

ВШБ Бизнес-информатика: ТВиМС 2025.
Лист задач для самостоятельного решения #3а.
Условная вероятность. Независимость событий.
(Полная вероятность. Теорема Байеса)

1. Компания А обанкротится с вероятностью 0.4, компания В обанкротится с вероятностью 0.2 независимо от первой. Найти вероятности следующих событий:

- (а) обанкротится ровно одна компания.
- (б) обанкротится хотя бы одна компания.
- (с) обанкротятся обе компании.
- (д) обанкротилась А, если известно, что обанкротилась ровно одна компания.
- (е) обанкротилась А, если известно, что обанкротилась как минимум одна компания.

Укажите все места, где использовалась независимость, все места, где использовалась несовместность.

УКАЗАНИЕ: а) $0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.44$

б) $0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2 = 1 - 0.6 \cdot 0.8 = 0.52$

в) $0.4 \cdot 0.2 = 0.08$

г) $0.4 \cdot 0.8 / (0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2) = 0.32 / 0.44 \approx 0.727$

д) $(0.4 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2) / (0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2) = 0.4 / 0.52 \approx 0.769$

2. Брат и сестра путешествуют на поезде. У них обоих нет билетов, и контролёр поймал их. Он уполномочен применить особое наказание за это правонарушение. У него есть коробка с девятью внешне одинаковыми шоколадными конфетами, три из которых содержат снотворное моментального действия, такое, что человек проспит месяц. Контролёр заставляет каждого из нарушителей по очереди выбрать и немедленно съесть одну конфету.

- (а) Если брат выбирает перед сестрой, какова вероятность того, что он уснет?
- (б) Если брат выбирает первым и не впадает в кому, какова вероятность того, что сестра останется бодрствующей?
- (с) Если брат выбирает первым и впадает в кому, какова вероятность того, что сестра останется бодрствующей?
- (д) В интересах ли сестры убедить брата выбирать первым? *И.е.* есть ли разница в вероятности засыпания в зависимости от того, кто выбирает первым?

A – событие, соответствующее впасть в кому, выбирая первым. B – событие, соответствующее впасть в кому, выбирая вторым.

(а) $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, следовательно $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$

(б) $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{5}{8}$

(с) $P(\bar{B}|A) = \frac{6}{8}$

(д)

$$P(\bar{B}) = P(\bar{B}|\bar{A})P(\bar{A}) + P(\bar{B}|A)P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{24} + \frac{6}{24} = \frac{2}{3}$$

Получаем, что $P(\bar{B}) = P(\bar{A})$, что означает, что нет разницы в стратегиях выбора.

3. Подбросили две игральные кости. Введем следующие события: A — на первой кости выпала тройка, B — сумма очков является четным числом, C — на второй кости выпало больше очков, чем на первой.

- (а) Найдите вероятность каждого из событий A , B и C .
 (б) Найдите условную вероятность $P(A|C)$.
 (с) Проверьте, есть ли среди событий A , C и $B \cap C$ пары независимых событий.

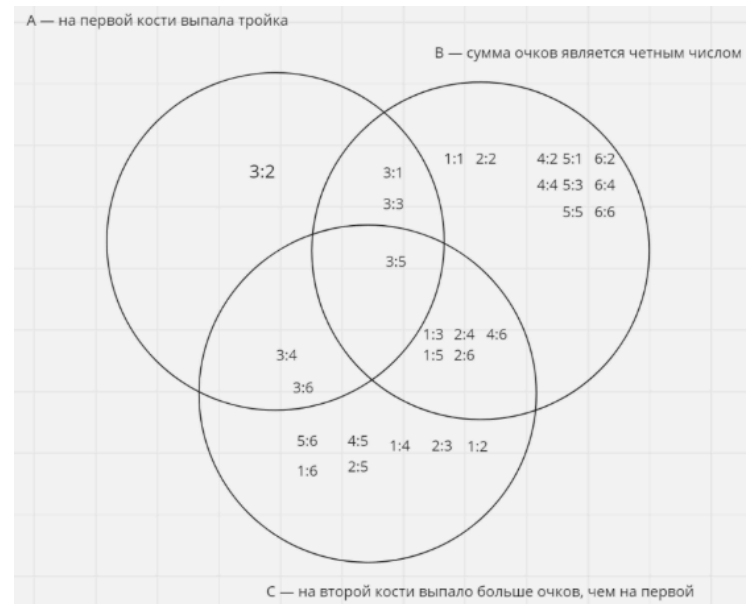
а) $6/36$, $18/36$, $15/36$

б) $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{3}{15} = 0.2$

в) $P(A|C) \neq P(A)$ — зависимы

$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6} = P(A)$

$P(C|B \cap C) = \frac{P(C \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = 1 \neq P(C)$



4. Три студента — А, В и С независимо друг от друга опаздывают на занятия с соответствующими вероятностями 0.6, 0.3, и 0.8.

