ВШБ Бизнес-информатика: ТВиМС 2025.
Лист задач для самостоятельного решения #3b.
Полная вероятность. Теорема Байеса.

1. Торговая сеть планирует открытие нового супермаркета. Если рядом будут находиться магазины конкурентов, то супермаркет окажется прибыльным с вероятностью 0.3. Если конкурентов рядом не будет, то прибыльным он окажется с вероятность 0.4. Вероятность найти помещение, рядом с которым не будет конкурентов, равна 0.8.

   (a) Найти вероятность того, что новый супермаркет окажется прибыльным.

   (b) Известно, что новый супермаркет оказался прибыльным. Найти вероятность того, что рядом нет магазинов конкурентов.

ОТВЕТ: 0.38, 0.842

Приведем полное решение – примерно так надо будет оформлять решение таких задач на контрольной и экзамене. Надо ввести все обозначения, обосновать возможность применения формул, записать формулы в общем виде, объяснить, откуда берутся промежуточные вероятности:

Пусть событие А состоит в том, что супермаркет прибыльный, H_1 – рядом нет конкурентов, H_2 – рядом есть конкуренты, H_1 и H_2 составляют полную группу событий, так как (в рамках данной задачи) никаких других исходов не существует, и эти исходы не пересекаются. Это означает, что можно применять формулу полной вероятности (пункт а) и формулу Байеса (пункт б). Еще из условия получаем: $P(H_1)=0.8$, $P(H_2)=1-P(H_1)=0.2$, $P(A|H_1)=0.4$, $P(A|H_2)=0.3$.

а) $P(A) = P(H_1)\cdot P(H_1) + P(H_2)\cdot P(H_2) = 0.4 \bullet 0.8 + 0.3 \bullet 0.2 = 0.38$

б) $P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\bullet P(H_1)}{P(H_1)\cdot P(H_1)+P(H_2)\cdot P(H_2)} = \frac{0.4\bullet 0.8}{0.4\bullet 0.8+0.3\bullet 0.2} \approx 0.842$

2. Есть три монеты: у одной с обеих сторон орел, у второй с обеих сторон решка, у третьей орел с одной стороны и решка с другой. Мы выбираем монету наугад, подбрасываем её, и выпадает орел. Какова вероятность того, что на противоположной стороне решка?

   C_1, C_2, C_3 – события, соответствующие выбору монеты согласно условиям задачи. A – событие, соответствующее выпадению орла.

$$P(A) = P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2) + P(A|C_3)P(C_3) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

   Согласно условию, нам нужно узнать вероятность того, что была выбрана третья монета.

$$P(C_3|A) = \frac{P(A|C_3)P(C_3)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

3. В урне A находятся 2 белых шара и 1 черный шар, а в урне B находятся 1 белый шар и 5 черных. Один случайный шар из урны A помещают в урну B. Затем из урны B вынимается шар, который оказывается белым. Какова вероятность того, что переложенный шар был белым?

   W – событие, соответствующее выпадению белого шара. TW – событие, соответствующее тому, что переложенный шар был белым. TB – событие, соответствующее тому, что переложенный шар был черным.

$$P(W) = P(W|TW)P(TW) + P(W|TB)P(TB) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{21} + \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$$

$$P(TW\,|\,W) = \frac{P(W|TW)P(TW)}{P(W)} = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{5}{21}} = \frac{4}{5}$$

4. При приеме на работу 10% кандидатов сообщают ложную информацию о себе. Для выявления таких случаев работодатель проводит дополнительное психологическое тестирование. Однако тест не является абсолютно точным – если соискатель лгал, тест в 5% случаев этого не определит. С другой стороны, у теста бывают и «ложные срабатывания» - в 20% случаев человека, сообщившего только достоверную информацию, он примет за лжеца. На очередном тестируемом тест сработал, то есть указал, что соискатель лжет. Найти вероятность того, что соискатель действительно лгал.

