Теория вероятностей и математическая статистика

Случайные величины.

Глеб Карпов

ФКН ВШЭ

Случайные величины: Мотивация

- Элементарный исход в общем может иметь различный характер: цвет, буква, звук и т.д. Но для более углубленного и полного анализа случайного эксперимента лучше работать с числами.

Случайные величины: Мотивация

- Элементарный исход в общем может иметь различный характер: цвет, буква, звук и т.д. Но для более углубленного и полного анализа случайного эксперимента лучше работать с числами.
- Можем ли мы также прикрепить число к каждому элементарному исходу независимо от его природы, а затем оперировать **только** в пространстве чисел? Спойлер: это даст нам новые инструменты, которые недоступны, если мы работаем с исходами разной природы.

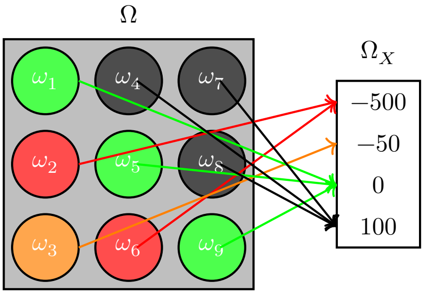
Случайные величины: Мотивация

- Элементарный исход в общем может иметь различный характер: цвет, буква, звук и т.д. Но для более углубленного и полного анализа случайного эксперимента лучше работать с числами.
- Можем ли мы также прикрепить число к каждому элементарному исходу независимо от его природы, а затем оперировать **только** в пространстве чисел? Спойлер: это даст нам новые инструменты, которые недоступны, если мы работаем с исходами разной природы.
- Пример: игральная кость с 6 гранями, 2 грани желтые, 2 грани зеленые, 2 грани черные, без чисел - мы можем искусственно прикрепить числа $1, 2, 3$ к каждому цвету.

Случайные величины: Формальное определение

Результирующее ‘прикрепленное’ число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такое что:

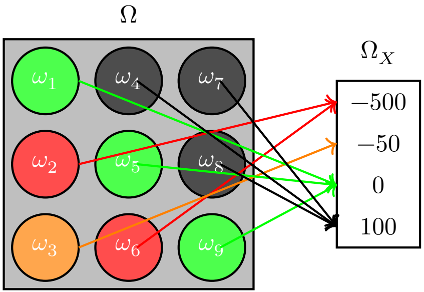


Случайные величины: Формальное определение

Результирующее ‘прикрепленное’ число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такое что:

1. Образ $X(\Omega) = \Omega_X = Im\,X$ (все возможные результаты) является счетным подмножеством $\mathbb{R}$,

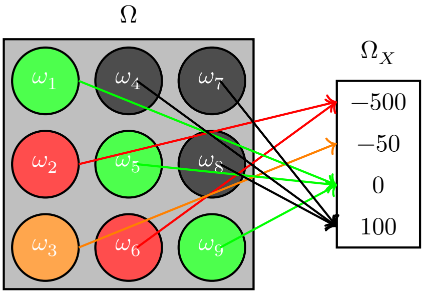


Случайные величины: Формальное определение

Результирующее ‘прикрепленное’ число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такое что:

1. Образ $X(\Omega) = \Omega_X = Im\, X$ (все возможные результаты) является счетным подмножеством $\mathbb{R}$,
2. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$, для $x \in \mathbb{R}$.



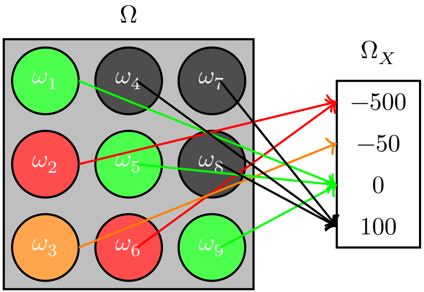
Случайные величины: Формальное определение

Результирующее ‘прикрепленное’ число мы называем случайной величиной.