- (а) Найти вероятность того, что никто из них не опаздывает.
 (б) Найти вероятность того, что опоздают ровно двое из них.
 (с) Найти вероятность того, что опоздает хотя бы один из них.
 (д) Найти вероятность того, что А опоздал, если известно, что опоздал как минимум один из них.
 (е) Известно, что А опоздал, найти вероятность того, что опоздали как минимум двое из них.

Укажите все места, где использовалась независимость, все места, где использовалась несовместность.

Указание: а) $0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 = 0.056$ умножать можно т.к. независимы

б) $0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.468$ складывать можно т.к. несовместны

в) $1 - 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 = 1 - 0.056 = 0.944 = 0.6 + 0.8 + 0.3 - 0.6 \cdot 0.3 - 0.3 \cdot 0.8 - 0.6 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.8$

г) Пусть событие E заключается в том, что опоздал хотя бы один из них:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C})}{P(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C})}$$

Если внимательно посмотреть, то это равно $\frac{P(A)}{1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})} = \frac{0.6}{0.944} \approx 0.636$

д) Пусть событие T заключается в том, что опоздали как минимум двое из них:

$$P(T|A) = \frac{P(A \cdot (AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}))}{P(A)} = \frac{P(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC)}{P(A)} = 0.86$$

5. Студент сдает сессию. Рассмотрим два события: A – студент готовится к экзамену по теорверу, B – студент сдает экзамен по теорверу на отлично. Известны вероятности следующих событий: $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$, $P(A \cap B) = 0.18$.

Найдите вероятности, дайте словесные формулировки событий: $P(A \cup B)$, $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$, $P(\bar{A}|B)$, $P(\bar{B}|A)$, $P(B|\bar{A})$.

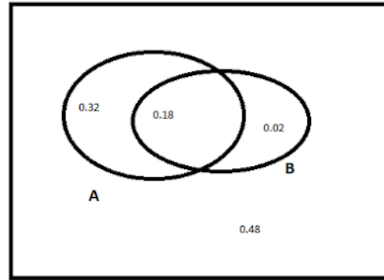
Например, по последней вероятности словесная формулировка: найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если известно, что он не готовился.

ОТВЕТ: 0.52, 0.9, 0.4, 0.1, 0.64, 0.04

УКАЗАНИЕ: С помощью диаграмм или по формулам получаем – **только** A соответствует 0.32, **только** B 0.02, в пересечении (это AB) 0.18.

Отсюда получаем:

$$P(A|B) = \frac{0.18}{0.2} = 0.9, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{0.32}{0.8} = 0.4, \quad P(\bar{A}|B) = \frac{0.02}{0.2} = 0.1, \quad P(\bar{B}|A) = \frac{0.32}{0.5} = 0.64, \quad P(B|\bar{A}) = \frac{0.02}{0.5} = 0.04, \quad P(A \cup B) = 0.52$$



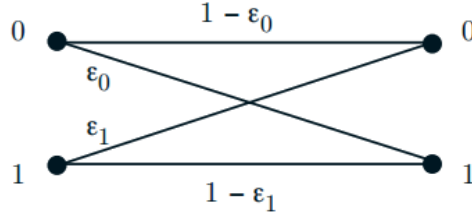
6. Событие A заключается в наступлении кризиса, вероятность этого 0.4, событие B заключается в том, что компания обанкротится, вероятность этого 0.5. Вероятность того, что произойдут оба события одновременно, равна 0.3.

Найти вероятности, дать словесные формулировки: $P(A|B)$, $P(\bar{A}|\bar{B})$, $P(B|\bar{A})$, $P(A|(\bar{A}B \cup A\bar{B}))$

Указание: в последнем пункте условием является все событие $(\bar{A}B \cup A\bar{B})$ – если записывать словами, то можно сформулировать так: "известно, что произошло ровно одно из этих двух событий".

