

Теория вероятностей и математическая статистика

Условная вероятность. Полная вероятность. Формула Байеса.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

Классическая вероятность

- Самая первая модель вероятностного эксперимента, суть которой состоит в предположении о равной вероятности элементарных исходов случайного эксперимента. Под это подходят многие дискретные задачи, связанные со случайным выбором карт, шариков, людей, бросками кубиков и монеток, etc.

Классическая вероятность

- Самая первая модель вероятностного эксперимента, суть которой состоит в предположении о равной вероятности элементарных исходов случайного эксперимента. Под это подходят многие дискретные задачи, связанные со случайным выбором карт, шариков, людей, бросками кубиков и монеток, etc.
- Формализуем: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = p$.

Классическая вероятность

- Самая первая модель вероятностного эксперимента, суть которой состоит в предположении о равной вероятности элементарных исходов случайного эксперимента. Под это подходят многие дискретные задачи, связанные со случайным выбором карт, шариков, людей, бросками кубиков и монеток, etc.
- Формализуем: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = p$.
- Применим свойства вероятности, чтобы получить интуитивно понятный результат о вероятности элементарного исхода:

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_n\} = \bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}$$

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^n \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = n \cdot p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Классическая вероятность

Первая важная формула

- Без потери общности предположим, что некое событие A состоит из $k \leq n$ элементарных исходов, $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$. Нас интересует $P(A)$.

Классическая вероятность

Первая важная формула

- Без потери общности предположим, что некое событие A состоит из $k \leq n$ элементарных исходов, $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$. Нас интересует $P(A)$.
- Получим формулу для вероятности A :

$$A = \{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_k\} = \bigcup_{i=1}^k \{\omega_i\}$$

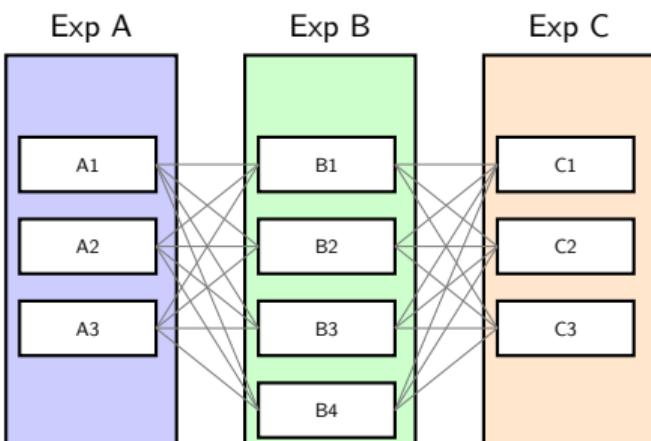
$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^k \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^k P(\{\omega_i\}) = k \cdot p = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Комбинаторная вероятность

Basic principle of counting

Definition

Если r экспериментов должны быть проведены таким образом, что первый может привести к любому из n_1 возможных исходов; и если для каждого из этих n_1 возможных исходов есть n_2 возможных исхода второго эксперимента; и если для каждого из возможных исходов первых двух экспериментов есть n_3 возможных исхода третьего эксперимента; и если ..., то всего существует $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ возможных исходов r экспериментов.



Комбинаторная вероятность

Перестановки

- **Мотивация:** Сколько разных упорядоченных последовательностей получается из множества $\{a, b, c\}$

Комбинаторная вероятность

Перестановки

- **Мотивация:** Сколько разных упорядоченных последовательностей получается из множества $\{a, b, c\}$
- $P_n^r = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)$

Комбинаторная вероятность

Перестановки: примеры

-

Question

Случайная выборка чисел. Пусть популяция состоит из десяти цифр $0, 1, \dots, 9$. Каждая последовательность из пяти цифр представляет выборку размера $r = 5$. Какова вероятность того, что пять последовательных случайных цифр все различны?

Комбинаторная вероятность

Перестановки: примеры

-

Question

Случайная выборка чисел. Пусть популяция состоит из десяти цифр 0, 1, ..., 9. Каждая последовательность из пяти цифр представляет выборку размера $r = 5$. Какова вероятность того, что пять последовательных случайных цифр все различны?

