

# Линейная алгебра

## Базис векторного пространства.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

# Базис

## Определение

- Набор векторов  $v_1, \dots, v_n$  из  $\mathbb{V}$  называется *базисом* пространства  $\mathbb{V}$  тогда и только тогда, когда *любой* вектор  $x \in \mathbb{V}$  может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

# Базис

## Определение

- Набор векторов  $v_1, \dots, v_n$  из  $\mathbb{V}$  называется *базисом* пространства  $\mathbb{V}$  тогда и только тогда, когда *любой* вектор  $x \in \mathbb{V}$  может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  мы называем *координатами* вектора  $x$  в базисе  $(v_1, \dots, v_n)$ .

# Базис

## Определение

- Набор векторов  $v_1, \dots, v_n$  из  $\mathbb{V}$  называется *базисом* пространства  $\mathbb{V}$  тогда и только тогда, когда *любой* вектор  $x \in \mathbb{V}$  может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  мы называем *координатами* вектора  $x$  в базисе  $(v_1, \dots, v_n)$ .
- Немного иначе: набор векторов  $v_1, \dots, v_n$  из  $\mathbb{V}$  называется *базисом* пространства  $\mathbb{V}$  тогда и только тогда, когда этот набор векторов линейно независим и  $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{V}$ , то есть мы можем ‘дотянуться’ до любого элемента из  $\mathbb{V}$ .

## Базис. Примеры

### Пример в координатном векторном пространстве

- Координатное пространство  $\mathbb{R}^2$ . Возьмем вектор, например,  $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [x]_S = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad S = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + -0.5 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [x]_B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \quad B = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = -0.25 \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} + -5.5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [x]_C = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -5.5 \end{pmatrix}, \quad C = \left( \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

## Базис. Примеры

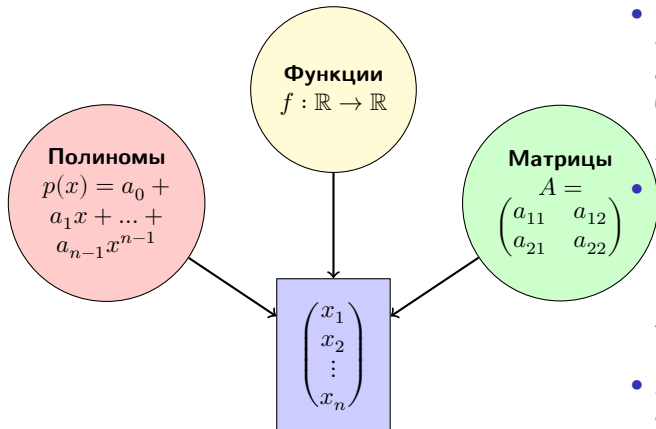
### Пример в векторном пространстве полиномов

- Векторное пространство  $\mathbb{R}[x, 2]$ . Возьмем вектор, например,  $f(x) = 2x^2 - 7x + 4$  и посмотрим его представление в разных базисах:

$$f(x) = 2 \cdot x^2 + -7 \cdot x + 4 \cdot 1, \quad [x]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad S = (x^2, x, 1)$$

$$f(x) = 0.5 \cdot (4x^2 - 2x) + -2 \cdot (3x) + 0.5 \cdot 8, \quad [x]_B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad B = (4x^2 - 2x, 3x, 8)$$

## Важный промежуточный вывод



- Если векторное пространство  $\mathbb{V}$  имеет базис  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , то любой вектор  $\mathbf{v}$  однозначно определяется своими координатами  $\alpha_k$  в этом базисе. Если мы упакуем  $\alpha_k$  в вектор из  $\mathbb{R}^n$ , то можем оперировать им вместо оперирования над  $\mathbf{v}$ .

- Если  $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k$  и  $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k$ , то

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) \mathbf{v}_k$$

т.е. вместо сложения двух оригинальных векторов, можно сложить векторы координат.

- Аналогично, чтобы получить  $\alpha \mathbf{v}$ , можно умножить столбец координат  $\mathbf{v}$  на  $\alpha$  и сразу получить координаты вектора  $\alpha \mathbf{v}$ .

**Линейная алгебра: единый язык для разных объектов**