

# ВШБ БИ: ТВиМС 2025.

## Лист seminar-only задач #9.

### Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

1. У человека есть 100 лампочек, время жизни которых представляется независимыми экспоненциальными случайными величинами со средним 5 часов. Если лампочки используются по одной, при этом перегоревшая лампочка немедленно заменяется новой, приближенно найдите вероятность того, что после 525 часов всё ещё есть работающая лампочка.

*Решение:*

Суммарное время жизни всех лампочек задаётся формулой

$$T = \sum_{i=1}^{100} X_i,$$

где  $X_i$  — экспоненциальная случайная величина со средним пять часов. Поскольку случайная величина  $T$  является суммой независимых одинаково распределённых случайных величин, мы можем использовать центральную предельную теорему для получения оценок относительно  $T$ . Например, мы знаем, что

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

приблизённо имеет стандартное нормальное распределение. Таким образом, для вычисления (поскольку  $\sigma^2 = 25$ ) имеем, что

$$\begin{aligned} P\{T > 525\} &= P\left\{\frac{T - 100 \cdot 5}{10 \cdot 5} > \frac{525 - 500}{50}\right\} \\ &= 1 - P\{Z < 1/2\} \\ &= 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085. \end{aligned}$$

2. В предыдущей задаче предположим, что замена перегоревшей лампочки занимает случайное время, равномерно распределённое на интервале  $(0, 0.5)$ . Приближенно найдите вероятность того, что все лампочки перегорят к моменту времени 550.

*Решение:*

Выражение для суммарного времени работы лампочек без учёта времени замены задаётся формулой

$$T = \sum_{i=1}^{100} X_i.$$

Если к этому еще добавляется случайное время для замены каждой лампочки, то наша случайная величина  $T$  должна теперь это учитывать:

$$T = \sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{i=1}^{99} U_i.$$

Результат выше можно интерпретировать так, что мы можем заменить лампочки 99 раз, а последняя лампочка не заменяется.

Нам нужно вычислить  $P\{T \leq 550\}$ . Для этого перепишем

$$T = \sum_{i=1}^{99} (X_i + U_i) + X_{100},$$

и можно определить новые случайные величины  $V_i$ , которые будут равны сумме времени работы лампы и времени замены:

$$V_i = \begin{cases} X_i + U_i & i = 1, \dots, 99 \\ X_{100} & i = 100 \end{cases}$$

Тогда  $T = \sum_{i=1}^{100} V_i$  и все  $V_i$  независимы. Ниже будем использовать  $\mu_i$  и  $\sigma_i$  для обозначения математического ожидания и стандартного отклонения случайных величин  $V_i$  соответственно. Вычисляя математическое ожидание  $T$ , получим:

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_{i=1}^{100} E[V_i] = \sum_{i=1}^{99} (E[X_i] + E[U_i]) + E[X_{100}] \\ &= 100 \cdot 5 + 99 \left( \frac{1}{4} \right) = 524.75. \end{aligned}$$

Аналогичным образом дисперсия этой суммы также задаётся формулой

$$\begin{aligned} \text{Var}(T) &= \sum_{i=1}^{99} (\text{Var}(X_i) + \text{Var}(U_i)) + \text{Var}(X_{100}) \\ &= 100 \cdot 5 + 99 \cdot \frac{1}{4} \left( \frac{1}{12} \right) = 502.0625 \end{aligned}$$

По центральной предельной теореме получаем, что

$$P \left\{ \sum_{i=1}^{100} V_i \leq 550 \right\} = P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{100} (V_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}} \leq \frac{550 - \sum_{i=1}^{100} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}} \right\}.$$

Вычисляя выражение в правой части неравенства:

$$\frac{550 - \sum_{i=1}^{100} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{100} \sigma_i^2}},$$

получаем, что оно равно  $\frac{550-524.75}{\sqrt{502.0625}} = 1.1269$ . Следовательно,

$$P \left\{ \sum_{i=1}^{100} V_i \leq 550 \right\} \approx F_Z(1.1269) = 0.8701.$$

3. Допустим, что срок службы пылесоса имеет экспоненциальное распределение. В среднем один пылесос бесперебойно работает 7 лет. Завод предоставляет гарантию 5 лет на свои изделия. Предположим также, что примерно 80% потребителей аккуратно хранят все бумаги, необходимые, чтобы воспользоваться гарантией.