- $P = \frac{P_{10}^5}{10^5} = 0.3024.$

Комбинаторная вероятность

Комбинации

- **Мотивация:** Извлечь три элемента из множества $\{A, B, C, D, E\}$

Комбинаторная вероятность

Комбинации

- **Мотивация:** Извлечь три элемента из множества $\{A, B, C, D, E\}$
- В общем случае, поскольку $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$ представляет количество различных способов, которыми группа из k элементов может быть выбрана из n элементов, когда порядок выбора важен, и поскольку каждая группа из k элементов будет подсчитана $k!$ раз в этом подсчете, следует, что количество различных групп из k элементов, которые могут быть образованы из множества n элементов, равно

$$\frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!} = \frac{n!}{(n - k)!k!}$$

Комбинаторная вероятность

Комбинации

- **Мотивация:** Извлечь три элемента из множества $\{A, B, C, D, E\}$
- В общем случае, поскольку $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$ представляет количество различных способов, которыми группа из k элементов может быть выбрана из n элементов, когда порядок выбора важен, и поскольку каждая группа из k элементов будет подсчитана $k!$ раз в этом подсчете, следует, что количество различных групп из k элементов, которые могут быть образованы из множества n элементов, равно

$$\frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!} = \frac{n!}{(n - k)!k!}$$



i Definition

Мы определяем C_n^k , для $k \leq n$, как

$$C_n^k = \frac{n!}{(n - k)!k!},$$

и говорим, что C_n^k представляет количество возможных комбинаций (коллекций) размера k , полученных из n объектов. Порядок следования элементов в данном случае не считается важным.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

Часто задачи подходят под модель извлечения шариков из мешка.

Пример: Мешок содержит 15 шариков, из которых 10 красных и 5 белых. Из мешка выбирают 4 шарика. Здесь есть неоднозначность: например, если при одном извлечении я выбираю четыре красных шарика, а при другом извлечении четыре других красных шарика, считаются ли эти выборки одинаковыми или нет?

Мы будем предполагать, что это не одинаковые выборки. Например, мы можем представить, что шарики пронумерованы, так что мы можем различать шарики одного цвета. Такой способ мышления очень полезен для вычисления вероятностей в классической схеме.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

Question

Сколько различных выборок (размера 4) возможно?

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

Question

Сколько различных выборок (размера 4) возможно?

- Порядок не важен, но номера важны, поэтому мы выбираем 4 элемента из множества 10 + 5 элементов.
Следовательно, ответ: $C_{15}^4 = 1365$.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

Question

Сколько различных выборок (размера 4) возможно?

- Порядок не важен, но номера важны, поэтому мы выбираем 4 элемента из множества 10 + 5 элементов. Следовательно, ответ: $C_{15}^4 = 1365$.
-

Question

Сколько выборок (размера 4) состоят полностью из красных шариков?

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

Question

Сколько различных выборок (размера 4) возможно?

- Порядок не важен, но номера важны, поэтому мы выбираем 4 элемента из множества 10 + 5 элементов. Следовательно, ответ: $C_{15}^4 = 1365$.
-

Question

Сколько выборок (размера 4) состоят полностью из красных шариков?

- Порядок не важен, но номера важны, мы выбираем 4 элемента из множества красных шариков. Следовательно, ответ: $C_{10}^4 = 210$.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

Question

Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

Question

Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?

- Мы можем выбрать 2 пронумерованных красных шарика C_{10}^2 способами и 2 пронумерованных белых шарика C_5^2 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

Question

Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?

- Мы можем выбрать 2 пронумерованных красных шарика C_{10}^2 способами и 2 пронумерованных белых шарика C_5^2 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$.
-

Question

Сколько выборок (размера 4) содержат ровно 3 красных шарика?

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

Question

Сколько выборок содержат 2 красных и 2 белых шарика?

