

**Теория вероятностей и математическая статистика**  
**Вероятностное пространство. Аксиоматическое определение вероятности.**

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

# Андрей Колмогоров меняет всё

- Строгая формализация через множества: пространство исходов  $\Omega$ , события — элементы  $\mathcal{F}$
- Аксиоматизация: построение на основе теории меры
- Три аксиомы для вероятностной функции: неотрицательность, нормировка ( $P(\Omega) = 1$ ), аддитивность

# Описание случайного эксперимента

## Пространство элементарных исходов

- Множество, которое содержит все возможные *уникальные* результаты случайного эксперимента:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_n, \dots\}$$

- Может быть конечным или бесконечным
- Критически зависит от установки случайного эксперимента и того, что мы хотим наблюдать и описывать

# Описание случайного эксперимента

## Пространство элементарных исходов: примеры

- Подбрасываются две визуально различимые монеты:  $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Подбрасываются две идентичные монеты:  $\Omega = \{2H, 2T, Diff\}$
- Идентичные монеты с внедренным различием:  $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Кубик со сторонами-буквами:  $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

# Описание случайного эксперимента

## Событие

- Зачастую нас интересует не конкретный элементарный исход, а набор из нескольких, e.g. "Если выпадет 2, 3, 6", то мы получим выигрыш
- Множество, построенное из одного или нескольких элементарных исходом называют *событием*
- Важное отличие от элементарного исхода: исход случается *один и только один*, событий может случиться одновременно много!

 Важно!

Мы говорим, что *событие произошло*, если реализовался какой-то из элементарных исходов этого события.

# Описание случайного эксперимента

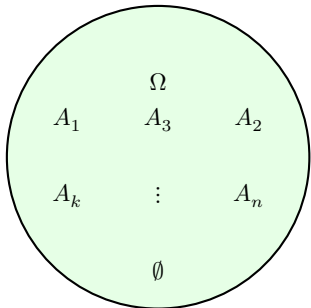
## Пространство событий

- Множество, которое содержит все возможные *события*, которые можно построить из множества исходов  $\Omega$
- Иными словами, множество всех возможных подмножеств  $\Omega$ :

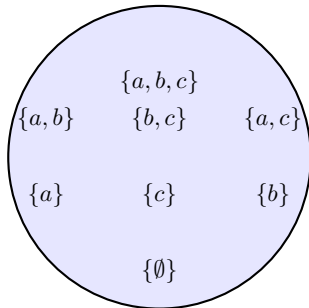
$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_n, \dots\}, \forall A_i \subset \Omega$$

- Само пространство элементарных исходов тоже событие:  $\Omega \subset \Omega$ , поэтому  $\Omega \in \mathcal{F}$

( $\mathcal{F}$ , в общем виде)



(Пример  $\mathcal{F}$ : все подмножества  $\{a, b, c\}$ )



# Описание случайного эксперимента

## Пространство событий

### **i** Question

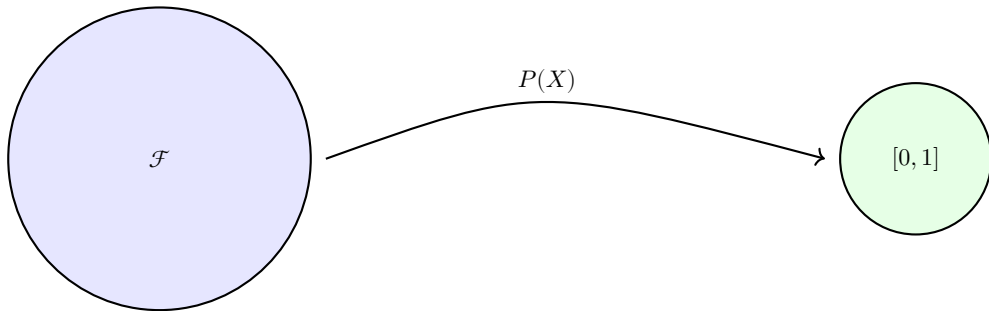
Если мощность пространства элементарных исходов  $|\Omega| = n$ , какая будет мощность пространства событий  $|\mathcal{F}|$ ?

# Описание случайного эксперимента

## Вероятность

- В конечном счете мы хотим наклеить на каждое событие "бирку" с информацией о том, насколько мы уверены в том, что событие случится
- Этот коэффициент нашей уверенности решили измерять от 0 до 1, его-то и называем \*вероятностью\*
- Формально, вероятность представляет собой функцию, которая каждому событию ставит в соответствие число:

$$P(X) : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$$





## Свойства вероятностной функции

- $0 \leq P(X) \leq 1, \forall X \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
- *Свойство аддитивности вероятности:*

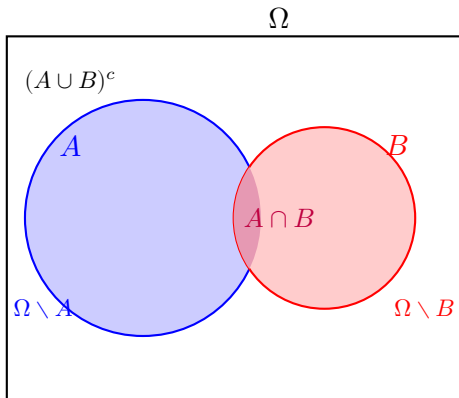
$$\forall X, Y \in \mathcal{F} : X \cap Y = \emptyset, P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$$

Более душно: Если коллекция событий  $A_1, A_2, \dots$  - попарно не пересекаются, i.e.  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ , то:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m P(A_i)$$

# Вероятность

## Комплиментарные события и формула включений исключений



- Свойство: Если  $A \in \mathcal{F}$ , то  $P(A) + P(\Omega \setminus A) = 1$ . События  $A$  и  $\bar{A} = \Omega \setminus A$  такие, что  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ , и  $\Omega = A \cup \bar{A}$ , откуда при помощи свойств вероятности получим:  $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\Omega \setminus A) = 1$
- Формула включений-исключений: Если  $A, B \in \mathcal{F}$ , то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Событие  $A$  - объединение непересекающихся  $A \setminus B$  и  $A \cap B$ , следовательно  $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$  и симметрично  $P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$ .

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= P(A \setminus B) + 2P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ &= P((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)) + P(A \cap B) \\ &= P(A \cup B) + P(A \cap B). \end{aligned}$$

- Свойство: Если  $A, B \in \mathcal{F}$  and  $A \subseteq B$ , то  $P(A) \leq P(B)$ . Показать просто:  $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$ .