Теория вероятностей и математическая статистика

Вероятностное пространство. Аксиоматическое определение вероятности.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Андрей Колмогоров меняет всё

- Строгая формализация через множества: пространство исходов Ω, события — элементы $\mathcal{F}$
- Аксиоматизация: построение на основе теории меры
- Три аксиомы для вероятностной функции: неотрицательность, нормировка ($P(\Omega) = 1$), аддитивность

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов

- Множество, которое содержит все возможные *уникальные* результаты случайного эксперимента:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_n, \dots\}$$

- Может быть конечным или бесконечным
- Критически зависит от установки случайного эксперимента и того, что мы хотим наблюдать и описывать

Описание случайного эксперимента

Пространство элементарных исходов: примеры

- Подбрасываются две визуально различимые монеты: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Подбрасываются две идентичные монеты: $\Omega = \{2H, 2T, Diff\}$
- Идентичные монеты с внедренным различием: $\Omega = \{Hh, Tt, Ht, Th\}$
- Кубик со сторонами-буквами: $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

Описание случайного эксперимента

Событие

- Зачастую нас интересует не конкретный элементарный исход, а набор из нескольких, e.g. ”Если выпадет 2, 3, 6”, то мы получим выигрыш
- Множество, построенное из одного или нескольких элементарных исходом называют *событием*
- Важное отличие от элементарного исхода: исход случается *один и только один*, событий может случиться одновременно много!

Важно!

Мы говорим, что *событие произошло*, если реализовался какой-то из элементарных исходов этого события.

Описание случайного эксперимента

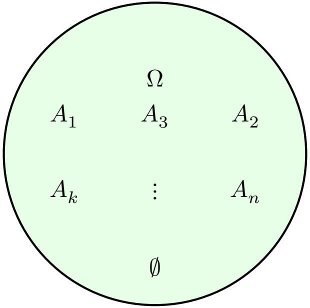
Пространство событий

- Множество, которое содержит все возможные *события*, которые можно построить из множества исходов Ω
- Иными словами, множество всех возможных подмножеств Ω:

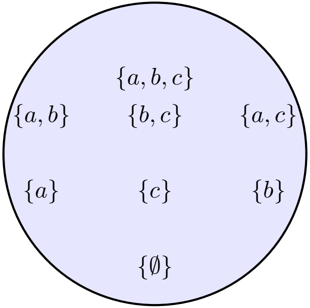
$$\mathcal{F} = \{A_1,\, A_2,\, A_n,\, ...\},\ \forall A_i \subset \Omega$$

- Само пространство элементарных исходов тоже событие: $\Omega \subset \Omega$, поэтому $\Omega \in \mathcal{F}$

($\mathcal{F}$, в общем виде)



(Пример $\mathcal{F}$: все подмножества $\{a, b, c\}$)



Описание случайного эксперимента

Пространство событий

Question

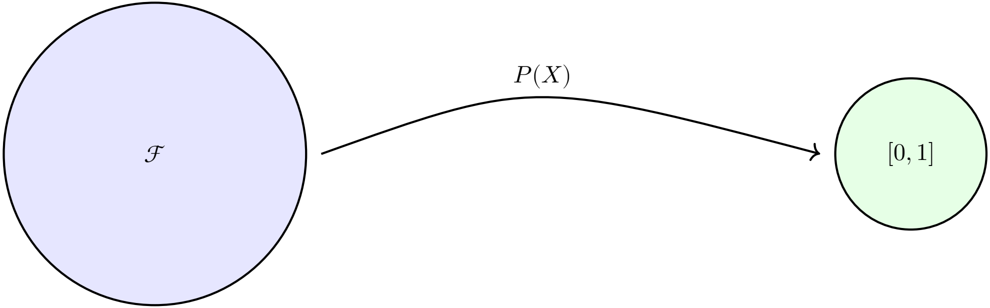
Если мощность пространства элементарных исходов $|\Omega| = n$, какая будет мощность пространста событий $|\mathcal{F}|$?

Описание случайного эксперимента

Вероятность

- В конечном счете мы хотим наклеить на каждое событие "бирку" с информацией о том, насколько мы уверены в том, что событие случится
- Этот коэффициент нашей уверенности решили измерять от 0 до 1, его-то и называем *вероятностью*
- Формально, вероятность представляет собой функцию, которая каждому событию ставит в соответствие число:

$$P(X) : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$$



Свойства вероятностной функции

- $0 \leq P(X) \leq 1, \ \forall X \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1, \ P(\emptyset) = 0$
- *Свойство аддитивности вероятности*:

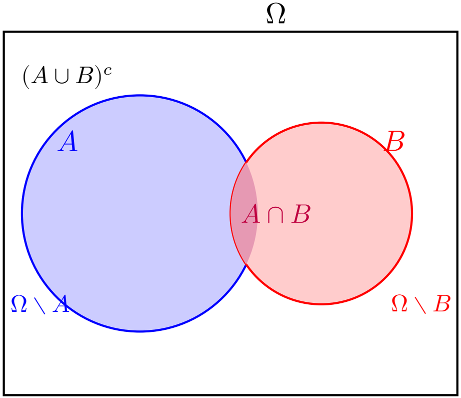
$$\forall X, Y \in \mathcal{F} \, : \, X \cap Y = \emptyset, \, P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$$

Более душно: Если коллекция событий A_1, A_2, ... - попарно не пересекаются, i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, то:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P\left(A_i\right)$$

Вероятность

Комплиментарные события и формула включений исключений



- Свойство: Если $A \in \mathcal{F}$, то $P(A) + P(\Omega \backslash A) = 1$. События A и $\bar{A} = \Omega \backslash A$ такие, что $A \cap \bar{A} = \emptyset$, и $\Omega = A \cup \bar{A}$, откуда при помощи свойств вероятности получим: $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\Omega \backslash A) = 1$
- Формула включений-исключений: Если $A, B \in \mathcal{F}$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Событие A - объединение непересекающихся $A \backslash B$ и $A \cap B$, следовательно $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$ и симметрично $P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B)$.

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= P(A \backslash B) + 2P(A \cap B) + P(B \backslash A) \\ &= P((A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)) + P(A \cap B) \\ &= P(A \cup B) + P(A \cap B). \end{aligned}$$

- Свойство: Если $A, B \in \mathcal{F}$ and $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$. Показать просто: $P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geq P(A)$.