- Мы можем выбрать 2 пронумерованных красных шарика C_{10}^2 способами и 2 пронумерованных белых шарика C_5^2 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^2 \cdot C_5^2 = 45 \cdot 10 = 450$.
-

Question

Сколько выборок (размера 4) содержат ровно 3 красных шарика?

- Мы можем выбрать 3 пронумерованных красных шарика C_{10}^3 способами и 1 пронумерованный белый шарик C_5^1 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^3 \cdot C_5^1 = 120 \cdot 5 = 600$.

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

-

 Question

Сколько выборок (размера 4) содержат не менее 3 красных шариков?

Комбинаторная вероятность

Комбинации: пример

-

Question

Сколько выборок (размера 4) содержат не менее 3 красных шариков?

- Это количество выборок с 3 красными плюс количество выборок с 4 красными. Мы можем выбрать 4 пронумерованных красных шарика C_{10}^4 способами и 0 пронумерованных белых шариков C_5^0 способами. Ни один выбор не влияет на другой, поэтому ответ: $C_{10}^4 \cdot C_5^0 = 210 \cdot 1 = 210$. Из предыдущего примера, есть 600 способов выбрать выборки с ровно 3 красными шариками, поэтому наш ответ: $600 + 210 = 810$.

Комбинаторная вероятность

Смешанные задачи подсчета

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков

Это также общее количество выборок (1365) минус количество выборок без красных шариков, которое равно $C_{10}^0 \cdot C_5^4 = 5$.

Комбинаторная вероятность

Смешанные задачи подсчета

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

i Question

Сколько выборок (размера 4) содержат хотя бы один красный шарик?

Это также общее количество выборок (1365) минус количество выборок без красных шариков, которое равно $C_{10}^0 \cdot C_5^4 = 5$.

Комбинаторная вероятность

Смешанные задачи подсчета

- 10 красных, 5 белых, пронумерованных шариков
-

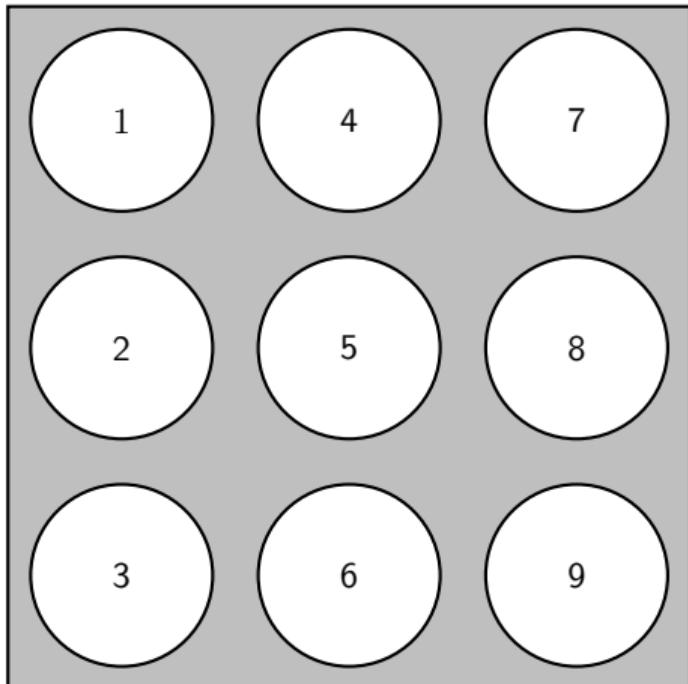
i Question

Сколько выборок (размера 4) содержат хотя бы один красный шарик?

