

Линейная алгебра

Векторное пространство. Линейная комбинация и оболочка. Зависимость и независимость векторов.

Глеб Карпов

МН_аД ФКН ВШЭ

Векторное пространство (Vector space)

Основной предмет изучения линейной алгебры

- Рассмотрим некоторое множество элементов V . Помимо того, что в нем просто живут абстрактные элементы, зададим там бинарные операции.
- Сложение. Любым двум элементам из множества V ставится в соответствие третий:

$$\forall x, y \in V: \quad x \oplus y = w, w \in V.$$

- Умножение на скаляр. Любой паре элементов из V и \mathbb{R} ставится в соответствие элемент из V :

$$\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \otimes x = w, w \in V.$$

Векторное пространство

Примеры векторных пространств

Coordinate space. Множество последовательностей длины n , частным случаем которых являются геометрические векторы.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Векторное пространство

Примеры векторных пространств

- Множество матриц $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Векторное пространство

Примеры векторных пространств

- Множество матриц $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Множество полиномов (Что? Да!) фиксированной максимальной степени.

$$f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$f(x) + g(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} : \alpha f(x) = (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1)$$

Линейная комбинация

- С помощью определенных выше операций мы можем комбинировать элементы векторного пространства.
- Предположим, мы вытащили набор векторов v_1, \dots, v_m из \mathbb{V} , и набор скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ из \mathbb{R} .
- *Линейная комбинация* группы векторов - новый вектор, построенный в виде:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, x \in \mathbb{V}.$$

- Из-за замкнутости \mathbb{V} относительно двух введенных операций получившийся элемент x тоже содержится в векторном пространстве \mathbb{V} .

Примеры линейных комбинаций

Пример: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\textcolor{red}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \textcolor{blue}{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Линейная комбинация:

$$2\textcolor{red}{A} + 3\textcolor{blue}{B} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример: $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x, 2]$

$$\textcolor{red}{p}_1(x) = 1.5x^2 - x, \quad \textcolor{blue}{p}_2(x) = x + 1, \quad \textcolor{green}{p}_3(x) = 2$$

Линейная комбинация:

$$\begin{aligned} 2\textcolor{red}{p}_1 + (-2)\textcolor{blue}{p}_2 + 5\textcolor{green}{p}_3 &= \\ 2(1.5x^2 - x) - 2(x + 1) + 5(2) &= \\ 3x^2 - 4x + 8 \end{aligned}$$

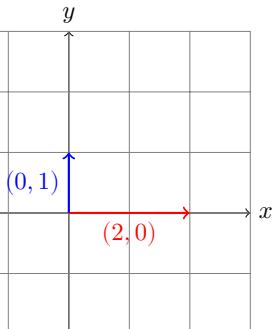
Линейная оболочка

Множество всех-всех возможных линейных комбинаций, полученных из зафиксированного набора векторов v_1, \dots, v_m , назовем *линейной оболочкой* этого набора и обозначим:

$$\text{span}(v_1, \dots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

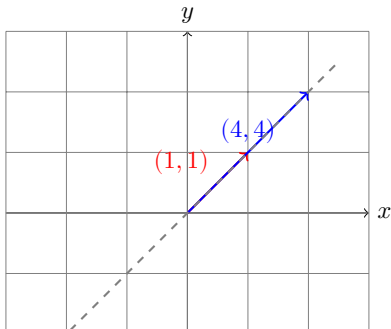
$$\textcolor{red}{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \textcolor{blue}{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{span}(\textcolor{red}{a}, \textcolor{blue}{b}) = \{\alpha_1 \textcolor{red}{a} + \alpha_2 \textcolor{blue}{b} : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$



$$\textcolor{red}{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \textcolor{blue}{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{span}(\textcolor{red}{c}, \textcolor{blue}{d}) = \{\alpha_1 \textcolor{red}{c} + \alpha_2 \textcolor{blue}{d} : \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \text{линия}$$



Зависимость и независимость векторов

Мотивация

- Рассмотрим набор векторов $\{v_1, \dots, v_m\}$, заранее извлеченных из \mathbb{V} , и произвольный набор скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ из \mathbb{R} . В результате построения линейной комбинации получим некий элемент $x \in \mathbb{V}$:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

Зависимость и независимость векторов

Мотивация

- Рассмотрим набор векторов $\{v_1, \dots, v_m\}$, заранее извлеченных из \mathbb{V} , и произвольный набор скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ из \mathbb{R} . В результате построения линейной комбинации получим некий элемент $x \in \mathbb{V}$:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

- Уникален ли такой набор $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ или, может, существует другой набор $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_m\}$ такой, что:

$$x = \tilde{\alpha}_1 v_1 + \dots + \tilde{\alpha}_m v_m.$$

Зависимость и независимость векторов

Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$\begin{aligned}(x - x) = \mathbf{0} &= (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \dots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m \\ &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_m v_m\end{aligned}$$

Зависимость и независимость векторов

Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \dots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m \\ = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления x теперь изменилась к задаче “как получить элемент 0 ” в результате линейной комбинации.

Зависимость и независимость векторов

Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \dots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m \\ = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления x теперь изменилась к задаче “как получить элемент $\mathbf{0}$ ” в результате линейной комбинации.
- Если единственный возможный вариант получить $\mathbf{0}$ это положить все $\gamma_i = 0$:

$$\forall i : (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \rightarrow \alpha_i = \tilde{\alpha}_i.$$

Что будет означать, что представление x уникально.

Зависимость и независимость векторов

Мотивация

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \dots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m \\ = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления x теперь изменилась к задаче “как получить элемент $\mathbf{0}$ ” в результате линейной комбинации.
- Если единственный возможный вариант получить $\mathbf{0}$ это положить все $\gamma_i = 0$:

$$\forall i : (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \rightarrow \alpha_i = \tilde{\alpha}_i.$$

Что будет означать, что представление x уникально.

- Если есть какой-то другой способ получить $\mathbf{0}$, т.е. хотя бы один $\gamma_k \neq 0$, значит $(\alpha_k - \tilde{\alpha}_k) \neq 0 \rightarrow \alpha_k \neq \tilde{\alpha}_k$.
Что означает, что представление x не уникально - существует другой набор коэффициентов.

Линейная независимость

Определение

Мы назовем набор векторов *линейно независимым*, если единственная возможность получить элемент $\mathbf{0}$ как результат линейной комбинации:

$$\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_m v_m = \mathbf{0},$$

это положить все скаляры равными 0, $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$. (Также называется *тривиальной комбинацией*).

Линейная зависимость

Определение

С другой стороны, мы назовем набор векторов *линейно зависимым*, если **существует** нетривиальная комбинация коэффициентов $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, (не равные 0 одновременно), такая что:

$$\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_m v_m = \mathbf{0}.$$