

ВШБ Бизнес-информатика: ТВиМС 2025.
 Лист задач для самостоятельного решения №1.
 Классическая и комбинаторная вероятность.

Все задачи из данного списка надо научиться решать с помощью формулы классической вероятности:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

где $|A|$ – мощность интересуемого события а.к.а. число благоприятных исходов, $|\Omega|$ – мощность пространства элементарных исходов а.к.а. общее число элементарных исходов, все элементарные исходы равновозможны.

1. Несколько кроликов живут под деревом. Четыре кролика случайным образом выбираются из их числа. Вероятность того, что оба белых кролика попадут в выбранную группу, в два раза больше вероятности того, что ни один из белых кроликов не будет выбран. Сколько кроликов живут под деревом?

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{C_{n-2}^4}{C_n^4} &= \frac{C_2^2 \cdot C_{n-2}^2}{C_n^4} \\ 2 \cdot C_{n-2}^4 &= C_{n-2}^2 \\ 2 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-2-4)! \cdot 4!} &= \frac{(n-2)!}{(n-2-2)! \cdot 2!} \\ 2 \cdot \frac{1}{(n-6)! \cdot 4!} &= \frac{1}{(n-4)! \cdot 2!} \\ 2 \cdot \frac{1}{4!} &= \frac{1}{(n-5) \cdot (n-4) \cdot 2!} \\ n^2 - 9n + 20 &= 6 \implies n = 7 \end{aligned}$$

2. Для нового смс-сервиса случайно выбирается четырехзначный телефонный номер. Найти вероятность событий:
- (a) В номере не будет цифры 2.
 - (b) В номере будет хотя бы одна цифра 4.
 - (c) Известно, что номер состоит только из цифр, меньших 5. Найти вероятность того, что в нем есть хотя бы одна 1.
 - (d) Четных цифр в номере будет больше чем нечетных.
 - (e) Первые две цифры будут четными (остальные две – любые)
 - (f) Все цифры будут разными.
 - (g) На первом месте не будет «2», если известно, что все цифры разные.

a) $N_A = 9^4, N = 10^4, P(A) = 0.6561 \approx 0.656$

б) Это событие – противоположное тому, что в номере не будет цифры 4. $P(A) = 1 - 0.6561 \approx 0.344$

в) Этот пункт решается аналогично предыдущему $P(A) = 1 - \frac{4^4}{5^4} \approx 0.59$

г) Условие означает, что в номере либо все четные (ЧЧЧЧ), либо три четных и одна нечетная (ЧЧЧН или ЧЧНЧ или ЧНЧЧ или НЧЧЧ). Перечислены несовместные исходы, вероятность каждого $\frac{1}{2^4}$. Суммируем и

получаем $5/2^4 \approx 0.313$

д) 0.25

е) $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = 0.504$

ж) $\frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = 0.9$

3. (a) Два студента случайным образом садятся в поезд, состоящий из шести вагонов. Найти вероятность того, что они окажутся в одном вагоне. Найти вероятность того, что они окажутся в разных вагонах.
 (б) Три студента садятся в поезд, состоящий из шести вагонов. Найти вероятность того, что они все поедут в разных вагонах. Найти вероятность того, что они поедут в одном вагоне. Найти вероятность того, что хотя бы двое окажутся в одном вагоне.

Указание: решить с помощью формулы $P(A) = \frac{N_A}{N}$.

ОТВЕТ: а) 0.167, 0.833, б) 0.556, 0.0278, 0.444

Указание:

$$a) \frac{6}{36} \approx 0.167, \quad 1 - \frac{6}{36} \approx 0.833$$

$$b) \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} \approx 0.556, \quad \frac{6}{216} \approx 0.0278, \quad 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} \approx 0.444$$

4. (а) Пять студентов А, В, С, Д и Е случайным образом встают в очередь. Найти вероятность того, что А и В окажутся рядом.
 (б) Пять студентов А, В, С, Д и Е случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что А и В будут сидеть рядом.