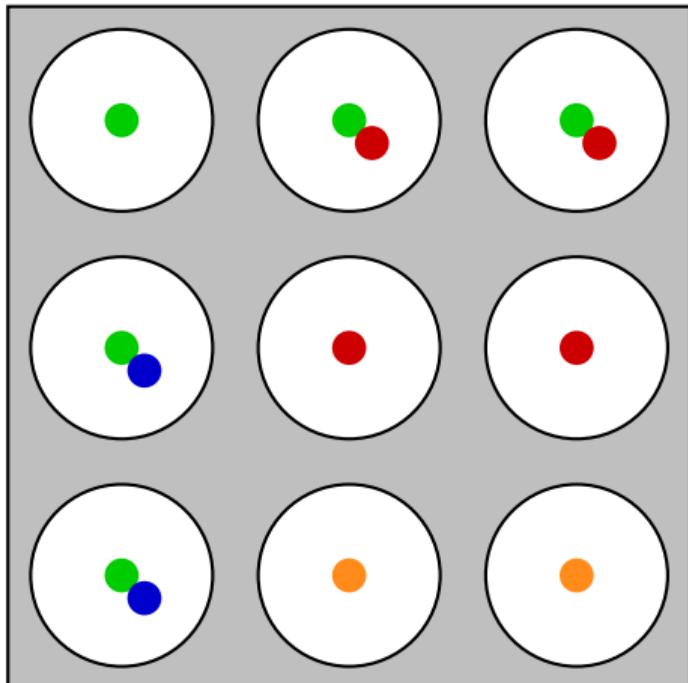
- Это $C_{10}^1 \cdot C_5^3 + C_{10}^2 \cdot C_5^2 + C_{10}^3 \cdot C_5^1 + C_{10}^4 \cdot C_5^0$, что равно
 $10 \cdot 10 + 45 \cdot 10 + 120 \cdot 5 + 210 \cdot 1 = 100 + 450 + 600 + 210 = 1360.$

Это также общее количество выборок (1365) минус количество выборок без красных шариков, которое равно $C_{10}^0 \cdot C_5^4 = 5$.

Мыслительный эксперимент

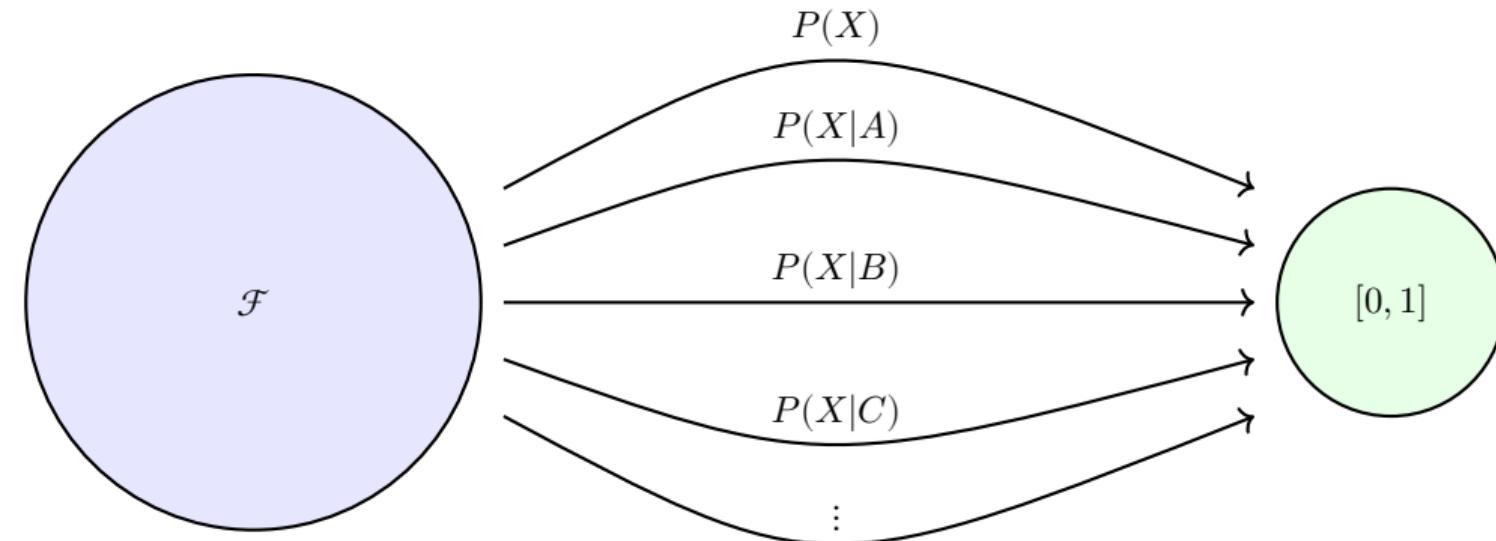


Мыслительный эксперимент



- Зеленая группа: 1,2,3,4,7
- Красная группа: 4,5,7,8
- Синяя группа: 2,3
- Оранжевая группа: 6,9