- (а) Какой процент потребителей в среднем обращается за гарантийным ремонтом?
- (б) Какова вероятность того, что из 1000 потребителей за гарантийным ремонтом обратится более 35% покупателей?

Подсказка:  $\exp(5/7) \approx 2.0427$

Решение:

$$P_{\text{break}} = 1 - \exp(-5/7) = 0.51 = \int_0^5 \frac{1}{7} e^{-\frac{t}{7}} dt$$

$$p = 0.8 \cdot 0.51 \approx 0.4$$

$$\mathbb{E}(S) = 1000p = 400, \text{Var}(S) = 1000p(1-p) = 240$$

$$\mathbb{P}(S > 350) = \mathbb{P}(Z > -3.23) \approx 1$$

4. Театр имеет два различных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Эти гардеробы ничем не отличаются. На спектакль приходит 1000 зрителей. Предположим, что зрители приходят по одиночке и выбирают входы равновероятно. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли?

*Решение:* Пусть  $X_i$  - случайная величина, которая равна 1, если посетитель  $i$  выбрал первый вход и 0, если второй.  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ . Тогда  $\bar{X} = \sum_{i=1}^{1000} X_i / 1000$  - доля посетителей, вошедших через первый вход. По условию:

$$E(X_i) = \frac{1}{2} \cdot \sigma = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1000}} = \frac{1}{20\sqrt{10}}$$

Найдем такое  $k$ , что  $\mathbb{P}(\bar{X} < k) > 0.99$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - 1/2}{\frac{1}{20\sqrt{10}}} < \frac{k - 1/2}{\frac{1}{20\sqrt{10}}}\right) &> 0.99 \\ \mathbb{P}(Z < 10\sqrt{10}(2k - 1)) &> 0.99 \\ 10\sqrt{10}(2k - 1) &> 2.33 \\ k &> 0.536841 \end{aligned}$$

Аналогичную долю получаем и для второго гардероба. Наименьшее необходимое число мест в гардеробе будет равно  $\lceil 1000k \rceil = \lceil 536.841 \rceil = 537$

5. Компания кабельного телевидения *НВТ* исследует возможность присоединения к своей сети пригородов города  $N$ . Опросы показали, что в среднем каждые 3 из 10 семей жителей пригородов хотели бы стать абонентами сети. Стоимость работ, необходимых для организации сети в любом пригороде оценивается величиной 2080000 у.е. При подключении каждого пригорода *НВТ* надеется получить 1000000 у.е. в год от рекламодателей. Планируемая чистая прибыль от оплаты за кабельное телевидение одной семьей в год равна 120 у.е. Каким должно быть минимальное количество семей в пригороде для того, чтобы с вероятностью 0.99 расходы на организацию сети в этом пригороде окупились за год?

*Решение:* Обозначим  $N$  - количество подключенных абонентов, тогда  $N \sim \text{Bin}(n, 0.3)$ . При больших  $n$  биномиальное распределение можно заменить на нормальное,  $N \sim N(0.3n, 0.21n)$ .

$$\mathbb{P}(120N > 1080000) = \mathbb{P}(N > 9000) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{9000 - 0.3n}{\sqrt{0.21n}}\right) = 0.99$$

Из таблицы находим, что

$$\frac{9000 - 0.3n}{\sqrt{0.21n}} = -2.3263479$$

Решаем квадратное уравнение, находим корни, один - отрицательный, другой,  $n \approx 30622$ .