Линейная алгебра

СЛУ для анализа векторов

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на mat-vec как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому понимания СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за $a_1, \dots, a_m$ то тогда:

$$A\mathbf{x} = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

  Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился right-hand side вектор r. Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов $a_1, \dots, a_m$ вообще можно было бы “дотянуться” до вектора r. Иными словами, получаем:

СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на mat-vec как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому понимания СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за $a_1, \dots, a_m$ то тогда:

  $$A\mathbf{x} = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

  Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился right-hand side вектор r. Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов $a_1, \dots, a_m$ вообще можно было бы "дотянуться" до вектора r. Иными словами, получаем:

- **Существование решения**

  Для того, чтобы у СЛУ $A\mathbf{x} = r$ существовало хотя бы одно решение, необходимо, чтобы выполнялось:

  $$r \in \text{ span } (a_1, \dots, a_m)$$

  Иначе, СЛУ называется несовместной (inconsistent). В ступенчатом виде матрицы несовместность системы выражается в виде наличия строчки:

  $$[0 \; 0 \; \dots \; 0 \mid b], \; b \neq 0$$

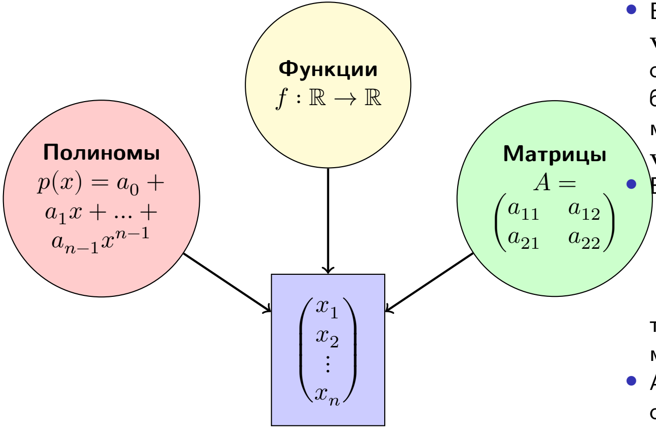
Пример: несовместность vs неуникальное решение

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \end{array}\right)$

Пример: несовместность vs неуникальное решение

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 12 & 23 & 14 \end{array}\right)$

Reminder: в чем сила?



Линейная алгебра: единый язык для разных объектов

- Если векторное пространство $\mathbb{V}$ имеет базис $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, то любой вектор $\mathbf{v}$ однозначно определяется своими координатами α_k в этом базисе. Если мы упакуем α_k в вектор из $\mathbb{R}^n$, то можем оперировать им вместо оперирования над $\mathbf{v}$.
- Если $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k$ и $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k$, то

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k)\, \mathbf{v}_k$$

  т.е. вместо сложения двух оригинальных векторов, можно сложить векторы координат.
- Аналогично, чтобы получить $\alpha\mathbf{v}$, можно умножить столбец координат $\mathbf{v}$ на α и сразу получить координаты вектора $\alpha\mathbf{v}$.

СЛУ как способ исследовать наборы векторов

- Для отдельного рассмотрения можно вынести системы однородных линейных уравнений вида $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Утверждение

Пусть у нас есть набор векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, и пусть $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m]$ — это матрица размера $n \times m$ со столбцами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Тогда

1. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ линейно независима тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце;
2. Линейная оболочка системы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ совпадает с $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждой строке;
3. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ является базисом в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце и в каждой строке.

СЛУ как способ исследовать наборы векторов

- Для отдельного рассмотрения можно вынести системы однородных линейных уравнений вида $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- В интерпретации линейной комбинации столбцов такие уравнения внезапно напоминают нам про возможность получения нулевого вектора:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \leftrightarrow x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m = \mathbf{0},$$

Если единственное решение - тривиальный вектор $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то набор перед нами линейно независимая группа векторов в столбцах матрицы. Иначе - линейно зависимая.

Утверждение

Пусть у нас есть набор векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, и пусть $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m]$ — это матрица размера $n \times m$ со столбцами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Тогда

1. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ линейно независима тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце;
2. Линейная оболочка системы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ совпадает с $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждой строке;
3. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ является базисом в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце и в каждой строке.

Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.

Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
    1. $1 - 3t + 5t^2, -3 + 5t - 7t^2, -4 + 5t - 6t^2, 1 - t^2$

Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
  1. $1 - 3t + 5t^2, -3 + 5t - 7t^2, -4 + 5t - 6t^2, 1 - t^2$
  2. $5t + t^2, 1 - 8t - 2t^2, -3 + 4t + 2t^2, 2 - 3t$

Слайд для записей