Условная вероятность



Условная вероятность

• Definition

Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Условная вероятность

Definition

Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Формула Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Условная вероятность

При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

- $\forall X, K \in \mathcal{F} : 0 \leq P(X|K) \leq 1$

Условная вероятность

При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

- $\forall X, K \in \mathcal{F} : 0 \leq P(X|K) \leq 1$
- $\forall K \in \mathcal{F} : P(\Omega|K) = 1$. Easy to show: $P(\Omega|K) = \frac{P(\Omega \cap K)}{P(K)} = (K \subseteq \Omega) = \frac{P(K)}{P(K)} = 1$

Условная вероятность

При каждом зафиксированном значении параметра (условия) $P(X|K)$ - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

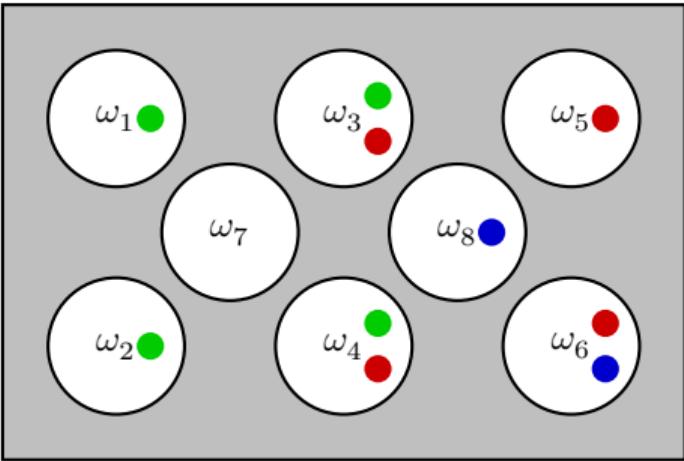
- $\forall X, K \in \mathcal{F} : 0 \leq P(X|K) \leq 1$
- $\forall K \in \mathcal{F} : P(\Omega|K) = 1$. Easy to show: $P(\Omega|K) = \frac{P(\Omega \cap K)}{P(K)} = (K \subseteq \Omega) = \frac{P(K)}{P(K)} = 1$
- Аддитивность вероятности:

$$\forall X, Y, K \in \mathcal{F} : X \cap Y = \emptyset, P((X \cup Y)|K) = P(X|K) + P(Y|K)$$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$

- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$



Question

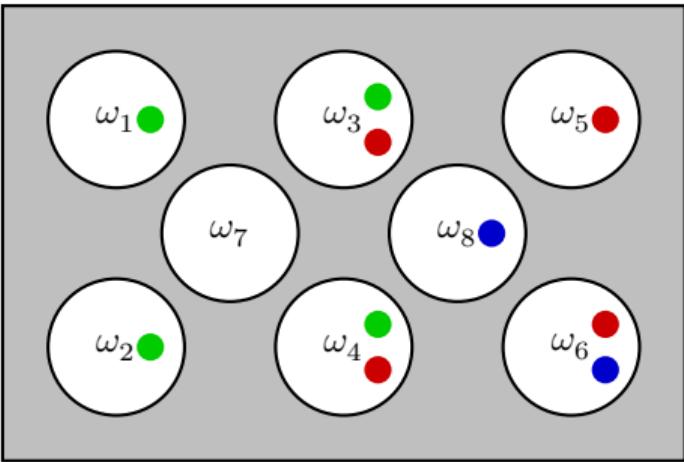
$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

