# Линейная алгебра

## Базис векторного пространства.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

# Базис

## Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда *любой* вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

# Базис

## Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда *любой* вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мы называем *координатами* вектора $x$ в базисе $(v_1, \dots, v_n)$.

# Базис

### Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда *любой* вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мы называем *координатами* вектора $x$ в базисе $(v_1, \dots, v_n)$.
- Немного иначе: набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда этот набор векторов линейно независим и $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{V}$, то есть мы можем 'дотянуться' до любого элемента из $\mathbb{V}$.

# Базис. Примеры

## Пример в координатном векторном пространстве

- Координатное пространство $\mathbb{R}^2$. Возьмем вектор, например, $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [x]_S = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad S = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.5 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + -0.5 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [x]_B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \quad B = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = -0.25 \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} + -5.5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [x]_C = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -5.5 \end{pmatrix}, \quad C = \left( \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

# Базис. Примеры

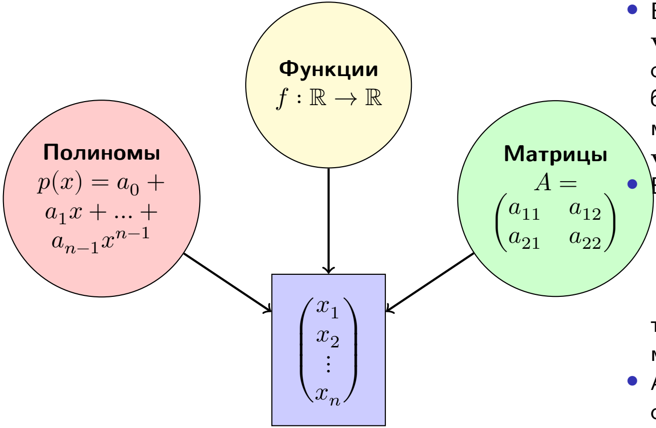
## Пример в векторном пространстве полиномов

- Векторное пространство $\mathbb{R}[x, 2]$. Возьмем вектор, например, $f(x) = 2x^2 - 7x + 4$ и посмотрим его представление в разных базисах:

$$f(x) = 2 \cdot x^2 + -7 \cdot x + 4 \cdot 1, \quad [x]_S = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad S = (x^2, x, 1)$$

$$f(x) = 0.5 \cdot (4x^2 - 2x) + -2 \cdot (3x) + 0.5 \cdot 8, \quad [x]_B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad B = (4x^2 - 2x, 3x, 8)$$

# Важный промежуточный вывод




**Линейная алгебра: единый язык для разных объектов**

- Если векторное пространство $\mathbb{V}$ имеет базис $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, то любой вектор $\mathbf{v}$ однозначно определяется своими координатами $\alpha_k$ в этом базисе. Если мы упакуем $\alpha_k$ в вектор из $\mathbb{R}^n$, то можем оперировать им вместо оперирования над $\mathbf{v}$.
- Если $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k$ и $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k$, то

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k)\, \mathbf{v}_k$$

  т.е. вместо сложения двух оригинальных векторов, можно сложить векторы координат.
- Аналогично, чтобы получить $\alpha \mathbf{v}$, можно умножить столбец координат $\mathbf{v}$ на $\alpha$ и сразу получить координаты вектора $\alpha \mathbf{v}$.