Линейная алгебра

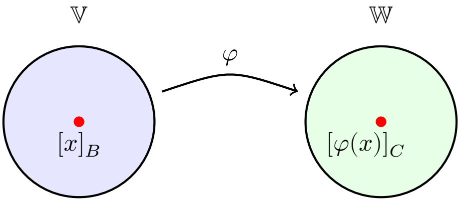
Линейные отображения и их матричное представление.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Линейные отображения

Введение и мотивация



Линейные отображения

Определение

Пусть V, W — векторные пространства. Отображение $\varphi : V \to W$ называется *линейным*, если

1. $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
2. $\varphi(\alpha \mathbf{v}) = \alpha \varphi(\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v} \in V$ и всех скаляров $\alpha \in \mathbb{R}$.

Свойства 1 и 2 вместе иногда объединяют в одно:

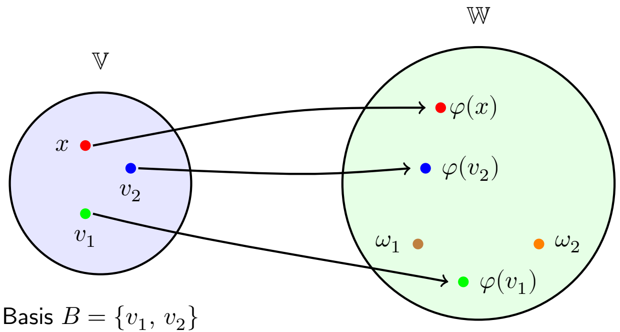
$$\varphi(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha \varphi(\mathbf{u}) + \beta \varphi(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Аналитическое представление отображения

Матричное представление линейного отображения

Основные действующие лица

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



Basis $B = \{v_1, v_2\}$

Basis $C = \{\omega_1, \omega_2\}$

Матричное представление линейного отображения

- На этом этапе мы подключаем аппарат линейной алгебры и предпологаем, что в пространствах $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$. Предположим, что $\varphi : V \to W$, набор векторов $B = \{v_1, v_2\}$ образует базис в $\mathbb{V}$, а набор векторов $C = \{\omega_1, \omega_2\}$ образует базис в $\mathbb{W}$.

Мы хотим исследовать, как φ действует на произвольный $x \in \mathbb{V}$. По свойствам базиса можем представить x как:

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2, \quad [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

И используем это разложение вместе со свойствами линейного преобразования:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2).$$

Матричное представление линейного отображения

- На этом этапе мы подключаем аппарат линейной алгебры и предпологаем, что в пространствах $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$. Предположим, что $\varphi : V \to W$, набор векторов $B = \{v_1, v_2\}$ образует базис в $\mathbb{V}$, а набор векторов $C = \{\omega_1, \omega_2\}$ образует базис в $\mathbb{W}$.

Мы хотим исследовать, как φ действует на произвольный $x \in \mathbb{V}$. По свойствам базиса можем представить x как:

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2, \quad [x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

И используем это разложение вместе со свойствами линейного преобразования:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2).$$

- Вывод: чтобы узнать результат действия функции $\varphi(x)$ достаточно только знать, как функция действует на базисные векторы пространства $\mathbb{V}$ в нашем примере это $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$. Помните, что $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ — это тоже *векторы*, *т.е.* абстрактные элементы, жители векторного пространства W.

Матричное представление линейного отображения

Давайте посмотрим на элементы $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ в базисе C:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1) &= a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2,\\ \varphi(v_2) &= a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2\end{aligned}$$

Теперь вернемся к $\varphi(x) = x_1\varphi(v_1) + x_2\varphi(v_2)$.

$$\begin{aligned}\varphi(x) = x_1\left(a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2\right) + x_2\left(a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2\right) &=\\ \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2\right)\omega_1 + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2\right)\omega_2 &=\\ \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 &\end{aligned}$$

- Мы получили разложение элемента $\varphi(x)$ по базису пространства $\mathbb{W}$. Можем записать координаты как:

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на вектор... снова...

Наконец:

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_\varphi [x]_B .$$

Wow!

Матрица линейного преобразования

Для любого линейного преобразования существует его матрица, которая через mat-vec связывает координаты аргумента функции с координатами значения функции в выбранных заранее базисах.
Если у нас есть два базиса $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $C = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, то матрица линейного преобразования $L_{\varphi,(B,C)}$ строится как:

$$L_{\varphi,(B,C)} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [\varphi(v_1)]_C & [\varphi(v_2)]_C & \cdots & [\varphi(v_n)]_C \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},$$

где $[\varphi(v_i)]_C$ — это координаты образа базисного вектора v_i в базисе C.

Матричное представление линейного отображения

Общий многомерный случай

Предположим, что существует линейное преобразование $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, набор векторов $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ образует базис в $\mathbb{V}$, а набор векторов $C = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ образует базис в $\mathbb{W}$.
Мы хотим исследовать, как φ действует на произвольный $x \in \mathbb{V}$.

$$x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n,$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 \varphi(v_1) + \dots + x_n \varphi(v_n).$$

Помните, что $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ — это *векторы*, *т.е.* абстрактные элементы векторного пространства $\mathbb{W}$.

Матричное представление линейного отображения

Общий многомерный случай

Давайте посмотрим на $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ в базисе C:

$$\begin{gathered}
\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2 + \dots + a_{m1}\omega_m, \\
\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2 + \dots + a_{m2}\omega_m, \\
\vdots \\
\varphi(v_n) = a_{1n}\omega_1 + a_{2n}\omega_2 + \dots + a_{mn}\omega_m
\end{gathered}$$

Теперь вернемся к $\varphi(x) = x_1\varphi(v_1) + \dots + x_n\varphi(v_n)$.

$$\begin{gathered}
\varphi(x) = x_1\left(a_{11}\omega_1 + \dots + a_{m1}\omega_m\right) + x_2\left(a_{12}\omega_1 + \dots + a_{m2}\omega_m\right) \\
+ x_n\left(a_{1n}\omega_1 + \dots + a_{mn}\omega_m\right)
\end{gathered}$$

Матричное представление линейного отображения

Общий многомерный случай

$$\begin{aligned}\varphi(x) = x_1\left(a_{11}\omega_1 + \ldots + a_{m1}\omega_m\right) + x_2\left(a_{12}\omega_1 + \ldots + a_{m2}\omega_m\right)\\ +x_n\left(a_{1n}\omega_1 + \ldots + a_{mn}\omega_m\right)\\ = \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)\omega_1 + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\right)\omega_2\\ + \left(a_{m1}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\right)\omega_m\end{aligned}$$

Умножение матрицы на вектор... снова...

Наконец:

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_\varphi \, [x]_B \, .$$

Wow!

Для построения матрицы A_φ линейного отображения φ нам нужно знать только координаты образов базисных векторов: $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$, *т.е.*

$$v_1 \xrightarrow{\varphi} a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 \xrightarrow{\varphi} a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, v_n \xrightarrow{\varphi} a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$