Линейная алгебра

Замена базиса как линейное отображение. Построение матрицы линейного отображения.

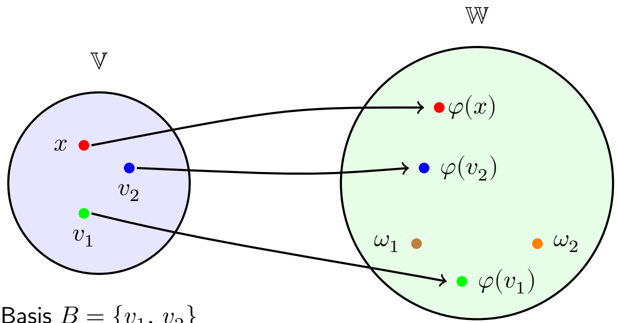
Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Линейные отображения и векторные пространства

Минимальная визуализация

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



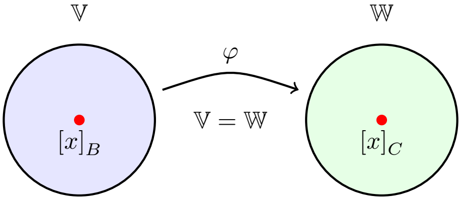
Basis $B = \{v_1, v_2\}$

Basis $C = \{\omega_1, \omega_2\}$

Замена базиса сквозь призму линейного отображения

Давайте рассмотрим самое глупенькое отображение, которое не делает ничего, кроме как находит копию элемента (identity transformation, тождественное преобразование):

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W},\ \mathbb{W} = \mathbb{V},$$
$$\text{such that } \forall x \in \mathbb{V}\ \varphi(x) = x \in \mathbb{W}$$



Пусть в пространстве $\mathbb{V}$ у нас действует базис $B = \{v_1, v_2\}$, а в пространстве $\mathbb{W}$ действует базис $C = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Замена базиса сквозь призму линейного отображения

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2,$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2).$$

Помните, что $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ — это векторы, т.е. абстрактные элементы векторного пространства W.

Замена базиса сквозь призму линейного отображения

Давайте посмотрим на элементы $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ в базисе C:

$$\varphi(v_1) = v_1 = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2, \ [v_1]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = v_2 = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2, \ [v_2]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Теперь вернемся к $\varphi(x) = x_1\varphi(v_1) + x_2\varphi(v_2) \iff x = x_1v_1 + x_2v_2$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) = x = x_1\left(a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2\right) + x_2\left(a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2\right) = \\ \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2\right)\omega_1 + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2\right)\omega_2 = \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 \end{aligned}$$

- Мы получили разложение элемента $\varphi(x) = x$ по базису пространства $\mathbb{W}$. Можем записать координаты как:

$$[\varphi(x)]_C = [x]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на вектор... снова...

Наконец:

$$[x]_C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_{B\to C}\,[x]_B\,.$$

Матрица замены координат

Матрица для identity transformation помогает нам связать координаты одного и того же элемента x в двух разных базисах. Эту формулу также называют формулой замены координат.
Если у нас есть два базиса $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $C = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, то матрица замены координат $A_{B\to C}$ строится как:

$$A_{B\to C} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [v_1]_C & [v_2]_C & \cdots & [v_n]_C \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},$$

где $[v_i]_C$ — это координаты вектора v_i в базисе C.

Примеры