

# Теория вероятностей и математическая статистика

Дискретные случайные величины и их свойства.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

## Функции от случайных величин

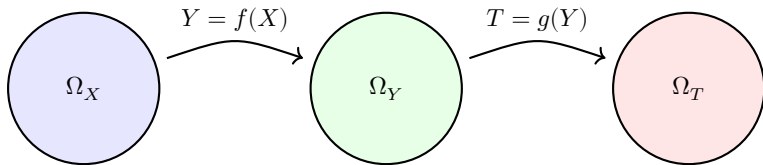
- Случайная величина, будучи неизвестным, но все-таки числом, может быть аргументом для какой-либо другой функции,

## Функции от случайных величин

- Случайная величина, будучи неизвестным, но все-таки числом, может быть аргументом для какой-либо другой функции,
- Например, если  $X$  - это количество проданных тортов, то  $Y = cX$  - это доход, где  $c$  - цена. Далее,  $T = Y - aX - b = kX - b$  может быть чистой прибылью, доход за вычетом издержек на производство. Все это - случайные величины!

## Функции от случайных величин

- Случайная величина, будучи неизвестным, но все-таки числом, может быть аргументом для какой-либо другой функции,
- Например, если  $X$  - это количество проданных тортов, то  $Y = cX$  - это доход, где  $c$  - цена. Далее,  $T = Y - aX - b = kX - b$  может быть чистой прибылью, доход за вычетом издержек на производство. Все это - случайные величины!



## Функции от случайных величин

### Пример

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение случайной величины  $Y = X^2 + 10$ .

Наша задача: восстановить новое пространство элементарных исходов  $\Omega_Y$  для величины  $Y$  и выразить новую функцию вероятности  $P_Y(y)$  через старую известную  $P_X(x)$ .

- $P_Y(Y = 10) = P_X(\{X = 0\}) = 0.1$

## Функции от случайных величин

### Пример

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение случайной величины  $Y = X^2 + 10$ .

Наша задача: восстановить новое пространство элементарных исходов  $\Omega_Y$  для величины  $Y$  и выразить новую функцию вероятности  $P_Y(y)$  через старую известную  $P_X(x)$ .

- $P_Y(Y = 10) = P_X(\{X = 0\}) = 0.1$
- $P_Y(Y = 11) = P_X(\{X = 1\} \cup \{X = -1\}) = P_X(\{X = 1\}) + P_X(\{X = -1\}) = 0.3$

## Функции от случайных величин

### Пример

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение случайной величины  $Y = X^2 + 10$ .

Наша задача: восстановить новое пространство элементарных исходов  $\Omega_Y$  для величины  $Y$  и выразить новую функцию вероятности  $P_Y(y)$  через старую известную  $P_X(x)$ .

- $P_Y(Y = 10) = P_X(\{X = 0\}) = 0.1$
- $P_Y(Y = 11) = P_X(\{X = 1\} \cup \{X = -1\}) = P_X(\{X = 1\}) + P_X(\{X = -1\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 14) = P_X(\{X = 2\} \cup \{X = -2\}) = P_X(\{X = 2\}) + P_X(\{X = -2\}) = 0.3$

## Функции от случайных величин

### Пример

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение случайной величины  $Y = X^2 + 10$ .

Наша задача: восстановить новое пространство элементарных исходов  $\Omega_Y$  для величины  $Y$  и выразить новую функцию вероятности  $P_Y(y)$  через старую известную  $P_X(x)$ .

- $P_Y(Y = 10) = P_X(\{X = 0\}) = 0.1$
- $P_Y(Y = 11) = P_X(\{X = 1\} \cup \{X = -1\}) = P_X(\{X = 1\}) + P_X(\{X = -1\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 14) = P_X(\{X = 2\} \cup \{X = -2\}) = P_X(\{X = 2\}) + P_X(\{X = -2\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 19) = P_X(\{X = 3\}) = 0.3$



## Функции от случайных величин

### Пример

Пусть распределение случайной величины задано таблицей

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

Постройте распределение случайной величины  $Y = X^2 + 10$ .

Наша задача: восстановить новое пространство элементарных исходов  $\Omega_Y$  для величины  $Y$  и выразить новую функцию вероятности  $P_Y(y)$  через старую известную  $P_X(x)$ .

