Теория вероятностей и математическая статистика

Вероятностное пространство. Классическая, комбинаторная вероятность.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

Андрей Колмогоров меняет всё

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов

- Множество, которое содержит все возможные *уникальные* результаты случайного эксперимента:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_n, ...\}$$

- Может быть конечным или бесконечным
- Критически зависит от установки случайного эксперимента и того, что мы хотим наблюдать и описывать

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов: примеры

- Подбрасываются две визуально различимые монеты: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов: примеры

- Подбрасываются две визуально различимые монеты: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Подбрасываются две идентичные монеты: $\Omega = \{2H, 2T, Diff\}$

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов: примеры

- Подбрасываются две визуально различимые монеты: $\Omega = \{Hh,\, Tt,\, Ht,\, Th\}$
- Подбрасываются две идентичные монеты: $\Omega = \{2H,\, 2T,\, Diff\}$
- Идентичные монеты с внедренным различием: $\Omega = \{Hh,\, Tt,\, Ht,\, Th\}$

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов: примеры

- Подбрасываются две визуально различимые монеты: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Подбрасываются две идентичные монеты: $\Omega = \{2H, 2T, Diff\}$
- Идентичные монеты с внедренным различием: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Кубик со сторонами-буквами: $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

Описание случайного эксперимента

Событие

- Зачастую нас интересует не конкретный элементарный исход, а набор из нескольких, e.g. “Если выпадет 2, 3, 6”, то мы получим выигрыш

Описание случайного эксперимента

Событие

- Зачастую нас интересует не конкретный элементарный исход, а набор из нескольких, e.g. “Если выпадет 2, 3, 6”, то мы получим выигрыш
- Множество, построенное из одного или нескольких элементарных исходом называют *событием*

Описание случайного эксперимента

Событие

- Зачастую нас интересует не конкретный элементарный исход, а набор из нескольких, e.g. “Если выпадет 2, 3, 6”, то мы получим выигрыш
- Множество, построенное из одного или нескольких элементарных исходом называют *событием*
- Важное отличие от элементарного исхода: исход случается *один и только один*, событий может случиться одновременно много!

Описание случайного эксперимента

Событие

- Зачастую нас интересует не конкретный элементарный исход, а набор из нескольких, e.g. “Если выпадет 2, 3, 6”, то мы получим выигрыш
- Множество, построенное из одного или нескольких элементарных исходом называют *событием*
- Важное отличие от элементарного исхода: исход случается *один и только один*, событий может случиться одновременно много!
-

> **Важно!**
>
> Мы говорим, что *событие произошло*, если реализовался какой-то из элементарных исходов этого события.

Описание случайного эксперимента

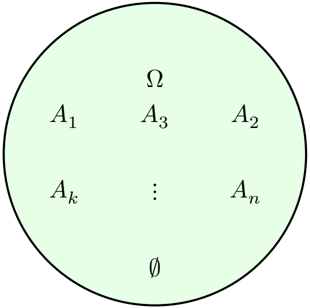
Пространство событий

- Множество, которое содержит все возможные *события*, которые можно построить из множества исходов Ω
- Иными словами, множество всех возможных подмножеств Ω:

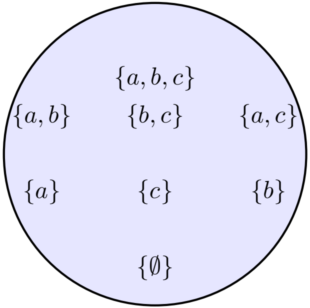
$$\mathcal{F} = \{A_1,\ A_2,\ A_n,\ \ldots\},\ \forall A_i \subset \Omega$$

- Само пространство элементарных исходов тоже событие: $\Omega \subset \Omega$, поэтому $\Omega \in \mathcal{F}$

($\mathcal{F}$, в общем виде)



(Пример $\mathcal{F}$: все подмножества $\{a, b, c\}$)



