ВШБ Бизнес-информатика: ТВиМС 2025.
Лист задач для самостоятельного решения #7 (internal).
Нормальное распределение.

1. Для случайной величины $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ найдите вероятности следующих событий:
   (a) $P(-1.5 < Z < 0.5)$,
   (b) $P(Z < 1.25)$,
   (c) $P(Z > 0.5)$,
   (d) $P(Z < -0.25)$,
   (e) $P(-2 < Z < -1)$,
   (f) Найдите такую точку z_α, что $P(Z > z_\alpha) = 0.025$.
   Для подобных вопросов, когда наоборот нам дана вероятность и надо найти точку, мы тоже используем таблицу стандартного нормального распределения. Если в таблице нет точного значения вероятности, то мы выбираем ближайшее значение и используем его.
   (g) Найдите такую точку z_α, что $P(Z > z_\alpha) = 0.898$.

2. * Дневная выручка торговой точки распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $80,000$ рублей и стандартным отклонением $16,000$ рублей. Найдите вероятность того, что выручка окажется:
   (a) в пределах от $56,000$ рублей до $88,000$ рублей.
   (b) более $88,000$ рублей.
   (c) в пределах от $48,000$ рублей до $64,000$ рублей.
   (d) менее $76,000$ рублей.
   (e) менее $100,000$ рублей.
   (f) Какой должна быть выручка за день, чтобы можно было сказать, что этот день попал в 2.5% дней с наибольшей выручкой?
   (g) Какой должна быть выручка за день, чтобы можно было сказать, что этот день попал в 10.2% дней с наименьшей выручкой?

   У этой и предыдущей задач ответы совпадают, но перемешаны. Это прекрасная начальная иллюстрация того, что нет разницы, какое именно перед нами нормальное распределение: любое нормальное распределение мы можем свести к стандартному нормальному распределению.

3. Пусть X — нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением σ. Используя таблицу стандартного нормального распределения, вычислите вероятности событий $\{X \geq k\sigma\}$ и $\{|X| \leq k\sigma\}$ для $k = 1,\ 2,\ 3$.

4. * Предположим, что X — нормальная случайная величина с математическим ожиданием 5.
   Если $P\{X > 9\} = 0.2$, то чему приблизительно равна $Var(X)$?

5. Пусть X — нормальная случайная величина с математическим ожиданием 12 и дисперсией 4. Найдите такое значение c, что $P\{X > c\} = 0.1$.

6. (a) Для случайной величины $Y \sim \mathcal{N}(\mu, 5^2)$ известно, что $P(Y \geq 1) = 0.0668$. Найдите $P(Y \leq 0)$.
   (b) Найдите такой симметричный относительно математического ожидания промежуток, в который случайная величина $U \sim \mathcal{N}(1000, 200^2)$ попадет с вероятностью 0.95.
   Иными словами, найдите такое a, что $P\left(1000 - a \leq U \leq 1000 + a\right) = 0.95$.

7. * Предположим, что число посетителей кафе за день – случайная величина, распределенная по нормальному закону. Управляющий кафе знает, что с вероятность 0.2 число посетителей окажется больше 900, а с вероятностью 0.3 меньше 800. Найдите среднее число посетителей за день и стандартное отклонение числа посетителей за день. Запишите функцию плотности, изобразите график, покажите с помощью графика указанные в задаче вероятности.

8. Предположим, что срок службы телефона - нормальная случайная величина со средним значением 24 месяца и стандартным отклонением 3 месяца. Какой максимальный срок гарантии можно выставить, если мы готовы ремонтировать по гарантии не более 10% телефонов? Запишите функцию плотности, изобразите график, покажите с помощью графика указанную в задаче вероятность.

9. Вес дынь, продаваемых в супермаркете, имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 3 кг и стандартным отклонением 500 г.

   (a) Опишите функцию вероятности дискретной случайной величины X — числа дынь тяжелее 4 кг среди 4 дынь.

   (b) Чему равна вероятность того, что среди 4 дынь хотя бы одна тяжелее 4 кг?

10. * Машина, заполняющая банки, подает в каждую банку объем X фруктов и объем Y сока. Известно, что X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 260 и стандартным отклонением 17, тогда как Y имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 150 и стандартным отклонением 10. Эти случайные величины можно считать независимыми.

    (a) Вычислите вероятность того, что объем фруктов, загруженных машиной в банку, больше 290 единиц.

    (b) Найдите вероятность того, что объем поданных фруктов более чем в два раза превышает объем сока.

    (c) Если вместимость банки составляет 400 единиц, чему равна вероятность того, что после заполнения банка окажется недозаполнена?

11. * Предположим, что $V_i \sim \mathcal{N}(500, 45^2)$, $W_j \sim \mathcal{N}(300, 70^2)$ и все случайные величины независимы.

    Это хороший показательный пример. Перед решением, например, можно подумать о том, какое распределение имеют случайные величины: $2V_1$, $V_1 + V_2$, $V_1 - V_2$? *Если распределения отличаются, в том числе по параметрам, то как и почему?*

    (a) Найдите $P(9 \cdot V_1 + 11 \cdot W_1 < 8000)$.

    (b) Найдите $P(V_1 + \ldots + V_9 + W_1 + \ldots + W_{11} < 8000)$.

12. На курсе из 180 человек обучается 10 сильных студентов, их оценка по предмету - $X \sim \mathcal{N}(7.5,\ (0.8)^2)$, оценка для обычных студентов - $Y \sim \mathcal{N}(6,\ 1)$.

    (a) Найдите вероятность того, что работу, получившую 8 или больше (без округлений), написал сильный студент.

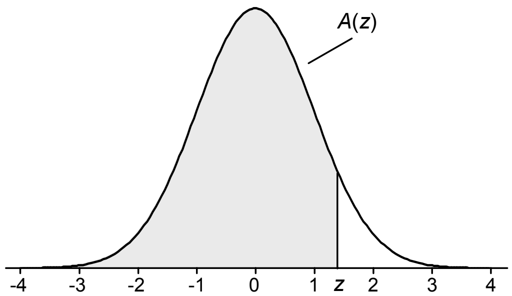
    (b) Найдите вероятность того, что случайный сильный студент получит более высокую оценку, чем случайный обычный студент.

13. * В группе 32 студента. Известно, что оценка студента за экзамен распределена по нормальному закону со средним 7.1 и стандартным отклонением 1.2. Учебная часть требует у старосты следующие данные: суммарный балл группы и средний балл по группе. Учитывая, что конечно же студенты не списывают, то есть сдают экзамен независимо друг от друга, найдите вероятность того, что:

    (a) суммарный балл группы (сумма всех оценок) превзойдет 220 баллов,

    (b) средний балл по группе будет выше, чем 6.9.

Cumulative Standardized Normal Distribution



$A(z)$ is the integral of the standardized normal distribution from $-\infty$ to z (in other words, the area under the curve to the left of z). It gives the probability of a normal random variable not being more than z standard deviations above its mean. Values of z of particular importance:

z	$A(z)$	
1.645	0.9500	Lower limit of right 5% tail
1.960	0.9750	Lower limit of right 2.5% tail
2.326	0.9900	Lower limit of right 1% tail
2.576	0.9950	Lower limit of right 0.5% tail
3.090	0.9990	Lower limit of right 0.1% tail
3.291	0.9995	Lower limit of right 0.05% tail

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999							