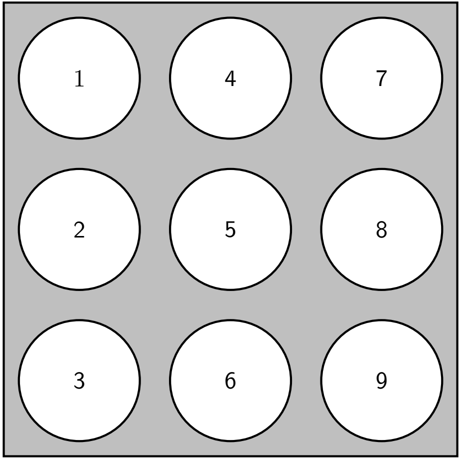
Теория вероятностей и математическая статистика

Условная вероятность. Полная вероятность. Формула Байеса.

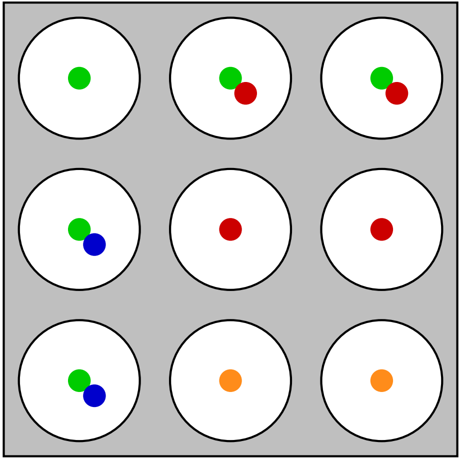
Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

Мыслительный эксперимент

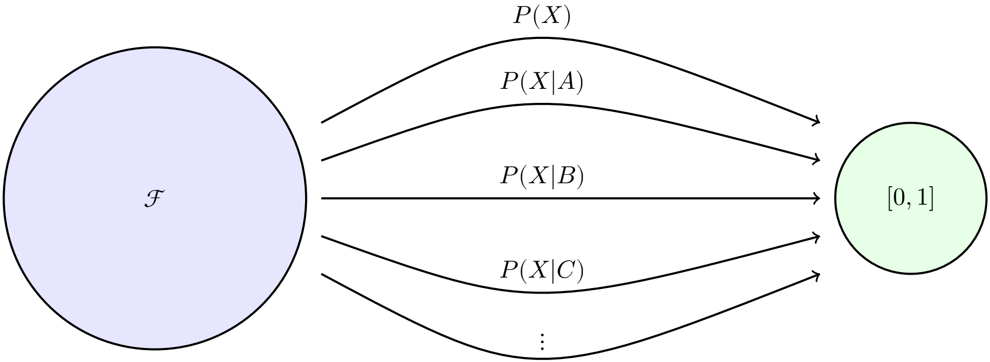


Мыслительный эксперимент



- Зеленая группа: 1,2,3,4,7
- Красная группа: 4,5,7,8
- Синяя группа: 2,3
- Оранжевая группа: 6,9

Условная вероятность



Условная вероятность

- **Definition**

  Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Условная вероятность

- **Definition**

  Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- **Формула Байеса**

  $$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Условная вероятность

При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

- $\forall X, K \in \mathcal{F}: \; 0 \leq P(X|K) \leq 1$

Условная вероятность

При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

- $\forall X, K \in \mathcal{F}: \;\; 0 \leq P(X|K) \leq 1$
- $\forall K \in \mathcal{F}: \;\; P(\Omega|K) = 1.$ Easy to show: $P(\Omega|K) = \frac{P(\Omega \cap K)}{P(K)} = (K \subseteq \Omega) = \frac{P(K)}{P(K)} = 1$

Условная вероятность

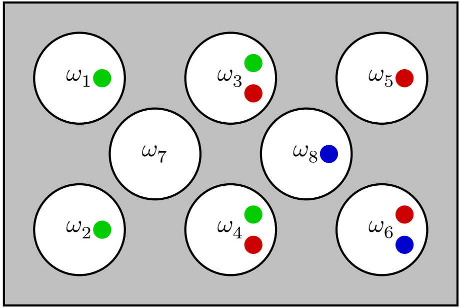
При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

- $\forall X, K \in \mathcal{F}: \;\; 0 \leq P(X|K) \leq 1$
- $\forall K \in \mathcal{F}: \;\; P(\Omega|K) = 1.$ Easy to show: $P(\Omega|K) = \frac{P(\Omega \cap K)}{P(K)} = (K \subseteq \Omega) = \frac{P(K)}{P(K)} = 1$
- Аддитивность вероятности:

$$\forall X, Y, K \in \mathcal{F}: X \cap Y = \emptyset, P\left((X \cup Y)|K\right) = P(X|K) + P(Y|K)$$