Указание: Вообще, в задачах подобного рода единственная возможная проблема – разобраться, какие гипотезы и какие события мы вводим. Если это не очевидно сразу, то внимательно читаем текст и особенно внимательно всматриваемся в вопрос: «На очередном тестируемом тест сработал, то есть указал, что соискатель лжет. Найти вероятность того, что соискатель действительно врал». *То есть нам надо найти условную вероятность – известно, что тест сработал, надо найти вероятность того, что соискатель лжет. То есть мы ищем P(соискатель лжет | тест показал, что соискатель лжет). Из двух изучаемых формул – ФПВ и ФБ, условную вероятность ищет вторая, причем вероятность такого вида – P(гипотеза|событие).*

РЕШЕНИЕ: введём обозначения: событие A – тест указал на ложь, гипотеза H_1 – соискатель лгал, гипотеза H_2 – соискатель говорил правду. Данные две гипотезы составляют полную группу событий, так что мы можем использовать формулу Байеса. Тогда, в соответствии с текстом, мы получаем:

$P(H_1)=0.1$, $P(H_2)=0.9$ – прямо из условия,

$P(A|H_1)=0.95$ (тест определяет ложь только в 95% случаев лжи),

$P(A|H_2)=0.2$ (ложные срабатывания на честных людях).

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{P(A\mid H_1)\cdot P(H_1)+P(A\mid H_2)\cdot P(H_2)} = \frac{0.1\bullet 0.95}{0.1\bullet 0.95+0.9\bullet 0.2} \approx 0.345$$

---

5. У студента ВШБ на Шаболовке 27% занятий проходят в пятом корпусе, 24% в третьем, 20% в четвертом, а остальные занятия проходят в К9 и К10. Если занятие проходит в пятом корпусе, то с вероятностью 0.3 студент займет место в первом ряду. Если занятие проходит в третьем корпусе, то вероятность занять место в первом ряду для него равна 0.2, в четвертом 0.1, в К9 и К10 вероятность равна 0.01. Во время пары на Шаболовке студент отвечает на входящий звонок: "Извини, не могу разговаривать, сижу в первом ряду". Найти вероятность того, занятие проходит в четвертом корпусе.

$$\frac{0.2\cdot 0.1}{0.27\cdot 0.3 + 0.24\cdot 0.2 + 0.2\cdot 0.1 + (1 - 0.27 - 0.24 - 0.2)\cdot 0.01} = 0.1316656$$

6. Компания А собирается выводить на рынок новую игровую приставку. Ее конкуренты – компании B и C, работающие независимо друг от друга, каждая из которых может опередить А с вероятностью 0.6. Если у приставки А на момент выхода в продажу не будет конкурентов, то она окажется успешной с вероятностью 0.9, если к этому моменту свою приставку успеет выпустить только один конкурент, то вероятность успеха равна 0.7, если же на рынке будут оба конкурента – вероятность успеха А равна 0.4.

   (a) Найти вероятность того, что продукт окажется успешным.

   (b) Известно, что продукт оказался успешным. Найти вероятность того, что это произошло при отсутствии конкурентов.

   (c) Известно, что продукт не оказался успешным. Найти вероятность того, что только один из конкурентов успел обогнать А.

УКАЗАНИЕ: событие A – приставка успешна, H1 – никто не опередил – вероятность ищем как произведение вероятностей (B не опередил) и (C не опередил) P(H1) = 0.16, H2 – опередил ровно один, ищем как сумму вероятностей двух событий: первое (B опередил) и (C не опередил), второе (B не опередил) и (C опередил), P(H2)= 0.48, H3 – опередили оба, P(H3)= 0.36,

а) P(A)=0.16*0.9+0.48*0.7+ 0.36*0.4=0.624

б) P(H1 | A)= 0.16*0.9 / (0.16*0.9+0.48*0.7+ 0.36*0.4)=0.231

в) P(not A) = 0.376, P(H2 | not A) = 0.48 * 0.3 / 0.376 = 0.383

---

7. Если в день перед экзаменом Вася идет только в кино, то сдает экзамен с вероятностью 0.6. Если в день перед экзаменом Вася идет только в бар, то сдает экзамен с вероятностью 0.5. Если в день перед экзаменом Вася идет и в кино, и в бар – то сдает экзамен с вероятностью 0.1. Если в день перед экзаменом Вася сидит дома, то сдает экзамен с вероятностью 0.9. В кино и в бар Вася ходит независимо друг от друга и от других событий, с вероятностями 0.2 и 0.6 соответственно.

