

Линейная алгебра

СЛУ для анализа векторов

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на `mat-vec` как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому пониманию СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за a_1, \dots, a_m то тогда:

$$Ax = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился `right-hand side` вектор r . Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов a_1, \dots, a_m вообще можно было бы “дотянуться” до вектора r . Иными словами, получаем:

СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на `mat-vec` как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому пониманию СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за a_1, \dots, a_m то тогда:

$$Ax = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился `right-hand side` вектор r . Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов a_1, \dots, a_m вообще можно было бы “дотянуться” до вектора r . Иными словами, получаем:

i Существование решения

Для того, чтобы у СЛУ $Ax = r$ существовало хотя бы одно решение, необходимо, чтобы выполнялось:

$$r \in \text{span}(a_1, \dots, a_m)$$

Иначе, СЛУ называется несовместной (`inconsistent`). В ступенчатом виде матрицы несовместность системы выражается в виде наличия строки:

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b], \ b \neq 0$$

Пример: несовместность vs неуникальное решение

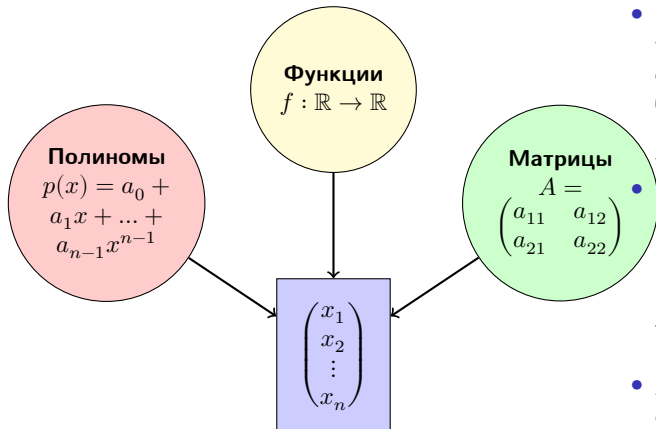
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \end{array} \right)$

Пример: несовместность vs неуникальное решение

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \end{array} \right)$

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 12 & 23 & 14 \end{array} \right)$

Reminder: в чем сила?



Линейная алгебра: единый язык для разных объектов

- Если векторное пространство V имеет базис $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, то любой вектор \mathbf{v} однозначно определяется своими координатами α_k в этом базисе. Если мы упакуем α_k в вектор из \mathbb{R}^n , то можем оперировать им вместо оперирования над \mathbf{v} .

- Если $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k$ и $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k$, то

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) \mathbf{v}_k$$

т.е. вместо сложения двух оригинальных векторов, можно сложить векторы координат.

- Аналогично, чтобы получить $\alpha \mathbf{v}$, можно умножить столбец координат \mathbf{v} на α и сразу получить координаты вектора $\alpha \mathbf{v}$.

СЛУ как способ исследовать наборы векторов

- Для отдельного рассмотрения можно вынести системы однородных линейных уравнений вида $Ax = 0$

i Утверждение

Пусть у нас есть набор векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, и пусть $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m]$ — это матрица размера $n \times m$ со столбцами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$. Тогда

1. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ линейно независима тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце;
2. Линейная оболочка системы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ совпадает с \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждой строке;
3. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ является базисом в \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце и в каждой строке.

СЛУ как способ исследовать наборы векторов

- Для отдельного рассмотрения можно вынести системы однородных линейных уравнений вида $Ax = 0$
- В интерпретации линейной комбинации столбцов такие уравнения внезапно напоминают нам про возможность получения нулевого вектора:

$$Ax = 0 \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = 0,$$

Если единственное решение - тривиальный вектор $x = 0$, то набор перед нами линейно независимая группа векторов в столбцах матрицы. Иначе - линейно зависимая.

i Утверждение

Пусть у нас есть набор векторов $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, и пусть $A = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ — это матрица размера $n \times m$ со столбцами v_1, v_2, \dots, v_m . Тогда

1. Система v_1, v_2, \dots, v_m линейно независима тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце;
2. Линейная оболочка системы v_1, v_2, \dots, v_m совпадает с \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждой строке;
3. Система v_1, v_2, \dots, v_m является базисом в \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце и в каждой строке.

Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.

Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
 1. $1 - 3t + 5t^2, -3 + 5t - 7t^2, -4 + 5t - 6t^2, 1 - t^2$

Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
 1. $1 - 3t + 5t^2, -3 + 5t - 7t^2, -4 + 5t - 6t^2, 1 - t^2$
 2. $5t + t^2, 1 - 8t - 2t^2, -3 + 4t + 2t^2, 2 - 3t$

Слайд для записей