

**Линейная алгебра
СЛУ для анализа векторов**

Глеб Карпов

МНад ФКН ВШЭ

СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на mat-vec как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому понимания СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за a_1, \dots, a_m то тогда:

$$A\mathbf{x} = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился right-hand side вектор r . Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов a_1, \dots, a_m вообще можно было бы “дотянуться” до вектора r . Иными словами, получаем:

СЛУ для анализа векторов

Линейная оболочка и единственность решения

- Наш взгляд на mat-vec как на линейную комбинацию столбцов матрицы приводит нас к более глубокому понимания СЛУ. Если обозначим столбцы матрицы за a_1, \dots, a_m то тогда:

$$Ax = r \leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_m a_m = r,$$

Решить СЛУ теперь означает подобрать коэффициенты для линейной комбинации столбцов матрицы, чтобы получился right-hand side вектор r . Но важным фактором является то, чтобы с помощью векторов a_1, \dots, a_m вообще можно было бы “дотянуться” до вектора r . Иными словами, получаем:

• Существование решения

Для того, чтобы у СЛУ $Ax = r$ существовало хотя бы одно решение, необходимо, чтобы выполнялось:

$$r \in \text{span}(a_1, \dots, a_m)$$

Иначе, СЛУ называется несовместной (inconsistent). В ступенчатом виде матрицы несовместность системы выражается в виде наличия строчки:

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b], \ b \neq 0$$

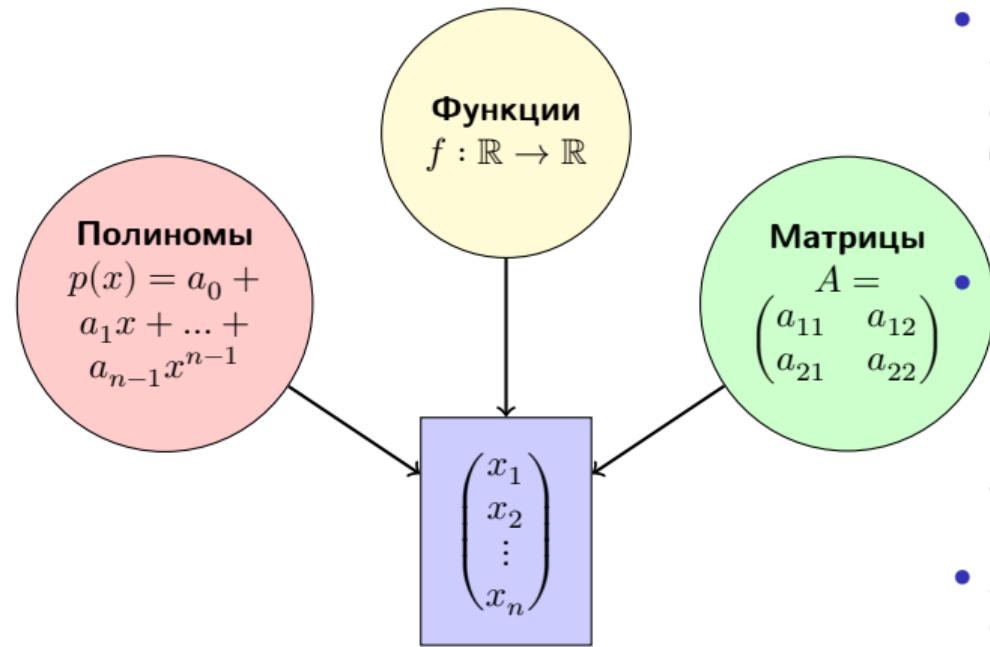
Пример: несовместность vs неуникальное решение

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \end{array} \right)$$

Пример: несовместность vs неуникальное решение

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \end{array} \right)$$
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 12 & 23 & 14 \end{array} \right)$$

Reminder: в чем сила?



- Если векторное пространство \mathbb{V} имеет базис $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, то любой вектор \mathbf{v} однозначно определяется своими координатами α_k в этом базисе. Если мы упакуем α_k в вектор из \mathbb{R}^n , то можем оперировать им вместо оперирования над \mathbf{v} .
- Если $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k$ и $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k$, то $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k) \mathbf{v}_k$ т.е. вместо сложения двух оригинальных векторов, можно сложить векторы координат.
- Аналогично, чтобы получить $\alpha\mathbf{v}$, можно умножить столбец координат \mathbf{v} на α и сразу получить координаты вектора $\alpha\mathbf{v}$.

Линейная алгебра: единый язык для разных объектов

СЛУ как способ исследовать наборы векторов

- Для отдельного рассмотрения можно вынести системы однородных линейных уравнений вида $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Утверждение

Пусть у нас есть набор векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, и пусть $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m]$ — это матрица размера $n \times m$ со столбцами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$. Тогда

- Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ линейно независима тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце;
- Линейная оболочка системы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ совпадает с \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждой строке;
- Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ является базисом в \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце и в каждой строке.

СЛУ как способ исследовать наборы векторов

- Для отдельного рассмотрения можно вынести системы однородных линейных уравнений вида $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- В интерпретации линейной комбинации столбцов такие уравнения внезапно напоминают нам про возможность получения нулевого вектора:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1a_1 + \dots + x_ma_m = \mathbf{0},$$

Если единственное решение - тривиальный вектор $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то набор перед нами линейно независимая группа векторов в столбцах матрицы. Иначе - линейно зависимая.

Утверждение

Пусть у нас есть набор векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$, и пусть $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m]$ — это матрица размера $n \times m$ со столбцами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$. Тогда

1. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ линейно независима тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце;
2. Линейная оболочка системы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ совпадает с \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждой строке;
3. Система $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ является базисом в \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда ступенчатая форма матрицы A имеет ведущий элемент в каждом столбце и в каждой строке.

Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.

Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
 1. $1 - 3t + 5t^2, -3 + 5t - 7t^2, -4 + 5t - 6t^2, 1 - t^2$

Примеры

- Используя переход в координатную форму, сделать выводы про следующие наборы векторов: про их линейную оболочку и характер линейной зависимости.
 1. $1 - 3t + 5t^2, -3 + 5t - 7t^2, -4 + 5t - 6t^2, 1 - t^2$
 2. $5t + t^2, 1 - 8t - 2t^2, -3 + 4t + 2t^2, 2 - 3t$

Слайд дя записей