   (a) Найти вероятность того, что Вася сдаст экзамен.

   (b) Найти вероятность того, что Вася вчера был и в баре и в кино, если известно, что он сдал экзамен.

   (c) Найти вероятность того, что Вася вчера был в баре, если известно, что он сдал экзамен.

   (d) Вася сдал экзамен. Что более вероятно – то, что он вчера был в баре, или то, что он вчера был в кино?

Указание: Данная задача – на формулу полной вероятности и формулу Байеса. Вероятность сдать экзамен зависит от поведения Васи в день перед экзаменом. Поняв это, либо посмотрев на вопросы, можно ввести следующие гипотезы: H_1 – Вася пошел только в кино, H_2 – он пошел только в бар, H_3 – и в кино и в бар, H_4 – никуда не пошел, они составляют полную группу событий. Вероятности непосредственно этих событий нам не даны, но мы можем их найти. Для удобства вычислений введем еще следующие обозначения: A – Вася сдал экзамен, K – Вася ходил в кино, B – Вася ходил в бар. Тогда:

$P(H_1) = P(K \bullet \overline{B}) = 0.2 \cdot (1 - 0.6) = 0.08$

Аналогично получаем: $P(H_2) = 0.48$, $P(H_3) = 0.12$, $P(H_4) = 0.32$, условные вероятности указаны непосредственно в тексте: $P(A|H_1) = 0.6$, $P(A|H_2) = 0.5$, $P(A|H_3) = 0.1$, $P(A|H_4) = 0.9$, что позволяет применить формулу полной вероятности и формулу Байеса.

В пункте а) мы ищем $P(A)$, в пункте б) мы ищем $P(H_k|A)$, в) чуть сложнее но постарайтесь решить, г) если сделали в), то все просто.

H_1 – только кино, H_2 –только бар, H_3 – и кино и бар, H_4 – никуда не пошел, они составляют полную группу событий.

$P(H_1) = P(K \cdot \overline{Б}) = 0.2 \cdot (1 - 0.6) = 0.08$

$P(H_2) = 0.48$, $P(H_3) = 0.12$, $P(H_4) = 0.32$,

условные вероятности указаны непосредственно в тексте:

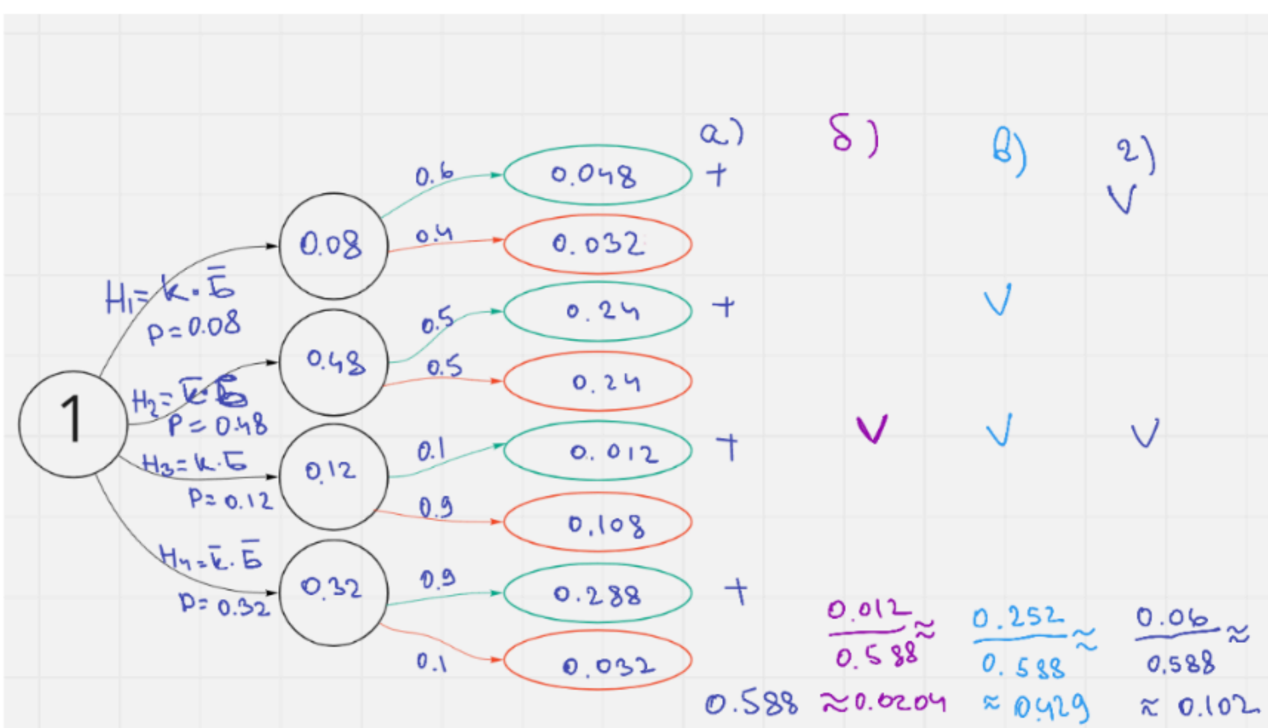
$P(A|H_1) = 0.6$, $P(A|H_2) = 0.5$, $P(A|H_3) = 0.1$, $P(A|H_4) = 0.9$

