

# Линейная алгебра

Матрицы и векторы. Первичное знакомство, основные операции.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

# Матрица

## **i** Definition

Матрица — упорядоченный массив чисел в виде  $n$  строк и  $m$  столбцов.

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

# Матрица

## i Definition

Матрица — упорядоченный массив чисел в виде  $n$  строк и  $m$  столбцов.

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Обычно обозначаем как  $A_{n \times m}$  или, чтобы подчеркнуть природу чисел в матрице, пишем  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

# Матрица

## i Definition

Матрица — упорядоченный массив чисел в виде  $n$  строк и  $m$  столбцов.

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Обычно обозначаем как  $A_{n \times m}$  или, чтобы подчеркнуть природу чисел в матрице, пишем  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .
- Если  $n = m$ , то матрицу называют *квадратной*, если  $n \neq m$  — *прямоугольной*

## Основные операции: транспонирование

### i Definition

**Транспонирование** матрицы — это операция, при которой строки и столбцы меняются местами. Если  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , то  $B = A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , где  $b_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \xrightarrow{A^T} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}_{3 \times 2} = A^T$$

## Основные операции: сложение матриц

### Definition

**Сложение матриц** возможно только для матриц одинакового размера. Результат получается сложением соответствующих элементов. Если  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , то  $C = A + B$ , где  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

**Пример:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

## Основные операции: умножение на скаляр

### Definition

**Умножение на скаляр** — каждый элемент матрицы умножается на заданное число. Если  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $C = \alpha A$ , где  $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

Пример:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Комбинация операций:

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

# Вектор

В самом простом представлении будем трактовать **вектор** как частный случай матрицы:

## Вектор-столбец

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

**Размерность:**  $n \times 1$  (матрица с одним столбцом)

## Обозначения

- **Векторы:** обычно обозначаются строчными буквами  $x, v$  или  $\mathbf{u}$

## Вектор-строка

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$$

**Размерность:**  $1 \times m$  (матрица с одной строкой)



# Вектор

В самом простом представлении будем трактовать **вектор** как частный случай матрицы:

## Вектор-столбец

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

**Размерность:**  $n \times 1$  (матрица с одним столбцом)

## Обозначения

- **Векторы:** обычно обозначаются строчными буквами  $x, v$  или  $\mathbf{u}$
- **Матрицы:** обычно обозначаются заглавными буквами  $A, B, C$

## Вектор-строка

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$$

**Размерность:**  $1 \times m$  (матрица с одной строкой)

# Вектор

В самом простом представлении будем трактовать **вектор** как частный случай матрицы:

## Вектор-столбец

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

**Размерность:**  $n \times 1$  (матрица с одним столбцом)

## Обозначения

- **Векторы:** обычно обозначаются строчными буквами  $x, v$  или  $\mathbf{u}$
- **Матрицы:** обычно обозначаются заглавными буквами  $A, B, C$
- **По умолчанию:** вектор считается **вектором-столбцом**

## Вектор-строка

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$$

**Размерность:**  $1 \times m$  (матрица с одной строкой)

# Вектор

В самом простом представлении будем трактовать **вектор** как частный случай матрицы:

## Вектор-столбец

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

**Размерность:**  $n \times 1$  (матрица с одним столбцом)

## Вектор-строка

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m] \in \mathbb{R}^{1 \times m}$$

**Размерность:**  $1 \times m$  (матрица с одной строкой)

## Обозначения

- **Векторы:** обычно обозначаются строчными буквами  $x, v$  или  $\mathbf{u}$
- **Матрицы:** обычно обозначаются заглавными буквами  $A, B, C$
- **По умолчанию:** вектор считается **вектором-столбцом**
- **Транспонирование:**  $\mathbf{x}^T$  превращает столбец в строку

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Обычный подход

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m-1} & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,m-1} & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$A \qquad \qquad \mathbf{x} \qquad \qquad \mathbf{y}$

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,m-1}x_{m-1} + a_{1m}x_m$$

$$y_j = \sum_{k=1}^m a_{jk}x_k$$

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Вычислительная сложность и немного о параллельных вычислениях

Вспомним общую формулу:

$$y_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} x_k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

**Анализ операций:**

- Для вычисления одного элемента  $y_j$ :  $m$  умножений (каждое  $a_{jk} \cdot x_k$ ),  $m - 1$  сложений (суммирование  $m$  произведений)
- Для всего вектора  $y$  ( $n$  элементов):  $n \cdot (2m - 1)$  операций всего.

