

Теория вероятностей и математическая статистика

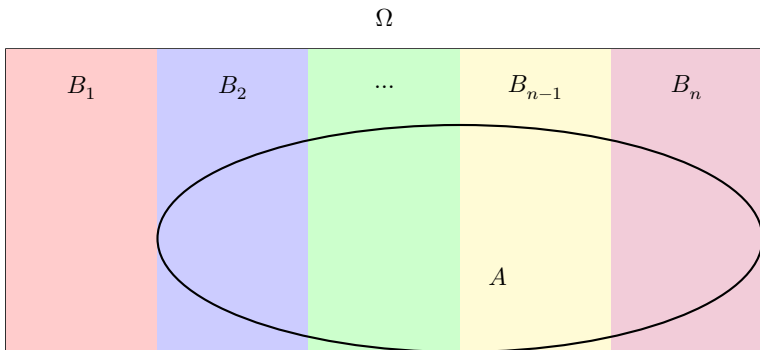
Полная вероятность. Формула Байеса. Случайные величины.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

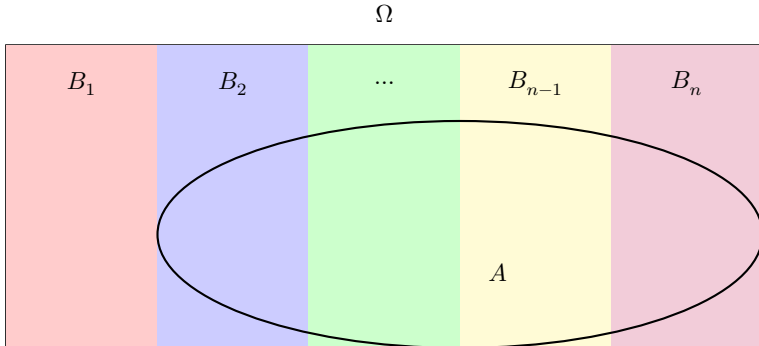
Полная вероятность

- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей идеей полной вероятности.



Полная вероятность

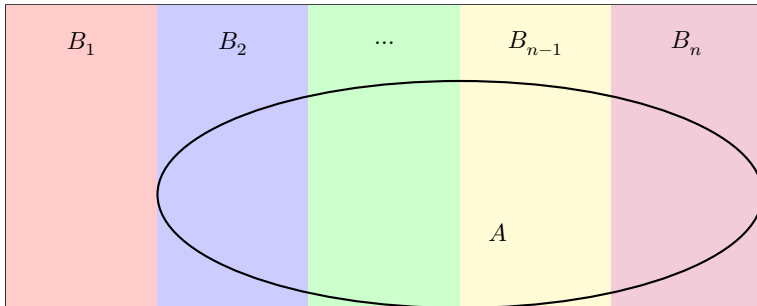
- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей идеей полной вероятности.
- Рассмотрим зафиксированное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) . Назовем **разбиением** Ω коллекцию событий $\{B_k, k \in I\}$, таких что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup B_i = \Omega$.



Полная вероятность

- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей идеей полной вероятности.
- Рассмотрим зафиксированное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) . Назовем **разбиением** Ω коллекцию событий $\{B_k, k \in I\}$, таких что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup B_i = \Omega$.
- Вдобавок, рассмотрим какое-то другое событие B , которое пересекается с какими-то событиями из разбиения, но не обязано пересекаться со всеми.

Ω



Полная вероятность

i Theorem

Если $\{B_1, B_2, \dots\}$ - разбиение Ω , с $P(B_i) > 0 \forall i$, то:

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i), \forall A \in \mathcal{F}$$

Доказательство. Заметим, что мы можем реконструировать событие A из его частичек-пересечений со всеми B_i : $A = \bigcup_i (A \cap B_i)$. Эти кусочки $\{A \cap B_i\}$ попарно не пересекаются, как и оригинальные элементы разбиения. Поэтому далее можем применить свойство аддитивности вероятности:

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_i (A \cap B_i)\right) \\ &= \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

Теорема Байеса

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$$

Let us recall definition of conditional probability:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

We can notice that probability of intersection $(A \cap B)$ may be written in two ways:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A),$$

which gives us a formula, how two 'inverted' conditional probabilities are connected:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Пример

Случайные величины