ОТВЕТ: 0.4, 0.5

$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$. Для нахождения N_A объединим А и В в одного человека. Число вариантов расставить четверых – 4!. Теперь учтем, что эти двое могут идти в порядке АВ и ВА.

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{2 \cdot 4!}{5!} = 0.4$$

Можно решать по аналогии с а) – рассматривая рассадки, а можно и так: пусть А сел на одно из мест. Досталось четыре свободных места, из которых только два подходящих. Ответ $\frac{2}{4} = 0.5$

5. Подброшены два кубика. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков делится на три.
Указание: либо просто перебор, либо через противоположное событие.

Ответ: $\frac{20}{36} \approx 0.556$

3-1 3-2 3-3 3-4 3-5 3-6

6-1 6-2 6-3 6-4 6-5 6-6

1-3 2-3 4-3 5-3

1-6 2-6 4-6 5-6 всего 20 то есть 20/36

$$\text{либо } 1 - \frac{4^2}{6^2} = \frac{20}{36}$$

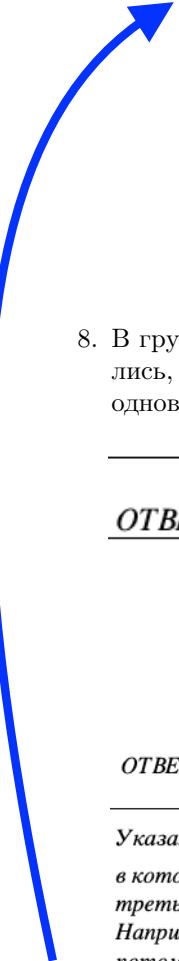
6. Сколько раз надо бросить кубик, чтобы с вероятностью не менее 0.9 хотя бы один раз выпала четверка?
(т.к. есть словосочетание "хотя бы один раз" – попробуйте найти через противоположное событие.)

ОТВЕТ: 13

$$\text{Для } n \text{ бросков вероятность того, что 4 не выпадет, равна } \frac{5^n}{6^n} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0.1 \Rightarrow n \geq 13.$$

7. Экзамен состоит из 9 задач. Студент А решил 5 задач правильно и 4 неправильно. Студент В списал у студента А 3 задачи. Найти вероятность того, что:

- (а) все три списанные задачи были решены правильно.
- (б) среди списанных задач правильно решена была только одна.
- (с) среди списанных задач правильно решена была как минимум одна.

- 
8. В группе из 26 человек разыгрывают пять билетов на концерт на день Вышки. Аня и Борис договорились, что друг без друга на концерт не пойдут (а вместе – пойдут). Найти вероятность того, что они одновременно выиграют или, наоборот, не выиграют билеты в этом розыгрыше.

ОТВЕТ: ≈ 0.677

$$\frac{C_2^2 C_{24}^3 + C_2^0 C_{24}^5}{C_{26}^5} \approx 0.677$$

ОТВЕТ: а) 0.119, б) 0.357, в) 1-0.0476=0.952.

Указание: $P(A) = \frac{N_A}{N}$, найдем N – это количество вариантов выбрать любые 3 задачи из 9, причем порядок, в котором мы их списываем, очевидно неважен. Первую из задач можно выбрать 9 способами, вторую 8, третью – 7 способами. Но проблема в том, что в таком пересчете варианты посчитаны по несколько раз. Например – сначала студент Б списывает задачу 2, потом 3, потом 9. Или сначала задачу 9, потом 2, потом 3. Но порядок нас не интересует, значит надо понять, сколько раз была посчитана каждая кучка. Итак, сколько разных вариантов расставить три задачи (например, с номерами 2, 3 и 9)? На первое место можно поставить любую из трех (3 варианта), потом любую из 2 (3*2 варианта), последнюю – на единственное оставшееся место (3*2*1 варианта). Т.е. каждую тройку задач мы посчитали 6 раз.