**Временная сложность:**

- Для квадратной матрицы  $n \times n$ :  $\mathcal{O}(2n^2 - n) = \mathcal{O}(n^2)$
- Для прямоугольной матрицы  $n \times m$ :  $\mathcal{O}(nm)$

 Естественный параллелизм

Вычисление каждого элемента  $y_j$  **независимо** от других элементов!

- **Построчная параллелизация:** отдельный процессор может вычислять свой  $y_j$

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Просветленный подход :)

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] \\ A \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right] \\ \mathbf{x} \end{array} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right] \\ \mathbf{y} \end{array}$$

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Просветленный подход :)

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] \\ A \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right] \\ \mathbf{x} \end{array} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right] \\ \mathbf{y} \end{array}$$

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$$

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Просветленный подход :)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$A$   $\mathbf{x}$   $\mathbf{y}$

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$$



## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Просветленный подход :)

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ A & \mathbf{x} & & \mathbf{y} \end{matrix}$$

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4$$

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Просветленный подход :)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$A$   $\mathbf{x}$   $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

## Произведение матрицы на вектор

Визуальное сравнение

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

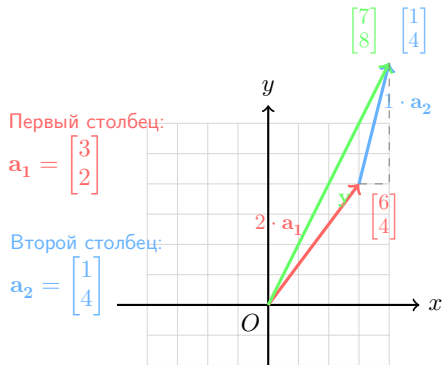
$A \qquad \mathbf{x} \qquad \mathbf{y}$

Строка на столбец

Вычисления:

- $y_1 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 7$
- $y_2 = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 8$

Комбинация столбцов



# Умножение матриц (matmul, GEneral Matrix Multiplication - GEMM)

Обычный подход

$i$ -я строка  $\rightarrow$

$j$ -й столбец

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

$A$   $B$   $C$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}$$

# Умножение матриц (matmul, GEneral Matrix Multiplication - GEMM)

Столбцовый подход

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdots & c_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

$A$   $B$   $=$   $C$

Каждый столбец  $C = A \times$  соответствующий столбец  $B$

$$C_j = AB_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

# Умножение матриц (matmul, GEneral Matrix Multiplication - GEMM)

Свойства матричного умножения

1. **Ассоциативность:**

$$(AB)C = A(BC)$$

# Умножение матриц (matmul, GEneral Matrix Multiplication - GEMM)

## Свойства матричного умножения

### 1. Ассоциативность:

$$(AB)C = A(BC)$$

### 2. Дистрибутивность:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

# Умножение матриц (matmul, GEneral Matrix Multiplication - GEMM)

## Свойства матричного умножения

### 1. Ассоциативность:

$$(AB)C = A(BC)$$

### 2. Дистрибутивность:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

### 3. Умножение на скаляр:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$



## Умножение матрицы на матрицу (matmul, GEMM)

Важные ограничения

### 4. Некоммутативность:

$$AB \neq BA \quad (\text{в общем случае})$$

**Пример:** Для матриц  $2 \times 2$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

## Умножение матрицы на матрицу (matmul, GEMM)

### Важные ограничения

#### 4. Некоммутативность:

$$AB \neq BA \quad (\text{в общем случае})$$

Пример: Для матриц  $2 \times 2$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

#### 5. Транспонирование произведения:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

**i** Уведомление

Обратите внимание на **обратный порядок** матриц при транспонировании!