Независимость событий

- $G = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ • $R = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ • $B = \{6,\ 8\}$



- $P(G) = 0.5,\ P(R) = 0.5,\ P(B) = 0.25$

Question

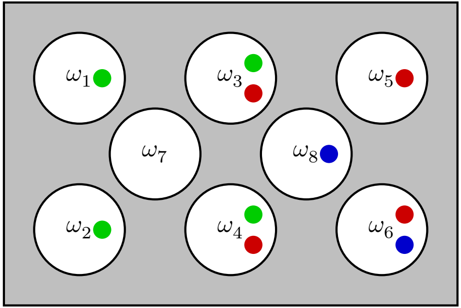
$P(G|R),\ P(R|G) = ?$

Question

$P(R|B),\ P(B|R) = ?$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$ • $R = \{3, 4, 5, 6\}$ • $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5,\ P(R) = 0.5,\ P(B) = 0.25$

Question

$P(G|R),\ P(R|G) = ?$

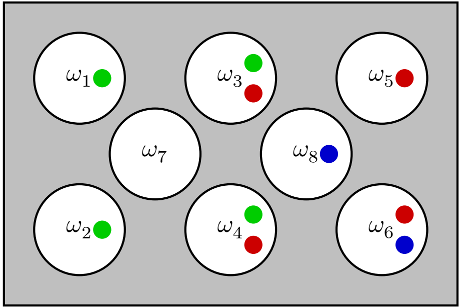
- $P(G|R) = 0.5,\ P(R|G) = 0.5$

Question

$P(R|B),\ P(B|R) = ?$

Независимость событий

- $G = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$
- $R = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
- $B = \{6,\ 8\}$



- $P(G) = 0.5,\ P(R) = 0.5,\ P(B) = 0.25$

> **Question**
>
> $P(G|R),\ P(R|G) = ?$

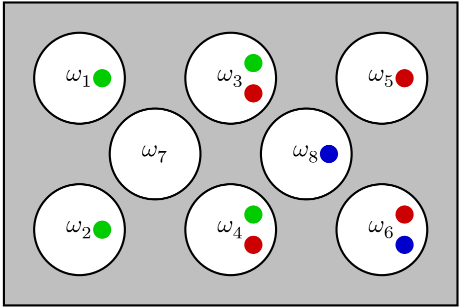
- $P(G|R) = 0.5,\ P(R|G) = 0.5$

> **Question**
>
> $P(R|B),\ P(B|R) = ?$

- $P(R|B) = 0.5,\ P(B|R) = 0.25$

Независимость событий

- $G = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ • $R = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ • $B = \{6,\ 8\}$



- $P(G) = 0.5,\ P(R) = 0.5,\ P(B) = 0.25$

> **Question**
>
> $P(G|R),\ P(R|G) = ?$

- $P(G|R) = 0.5,\ P(R|G) = 0.5$

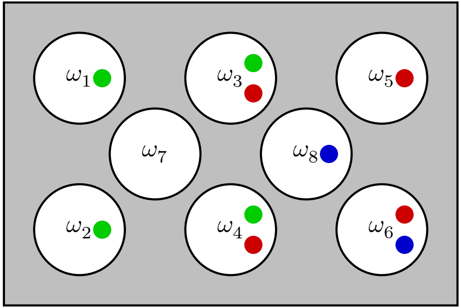
> **Question**
>
> $P(R|B),\ P(B|R) = ?$

- $P(R|B) = 0.5,\ P(B|R) = 0.25$

- Наблюдаем: $P(B) = P(B|R),\ P(R) = P(R|B)$. Коэффициент ожидания этих событий a.k.a. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$ • $R = \{3, 4, 5, 6\}$ • $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5,\ P(R) = 0.5,\ P(B) = 0.25$

> **Question**
>
> $P(G|R),\ P(R|G) = ?$

- $P(G|R) = 0.5,\ P(R|G) = 0.5$

> **Question**
>
> $P(R|B),\ P(B|R) = ?$

- $P(R|B) = 0.5,\ P(B|R) = 0.25$

- Наблюдаем: $P(B) = P(B|R)$, $P(R) = P(R|B)$. Коэффициент ожидания этих событий a.k.a. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.
- Более формально, чтобы называть A и B независимыми, должно выполняться:

$$P(A|B) = P(A) \text{ И } P(B|A) = P(B), \text{ при } P(A), P(B) > 0.$$

Независимость событий

- Если немного поработаем с идеей о независимости, получим более удобное определение:

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Definition

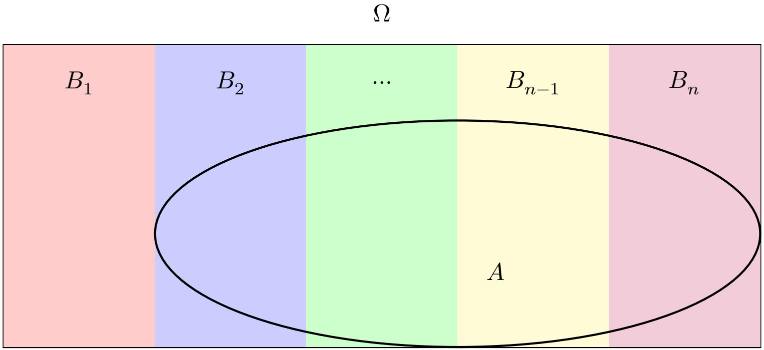
События A и B из одного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называются независимыми, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

и зависимыми в обратном случае.

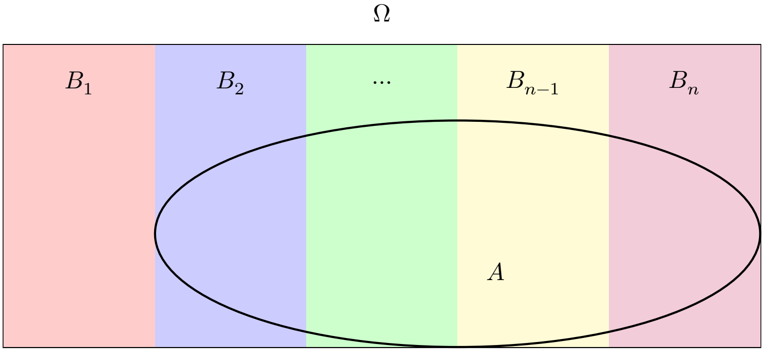
Полная вероятность

- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей идеей полной вероятности.



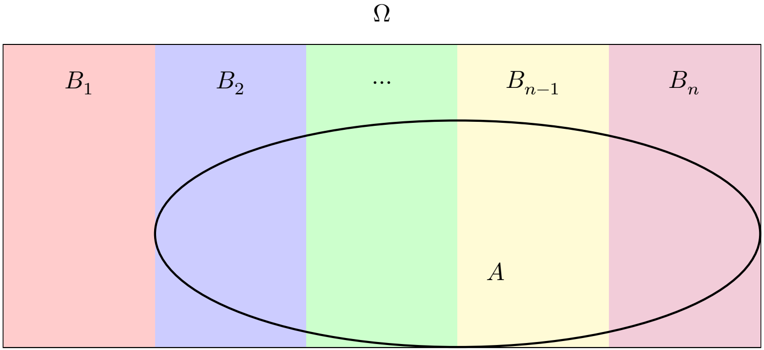
Полная вероятность

- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей идеей полной вероятности.
- Рассмотрим зафиксированное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Назовем **разбиением** Ω коллекцию событий $\{B_k,\, k \in I\}$, таких что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup B_i = \Omega$.



Полная вероятность

- Концепция условной вероятности неразрывно связана со следующей идеей полной вероятности.
- Рассмотрим зафиксированное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Назовем **разбиением** Ω коллекцию событий $\{B_k,\ k \in I\}$, таких что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup B_i = \Omega$.
- Вдобавок, рассмотрим какое-то другое событие B, которое пересекается с какими-то событиями из разбиения, но не обязано пересекаться со всеми.



Полная вероятность

Theorem

Если $\{B_1, B_2, ...\}$ - разбиение Ω, с $P(B_i) > 0 \ \forall i$, то:

$$\boxed{P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i), \ \forall A \in \mathcal{F}}$$

Доказательство. Заметим, что мы можем реконструировать событие A из его частичек-пересечений со всеми B_i: $A = \bigcup_i (A \cap B_i)$. Эти кусочки $\{A \cap B_i\}$ попарно не пересекаются, как и оригинальные элементы разбиения. Поэтому далее можем применить свойство аддитивности вероятности:

$$P(A) = P\left(\bigcup_i (A \cap B_i)\right)$$
$$= \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

Теорема Байеса

$$\boxed{P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum\limits_i P(A|B_i)P(B_i)}}$$

Let us recall definition of conditional probability:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

We can notice that probability of intersection $(A \cap B)$ may be written in two ways:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A),$$

which gives us a formula, how two ‘inverted’ conditional probabilities are connected:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$