ВШБ Бизнес-информатика: ТВиМС 2025.
Лист задач для самостоятельного решения #4.
Дискретные случайные величины и их характеристики.

1. Есть игра, в результате которой мы можем проиграть 5 рублей с вероятностью 0.1, сыграть в ноль (то есть ничего не получить, но и ничего не потерять) с вероятностью 0.2 и выиграть 1 рубль с вероятностью 0.7.

   (a) Постройте таблицу функции вероятности (ряд распределения) для выигрыша в одной игре, найдите математическое ожидание выигрыша. Является ли игра для нас плюсовой? Т.е. если мы будем долго в нее играть – мы в результате будем больше выигрывать или проигрывать? Найдите дисперсию и стандартное отклонение выигрыша в одной партии (если мы проиграли, то будем говорить, что наш выигрыш равен -5).

   (b) Запишите функцию распределения $F_X(x)$, нарисуйте график, используя функцию распределения найдите вероятность того, что наш выигрыш окажется в промежутке $(-0.5; 1.2]$.

   (c) Найдите вероятность того, что выигрыш отклонится от своего математического ожидания менее чем на стандартное отклонение.

Ответ: а)
$EX = 0.2 > 0$ – *играть выгодно,* $VarX = 3.16$ $\sigma = 1.778$,
б) $p = 0.9$,
в) $p = 0.9$

Решение:

X	-5	0	1
P	0.1	0.2	0.7

$EX = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = -5 \bullet 0.1 + 0 \bullet 0.2 + 1 \bullet 0.7 = 0.2$ - *матожидание равно 0.2 – оно положительное, т.е. в среднем за каждую игру мы будем выигрывать 0.2 – игра плюсовая, долго играть выгодно.*

$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$

$E(X^2) = (-5)^2 \bullet 0.1 + 0^2 \bullet 0.2 + 1^2 \bullet 0.7 = 3.2$

$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 3.2 - 0.2^2 = 3.16$

$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{3.16} \approx 1.778.$

$P(|X - EX| < \sigma) = P(EX - \sigma < X < EX + \sigma) = P(-1.578 < X < 1.978) = 0.9$

2. Если функция распределения случайной величины X задана следующим образом:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \le b < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \le b < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \le b < 3.5 \\ 1 & b \ge 3.5 \end{cases}$$

   Постройте таблицу функции вероятности X (ряд распределения). Посчитайте математическое ожидание и дисперсию.

   Решение:

   Для дискретной случайной величины вероятность в точке x равна скачку функции распределения в этой точке: $P_X(X = x) = F(x) - \lim_{b \to x^-} F(b)$.

   Найдём скачки функции распределения:

   - $P_X(X = 0) = F(0) - \lim_{b \to 0^-} F(b) = 0.5$
   - $P_X(X = 1) = F(1) - F(0) = 0.1$

- $P_X(X = 2) = F(2) - F(1) = 0.2$
- $P_X(X = 3) = F(3) - F(2) = 0.1$
- $P_X(X = 3.5) = F(3.5) - F(3) = 0.1$

Ряд распределения:

x	0	1	2	3	3.5
$p_X(x)$	0.5	0.1	0.2	0.1	0.1

Математическое ожидание:

$$E[X] = 0 + 0.1 + 0.4 + 0.3 + 0.35 = 1.15$$

Дисперсия:

$$E[X^2] = 0 + 0.1 + 0.8 + 0.9 + 1.225 = 3.025$$
$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 3.025 - (1.15)^2 = 1.7025$$

3. Заполните ряд распределения до конца, если известно, что $E[X] = 0$.

x	-1	0	a	4
$p_X(x)$	0.6	p_1	0.1	0.1

Ответ:

0.2, 2

Решение:

Составляем два уравнения и получаем: $0.6 + p + 0.1 + 0.1 = 1 \Rightarrow p = 0.2$

$EX = -1 \bullet 0.6 + 0 \bullet p + a \cdot 0.1 + 4 \bullet 0.1 = 0 \Rightarrow 0.1a = 0.2 \Rightarrow a = 2$

4. Найдите a, p_1 и p_2, если известно, что $E[X] = 0$ и $Var[X] = 5.4$.

x	-2	-1	0	a	4
$p_X(x)$	0.4	0.2	p_1	0.1	p_2

a = 2, p1 = 0.1, p2 = 0.2

5. Пусть X — случайная величина с $E[X^2] = 3.6$, $P_X(X = 2) = 0.6$ и $P_X(X = 3) = 0.1$. Случайная величина X принимает только одно другое значение между 0 и 3. Найдите дисперсию X.

