Линейная алгебра

Проекции. Ортогонализация базиса.

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

Ортогональные базисы.

Определение

Система векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ называется ортогональной, если любые два вектора взаимно ортогональны, то есть $\left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k\right) = 0$ при $j \neq k$.
Если дополнительно $\|\mathbf{v}_k\| = 1$ для всех k, то система называется ортонормированной.

Зачем это нужно?

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j$$

Взяв скалярное произведение обеих частей равенства с $\mathbf{v}_1$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_1\right) = \alpha_1 \left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\right) = \alpha_1 \left\|\mathbf{v}_1\right\|^2$$

Аналогично, беря скалярное произведение обеих частей с $\mathbf{v}_k$, получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k\right) = \alpha_k \left(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k\right) = \alpha_k \left\|\mathbf{v}_k\right\|^2$$

Итак

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{\left\|\mathbf{v}_k\right\|^2}$$

Проекции

Ортогональная проекция на вектор.

Определение (ортогональная проекция)

Пусть $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Обозначим единичный вектор в направлении $\mathbf{x}$ как

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

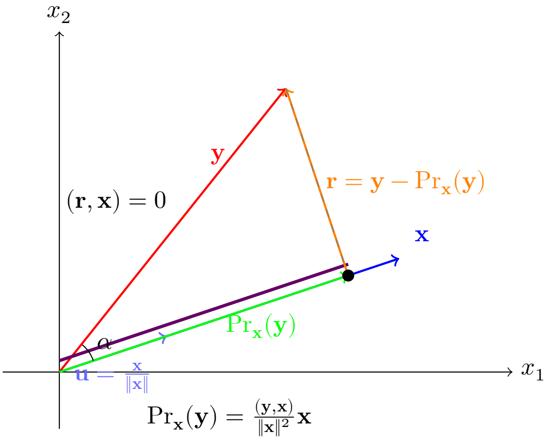
Ортогональная проекция вектора $\mathbf{y}$ на направление $\mathbf{x}$ (обозначение: $\mathrm{Pr}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$) равна

$$\Pr_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{u})\, \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}\, \mathbf{x}.$$

Сопряжённый (ортогональный) остаток:

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \Pr_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0.$$

Пример: ортогональная проекция



$$Pr_x(\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{\|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2 \cos(\alpha)}{\|\mathbf{x}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} = \|\mathbf{y}\|_2 \cos(\alpha) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

Алгоритм Грама-Шмидта

Вход: линейно независимые векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Шаги ортогонализации:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1,$$

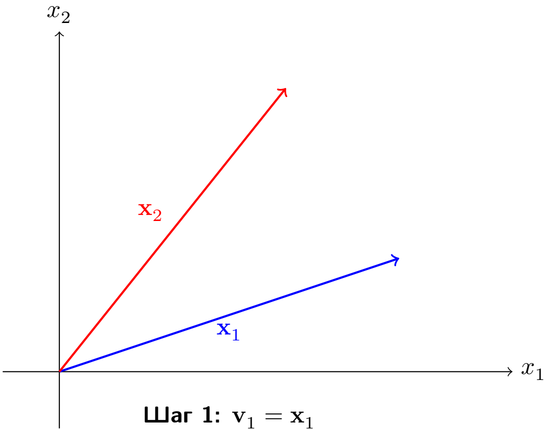
$$\mathbf{v}_m = \mathbf{x}_m - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(\mathbf{x}_m, \mathbf{v}_j)}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \mathbf{v}_j, \quad m = 2, \dots, k.$$

Получаем ортогональную систему $\{\mathbf{v}_j\}$ с теми же линейными оболочками: $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} = \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$.

Нормировка (получение ортонормированного базиса):

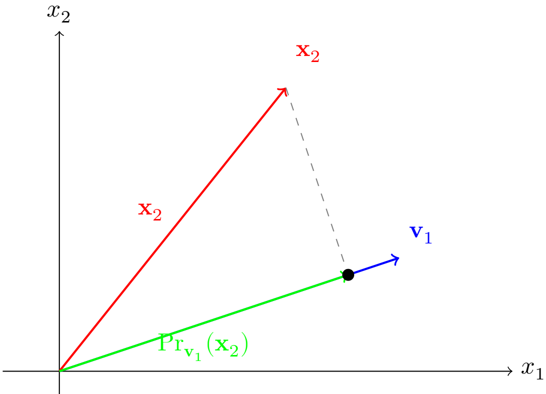
$$\mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{v}_m}{\|\mathbf{v}_m\|}, \quad m = 1, \dots, k.$$