- $P_Y(Y = 10) = P_X(\{X = 0\}) = 0.1$
- $P_Y(Y = 11) = P_X(\{X = 1\} \cup \{X = -1\}) = P_X(\{X = 1\}) + P_X(\{X = -1\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 14) = P_X(\{X = 2\} \cup \{X = -2\}) = P_X(\{X = 2\}) + P_X(\{X = -2\}) = 0.3$
- $P_Y(Y = 19) = P_X(\{X = 3\}) = 0.3$

$y$	10	11	14	19
$p_Y(y)$	0.1	0.3	0.3	0.3

## Функции от случайных величин

- Если  $Y = g(X)$ , то  $Y$  это новая случайная величина, со своими характеристиками, со своими возможными значениями  $\Omega_Y$ , и со своей функцией вероятности  $P_Y(y)$ .

## Функции от случайных величин

- Если  $Y = g(X)$ , то  $Y$  это новая случайная величина, со своими характеристиками, со своими возможными значениями  $\Omega_Y$ , и со своей функцией вероятности  $P_Y(y)$ .

### 💡 Построение новой функции вероятности

Если  $Y = g(X)$ , функцию вероятности для  $Y$  можно выразить через функцию вероятности для  $X$ :

$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(\{X \in g^{-1}(y)\}) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x)$$

## Функции от случайных величин

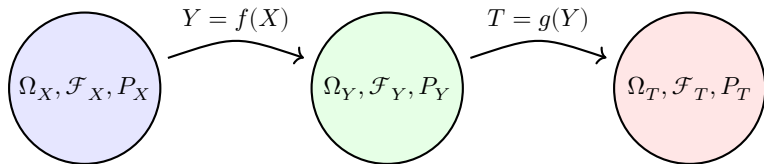
- Если  $Y = g(X)$ , то  $Y$  это новая случайная величина, со своими характеристиками, со своими возможными значениями  $\Omega_Y$ , и со своей функцией вероятности  $P_Y(y)$ .

### 💡 Построение новой функции вероятности

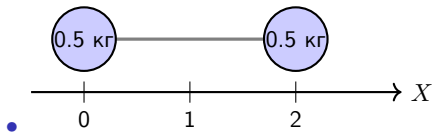
Если  $Y = g(X)$ , функцию вероятности для  $Y$  можно выразить через функцию вероятности для  $X$ :

$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(\{X \in g^{-1}(y)\}) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x)$$

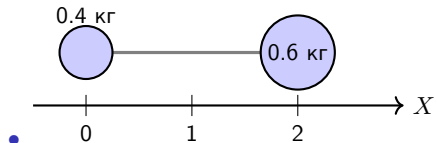
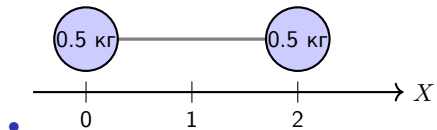
- Можно расширить предыдущую картинку и в каком-то смысле говорить, что функция от случайной величины порождает абсолютно новый случайный эксперимент с новым вероятностным пространством (тройкой Колмогорова):



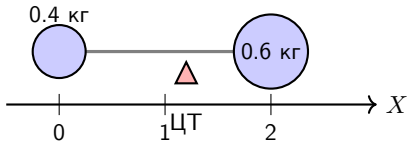
## Физическое Лирическое отступление



## Физическое Лирическое отступление

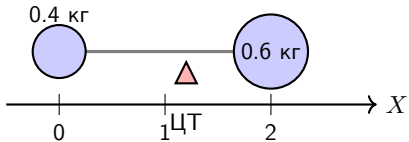


## Физическое Лирическое отступление



- $x_{gc} = \sum_i x_i m_i$ , при  $\sum_i m_i = 1$ .

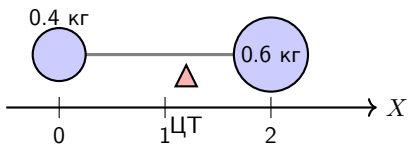
## Физическое Лирическое отступление



- $x_{gc} = \sum_i x_i m_i$ , при  $\sum_i m_i = 1$ .
- В данном примере  $x_{gc} = 0 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.6 = 1.2$



## Физическое Лирическое отступление



- $x_{gc} = \sum_i x_i m_i$ , при  $\sum_i m_i = 1$ .
- В данном примере  $x_{gc} = 0 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.6 = 1.2$
- Предположим С.В., которую мы реализуем  $10^5$  раз с  $P_X(0) = 0.4$ ,  $P_X(2) = 0.6$ . Посчитаем среднее суммы за все испытания:

$$avg = \frac{\approx 60000 \cdot 2 + \approx 40000 \cdot 0}{10^5} \approx 1.2$$

## Характеристики С.В.: Математическое ожидание

- Математическое ожидание - это число, **константа**, которое помогает нам понять тренд значений, куда в среднем стремятся значения случайной величины на большой дистанции.