# Умножение матриц (matmul, GEneral Matrix Multiplication - GEMM)

Вычислительная сложность и параллелизация

Вспомним общую формулу:


$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

**Анализ операций для матриц  $A_{n \times k}$  и  $B_{k \times m}$ :**

- Для вычисления одного элемента  $c_{ij}$ :  $k$  умножений,  $k - 1$  сложений
- Общее количество операций:  $n \times m \times (2k - 1)$

**Временная сложность:**

- Для квадратных матриц  $n \times n$ :  $\mathcal{O}(2n^3 - n^2) = \mathcal{O}(n^3)$
- Для прямоугольных матриц:  $\mathcal{O}(nmk)$

-  Естественный параллелизм
- **По элементам:** каждый  $c_{ij}$  вычисляется независимо

# Умножение матриц (matmul, GEneral Matrix Multiplication - GEMM)

Вычислительная сложность и параллелизация

Вспомним общую формулу:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

**Анализ операций для матриц  $A_{n \times k}$  и  $B_{k \times m}$ :**

- Для вычисления одного элемента  $c_{ij}$ :  $k$  умножений,  $k - 1$  сложений
- Общее количество операций:  $n \times m \times (2k - 1)$

**Временная сложность:**

- Для квадратных матриц  $n \times n$ :  $\mathcal{O}(2n^3 - n^2) = \mathcal{O}(n^3)$
- Для прямоугольных матриц:  $\mathcal{O}(nmk)$



Естественный параллелизм

- **По элементам:** каждый  $c_{ij}$  вычисляется независимо
- **По строкам:** каждый процессор обрабатывает свои строки матрицы  $A$

# Умножение матриц (matmul, GEneral Matrix Multiplication - GEMM)

Вычислительная сложность и параллелизация

Вспомним общую формулу:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

**Анализ операций для матриц  $A_{n \times k}$  и  $B_{k \times m}$ :**

- Для вычисления одного элемента  $c_{ij}$ :  $k$  умножений,  $k - 1$  сложений
- Общее количество операций:  $n \times m \times (2k - 1)$

**Временная сложность:**

- Для квадратных матриц  $n \times n$ :  $\mathcal{O}(2n^3 - n^2) = \mathcal{O}(n^3)$
- Для прямоугольных матриц:  $\mathcal{O}(nmk)$



Естественный параллелизм

- **По элементам:** каждый  $c_{ij}$  вычисляется независимо
- **По строкам:** каждый процессор обрабатывает свои строки матрицы  $A$
- **По столбцам:** каждый процессор обрабатывает свои столбцы матрицы  $B$

# Умножение матриц (matmul, GEneral Matrix Multiplication - GEMM)

Вычислительная сложность и параллелизация

Вспомним общую формулу:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

**Анализ операций для матриц  $A_{n \times k}$  и  $B_{k \times m}$ :**

- Для вычисления одного элемента  $c_{ij}$ :  $k$  умножений,  $k - 1$  сложений
- Общее количество операций:  $n \times m \times (2k - 1)$

**Временная сложность:**

- Для квадратных матриц  $n \times n$ :  $\mathcal{O}(2n^3 - n^2) = \mathcal{O}(n^3)$
- Для прямоугольных матриц:  $\mathcal{O}(nmk)$



Естественный параллелизм

- **По элементам:** каждый  $c_{ij}$  вычисляется независимо
- **По строкам:** каждый процессор обрабатывает свои строки матрицы  $A$
- **По столбцам:** каждый процессор обрабатывает свои столбцы матрицы  $B$
- **Блочный подход:** разделение матриц на блоки для эффективного использования кэша

## Пример. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - случайные квадратные плотные (полностью заполненные числами) матрицы, и  $x \in \mathbb{R}^3$  - вектор. Вам нужно вычислить  $b$ .

Какой способ лучше всего использовать?

1.  $A_1 A_2 A_3 x$  (слева направо)
2.  $(A_1 (A_2 (A_3 x)))$  (справа налево)
3. Не имеет значения
4. Результаты первых двух вариантов не будут одинаковыми.

Посмотрите прикрепленный `.ipynb` файл в репозитории.