

ВШБ Бизнес-информатика: ТВиМС 2025.

Лист задач для самостоятельного решения #3а.

Условная вероятность. Независимость событий.

(Полная вероятность. Теорема Байеса)

1. Компания А обанкротится с вероятностью 0.4, компания В обанкротится с вероятность 0.2 независимо от первой. Найти вероятности следующих событий:

- (а) обанкротится ровно одна компания.
- (б) обанкротится хотя бы одна компания.
- (с) обанкротятся обе компании.
- (д) обанкротилась А, если известно, что обанкротилась ровно одна компания.
- (е) обанкротилась А, если известно, что обанкротилась как минимум одна компания.

Укажите все места, где использовалась независимость, все места, где использовалась несовместимость.

УКАЗАНИЕ: а) $0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2 = 0.44$

б) $0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2 = 1 - 0.6 \cdot 0.8 = 0.52$

в) $0.4 \cdot 0.2 = 0.08$

г) $0.4 \cdot 0.8 / (0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2) = 0.32 / 0.44 \approx 0.727$

д) $(0.4 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2) / (0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2) = 0.4 / 0.52 \approx 0.769$

2. Брат и сестра путешествуют на поезде. У них обоих нет билетов, и контролёр поймал их. Он уполномочен применить особое наказание за это правонарушение. У него есть коробка с девятью внешне одинаковыми шоколадными конфетами, три из которых содержат снотворное моментального действия, такое, что человек проспит месяц. Контролёр заставляет каждого из нарушителей по очереди выбрать и немедленно съесть одну конфету.

- (а) Если брат выбирает перед сестрой, какова вероятность того, что он уснет?
- (б) Если брат выбирает первым и не впадает в кому, какова вероятность того, что сестра останется бодрствующей?
- (с) Если брат выбирает первым и впадает в кому, какова вероятность того, что сестра останется бодрствующей?
- (д) В интересах ли сестры убедить брата выбирать первым? I.e. есть ли разница в вероятности засыпания в зависимости от того, кто выбирает первым?

A – событие, соответствующее впасть в кому, выбирая первым. B – событие, соответствующее впасть в кому, выбирая вторым.

(а) $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, следовательно $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$

(б) $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{5}{8}$

(с) $P(\bar{B}|A) = \frac{6}{8}$

(д)

$$P(\bar{B}) = P(\bar{B}|\bar{A})P(\bar{A}) + P(\bar{B}|A)P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{24} + \frac{6}{24} = \frac{2}{3}$$

Получаем, что $P(\bar{B}) = P(\bar{A})$, что означает, что нет разницы в стратегиях выбора.

3. Подбросили две игральные кости. Введем следующие события: A — на первой кости выпала тройка, B — сумма очков является четным числом, C — на второй кости выпало больше очков, чем на первой.

- Найдите вероятность каждого из событий A , B и C .
- Найдите условную вероятность $P(A|C)$.
- Проверьте, есть ли среди событий A , C и $B \cap C$ пары независимых событий.

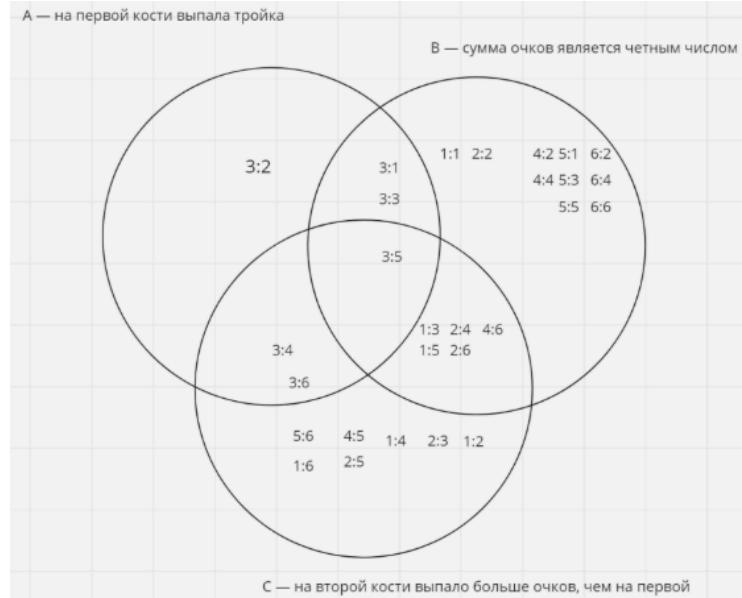
a) $6/36, 18/36, 15/36$

б) $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{3}{15} = 0.2$

в) $P(A|C) \neq P(A)$ — зависимы

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6} = P(A)$$

$$P(C|B \cap C) = \frac{P(C \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = 1 \neq P(C)$$



4. Три студента — А, В и С независимо друг от друга опаздывают на занятия с соответствующими вероятностями 0.6, 0.3, и 0.8.

