# Линейная алгебра

## Векторное пространство. Линейная комбинация и оболочка. Зависимость и независимость векторов.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

# Векторное пространство (Vector space)

## Основной предмет изучения линейной алгебры

- Рассмотрим некоторое множество элементов $V$. Помимо того, что в нем просто живут абстрактные элементы, зададим там бинарные операции.
- Сложение. Любым двум элементам из множества $V$ ставится в соответствие третий:

$$\forall x,\, y \in \mathbb{V}: \quad x \oplus y = w,\, w \in \mathbb{V}.$$

- Умножение на скаляр. Любой паре элементов из $\mathbb{V}$ и $\mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент из $V$:

$$\forall x \in \mathbb{V},\, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \otimes x = w,\, w \in \mathbb{V}.$$

# Векторное пространство

## Примеры векторных пространств

Coordinate space. Множество последовательностей длины $n$, частным случаем которых являются геометрические векторы.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

# Векторное пространство

## Примеры векторных пространств

- Множество матриц $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

# Векторное пространство

## Примеры векторных пространств

- Множество матриц $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Множество полиномов (Что? Да!) фиксированной максимальной степени.

$$f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1,\ g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$f(x) + g(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} :\ \alpha f(x) = (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1)$$

# Линейная комбинация

- С помощью определенных выше операций мы можем комбинировать элементы векторного пространства.
- Предположим, мы вытащили набор векторов $v_1, \ldots, v_m$ из $\mathbb{V}$, и набор скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$.
- Линейная комбинация группы векторов - новый вектор, построенный в виде:

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m, \; x \in \mathbb{V}.$$

- Из-за замкнутости $\mathbb{V}$ относительно двух введенных операций получившийся элемент $x$ тоже содержится в векторном пространстве $\mathbb{V}$.

# Примеры линейных комбинаций

Пример: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Линейная комбинация:**

$$2A + 3B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример: $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x, 2]$

$$p_1(x) = 1.5x^2 - x, \quad p_2(x) = x + 1, \quad p_3(x) = 2$$

**Линейная комбинация:**

$$2p_1 + (-2)p_2 + 5p_3 =$$
$$2(1.5x^2 - x) - 2(x+1) + 5(2) =$$
$$3x^2 - 4x + 8$$

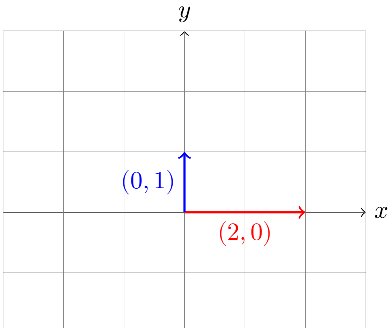
# Линейная оболочка

Множество всех-всех возможных линейных комбинаций, полученных из зафиксированного набора векторов $v_1, \dots, v_m$, назовем линейной оболочкой этого набора и обозначим:

$$\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m : a_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

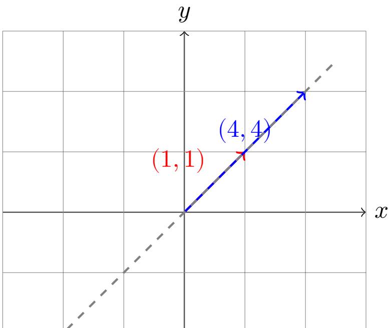
$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{span}(a, b) = \{\alpha_1 a + \alpha_2 b : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$




$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{span}(c, d) = \{\alpha_1 c + \alpha_2 d : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \text{линия}$$



# Зависимость и независимость векторов

## Мотивация

- Рассмотрим набор векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$, заранее извлеченных из $\mathbb{V}$, и произвольный набор скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$. В результате построения линейной комбинации получим некий элемент $x \in \mathbb{V}$:

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$$

# Зависимость и независимость векторов

## Мотивация

- Рассмотрим набор векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$, заранее извлеченных из $\mathbb{V}$, и произвольный набор скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$. В результате построения линейной комбинации получим некий элемент $x \in \mathbb{V}$:

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$$

- Уникален ли такой набор $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ или, может, существует другой набор $\{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n\}$ такой, что:

$$x = \tilde{\alpha}_1 v_1 + \ldots + \tilde{\alpha}_m v_m.$$

# Зависимость и независимость векторов

## Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$
\begin{aligned}
(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + ... + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m \\
= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + ... + \gamma_m v_m
\end{aligned}
$$

# Зависимость и независимость векторов

## Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \ldots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m$$
$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления $x$ теперь изменилась к задаче “как получить элемент 0” в результате линейной комбинации.

# Зависимость и независимость векторов

## Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \ldots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m$$
$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления $x$ теперь изменилась к задаче "как получить элемент 0" в результате линейной комбинации.
- Если единственный возможный вариант получить $\mathbf{0}$ это положить все $\gamma_i = 0$:

$$\forall i : (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \rightarrow \alpha_i = \tilde{\alpha}_i.$$

Что будет означать, что представление $x$ уникально.

# Зависимость и независимость векторов

## Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \ldots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m$$
$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления $x$ теперь изменилась к задаче "как получить элемент 0" в результате линейной комбинации.
- Если единственный возможный вариант получить $\mathbf{0}$ это положить все $\gamma_i = 0$:

$$\forall i : (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \rightarrow \alpha_i = \tilde{\alpha}_i.$$

  Что будет означать, что представление $x$ уникально.
- Если есть какой-то другой способ получить $\mathbf{0}$, т.е. хотя бы один $\gamma_k \neq 0$, значит $(\alpha_k - \tilde{\alpha}_k) \neq 0 \rightarrow \alpha_k \neq \tilde{\alpha}_k$. Что означает, что представление $x$ не уникально - существует другой набор коэффициентов.

# Линейная независимость

Определение

Мы назовем набор векторов линейно независимым, если единственная возможность получить элемент $\mathbf{0}$ как результат линейной комбинации:

$$\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_m v_m = \mathbf{0},$$

это положить все скаляры равными $0$, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0$. (Также называется тривиальной комбинацией).

# Линейная зависимость

## Определение

С другой стороны, мы назовем набор векторов линейно зависимым, если **существует** нетривиальная комбинация коэффициентов $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, (не равные $0$ одновременно), такая что:

$$\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_m v_m = \mathbf{0}.$$