Описание случайного эксперимента

Пространство событий

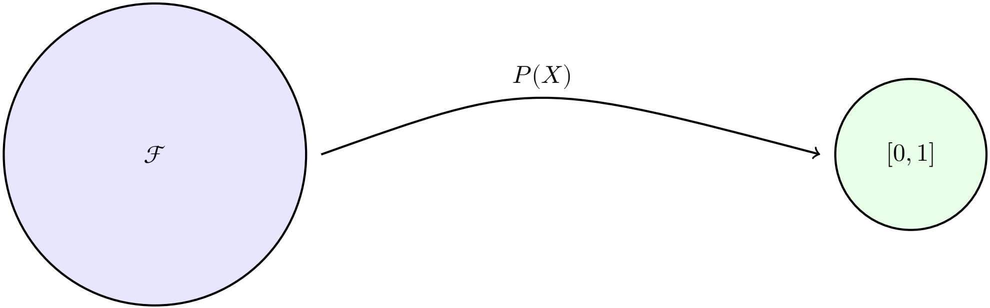
Question

Если мощность пространства элементарных исходов $|\Omega| = n$, какая будет мощность пространста событий $|\mathcal{F}|$?

Описание случайного эксперимента

Вероятность

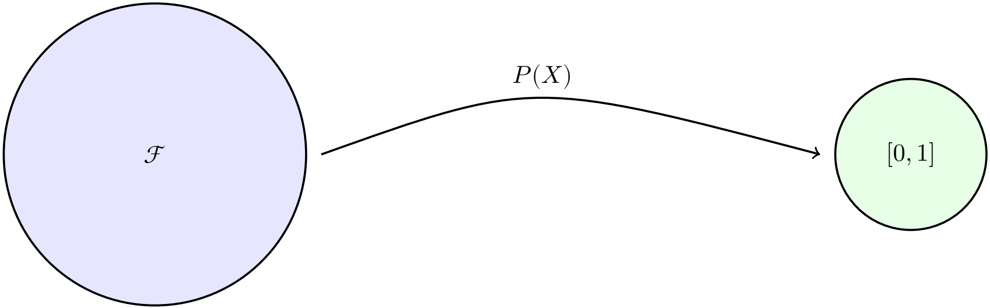
- В конечном счете мы хотим наклеить на каждое событие “бирку” с информацией о том, насколько мы уверены в том, что событие случится



Описание случайного эксперимента

Вероятность

- В конечном счете мы хотим наклеить на каждое событие “бирку” с информацией о том, насколько мы уверены в том, что событие случится
- Этот коэффициент нашей уверенности решили измерять от 0 до 1, его-то и называем *вероятностью*

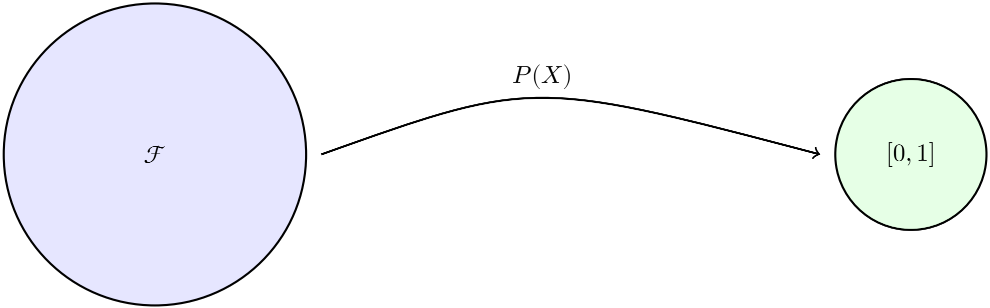


Описание случайного эксперимента

Вероятность

- В конечном счете мы хотим наклеить на каждое событие “бирку” с информацией о том, насколько мы уверены в том, что событие случится
- Этот коэффициент нашей уверенности решили измерять от 0 до 1, его-то и называем *вероятностью*
- Формально, вероятность представляет собой функцию, которая каждому событию ставит в соответствие число:

$$P(X) : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$$



Свойства вероятностной функции

- $0 \leq P(X) \leq 1, \ \forall X \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1, \ P(\emptyset) = 0$
- *Свойство аддитивности вероятности*:

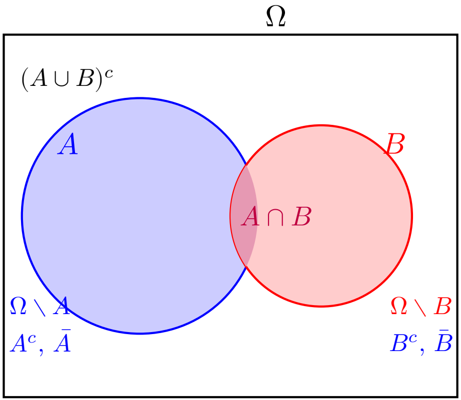
$$\forall X, Y \in \mathcal{F} : X \cap Y = \emptyset, P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$$

Более душно: Если коллекция событий A_1, A_2, ... - попарно не пересекаются, i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, то:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P\left(A_i\right)$$

Вероятность

Комплиментарные события и формула включений исключений

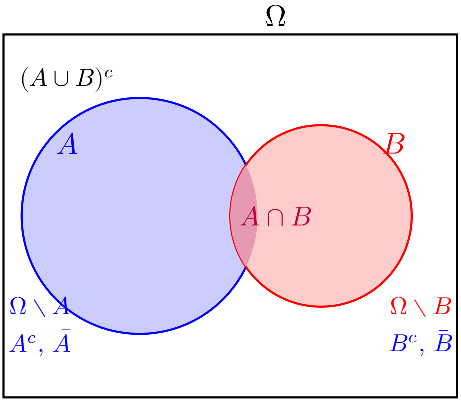


- **Свойство**: Если $A \in \mathcal{F}$, то $P(A) + P(\Omega \backslash A) = 1$.

События A и $\bar{A} = \Omega \backslash A$ такие, что $A \cap \bar{A} = \emptyset$, и $\Omega = A \cup \bar{A}$, откуда при помощи свойств вероятности получим:
$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\Omega \backslash A) = 1$

Вероятность

Комплиментарные события и формула включений исключений



- **Свойство**: Если $A \in \mathcal{F}$, то $P(A) + P(\Omega \backslash A) = 1$.

События A и $\bar{A} = \Omega \backslash A$ такие, что $A \cap \bar{A} = \emptyset$, и $\Omega = A \cup \bar{A}$, откуда при помощи свойств вероятности получим:
$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\Omega \backslash A) = 1$

- **Формула включений-исключений**: Если $A, B \in \mathcal{F}$, то

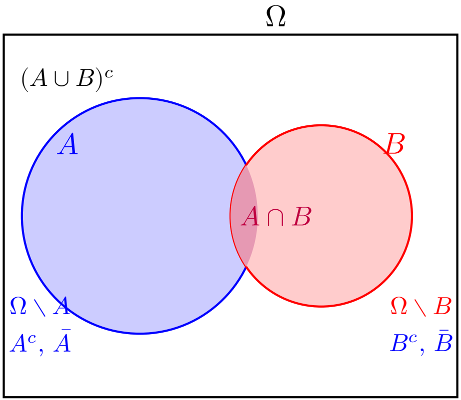
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Событие A - объединение непересекающихся $A \backslash B$ и $A \cap B$, следовательно $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$ и симметрично $P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$.

$$P(A) + P(B) = P(A \backslash B) + 2P(A \cap B) + P(B \backslash A)$$
$$= P((A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)) + P(A \cap B)$$
$$= P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

Вероятность

Комплиментарные события и формула включений исключений



- **Свойство**: Если $A \in \mathcal{F}$, то $P(A) + P(\Omega \backslash A) = 1$.

События A и $\bar{A} = \Omega \backslash A$ такие, что $A \cap \bar{A} = \emptyset$, и $\Omega = A \cup \bar{A}$, откуда при помощи свойств вероятности получим:
$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\Omega \backslash A) = 1$

- **Формула включений-исключений**: Если $A, B \in \mathcal{F}$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Событие A - объединение непересекающихся $A \backslash B$ и $A \cap B$, следовательно $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$ и симметрично $P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$.