Ответ: 0.6, 0.8, 0.333, 0.333

7. Wi-Fi роутер передаёт мемы через зашумлённый канал связи. Телефон принимает символы **неправильно** с вероятностью ε_0 и ε_1 соответственно. Ошибки в различных передачах символов **независимы**.



- (a) Роутер передает заранее ему известную (не случайную) строку символов. Какова вероятность того, что:

- i. переданная строка символов 1011 будет принята правильно?

$$P(1011) = P(1)P(0)P(1)P(1) = (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_0)(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_1) = (1 - \varepsilon_1)^3(1 - \varepsilon_0)$$

- ii. переданная строка символов 0001 будет принята правильно?

$$P(0001) = P(0)P(0)P(0)P(1) = (1 - \varepsilon_0)^3(1 - \varepsilon_1)$$

- (b) В попытке улучшить надёжность, каждый символ передаётся три раза, и принятая строка декодируется по правилу большинства. Другими словами, например, 0 передаётся как 000, и декодируется на приёмнике как 0 **тогда и только тогда**, когда принятая трёхсимвольная строка содержит не менее двух 0. Например, 101 декодируется как 1, а 001 декодируется как 0. Какова вероятность того, что:

- i. переданный символ 1 будет правильно декодирован?

Передаем цепочку 111, а вот получить уже можем разное. Символ декодируется правильно, если в принятой цепочке не менее двух единиц.

$$P(1) = P\{101, 111, 110, 011\} = (1 - \varepsilon_1)\varepsilon_1(1 - \varepsilon_1) + (1 - \varepsilon_1)^3 + (1 - \varepsilon_1)^2\varepsilon_1 + \varepsilon_1(1 - \varepsilon_1)^2 = 3(1 - \varepsilon_1)^2\varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_1)^3$$

- ii. переданный символ 0 будет правильно декодирован?

Аналогично, передаем цепочку 000. Символ декодируется правильно, если в принятой цепочке не менее двух нулей.

$$P(0) = P\{000, 010, 001, 100\} = (1 - \varepsilon_0)^3 + 3(1 - \varepsilon_0)^2\varepsilon_0$$

- iii. Для каких значений ε_0 в новой схеме будет наблюдаться улучшение в вероятности правильного приёма символа 0 по сравнению с базовым вариантом?

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon_0 &< (1 - \varepsilon_0)^3 + 3(1 - \varepsilon_0)^2\varepsilon_0 \\ 1 - \varepsilon_0 &< 1 - 3\varepsilon_0 + 3\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^3 + 3\varepsilon_0 - 6\varepsilon_0^2 + 3\varepsilon_0^3 \\ 2\varepsilon_0^3 - 3\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 &> 0 \\ \varepsilon_0(\varepsilon_0 - 1)(2\varepsilon_0 - 1) &> 0 \\ 0 &< \varepsilon_0 < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

8. Для сдачи зачета студенту предлагают последовательно решить три задачи. Зачет он получит в том случае, если у него будут две **подряд** решенные задачи. Сами задачи бывают "Сложные" и "Простые" (отличаются вероятностями их решить, для первого типа p_1 , для второго p_2 , $p_1 < p_2$). Преподаватель чередует задачи по сложности (то есть существует только два варианта выдачи: СПС и ПСП). Что выгоднее для студента: чтобы среди трех выданных задач было две сложные или две простые задачи?

Сдаст если будет одна из этих последовательностей

+++ +- -++

$$P(\text{СПС}) = p_1 p_2 p_1 + p_1 p_2 (1 - p_1) + (1 - p_1) p_2 p_1 = p_1 p_2 p_1 + p_1 p_2 - p_1 p_2 p_1 + p_1 p_2 - p_1 p_2 p_1 = 2p_1 p_2 - p_1^2 p_2$$

$$\text{Симметрично } P(\text{ПСП}) = 2p_1 p_2 - p_2^2 p_1$$

$P(\text{СПС}) \geq P(\text{ПСП})$

$$2p_1 p_2 - p_1^2 p_2 \geq 2p_1 p_2 - p_2^2 p_1$$

$$-p_1^2 p_2 \geq -p_2^2 p_1$$

$$p_2 > p_1$$

Две сложные выгоднее.