- Найти вероятность того, что никто из них не опаздывает.
- Найти вероятность того, что опаздывают ровно двое из них.
- Найти вероятность того, что опаздывает хотя бы один из них.
- Найти вероятность того, что А опоздал, если известно, что опоздал как минимум один из них.
- Известно, что А опоздал, найти вероятность того, что опаздывали как минимум двое из них.

Укажите все места, где использовалась независимость, все места, где использовалась несовместность.

Указание: а) $0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 = 0.056$ умножать можно т.к. независимы

б) $0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.468$ складывать можно т.к. несовместны

в) $1 - 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 = 1 - 0.056 = 0.944 = 0.6 + 0.8 + 0.3 - 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.8 - 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.8$

г) Пусть событие E заключается в том, что опаздал хотя бы один из них:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C})}{P(\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + ABC)}.$$

Если внимательно посмотреть, то это равно $\frac{P(A)}{1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})} = \frac{0.6}{0.944} \approx 0.636$

д) Пусть событие T заключается в том, что опаздывали как минимум двое из них:

$$P(T|A) = \frac{P(A \cdot (\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + ABC))}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C)}{P(A)} = 0.86$$

5. Студент сдает сессию. Рассмотрим два события: A – студент готовится к экзамену по теорверу, B – студент сдает экзамен по теорверу на отлично. Известны вероятности следующих событий: $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$, $P(A \cap B) = 0.18$.

Найдите вероятности, дайте словесные формулировки событий: $P(A \cup B)$, $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$, $P(\bar{A}|B)$, $P(\bar{B}|A)$, $P(B|\bar{A})$.

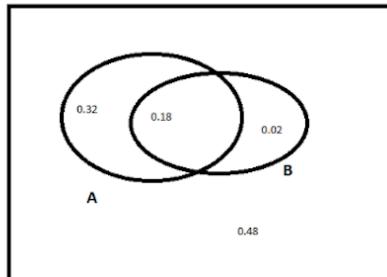
Например, по последней вероятности словесная формулировка: найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если известно, что он не готовился.

ОТВЕТ: 0.52, 0.9, 0.4, 0.1, 0.64, 0.04

УКАЗАНИЕ: С помощью диаграмм или по формулам получаем – **только A** соответствует 0.32, **только B** 0.02, в пересечении (это AB) 0.18.

Отсюда получаем:

$$P(A|B) = \frac{0.18}{0.2} = 0.9, P(A|\bar{B}) = \frac{0.32}{0.8} = 0.4, P(\bar{A}|B) = \frac{0.02}{0.2} = 0.1, P(\bar{B}|A) = \frac{0.32}{0.5} = 0.64, P(B|\bar{A}) = \frac{0.02}{0.5} = 0.04, P(A \cup B) = 0.52$$



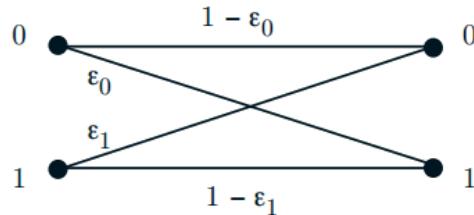
6. Событие A заключается в наступлении кризиса, вероятность этого 0.4, событие B заключается в том, что компания обанкротится, вероятность этого 0.5. Вероятность того, что произойдут оба события одновременно, равна 0.3.

Найти вероятности, дать словесные формулировки: $P(A|B)$, $P(\bar{A}|\bar{B})$, $P(B|\bar{A})$, $P(A|(\bar{A}B \cup A\bar{B}))$

Указание: в последнем пункте условием является все событие $(\bar{A}B \cup A\bar{B})$ – если записывать словами, то можно сформулировать так: "известно, что произошло ровно одно из этих двух событий".