Шаг 1: Исходные векторы



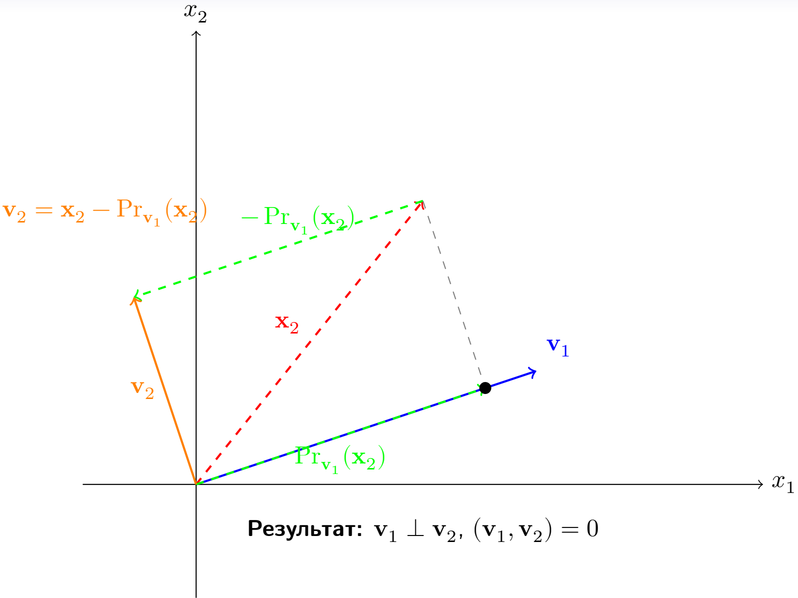
Шаг 1: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$

Шаг 2: Вычисление проекции



$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{x}_2) = \frac{(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

Шаг 3: Получение ортогонального вектора



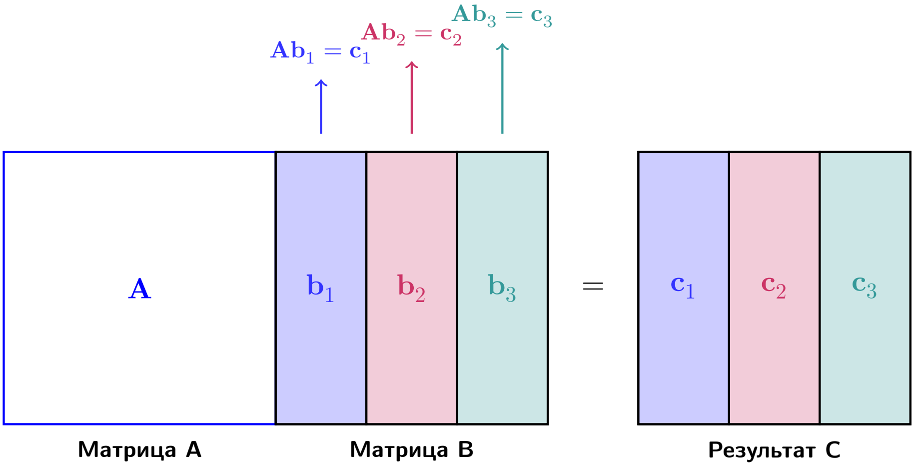
Результат: $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$

Пример

Ортогонализовать набор векторов $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Слайд для записей

Обращение матриц через СЛУ: Идея



Три системы линейных уравнений

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3] = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3] = \mathbf{I}$$

Результат

Объединяем

↑

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$$

Система 1

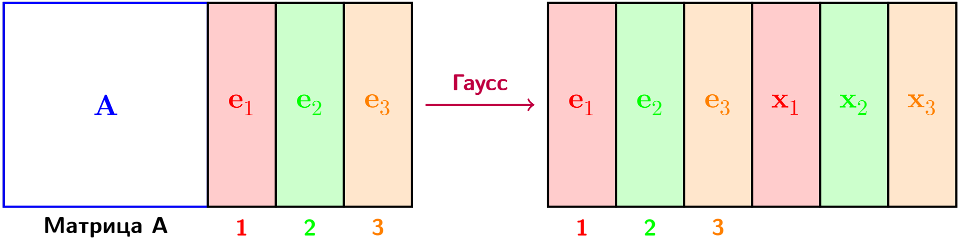
$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$$

Система 2

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3$$

Система 3

Визуализация расширенной матрицы



$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3] = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_3] = \mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \quad [\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3] = \mathbf{A}^{-1}$$

Пример: Обращение матрицы 3x3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Слайд для записей