   Составим уравнение для дисперсии:

$$E[X^2] = 4 \cdot 0.6 + 9 \cdot 0.1 + x^2 \cdot 0.3 = 2.4 + 0.9 + 0.3x^2 = 3.3 + 0.3x^2$$
$$E[X^2] = 3.6 \Rightarrow 3.3 + 0.3x^2 = 3.6 \Rightarrow 0.3x^2 = 0.3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

   Ряд распределения:

x	1	2	3
$p_X(x)$	0.3	0.6	0.1

   Математическое ожидание: $E[X] = 0.3 + 1.2 + 0.3 = 1.8$

   Дисперсия: $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 3.6 - (1.8)^2 = 0.36$

6. В урне находятся 2 черных и 5 белых шаров. Вы случайным образом выбираете 3 из них. X — это количество черных шаров в вашей выборке. Найдите математическое ожидание и дисперсию X.

   - $X = 0$, означает 0 черных шаров в выборке. Вероятность этого события: $P(X = 0) = \frac{C_5^3}{C_7^3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$
   - $X = 1$, означает 1 черный шар в выборке. Вероятность этого события: $P(X = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_5^2}{C_7^3} = \frac{4}{7}$
   - $X = 2$, означает 2 черных шара в выборке. Вероятность этого события: $P(X = 2) = \frac{C_2^2 \cdot C_5^1}{C_7^3} = \frac{1}{7}$

   Можем построить таблицу функции вероятности (ряд распределения):

x	0	1	2
$p_X(x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

   Математическое ожидание: $E[X] = 0 + \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$

   Дисперсия:

$$E[X^2] = 0 + \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{8}{7} = \frac{56}{49}$$
$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{56}{49} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{56}{49} - \frac{36}{49} = \frac{20}{49}$$

7. В клубе 10 хороших стрелков и 3 плохих. На очередное соревнование случайным образом отбирается команда из трех человек.

   (a) Пусть случайная величина X – число плохих стрелков, попавших в команду. Для всех возможных значений X найдите значения функции вероятности $P_X(x)$, также посчитайте $E[X]$ и $Var[X]$.

   (b) Пусть случайная величина Y – число хороших стрелков, попавших в команду. Постройте ряд распределения случайной величины Y, посчитайте $E[Y]$ и $Var[Y]$.

   (c) Сравните результаты.

ОТВЕТ: а) EX= 0.692, VarX =0.444 (без промежуточных округлений),
б) – тот же ряд в обратном порядке: E(Y)=E(3-X)=3-E(X), Var(Y)=Var(3-X)=Var(X)

X	0	1	2	3
p	$\frac{C_3^0 * C_{10}^3}{C_{13}^3} \approx$	$\frac{C_3^1 * C_{10}^2}{C_{13}^3} \approx$	$\frac{C_3^2 * C_{10}^1}{C_{13}^3} \approx$	$\frac{C_3^3 * C_{10}^0}{C_{13}^3} \approx$

8. Три рассеянных математика, уходя из гостей, произвольным образом забирают по зонту (всего их было три – каждый из математиков пришел со своим зонтом). Пусть X – число математиков, забравших именно свой зонт. Постройте ряд распределения, найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X.

ОТВЕТ: 1 и 1 (Для построения таблицы просто посчитать, например перебрать варианты)

X	0	1	2	3
p	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

9. Цены на акции компаний A, B и C растут независимо друг от друга с вероятностями 0.3, 0.4 и 0.8 соответственно. Пусть X – число тех компаний среди этих трех, чьи акции выросли.

   (a) Постройте ряд распределения, найдите математическое ожидание и стандартное отклонение.

   (b) Найдите вероятность того, что X отклонится от своего математического ожидания более чем на одно стандартное отклонение.

