Линейная алгебра

Построение матрицы линейного отображения. Изменение матрицы при изменении базисов.

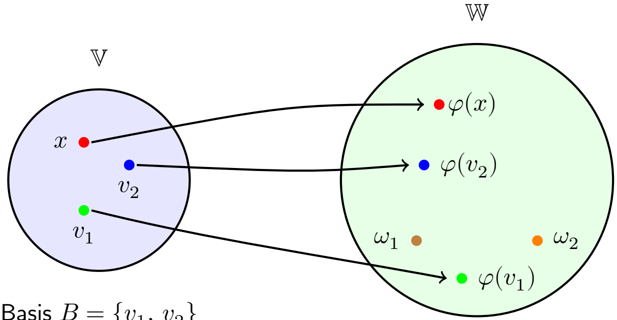
Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Линейные отображения и векторные пространства

Действующие лица

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



Basis $B = \{v_1, v_2\}$

Basis $C = \{\omega_1, \omega_2\}$

Напоминание: построение матрицы линейного отображения

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \boxed{\varphi(v_1)} + x_2 \boxed{\varphi(v_2)}$

Напоминание: построение матрицы линейного отображения

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \boxed{\varphi(v_1)} + x_2 \boxed{\varphi(v_2)}$
- Образы базисных векторов возможно разложить по базису в пространстве $\mathbb{W}$:

$$\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2,\ [\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2,\ [\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Напоминание: построение матрицы линейного отображения

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов: $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \boxed{\varphi(v_1)} + x_2 \boxed{\varphi(v_2)}$
- Образы базисных векторов возможно разложить по базису в пространстве $\mathbb{W}$:

$$\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2,\ [\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2,\ [\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

- В результате получаем разложение $\varphi(x)$ по базису в пространстве $\mathbb{W}$: $\varphi(x) = \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2$, где:

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{L_{\varphi,(B,C)}\,[x]_B}$$

Устройство матрицы линейного отображения

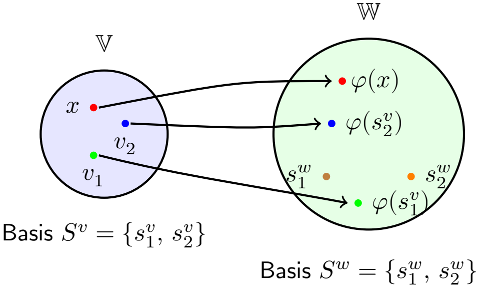
- Если обобщать наш игрушечный пример, то

$$L_{\varphi,\,(B,C)} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [\varphi(v_1)]_C & [\varphi(v_2)]_C & \cdots & [\varphi(v_n)]_C \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},\ L_{\varphi,\,(B,C)} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

  где $[\varphi(v_i)]_C$ — это координаты образа базисного вектора v_i в базисе C.
- Базис $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ действует в области определения (пространстве аргументов) функции $\mathbb{V}$, базис $C = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ действует в пространстве значений функции $\mathbb{W}$.

Случай стандартных базисов

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



- В случае стандартных базисов получаем

$$L_\varphi = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [\varphi(s_1^v)] & [\varphi(s_2^v)] & \cdots & [\varphi(s_n^v)] \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},$$

где $[\varphi(s_i^v)]$ — это координаты образа базисного вектора s_i^v в стандартном базисе S^w в пространстве $\mathbb{W}$.

Чувствительность матрицы к выбору пары базисов

Пример

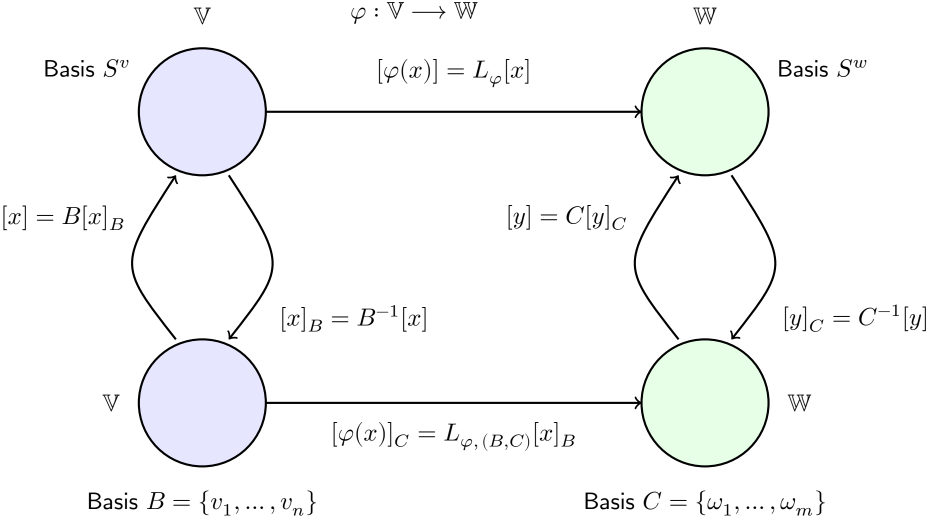
- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.

Чувствительность матрицы к выбору пары базисов

Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.
- Пример: $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств



Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B \to S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [y] = P_{C \to S^w}[y]_C = C[y]_C$$

Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B \to S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [y] = P_{C \to S^w}[y]_C = C[y]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу $[\varphi(x)] = L_\varphi[x]$:

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B \to S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [y] = P_{C \to S^w}[y]_C = C[y]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу $[\varphi(x)] = L_\varphi [x]$:

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

- Используем трюк с обратной матрицей:

$$[\varphi(x)]_C = C^{-1} L_\varphi B[x]_B = L_{\varphi, (B,C)}[x]_B$$

Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов B и C в стандартные:

$$[x] = P_{B\to S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [y] = P_{C\to S^w}[y]_C = C[y]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу $[\varphi(x)] = L_\varphi[x]$:

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

- Используем трюк с обратной матрицей:

$$[\varphi(x)]_C = C^{-1}L_\varphi B[x]_B = L_{\varphi,\,(B,C)}[x]_B$$

- Финально, формула для изменения матрицы линейного отображения при одновременном изменении пары базисов из стандартного:

$$\boxed{L_{\varphi,\,(B,C)} = C^{-1}L_\varphi B}$$

Примеры

Слайд для записей