$P(A) = 0.6 * 0.08 + 0.5 * 0.48 + 0.1 * 0.12 + 0.9 * 0.32 = 0.588$

$P(H_3|A) = \frac{0.1*0.12}{0.588} = 0.0204$

$P(H_2 + H_3|A) = \frac{0.5*0.48+0.1*0.12}{0.588} = 0.429$ – *был в баре*

$P(H_{***} + H_3|A) = \frac{0.6*0.08+0.1*0.12}{0.588} = 0.102$ *был в кино*



8. Преподаватель теорвера проводит опрос о том, насколько студенты заинтересованы в изучении предмета. Однако студенты не уверены в полной анонимности, поэтому преподаватель понимает, что: если студент написал, что его интересует предмет – с вероятностью 0.2 он ответил неправду, если же студент написал, что его не интересует предмет, то это честный ответ. По результатам опроса оказалось, что 30% студентов написали, что предмет их не интересует. Преподаватель знает, что некоторый студент точно не интересуется предметом. Найти вероятность того, что этот студент честно ответил на вопрос.

гипотеза H1 – написал «интересует», гипотеза H2 – написал нет, P(H1)=0.7, P(H2) = 0.3
A – точно не интересуется
P(A | H1)=0.2, P(A | H2)=1

$$P\left(H_2 | A\right) = \frac{P\left(A | H_2\right) \cdot P(H_2)}{P\left(A | H_1\right) \cdot P\left(H_1\right) + P\left(A | H_2\right) \cdot P(H_2)} = \frac{0.3}{0.14+0.3} = 0.682$$

9. Школьник Вася должен написать и сдать работу по географии. С вероятностью 0.2 он этого делать не будет. Если же он напишет работу, то с вероятностью 0.4 работу съест его собака. Если собака не сделает этого, то с вероятностью 0.6 Вася забудет взять работу в школу. Если Вася возьмет работу в школу, то с вероятностью 0.1 потеряет ее по дороге. Если он донесет работу до школы, то сдаст ее.

   (a) Найти вероятность того, что Вася сдаст работу.

   (b) Известно, что Вася не сдал работу. Найти вероятность того, что ее съела собака.

а) $\overline{\text{не сделает}} \cdot \overline{\text{съест собака}} \cdot \overline{\text{забудет взять}} \cdot \overline{\text{потеряет}} = 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.9 = 0.1728$

б) (сделал и съела собака)/(1-0. 1728)=0.8*0.4/(1-0.1728)= 0.387

10. Студент сдает экзамен с вероятностью 0.8. Если этого не происходит, то он отправляется на пересдачу, и вероятность сдать становится равной 0.6. Если он не сдает и со второго раза, то отправляется на комиссию, и там сдает с вероятностью 0.7, и если снова не сдал – получает ИУП. Известно, что студент сдал экзамен, то есть дело не дошло до ИУПа. Найти вероятность того, что экзамен был сдан со второй попытки.