Ответ: 0.6, 0.8, 0.333, 0.333

7. Wi-Fi роутер передаёт мемы через зашумлённый канал связи. Телефон принимает символы **неправильные** с вероятностью ε_0 и ε_1 соответственно. Ошибки в различных передачах символов **независимы**.



- (a) Роутер передает заранее ему известную (не случайную) строку символов. Какова вероятность того, что:

- i. переданная строка символов 1011 будет принята правильно?

$$P(1011) = P(1)P(0)P(1)P(1) = (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_0)(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_1) = (1 - \varepsilon_1)^3(1 - \varepsilon_0)$$

- ii. переданная строка символов 0001 будет принята правильно?

$$P(0001) = P(0)P(0)P(0)P(1) = (1 - \varepsilon_0)^3(1 - \varepsilon_1)$$

- (b) В попытке улучшить надёжность, каждый символ передаётся три раза, и принятая строка декодируется по правилу большинства. Другими словами, например, 0 передаётся как 000, и декодируется на приёмнике как **0 тогда и только тогда**, когда принятая трёхсимвольная строка содержит не менее двух 0. Например, 101 декодируется как 1, а 001 декодируется как 0. Какова вероятность того, что:

- i. переданный символ 1 будет правильно декодирован?

Передаем цепочку 111, а вот получить уже можем разное. Символ декодируется правильно, если в принятой цепочке не менее двух единиц.

$$P(1) = P\{101, 111, 110, 011\} = (1 - \varepsilon_1)\varepsilon_1(1 - \varepsilon_1) + (1 - \varepsilon_1)^3 + (1 - \varepsilon_1)^2\varepsilon_1 + \varepsilon_1(1 - \varepsilon_1)^2 = 3(1 - \varepsilon_1)^2\varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_1)^3$$

- ii. переданный символ 0 будет правильно декодирован?

Аналогично, передаем цепочку 000. Символ декодируется правильно, если в принятой цепочке не менее двух нулей.

$$P(0) = P\{000, 010, 001, 100\} = (1 - \varepsilon_0)^3 + 3(1 - \varepsilon_0)^2\varepsilon_0$$

- iii. Для каких значений ε_0 в новой схеме будет наблюдаться улучшение в вероятности правильного приёма символа 0 по сравнению с базовым вариантом?

$$1 - \varepsilon_0 < (1 - \varepsilon_0)^3 + 3(1 - \varepsilon_0)^2\varepsilon_0$$

$$1 - \varepsilon_0 < 1 - 3\varepsilon_0 + 3\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^3 + 3\varepsilon_0 - 6\varepsilon_0^2 + 3\varepsilon_0^3$$

$$2\varepsilon_0^3 - 3\varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 > 0$$

$$\varepsilon_0(\varepsilon_0 - 1)(2\varepsilon_0 - 1) > 0$$

$$0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$$

8. Для сдачи зачета студенту предлагаются последовательно решить три задачи. Зачет он получит в том случае, если у него будут две **подряд** решенные задачи. Сами задачи бывают "Сложные" и "Простые" (отличаются вероятностями их решить, для первого типа p_1 , для второго p_2 , $p_1 < p_2$). Преподаватель чередует задачи по сложности (то есть существует только два варианта выдачи: СПС и ПСП). Что выгоднее для студента: чтобы среди трех выданных задач было две сложные или две простые задачи?

Сдаст если будет одна из этих последовательностей

+++ ++- -++

$$P(\text{СПС}) = p_1 p_2 p_1 + p_1 p_2 (1 - p_1) + (1 - p_1) p_2 p_1 = p_1 p_2 p_1 + p_1 p_2 - p_1 p_2 p_1 + p_1 p_2 - p_1 p_2 p_1 = 2p_1 p_2 - p_1^2 p_2$$

$$\text{Симметрично } P(\text{ПСП}) = 2p_1 p_2 - p_2^2 p_1$$

$$P(\text{СПС})V P(\text{ПСП})$$

$$2p_1 p_2 - p_1^2 p_2 V 2p_1 p_2 - p_2^2 p_1$$

$$- p_1 V - p_2$$

$$p_2 > p_1$$

Две сложные выгоднее.
