Теория вероятностей и математическая статистика

Точечные оценки. Метод моментов. Интервальные оценки I.

Глеб Карпов

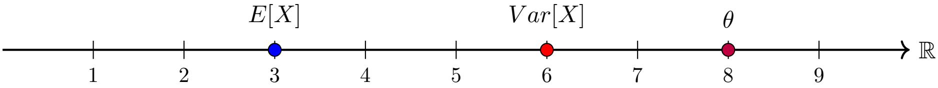
ВШБ Бизнес-информатика

Повторение

Собираем вместе всё, чего успели коснуться

Точечная оценка: визуализация

Идеальная ситуация: мы знаем характеристики / параметры



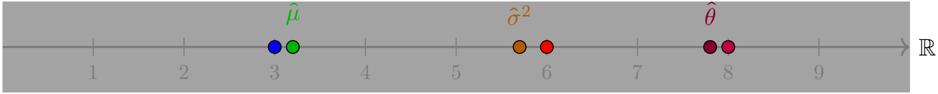
Реальная ситуация: параметры неизвестны

Значения будто скрыты от нас туманом

Цель точечной оценки

- На основе реализации случайной выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получить **предположения** $\hat{\theta}$ о значениях скрытых в тумане реальности параметров.
- Идея состоит в том, чтобы посчитать значение оценки на реальных имеющихся данных, и чтобы полученное число было бы как можно ближе к истинному значению параметра.
- Следуя аналогии, мы хотим найти затерянные в тумане точки, путём их угадывания специальным способом, с помощью функции **оценки**.

Значения точечных оценок $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$ и $\hat{\theta}$
"попадают" близко к истинным значениям



Уже известные точечные оценки

Пусть у нас есть случайная выборка $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ (Независимые, одинаково распределенные) с $\mu \equiv E[X_i]$, $\sigma^2 \equiv Var[X_i]$.

1. Выборочное среднее $\bar{X}$

- Определение: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$
- Характеристики: $E[\bar{X}] = \mu$ (несмещенная оценка), $\quad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
- Распределение:
  - Если $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
  - По ЦПТ: при больших n выполняется $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

2. Выборочная дисперсия S^2

- Определение: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
- Характеристики: $E[S^2] = \sigma^2$ (несмещенная оценка), $\quad \mathrm{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$
- Распределение: если $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Моменты случайной величины

- **Момент k-го порядка** случайной величины X — это математическое ожидание k-й степени X:

$$\mu_k = E[X^k]$$

- **Первый момент** $(k = 1)$: $\mu_1 = E[X]$ — математическое ожидание.
- **Второй момент** $(k = 2)$: $\mu_2 = E[X^2]$.
- **Центральный момент k-го порядка**:

$$\mu'_k = E[(X - E[X])^k]$$

- **Второй центральный момент**: $\mu'_2 = E[(X - E[X])^2] = \mathrm{Var}(X)$ — дисперсия.

Выборочные моменты

- Для случайной выборки $X_1, \ldots, X_n$ определяем **выборочные моменты**:
- **Выборочный момент k-го порядка**:

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

- **Выборочный центральный момент k-го порядка**:

$$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k$$

- Выборочные моменты являются оценками соответствующих теоретических моментов.

Метод моментов

- **Идея метода моментов**: приравнять выборочные моменты к теоретическим моментам распределения.
- Если распределение зависит от p параметров, используем первые p моментов.

Метод моментов для оценки параметров:

1. Выразить теоретические моменты через неизвестные параметры.
2. Приравнять выборочные моменты к теоретическим:

$$m_k = \mu_k(\theta_1, \dots, \theta_p), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

3. Решить систему уравнений относительно параметров $\theta_1, \dots, \theta_p$.

Пример: Метод моментов для экспоненциального распределения

- Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ — время до события (например, время до поломки устройства).
- Нужно оценить параметр λ (интенсивность).
- **Шаг 1**: Теоретический момент первого порядка:

$$\mu_1 = E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

- **Шаг 2**: Выборочный момент первого порядка:

$$m_1 = \bar{X}$$

- **Шаг 3**: Приравниваем и выражаем параметр как оценку:

$$\bar{X} = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\bar{X}}$$

Пример: Метод моментов для равномерного распределения

- Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \text{Uniform}(0, \theta)$ — равномерное распределение на интервале $[0, \theta]$.
- Нужно оценить параметр θ (верхнюю границу интервала).
- **Шаг 1**: Теоретический момент первого порядка:

$$\mu_1 = E[X] = \frac{0 + \theta}{2} = \frac{\theta}{2}$$

- **Шаг 2**: Выборочный момент первого порядка:

$$m_1 = \bar{X}$$

- **Шаг 3**: Приравниваем и выражаем параметр как оценку:

$$\bar{X} = \frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_{MM} = 2\bar{X}$$

- **Интуиция**: Если среднее значение равно $\frac{\theta}{2}$, то верхняя граница θ в два раза больше среднего.