## Характеристики С.В.: Математическое ожидание

- Математическое ожидание - это число, **константа**, которое помогает нам понять тренд значений, куда в среднем стремятся значения случайной величины на большой дистанции.
- Можно рассматривать это как средний результат множества реализаций данного случайного эксперимента.

## Характеристики С.В.: Математическое ожидание

- Математическое ожидание - это число, **константа**, которое помогает нам понять тренд значений, куда в среднем стремятся значения случайной величины на большой дистанции.
- Можно рассматривать это как средний результат множества реализаций данного случайного эксперимента.
- Ожидаемое значение может не входить в набор возможных значений  $\Omega_X$ .

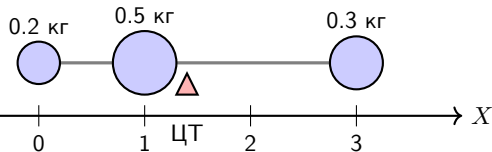
## Характеристики С.В.: Математическое ожидание

- Математическое ожидание - это число, **константа**, которое помогает нам понять тренд значений, куда в среднем стремятся значения случайной величины на большой дистанции.
- Можно рассматривать это как средний результат множества реализаций данного случайного эксперимента.
- Ожидаемое значение может не входить в набор возможных значений  $\Omega_X$ .
- Если  $X$  - дискретная случайная величина, то ожидание  $X$  обозначается как  $E[X]$  и определяется как:

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega_X} xP(X = x) = \sum_{x \in \Omega_X} xP_X(x).$$

## Характеристики С.В.: Математическое ожидание

В физическом мире:



- $x_{gc} = \sum x_i m_i = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 1.4$

В вероятностном мире:

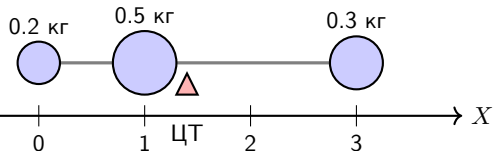
$x$	0	1	3
$p_X(x)$	0.2	0.5	0.3

### 💡 Fun facts

В международной литературе функция вероятности дискретной случайной величины  $P_X(x)$  называется Probability **Mass** Function, своим названием явно подчеркивая аналогию, что вероятность может выступать в роли “массы” элементарного исхода. Тогда математическое ожидание можно интерпретировать как взвешенную сумму всех исходов, где в качестве веса используется вероятность.

## Характеристики С.В.: Математическое ожидание

В физическом мире:



- $x_{gc} = \sum x_i m_i = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 1.4$

В вероятностном мире:

$x$	0	1	3
$p_X(x)$	0.2	0.5	0.3

- $E[X] = \sum x_i \cdot P_X(X = x_i) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3 = 1.4$

### 💡 Fun facts

В международной литературе функция вероятности дискретной случайной величины  $P_X(x)$  называется Probability **Mass** Function, своим названием явно подчеркивая аналогию, что вероятность может выступать в роли “массы” элементарного исхода. Тогда математическое ожидание можно интерпретировать как взвешенную сумму всех исходов, где в качестве веса используется вероятность.

## Свойства математического ожидания

1. **Линейность:** Для любых констант  $a$  и  $b$ :

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

2. **Константа:** Если  $c$  - константа, то:

$$E[c] = c$$

3. **Ожидание функции:** Для функции  $Y = g(X)$ :

$$E[g(X)] = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)P(X = x)$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y \in \Omega_Y} y P(Y = y) = \\ &= \sum_{y \in \Omega_Y} y \left( \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x) \right) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x)P(X = x) \end{aligned}$$



## Математическое ожидание: пример

Посмотрим на примеры вычисления математического ожидания на основе уже посчитанной задачи:

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

$y$	10	11	14	19
$p_Y(y)$	0.1	0.3	0.3	0.3

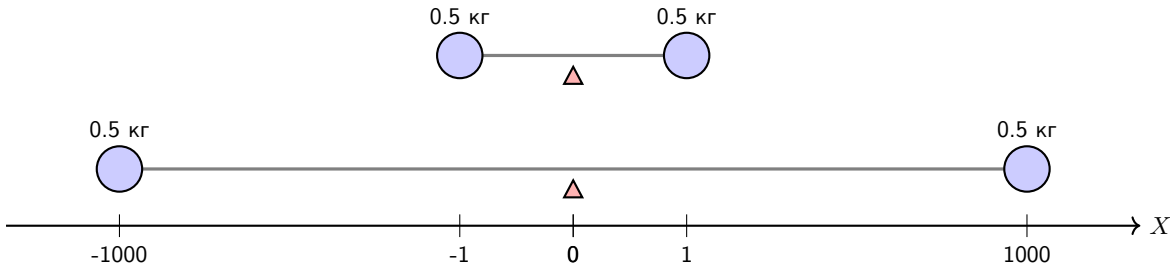
- $E[X] = \sum_{i=1}^6 x_i P_X(X = x_i) = -0.1 - 0.2 + 0.2 + 0.4 + 0.9 = 1.2$
- Первый подход к вычислению  $E[Y]$  - по определению, зная таблицу функции вероятности для  $Y$ :

$$E[Y] = \sum_{i=1}^4 y_i P_Y(Y = y_i) = 10 \cdot 0.1 + 11 \cdot 0.3 + 14 \cdot 0.3 + 19 \cdot 0.3 = 14.2$$

- Второй подход к вычислению  $E[Y]$  - по свойству **3** с предыдущего слайда. Главная идея: мы можем миновать шаг построения таблицы вероятности для  $Y$  и сразу предсказать, каким будет  $E[Y]$ , по таблице вероятностей для  $X$  и зная вид функции  $Y = g(X)$ , в нашем примере  $Y = X^2 + 10$ :

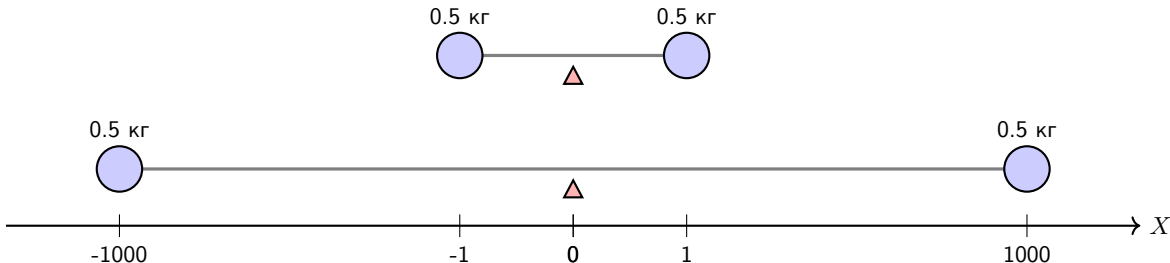
$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{i=1}^6 g(x_i) P_X(X = x_i) = \sum_{i=1}^6 (x_i^2 + 10) P_X(X = x_i) = \\ &= 10 \cdot 0.1 + 11 \cdot 0.1 + 14 \cdot 0.1 + 11 \cdot 0.2 + 14 \cdot 0.2 + 19 \cdot 0.3 = 14.2 \end{aligned}$$

## Физическое Лирическое отступление 2



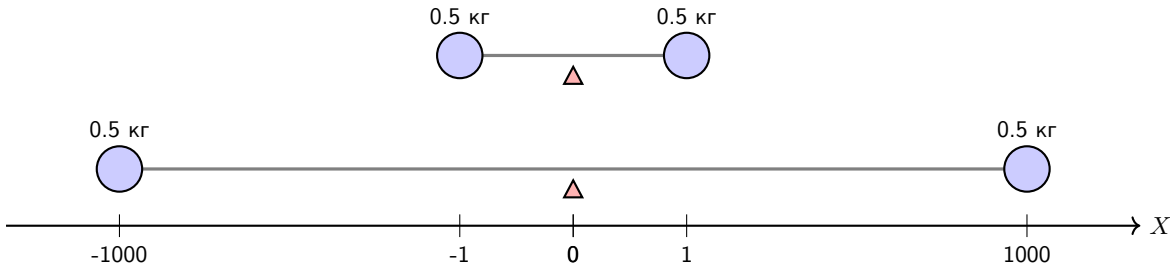
- В вероятностном мире интерпретация картинки такая, что может быть две случайные величины с одинаковым математическим ожиданием, но с кардинально разными значениями.

