

# Теория вероятностей и математическая статистика

## Центральная предельная теорема.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

## Напоминание: Линейная комбинация случайных величин

Предположим, что у нас есть  $X$  и  $Y$  — две случайные величины. Следующие свойства работают для любой возможной природы этих переменных.

1. Линейное свойство математического ожидания:  $E[aX \pm bY] = aE[X] \pm bE[Y]$ .
2. Дисперсия линейной комбинации:  $Var[aX \pm bY] = a^2Var[X] + b^2Var[Y] \pm 2ab\left(E[XY] - E[X]E[Y]\right)$ .
3. Если  $X$  и  $Y$  независимы:  $Var[aX \pm bY] = a^2Var[X] + b^2Var[Y]$ .

## Иллюстративный пример

### Функция от двух дискретных случайных величин

Предположим, что мы бросаем два 6-гранных кубика, независимых друг от друга. В итоге мы наблюдаем дискретный случайный вектор  $(X, Y)$ , где  $X$  и  $Y$  — случайные величины, соответствующие выпавшим числам на каждом из кубиков. Поскольку существует 36 различных пар, совместная функция вероятности задается как:  $P(X = x_i, Y = y_j) = \frac{1}{36}$ .

Введем новую случайную величину  $T$  как функцию от  $X$  и  $Y$ :  $T = f(X, Y) = X + Y$ . Построим функцию вероятности для случайной величины  $T$ .

## Иллюстративный пример

### Построение функции вероятности для $T = X + Y$

Для каждого значения  $t$  случайной величины  $T$  найдем все пары  $(x, y)$ , которые дают в сумме  $t$ :

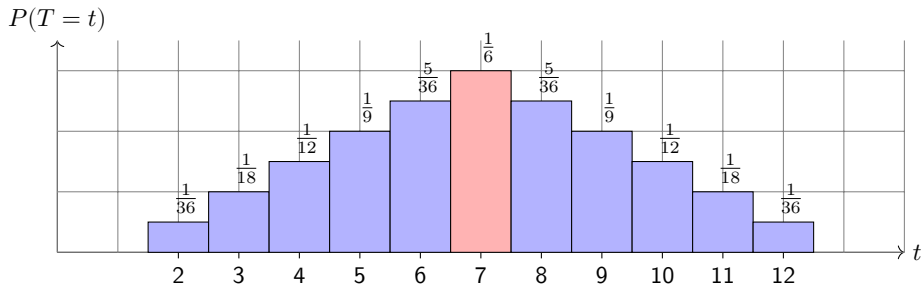
- $T = 2$ : только  $(1, 1)$
- $T = 3$ :  $(1, 2), (2, 1)$
- $T = 4$ :  $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$
- $T = 5$ :  $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$
- $T = 6$ :  $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$
- $T = 7$ :  $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$
- $T = 8$ :  $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$
- $T = 9$ :  $(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$
- $T = 10$ :  $(4, 6), (5, 5), (6, 4)$
- $T = 11$ :  $(5, 6), (6, 5)$
- $T = 12$ : только  $(6, 6)$

## Иллюстративный пример

Таблица функции вероятности

$t$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(T = t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

График функции вероятности



### Промежуточный вывод

Мы на очень простом примере можем пронаблюдать, как функция вероятности суммы одинаково распределенных дискретных величин получает “усиление” в центральных значениях, так как к этим элементарным исходам приводят больше комбинаций изначальных величин.

# Центральная предельная теорема

## Предпосылки

- Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — последовательность независимых случайных величин, взятых из одного и того же распределения, т.е. все  $X_i$  имеют одинаковое математическое ожидание  $E[X] = \mu$ , одинаковую дисперсию  $Var[X] = \sigma^2 < \infty$ .
- Мы конструируем **новую** случайную величину как частичную сумму первых  $n$  случайных величин  $X_i$ :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- Согласно свойствам математического ожидания и дисперсии, характеристики новой случайной величины:

$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = n\mu$$

$$Var[S_n] = Var\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n Var[X_i] = n\sigma^2$$

## Центральная предельная теорема

- **Центральная предельная теорема:** распределение такой случайной величины  $S_n$  стремится к нормальному распределению при  $n \rightarrow \infty$ :

$$S_n \rightarrow Y \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

- Душно:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(S_n < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(Y < x), \text{ где } Y \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2),$$

что означает, что в каждой точке  $x$  функция распределения  $F_{S_n}(x)$  стремится к функции распределения  $F_Y(x)$ , т.е. они буквально "накладываются" друг на друга и теперь характеризуют одну и ту же случайную величину.

- Проще говоря:  $S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ , когда  $n$  достаточно велико.
- Обычно "достаточно велико" это  $n \geq 30$ .

## Центральная предельная теорема

### Формулировка через стандартизацию

- Проводим операцию стандартизации введенной ранее случайной величины  $S_n$ :

$$Z_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

- Характеристики:

$$E[Z_n] = E\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = E\left[\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}\right] - E\left[\frac{n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \frac{n\mu}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = 0$$

$$\text{Var}[Z_n] = \text{Var}\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \text{Var}\left[\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}\right] + \text{Var}\left[\frac{n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \frac{\text{Var}[S_n]}{n\sigma^2} + 0 = 1$$

- Тогда говорим, что:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(Z_n < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(Z < x), \text{ где } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Или проще: стандартизованная частичная сумма  $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , когда  $n$  достаточно велико. Обычно требуем  $n \geq 30$ .