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= P(A \backslash B) + 2P(A \cap B) + P(B \backslash A) \\ &= P((A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)) + P(A \cap B) \\ &= P(A \cup B) + P(A \cap B). \end{aligned}$$

- **Свойство**: Если $A, B \in \mathcal{F}$ and $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.
Показать просто: $P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geq P(A)$.

Классическая вероятность

- Самая первая модель вероятностного эксперимента, суть которой состоит в предположении о равной вероятности элементарных исходов случайного эксперимента. Под это подходят многие дискретные задачи, связанные со случайным выбором карт, шариков, людей, бросками кубиков и монеток, *etc*.

Классическая вероятность

- Самая первая модель вероятностного эксперимента, суть которой состоит в предположении о равной вероятности элементарных исходов случайного эксперимента. Под это подходят многие дискретные задачи, связанные со случайным выбором карт, шариков, людей, бросками кубиков и монеток, *etc*.
- Формализуем: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, $P(\{\omega_1\}) = \ldots = P(\{\omega_n\}) = p$.

Классическая вероятность

- Самая первая модель вероятностного эксперимента, суть которой состоит в предположении о равной вероятности элементарных исходов случайного эксперимента. Под это подходят многие дискретные задачи, связанные со случайным выбором карт, шариков, людей, бросками кубиков и монеток, *etc*.
- Формализуем: $\Omega = \{\omega_1, \ \dots, \ \omega_n\}$, $P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = p$.
- Применим свойства вероятности, чтобы получить интуитивно понятный результат о вероятности элементарного исхода:

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}$$

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = n \cdot p = 1 \to p = \frac{1}{n}$$

Классическая вероятность

Первая важная формула

- Без потери общности предположим, что некое событие A состоит из $k \leq n$ элементарных исходов, $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. Нас интересует $P(A)$.

Классическая вероятность

Первая важная формула

- Без потери общности предположим, что некое событие A состоит из $k \leq n$ элементарных исходов, $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$. Нас интересует $P(A)$.
- Получим формулу для вероятности A:

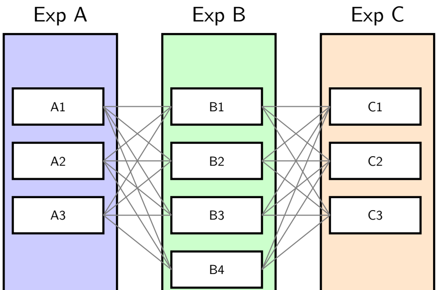
$$A = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} P(\{\omega_i\}) = k \cdot p = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Basic principle of counting

Definition

Если r экспериментов должны быть проведены таким образом, что первый может привести к любому из n_1 возможных исходов; и если для каждого из этих n_1 возможных исходов есть n_2 возможных исхода второго эксперимента; и если для каждого из возможных исходов первых двух экспериментов есть n_3 возможных исхода третьего эксперимента; и если ..., то всего существует $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ возможных исходов r экспериментов.



Комбинаторная вероятность

Перестановки

- **Мотивация**: Сколько разных упорядоченных последовательностей получается из множества $\{a, b, c\}$

Комбинаторная вероятность

Перестановки

- **Мотивация**: Сколько разных упорядоченных последовательностей получается из множества $\{a, b, c\}$
- $P_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-r+1)$

Комбинаторная вероятность

Перестановки: примеры

- Question

  Случайная выборка чисел. Пусть популяция состоит из десяти цифр 0, 1, ..., 9. Каждая последовательность из пяти цифр представляет выборку размера $r = 5$. Какова вероятность того, что пять последовательных случайных цифр все различны?

Перестановки: примеры

- **Question**

  Случайная выборка чисел. Пусть популяция состоит из десяти цифр 0, 1, ..., 9. Каждая последовательность из пяти цифр представляет выборку размера $r = 5$. Какова вероятность того, что пять последовательных случайных цифр все различны?