Пример: Метод моментов для нормального распределения

- Пусть $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ — нужно оценить μ и σ^2.
- **Шаг 1**: Теоретические моменты:

$$\mu_1 = E[X] = \mu$$
$$\mu_2 = E[X^2] = \mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

- **Шаг 2**: Выборочные моменты:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$
$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Пример: Метод моментов для нормального распределения

- **Шаг 3**: Приравниваем:

$$\bar{X} = \mu$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

- **Решение**:

$$\hat{\mu}_{MM} = \bar{X}$$
$$\hat{\sigma}^2_{MM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- **Замечание**: Оценка дисперсии методом моментов — это смещенная оценка S_n^2!

Доверительные интервалы

- Использование только точечной оценки для оценки параметра — это как ловить рыбу в мутном озере гарпуном, а использование доверительного интервала — как ловить сетью. Мы можем бросить гарпун туда, где увидели рыбу, но скорее всего промахнемся. Если мы закинем сеть в эту область, у нас будет больше шансов, что рыбалка будет успешна.
- Если мы делаем точечную оценку, мы, вероятно, не попадем точно в неизвестный параметр. Если мы используем диапазон правдоподобных значений — доверительный интервал — у нас есть хороший шанс "поймать" параметр.
- Действительно, если наша точечная оценка $\hat{\theta}$ имеет непрерывное распределение, то $P_\theta\{\hat{\theta} = \theta\} = 0$.

Доверительные интервалы

Доверительный интервал. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — случайная выборка случайной величины X. Пусть задано $0 < \alpha < 1$. Пусть $L = L(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $U = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ — две статистики. Мы говорим, что интервал (L, U) является $(1-\alpha) \cdot 100\%$ доверительным интервалом для неизвестного параметра θ, если

$$1 - \alpha = P_\theta\{\theta \in (L, U)\}.$$

Вероятность того, что интервал включает θ, равна $1-\alpha$, которая называется **уровнем доверия** интервала.

Доверительные интервалы

Иллюстративный пример

Для выборки $X_1, \dots, X_4$ из $\mathcal{N}(\mu, 1)$ интервальная оценка μ — это, например, $[\bar{X} - 1, \bar{X} + 1]$. Найдите вероятность того, что истинный параметр μ покрывается этим интервалом.

Решение

$$P\left(\bar{X}-1<\mu<\bar{X}+1\right)=P\left(-1<\mu-\bar{X}<1\right)=P\left(-1<\bar{X}-\mu<1\right)$$

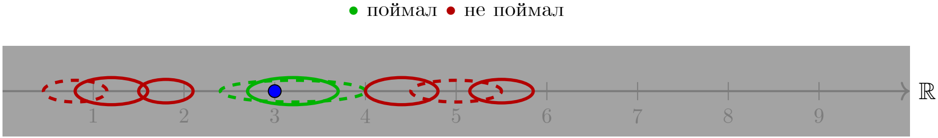
Знаем, что $\bar{X}\sim\mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)\equiv\mathcal{N}\left(\mu,\frac{1}{4}\right)$, приводим к стандартному нормальному распределению:

$$P\left(-1<\bar{X}-\mu<1\right)=P\left(\frac{-1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=$$

$$P\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}}<Z<\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)=P\left(-2<Z<2\right)\approx 0.9545$$

Действие доверительных интервалов

- Некоторые доверительные интервалы включают в себя θ, некоторые нет. Доверительный интервал поймает параметр с вероятностью $1 - \alpha$.



Доверительные интервалы для среднего генеральной совокупности

Если дисперсия генеральной совокупности известна

- Нам нужно: случайная выборка размера n, дисперсия $\sigma^2 \equiv Var[X_i]$ известна *a priori*.
- Утверждение состоит в том, что мы хотим, чтобы наш доверительный интервал (L, U) покрывал неизвестное среднее генеральной совокупности μ с вероятностью $1 - \alpha$:

$$1 - \alpha = P(L(X) < \mu < U(X)) = P(-U < -\mu < -L)$$

- Внедряем в центральную часть неравенства известную случайную величину путём одновременного изменения всех частей неравенства:

$$1 - \alpha = P\left(\frac{\bar{X}-U}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X}-L}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

- Обычно интервалы хотят делать симметричными, поэтому делаем симметричную замену переменных:

$$1 - \alpha = P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right)$$

Доверительные интервалы для среднего генеральной совокупности

Если дисперсия генеральной совокупности известна

- После нахождения критической точки $z_{\alpha/2}$, такой, что $P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$, выполняем обратную замену и восстанавливаем нужные границы:

$$z_{\alpha/2} = \frac{\bar{X} - L}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to L = \bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-z_{\alpha/2} = \frac{\bar{X} - U}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to U = \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- В итоге получаем теоретический $(1-\alpha)100\%$ доверительный интервал для среднего генеральной совокупности μ:

$$\mu \in \left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Доверительные интервалы для среднего генеральной совокупности

Если дисперсия генеральной совокупности известна

- Однако на практике $(1-\alpha)100\%$ доверительный интервал для среднего генеральной совокупности μ записывается как:
$$\mu \in \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$
- Отличие лишь в одной букве: $\bar{x}$ вместо $\bar{X}$ — конечно, потому что на практике у нас есть именно **реализация** выборочного среднего, те данные, что нам удалось собрать. Вокруг них и строим интервал.