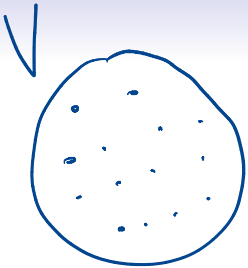
Линейная алгебра

Базис векторного пространства. Линейные отображения.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Базис



Базис

Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется базисом пространства V тогда и только тогда, когда любой вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мы называем координатами вектора x в базисе $(v_1, \dots, v_n)$.

$(5,2)$

Базис

ЛНЗ Группа

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\mathrm{span} = \mathbb{R}^3$

Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется базисом пространства V тогда и только тогда, когда любой вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мы называем координатами вектора x в базисе $(v_1, \dots, v_n)$.
- Немного иначе: набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется базисом пространства V тогда и только тогда, когда этот набор векторов линейно независим и $\boxed{\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{V}}$, то есть мы можем ‘дотянуться’ до любого элемента из $\mathbb{V}$.

$\mathbb{R}^3$

$$\left\{\overset{a}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}},\overset{b}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}\right\}$$

не базис!

$$\underset{0}{\gamma_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\underset{0}{\gamma_2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

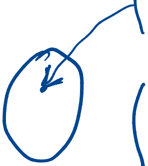
$\{\alpha a + \beta b\}$

$\mathrm{span}(a,b) = \mathbb{R}^2$

Базис. Примеры.

$\mathbb{R}^2$

$$\overset{x}{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix} + (-5.5)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$S = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[x]_S = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$[x]_B = \begin{pmatrix}1/2\\2\end{pmatrix}$$

$$C = \left\{\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[x]_C = \begin{pmatrix}-0.25\\-5.5\end{pmatrix}$$

Базис. Примеры.

$\mathbb{R}[x, 2]$

$$F(x) = 2x^2 - 7x + 4 \qquad S = \{x^2, x, 1\}$$

$$F(x) = 2x^2 + (-7)x + 4 \cdot 1 \qquad [F(x)] = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(4x^2 - 2x) + (-2)(3x) + \frac{1}{2} 8 = \qquad B = \{4x^2 - 2x, 3x, 8\}$$

$$= 2x^2 - x - 2(3x) + 4 \qquad [F(x)]_B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Базис. Примеры.

$\mathbb{R}^{2\times 2}$

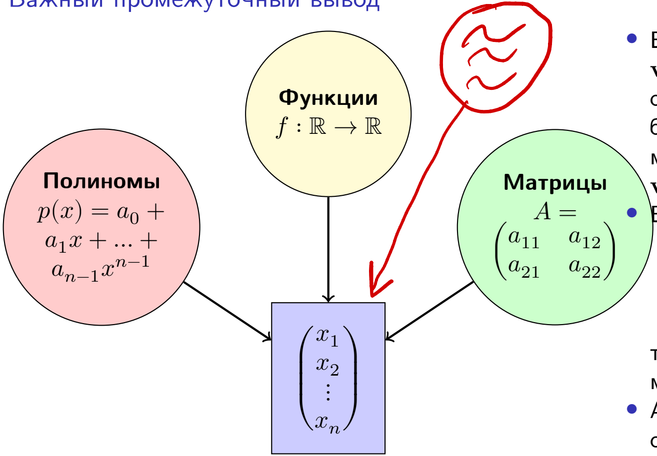
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Базис.

Важный промежуточный вывод

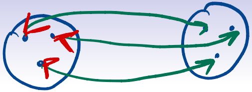


Линейная алгебра: единый язык для разных объектов

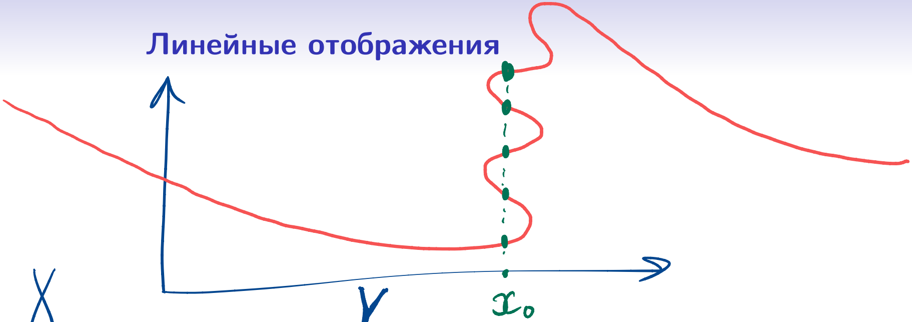
- Если векторное пространство $\mathbb{V}$ имеет базис $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, то любой вектор $\mathbf{v}$ однозначно определяется своими координатами α_k в этом базисе. Если мы упакуем α_k в вектор из $\mathbb{R}^n$, то можем оперировать им вместо оперирования над $\mathbf{v}$.
- Если $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k$ и $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k$, то

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k)\, \mathbf{v}_k$$

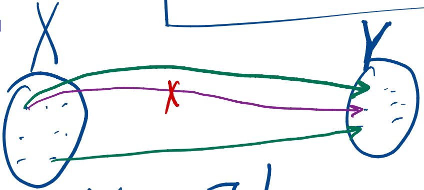
  т.е. вместо сложения двух оригинальных векторов, можно сложить векторы координат.
- Аналогично, чтобы получить $\alpha\mathbf{v}$, можно умножить столбец координат $\mathbf{v}$ на α и сразу получить координаты вектора $\alpha\mathbf{v}$.

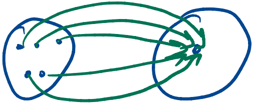


Линейные отображения



Domain





$$\forall x \in X \ \exists!\ y \in Y$$