- $P = \frac{P_{10}^5}{10^5} = 0.3024.$

Комбинаторная вероятность

Комбинации

- **Мотивация**: Извлечь три элемента из множества $\{A, B, C, D, E\}$

Комбинаторная вероятность

Комбинации

- **Мотивация**: Извлечь три элемента из множества $\{A, B, C, D, E\}$
- В общем случае, поскольку $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ представляет количество различных способов, которыми группа из k элементов может быть выбрана из n элементов, когда порядок выбора важен, и поскольку каждая группа из k элементов будет подсчитана $k!$ раз в этом подсчете, следует, что количество различных групп из k элементов, которые могут быть образованы из множества n элементов, равно

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Комбинации

- **Мотивация**: Извлечь три элемента из множества $\{A, B, C, D, E\}$
- В общем случае, поскольку $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ представляет количество различных способов, которыми группа из k элементов может быть выбрана из n элементов, когда порядок выбора важен, и поскольку каждая группа из k элементов будет подсчитана $k!$ раз в этом подсчете, следует, что количество различных групп из k элементов, которые могут быть образованы из множества n элементов, равно

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

-

Definition

Мы определяем C_n^k, для $k \leq n$, как

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

и говорим, что C_n^k представляет количество возможных комбинаций (коллекций) размера k, полученных из n объектов. Порядок слкдования элементов в данном случае не считается важным.

Комбинации: пример

Часто задачи подходят под модель извлечения шариков из мешка.

Пример: Мешок содержит 15 шариков, из которых 10 красных и 5 белых. Из мешка выбирают 4 шарика.

Здесь есть неоднозначность: например, если при одном извлечении я выбираю четыре красных шарика, а при другом извлечении четыре других красных шарика, считаются ли эти выборки одинаковыми или нет?

Мы будем предполагать, что это не одинаковые выборки. Например, мы можем представить, что шарики пронумерованы, так что мы можем различать шарики одного цвета. Такой способ мышления очень полезен для вычисления вероятностей в классической схеме.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- > **Question**
  >
  > Сколько различных выборок (размера 4) возможно?

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

> **Question**
>
> Сколько различных выборок (размера 4) возможно?

- Порядок не важен, но номера важны, поэтому мы выбираем 4 элемента из множества $10 + 5$ элементов. Следовательно, ответ: $C_{15}^{4} = 1365$.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- **Question**

  Сколько различных выборок (размера 4) возможно?
- Порядок не важен, но номера важны, поэтому мы выбираем 4 элемента из множества 10 + 5 элементов. Следовательно, ответ: $C_{15}^{4} = 1365$.
- **Question**

  Сколько выборок (размера 4) состоят полностью из красных шариков?

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- > **Question**
  >
  > Сколько различных выборок (размера 4) возможно?
- Порядок не важен, но номера важны, поэтому мы выбираем 4 элемента из множества $10 + 5$ элементов. Следовательно, ответ: $C_{15}^{4} = 1365$.
- > **Question**
  >
  > Сколько выборок (размера 4) состоят полностью из красных шариков?
- Порядок не важен, но номера важны, мы выбираем 4 элемента из множества красных шариков. Следовательно, ответ: $C_{10}^{4} = 210$.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- **Question**

  Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- **Question**

  Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?

- Мы можем выбрать 2 пронумерованных красных шарика C_{10}^2 способами и 2 пронумерованных белых шарика C_5^2 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- **Question**

  Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?
- Мы можем выбрать 2 пронумерованных красных шарика C_{10}^2 способами и 2 пронумерованных белых шарика C_5^2 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$.
- **Question**

  Сколько выборок (размера 4) содержат ровно 3 красных шарика?

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- **Question**

  Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?
- Мы можем выбрать 2 пронумерованных красных шарика C_{10}^2 способами и 2 пронумерованных белых шарика C_5^2 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$.
- **Question**

  Сколько выборок (размера 4) содержат ровно 3 красных шарика?
- Мы можем выбрать 3 пронумерованных красных шарика C_{10}^3 способами и 1 пронумерованный белый шарик C_5^1 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^3 \cdot C_5^1 = 120 \cdot 5 = 600$.

