ВШБ Бизнес-информатика: ТВиМС 2025.
Лист задач для самостоятельного решения #8 (internal).
Многомерные случайные величины. Ковариация и корреляция.

1. * Дана совместная функция вероятностей случайного вектора (X, Y):

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 3$
$X = -2$	0.01	0.4	0.03
$X = -1$	0.01	c	0.2
$X = 0$	0.02	0.01	0.02

   (a) Проверьте, являются ли переменные независимыми,

   (b) Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, ковариацию и коэффициент корреляции для X и Y,

   (c) Найдите условную функцию вероятностей для Y при условии $X = -1$,

   (d) Найдите вероятность $P\{2X + Y < 0\}$

   (e) Рассмотрите новую случайную величину $T = Y^2 - X$, найдите её функцию вероятностей.

2. Дана совместная функция вероятностей случайного вектора (X, Y):

	$Y = -1$	$Y = 1$
$X = 0$	$\frac{1}{2}$	0
$X = 1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

   Найдите ковариацию и корреляцию между X и Y.

3. Дана совместная функция вероятностей случайного вектора (X, Y) следующего вида:

	$Y = -2$	$Y = -1$	$Y = 3$
$X = -2$	0.15	0.15	c
$X = 1$	0.05	0.2	0.15

   - Найдите вероятность $P(Y > -1)$,
   - Найдите вероятность $P(Y > X)$,
   - Найдите вероятность $P(\{X = -2\} \cap \{Y < 0\})$,
   - Найдите ковариацию $\text{Cov}(X, Y)$,
   - Найдите корреляцию $\text{Corr}(X, Y)$.

4. * Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей

	$X = -2$	$X = 0$	$X = 2$
$Y = 1$	0.2	0.3	0.1
$Y = 2$	0.1	0.2	a

   (a) Найдите неизвестную вероятность a.

   (b) Проверьте, являются ли X и Y независимыми,

   (c) Найдите вероятности $P(X > -1), P(X > Y)$

   (d) Найдите условную функцию вероятностей для X при условии $Y = 2$ и для Y при условии $X = 0$,

   (e) Найдите корреляцию $\text{Corr}(X, Y)$

5. * Случайные величины U и V принимают значения ± 1. Их совместное распределение задано следующим образом:

$$P\{U=-1\} = P\{U=1\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{V=+1|U=1\} = P\{V=-1|U=-1\} = \frac{1}{3},$$
$$P\{V=-1|U=1\} = P\{V=+1|U=-1\} = \frac{2}{3},$$

   (a) Найдите вероятность того, что уравнение $x^2 + Ux + V = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.

   (b) Найдите вероятность того, что уравнение $x^2 + (U+V)x + (U+V) = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.

6. В группе 5 мальчиков и 8 девочек. Из этой группы мы случайным образом выбираем троих учеников. Пусть X это количество мальчиков в выборке, а Y – количество девочек.

   (a) Построить таблицу совместного распределения

   (b) Найти математическое ожидание и дисперсию X и Y

   (c) Найти $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

7. Хорошая показательная задача. Нарисуйте на тригонометрической окружности точки, соответствующие всем возможным парам (X, Y). Получатся точки, лежащие на окружности. Это хорошая иллюстрация того, что корреляция показывает силу именно линейной зависимости, а не какой-либо другой. То есть, зависимость между переменными может быть не по линейному закону, и тогда вполне возможно, что корреляция окажется равной нулю.

   Пусть известно распределение случайной величины U:

U	$u_1 = 0$	$u_2 = \pi/3$	$\dots$	$u_6 = 5\pi/3$
P_U	$\frac{1}{6}$	$\dots$	$\dots$	$\frac{1}{6}$

   (a) Введём переменные $X = \cos U$ и $Y = \sin U$. Постройте таблицу их совместного распределения.

   (b) Являются ли они зависимыми? Рассмотрите, например, $P(X = \frac{1}{2})$ и $P(X = \frac{1}{2} \mid Y = \frac{\sqrt{3}}{2})$.

   (c) Найдите математические ожидания $E[X]$ и $E[Y]$.

   (d) Найдите ковариацию и корреляцию между X и Y.

8. Подброшены два кубика. Пусть X и Y это количество очков, выпавших на первом и втором кубиках соответственно. Рассмотрим две случайные величины: $U = X + Y$ и $V = X - Y$.

   (a) Скоррелированы ли U и V?

   (b) Зависимы ли U и V?

9. * Для случайных величин X и Y заданы следующие значения: $E[X] = 1, E[Y] = 4, E[XY] = 8, Var[X] = Var[Y] = 9$. Для случайных величин $U = X + Y$ и $V = X - Y$ вычислите:

   (a) $E[U], Var[U], E[V], Var[V], Cov(U, V)$

   (b) Можно ли утверждать, что случайные величины U и V независимы?

10. *

   (a) Случайная величина X принимает значения -2, -1, 0, 1 и 2 с равными вероятностями 0.2. Найти коэффициент корреляции между X и X^2.

   (b) Случайная величина X принимает значения -1, 0, 1, 2 и 3 с равными вероятностями 0.2. Найти коэффициент корреляции между X и X^2.

   (c) Прокомментируйте результаты.