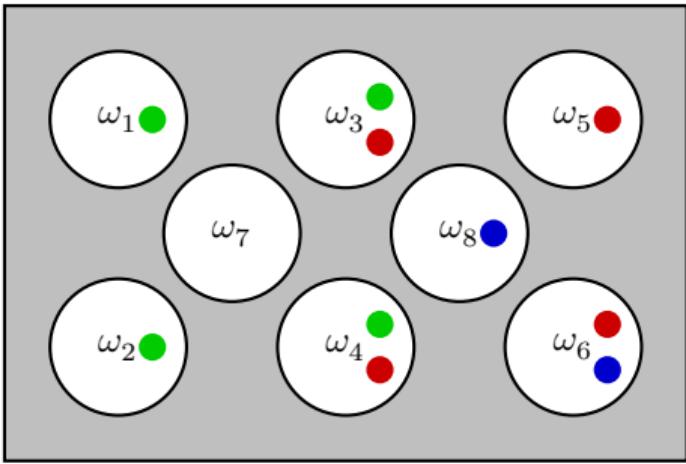
- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

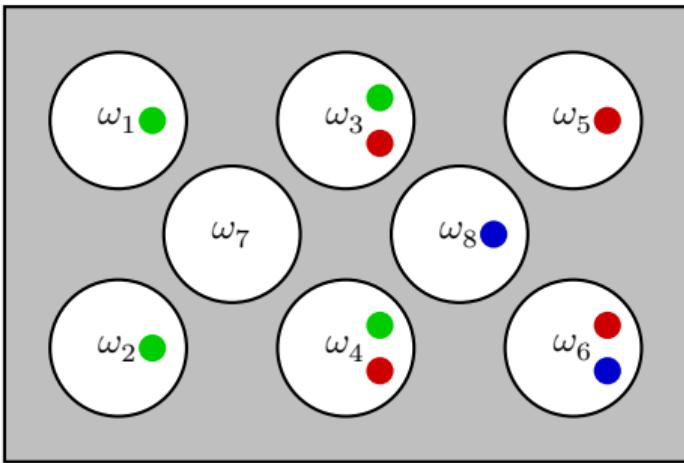
Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

- $P(R|B) = 0.5, P(B|R) = 0.25$

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

Question

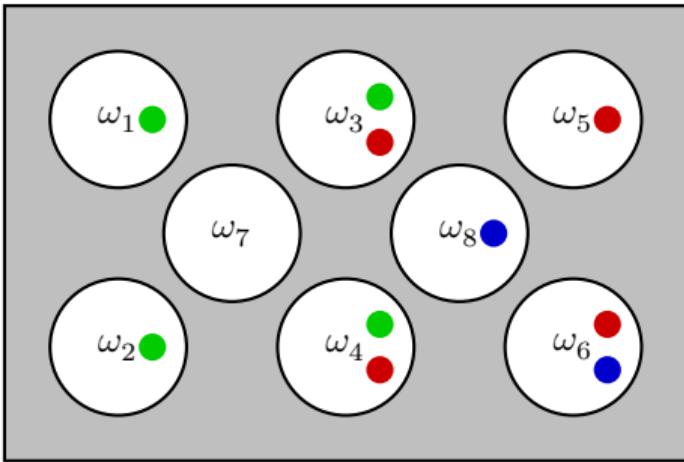
$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

- $P(R|B) = 0.5, P(B|R) = 0.25$

- Наблюдаем: $P(B) = P(B|R)$, $P(R) = P(R|B)$. Коэффициент ожидания этих событий а.к.а. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.

Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

- $P(R|B) = 0.5, P(B|R) = 0.25$

- Наблюдаем: $P(B) = P(B|R)$, $P(R) = P(R|B)$. Коэффициент ожидания этих событий а.к.а. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.
- Более формально, чтобы называть A и B независимыми, должно выполняться:

$$P(A|B) = P(A) \text{ И } P(B|A) = P(B), \text{ при } P(A), P(B) > 0.$$

Независимость событий

- Если немного поработаем с идеей о независимости, получим более удобное определение:

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

i Definition

События A и B из одного вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) называются независимыми, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

и зависимыми в обратном случае.