Комбинации: пример

- **Question**

  Сколько выборок (размера 4) содержат не менее 3 красных шариков?

Комбинации: пример

- > **Question**
  >
  > Сколько выборок (размера 4) содержат не менее 3 красных шариков?

- Это количество выборок с 3 красными плюс количество выборок с 4 красными. Мы можем выбрать 4 пронумерованных красных шарика C_{10}^{4} способами и 0 пронумерованных белых шариков C_{5}^{0} способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^{4} \cdot C_{5}^{0} = 210 \cdot 1 = 210$. Из предыдущего примера, есть 600 способов выбрать выборки с ровно 3 красными шариками, поэтому наш ответ: $600 + 210 = 810$.

Комбинаторная вероятность

Смешанные задачи подсчета

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков

Это также общее количество выборок (1365) минус количество выборок без красных шариков, которое равно $C_{10}^0 \cdot C_5^4 = 5$.

Комбинаторная вероятность

Смешанные задачи подсчета

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
- **Question**

  Сколько выборок (размера 4) содержат хотя бы один красный шарик?

Это также общее количество выборок (1365) минус количество выборок без красных шариков, которое равно $C_{10}^{0} \cdot C_{5}^{4} = 5$.

Комбинаторная вероятность

Смешанные задачи подсчета

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

> **Question**
>
> Сколько выборок (размера 4) содержат хотя бы один красный шарик?

- Это $C_{10}^{1} \cdot C_{5}^{3} + C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{2} + C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{1} + C_{10}^{4} \cdot C_{5}^{0}$, что равно $10 \cdot 10 + 45 \cdot 10 + 120 \cdot 5 + 210 \cdot 1 = 100 + 450 + 600 + 210 = 1360.$

Это также общее количество выборок (1365) минус количество выборок без красных шариков, которое равно $C_{10}^{0} \cdot C_{5}^{4} = 5.$

Геометрическая вероятность

Определение

Геометрическая вероятность применяется к экспериментам, где пространство элементарных исходов Ω является подмножеством евклидова пространства (отрезок, площадь, объем).

Основные формулы

Для одномерного случая (отрезок):

$$P(A) = \frac{\text{длина множества } A}{\text{длина множества } \Omega}$$

Для двумерного случая (площадь):

$$P(A) = \frac{\text{площадь множества } A}{\text{площадь множества } \Omega}$$

Для трехмерного случая (объем):

$$P(A) = \frac{\text{объем множества } A}{\text{объем множества } \Omega}$$

Геометрическая вероятность

Классические задачи геометрической вероятности

1. **Задача о встрече**: Два человека договариваются встретиться в определенном месте между 12:00 и 13:00. Каждый приходит в случайный момент времени и ждет 15 минут. Какова вероятность встречи?

Геометрическая вероятность

Классические задачи геометрической вероятности

1. **Задача о встрече**: Два человека договариваются встретиться в определенном месте между 12:00 и 13:00. Каждый приходит в случайный момент времени и ждет 15 минут. Какова вероятность встречи?
2. **Задача Бюффона**: Игла длины l бросается на плоскость, разлинованную параллельными прямыми на расстоянии d друг от друга. Какова вероятность пересечения иглы с линией?

Геометрическая вероятность

Классические задачи геометрической вероятности

1. **Задача о встрече**: Два человека договариваются встретиться в определенном месте между 12:00 и 13:00. Каждый приходит в случайный момент времени и ждет 15 минут. Какова вероятность встречи?
2. **Задача Бюффона**: Игла длины l бросается на плоскость, разлинованную параллельными прямыми на расстоянии d друг от друга. Какова вероятность пересечения иглы с линией?
3. **Задача о случайной точке в круге**: Точка выбирается случайно внутри круга радиуса R. Какова вероятность того, что расстояние от точки до центра меньше r?