированные пространства

Любое пространство со скалярным произведением является нормированным, поскольку норма $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ удовлетворяет свойствам 1–4. Однако существуют и другие нормы. Например, для $p, 1 \leq p < \infty$, можно определить норму $\|\cdot\|_p$ на $\mathbb{R}^n$ как

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Также можно определить норму $\|\cdot\|_\infty$ (при $p = \infty$) как

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_k| : k = 1, 2, \ldots, n\}$$

Ортогональность. Ортогональные и ортонормированные базисы.

Определение

Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ называются ортогональными (перпендикулярными), если $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Запись $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ обозначает ортогональность векторов.

Для ортогональных векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ верно тождество Пифагора:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{if } \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 =& (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \\
=& \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \\
& \left((\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \text{ because of orthogonality }\right).
\end{aligned}$$