- Дискретная случайная величина X в пространстве вероятностей $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является отображением $X : \Omega \to \mathbb{R}$, такое что:

1. Образ $X(\Omega) = \Omega_X = Im\,X$ (все возможные результаты) является счетным подмножеством $\mathbb{R}$,
2. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$, для $x \in \mathbb{R}$.

- Для упрощения мы сокращаем события вида $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ до более простого вида $\{X = x\}$.



Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной X - это функция $p_X(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$, заданная как:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной X - это функция $p_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$, заданная как:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

- Свойства:

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной X - это функция $p_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$, заданная как:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

- Свойства:

1. $p_X(x) \geq 0$ для $\forall x \in \Omega_X$, $p_X(x) = 0$ для $x \notin \Omega_X$

Вероятность случайной величины

- Основной оставшийся вопрос - как находить вероятности различных значений С.В.
- Мы знаем, что каждое уникальное значение С.В. привязано к какому-то событию из $\mathcal{F}$. Тогда вероятность этого события и будет вероятностью получить данное значение С.В.
- Определение. Функция вероятности дискретной случайной переменной X - это функция $p_X(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$, заданная как:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(A), \text{ где } A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

- Свойства:

1. $p_X(x) \geq 0$ для $\forall x \in \Omega_X$, $p_X(x) = 0$ для $x \notin \Omega_X$
2. $\sum\limits_{x_i \in \Omega_X} p_X(x_i) = 1$.

$$\sum_{x_i \in \Omega_X} p_X(x_i) = \sum_{x_i \in \Omega_X} P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = P\left(\bigcup_{x_i \in \Omega_X} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = P\left(\Omega\right) = 1.$$

Случайные величины: Пример

Подбрасываются две монеты. Первая монета выпадает орлом с вероятностью 0.6, вторая с вероятностью 0.7. Предположим, что результаты подбрасываний независимы, и пусть X равно общему количеству выпавших орлов. Постройте дискретную случайную величину и её функцию вероятности.

Новое пространство вероятности

- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.

Новое пространство вероятности

- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.
- Например, $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $x_1, \ldots, x_k \in \Omega_X$.

Новое пространство вероятности

- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.
- Например, $A = \{x_1, \dots, x_k\}$, $x_1, \dots, x_k \in \Omega_X$.
- Для вычисления $P(A)$ мы используем принцип аддитивности:

$$P(A) = P(\{X = x_1\} \cup \dots \cup \{X = x_k\}) = \sum_{i=1}^{k} P(\{X = x_i\}).$$

Новое пространство вероятности

- Как и прежде, мы можем комбинировать случайные переменные в события.
- Например, $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $x_1, \ldots, x_k \in \Omega_X$.
- Для вычисления $P(A)$ мы используем принцип аддитивности:

$$P(A) = P(\{X = x_1\} \cup \ldots \cup \{X = x_k\}) = \sum_{i=1}^{k} P(\{X = x_i\}).$$

- В конечном счете, мы можем забыть о нашем оригинальном $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, скрыть их 'под капотом' нашего случайного эксперимента. Вместо этого мы используем новое пространство Ω_X всех возможных значений С.В. и $p_X(x)$ как новую функцию вероятности.

Функции от случайных величин

- Случайная величина, будучи неизвестным, но все-таки числом, может быть аргументом для какой-либо другой функции,

Функции от случайных величин

- Случайная величина, будучи неизвестным, но все-таки числом, может быть аргументом для какой-либо другой функции,
- Например, если X - это количество проданных тортов, то $Y = cX$ - это доход, где c - цена. Далее, $T = Y - aX - b = kX - b$ может быть чистой прибылью, доход за вычетом издержек на производство. Все это - случайные величины!

Функции от случайных величин

- Случайная величина, будучи неизвестным, но все-таки числом, может быть аргументом для какой-либо другой функции,
- Например, если X - это количество проданных тортов, то $Y = cX$ - это доход, где c - цена. Далее, $T = Y - aX - b = kX - b$ может быть чистой прибылью, доход за вычетом издержек на производство. Все это - случайные величины!
-