Ответ: а) 1.5, $0.61^{0.5}$, *б)* 0.18

X	0	1	2	3
p	0.084	0.428	0.392	0.096

P(X=0)= 0.7*0.6*0.2=0.084

P(X=1)= 0.3*0.6*0.2+0.7*0.4*0.2+0.7*0.6*0.8=0.428

P(X=2)=…

P(X=3)= 0.3*0.4*0.8=0.096

б) $P(|X - EX| > \sigma) = 1 - P(|X - EX| \le \sigma)$

$P(|X - EX| \le \sigma) = P\left(|X - 1.5| \le \sqrt{0.61}\right) = P(0.781 - 1.5 \le X \le 0.781 + 1.5) = P(0.719 \le X \le 2.281) = P(1) + P(2) = 0.82$

учитываем, что это дискретное распределение и находим вероятность, после этого возвращаемся к противоположной.

10. При обсуждении любимой кофейни около Вышки студенты выяснили следующее:

   (a) Андрей по дороге в Вышку покупает кофе с вероятностью 1/3, независимо от этого по дороге домой он покупает кофе с вероятностью 1/4, Пусть случайная величина X это то, сколько раз за день Андрей купил кофе.

   (b) Борис по дороге вперед покупает кофе с вероятностью 1/3, по дороге домой он покупает кофе с вероятностью 1/4. Так же известно, что с вероятностью 1/5 он купит кофе как по дороге вперед, так и по дороге домой. Пусть случайная величина Y это то, сколько раз за день Борис купил кофе.

   (c) Валерия по дороге вперед покупает кофе с вероятностью 1/3 (это всегда большая порция Американо за 240 рублей), независимо от этого по дороге домой она покупает кофе с вероятностью 1/4 (маленькая порция Капучино за 90 рублей). Пусть случайная величина W это то, сколько денег за день Валерия потратила на кофе.

   Найти матожидание и стандартное отклонение упомянутых случайных величин. (Будем считать, что в других ситуациях люди в кофейню не заходят, нигде кроме как в этой кофейне кофе не покупают)

Комментарий по а): X_A –дискретная величина. Ряд распределения строим так:

$P(X_A = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}, \quad P(X_A = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}, \quad P(X_A = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow$

$EX = 7/12, \ \sigma_X = \sqrt{59/144}$

X	0	1	2			
p	2/3*3/4	1/3*3/4+2/3*1/4	1/3*1/4			
	0,5	0,416666667	0,083333333	1		
	0	0,416666667	0,166666667	0,583333	=EX	
	0	0,416666667	0,333333333	0,409722	=VarX	
X	0	1	2			
p	1-(1/3+1/4-1/5)	1/3+1/4 -2/5	1/5			
	0,616666667	0,183333333	0,2	1		
	0	0,183333333	0,4	0,583333	=EX	
	0	0,183333333	0,8	0,643056	=VarX	
X	0	90	240	330		
p	2/3*3/4	2/3*1/4	1/3*3/4	1/3*1/4		
	0,5	0,166666667	0,25	0,083333	1	
	0	15	60	27,5	102,5	=EX
	0	1350	14400	9075	14318,75	=VarX

11. Пусть вероятности и значения случайной величины X заданы следующим образом:

$$P_X(X = 1) = p = 1 - P_X(X = -1)$$

Найдите такую константу c, $c \neq 1$, чтобы случайная величина $Y = f(X) = c^X$ имела математическое ожидание 1.

$$\begin{gathered}
E[Y] = c^1 \cdot p + c^{-1} \cdot (1 - p) = 1 \\
c^1 p + c^{-1}(1 - p) = 1 \\
cp + \frac{(1 - p)}{c} = 1 \\
\frac{pc^2 - c + 1 - p}{c} = 0 \\
pc^2 - c + 1 - p = 0
\end{gathered}$$

В итоге получим $c = 1$ или $c = \frac{1-p}{p}$.

12. Задача важная на будущее :)

Пусть X - дискретная случайная величина с $E[X] = a$ и $Var[X] = b^2 \neq 0$. Мы строим новую случайную величину, которая является функцией от X:

$$Y = g(X) = \frac{X - a}{b}$$

Найдите $E[Y]$ и $Var[Y]$.

Подсказка: можно попробовать разные способы: или использовать готовые свойства математического ожидания и дисперсии, или напрямую поработать с их формулами.

$$\begin{gathered}
E[Y] = E\left[\frac{X - a}{b}\right] = E\left[\frac{X}{b} + \frac{-a}{b}\right] = \frac{1}{b}E[X] - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0 \\
Var[Y] = Var\left[\frac{X - a}{b}\right] = Var\left[\frac{X}{b} + \frac{-a}{b}\right] = \frac{1}{b^2}Var[X] = \frac{b^2}{b^2} = 1
\end{gathered}$$