## Физическое Лирическое отступление 2



- В вероятностном мире интерпретация картинки такая, что может быть две случайные величины с одинаковым математическим ожиданием, но с кардинально разными значениями.
- Представьте, что в одном случае вы кидаете монетку с привязанными численными значениями  $+1$  и  $-1$  (например, выигрыш - проигрыш), а в другом ту же монетку, но с привязанными значениями уже  $+1000$  и  $-1000$ . Математическое ожидание в обоих случаях будет 0, но сравните магнитуды возможных значений!

## Физическое Лирическое отступление 2



- В вероятностном мире интерпретация картинки такая, что может быть две случайные величины с одинаковым математическим ожиданием, но с кардинально разными значениями.
- Представьте, что в одном случае вы кидаете монетку с привязанными численными значениями  $+1$  и  $-1$  (например, выигрыш - проигрыш), а в другом ту же монетку, но с привязанными значениями уже  $+1000$  и  $-1000$ . Математическое ожидание в обоих случаях будет 0, но сравните магнитуды возможных значений!
- Это помогает нам понять мотивацию введения новой характеристики для случайной величины - **дисперсии** - которая сможет охарактеризовать степень разброса значений случайной величины.

## Характеристики С.В.: Дисперсия

- Дисперсия случайной величины - это число, **константа**, которое помогает нам понять степень разброса потенциальных значений случайной величины относительно среднего.

## Характеристики С.В.: Дисперсия

- Дисперсия случайной величины - это число, **константа**, которое помогает нам понять степень разброса потенциальных значений случайной величины относительно среднего.
- Для случайной величины  $X$  её дисперсия обозначается  $Var[X]$  (Variance) и определяется как:

$$Var[X] = E \left[ (X - E[X])^2 \right]$$

## Характеристики С.В.: Дисперсия

- Дисперсия случайной величины - это число, **константа**, которое помогает нам понять степень разброса потенциальных значений случайной величины относительно среднего.
- Для случайной величины  $X$  её дисперсия обозначается  $Var[X]$  (Variance) и определяется как:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

- Формально говоря, это математическое ожидание новой случайной величины:

$$Y = g(X) = (X - E[X])^2,$$

описывающей квадрат расстояния между значением случайной величины  $X$  и её математическим ожиданием.

## Характеристики С.В.: Дисперсия

### Вычисление дисперсии

Существует упрощенная формула:

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^2] &= E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] = \\ &= E[X^2] - E[2E[X]X] + E[(E[X])^2] = E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 = \\ &\quad \boxed{E[X^2] - (E[X])^2} \end{aligned}$$

В процессе мы используем свойство линейности математического ожидания, а также знание того, что  $E[X]$  - это константа, при этом  $E[c] = c$ , то есть  $E[E[X]] = E[X]$ .



## Свойства дисперсии

1. **Неотрицательность:** Для любой случайной величины  $X$ :

$$\text{Var}[X] \geq 0$$

2. **Дисперсия константы:** Если  $c$  - константа, то:

$$\text{Var}[c] = 0$$

3. **Масштабирование:** Для любой константы  $c$ :

$$\text{Var}[cX] = c^2 \text{Var}[X]$$

## Дисперсия: пример

Посчитаем дисперсию на примере нашей задачи. Считаем уже известным, что  $E[X] = 1.2$ .

$x$	0	-1	-2	1	2	3
$p_X(x)$	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

- Нам нужно вычислить  $E[Y]$ , где  $Y = (X - E[X])^2$ . Сразу воспользуемся подходом, позволяющим миновать шаг построения таблицы вероятности для  $Y$ :

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{i=1}^6 g(x_i) P_X(X = x_i) = \sum_{i=1}^6 (x_i - 1.2)^2 P_X(X = x_i) = \\ &= 1.44 \cdot 0.1 + 4.84 \cdot 0.1 + 10.24 \cdot 0.1 + 0.04 \cdot 0.2 + 0.64 \cdot 0.2 + 3.24 \cdot 0.3 = 2.76 \end{aligned}$$

- Но для дисперсии у нас есть ещё более умный подход, описанный на одном из слайдов выше:

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = 4.2 - (1.2)^2 = 2.76 \\ E[X^2] &= \sum_{i=1}^6 (x_i)^2 P_X(X = x_i) = 0.1 + 4 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.3 = 4.2 \end{aligned}$$

- Voilà!