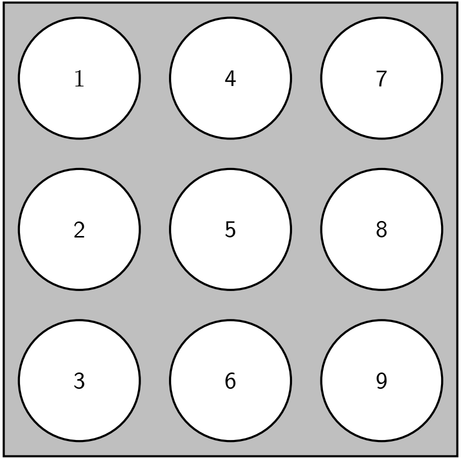
Теория вероятностей и математическая статистика

Условная вероятность. Независимость событий.

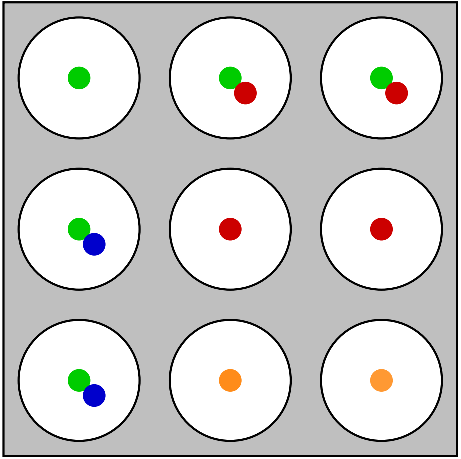
Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Мыслительный эксперимент

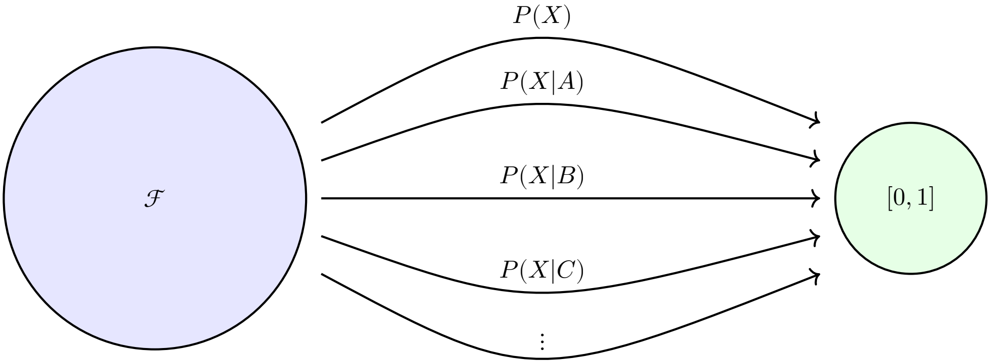


Мыслительный эксперимент



- Зеленая группа: 1,2,3,4,7
- Красная группа: 4,5,7,8
- Синяя группа: 2,3
- Оранжевая группа: 6,9

Условная вероятность



Условная вероятность

- **Definition**

  Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Условная вероятность

- **Definition**

  Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- **Формула Байеса**

  $$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Условная вероятность

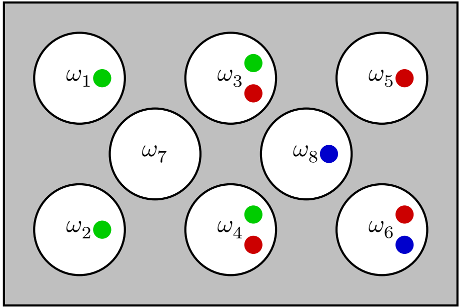
При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

- $\forall X, K \in \mathcal{F}: \; 0 \leq P(X|K) \leq 1$
- $\forall K \in \mathcal{F}: \; P(\Omega|K) = 1$. Easy to show: $P(\Omega|K) = \frac{P(\Omega \cap K)}{P(K)} = (K \subseteq \Omega) = \frac{P(K)}{P(K)} = 1$
- Аддитивность вероятности:

$$\forall X, Y, K \in \mathcal{F}: X \cap Y = \emptyset, P\left((X \cup Y)|K\right) = P(X|K) + P(Y|K)$$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$
- $P(G) = 0.5, \ P(R) = 0.5, \ P(B) = 0.25$



Question

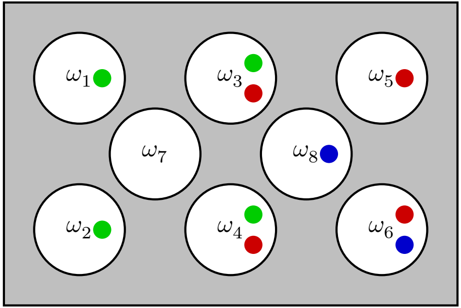
$P(R|B), \ P(B|R) = ?$

- Наблюдаем: $P(B) = P(B|R)$, $P(R) = P(R|B)$. Коэффициент ожидания этих событий a.k.a. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.
- Более формально, чтобы называть A и B независимыми, должно выполняться:

$$P(A|B) = P(A) \text{ И } P(B|A) = P(B), \text{ при } P(A), \ P(B) > 0.$$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$ • $R = \{3, 4, 5, 6\}$ • $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5,\ P(R) = 0.5,\ P(B) = 0.25$

Question

$P(R|B),\ P(B|R) = ?$

- $P(R|B) = 0.5,\ P(B|R) = 0.25$

- Наблюдаем: $P(B) = P(B|R)$, $P(R) = P(R|B)$. Коэффициент ожидания этих событий a.k.a. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.
- Более формально, чтобы называть A и B независимыми, должно выполняться:

$$P(A|B) = P(A) \text{ И } P(B|A) = P(B), \text{ при } P(A), P(B) > 0.$$

Независимость событий

- Если немного поработаем с идеей о независимости, получим более удобное определение:

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P(B)} \longrightarrow P\left(A \cap B\right) = P(A) \cdot P(B)$$

Definition

События A и B из одного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называются *независимыми*, если:

$$P\left(A \cap B\right) = P(A) \cdot P(B), \text{ при } P(A),\ P(B) > 0.$$

и зависимыми в обратном случае, если таковое равенство не выполняется.

Показательные задачи

Пример 1

Бросаются два кубика. Какова условная вероятность того, что хотя бы на одном из них выпало 6, при условии, что значения на кубиках различны?

Показательные задачи

Пример 2

Бросаются два кубика. Какова условная вероятность того, на первом кубике выпало 4, при условии, что сумма значений 6? Какова условная вероятность того, на первом кубике выпало 4, при условии, что сумма значений 7?

Слайд для записей