Окончательно получаем – всего количество вариантов выбрать 3 задачи из 9 без учета порядка равно

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9!}{3!6!} = C_9^3 = 84$$

$$a) N_A = C_5^3 = 10 \quad 0.119$$

$$b) N_A = C_5^1 \cdot C_4^2 = 30 \quad 0.357$$

$$c) N_{\bar{A}} = C_4^3 = 4 \quad 1 - 0.0476 = 0.952$$

9. На консультацию записалось 4, 5 и 6 человек из первой, второй и третьей групп. (считаем поведение всех студентов независимым и случайным)

- В результате на консультацию пришли 6 человек. Найти вероятность того, что из каждой группы пришло по 2 человека.
- На следующую консультацию записались те же студенты, но на консультацию пришло уже 7 человек. Найти вероятность того, что из каждой группы пришло не менее двух человек.

ОТВЕТ: а) 0.18, б) 0.42.

$$\frac{\text{combin}(4, 2) \cdot \text{combin}(5, 2) \cdot \text{combin}(6, 2)}{\text{combin}(15, 6)} = 0.17982$$

а)

$$\frac{\text{combin}(4, 3) \cdot \text{combin}(5, 2) \cdot \text{combin}(6, 2) + \text{combin}(4, 2) \cdot \text{combin}(5, 3) \cdot \text{combin}(6, 2) + \text{combin}(4, 2) \cdot \text{combin}(5, 2) \cdot \text{combin}(6, 3)}{\text{combin}(15, 7)} = 0.41958$$

б)

10. Подброшено три кубика.

- Найти вероятность того, что выпадет три разных числа.
- Найти вероятность того, что выпадет три четных числа.
- Найти вероятность того, что выпадет три разных четных числа.
- Найти вероятность того, что все три раза выпали разные числа, если известно, что все выпавшие числа четные.
- Известно, что все три раза выпадали разные числа. Найти вероятность того, что все выпавшие числа четные.

ОТВЕТ: а) 0.556, б) 0.125, в) 0.0278 г) 0.222, д) 0.05.

$$a) \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 0.556$$

$$b) \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 0.125$$

$$v) \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 0.02778$$

$$r) \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 0.222$$

$$d) \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = 0.05$$

11. В лекционной аудитории 20 рядов по 14 мест. В пустой аудитории случайным образом рассаживаются четыре человека. Найти вероятность того, что у них всех будут разные номера рядов и разные номера мест.

ОТВЕТ: 0.464

$$\frac{280 \cdot (19 \cdot 13) \cdot (18 \cdot 12) \cdot (17 \cdot 11)}{280 \cdot 279 \cdot 278 \cdot 274} = 0.464$$

12. (a) Чему равна вероятность выиграть главный приз в лотерею «7 из 49»? В упрощенном варианте – во время розыгрыша лотереи будут выбраны семь разных случайных чисел от 1 до 49, а вам их надо заранее угадать.
- (b) Каждую неделю проходит один розыгрыш лотереи. Выпускник Вышки, прогуливавший теорвер, придумал план, надежный как швейцарские часы: он будет участвовать в лотерее много раз подряд, и когда-нибудь обязательно выиграет главный приз. Определите, сколько лет ему надо участвовать в лотерее, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша за это время стала больше 0.1?

ОТВЕТ: $0.000000116 \cdot 9.050.530 \cdot 7/365 \approx 173571.8$ лет

Общее число исходов $C_{49}^7 = 85.900.584 \approx 86.000.000$, благоприятный исход – один.

$$1 - \left(1 - \frac{1}{C_{49}^7}\right)^n > 0.1 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{C_{49}^7}\right)^n < 0.9 \Rightarrow n > 9.050.529$$

$$9.050.530 \cdot 7/365 \approx 173571.8$$

13. Вы решили узнать, есть ли среди ваших однокурсников кто-нибудь, у кого день рождения (без учета года) совпадает с вашим. Понятно, что если вы узнаете дату др только одного однокурсника, то вероятность того, что вы сразу нашли нужного, довольно мала. Если вы узнаете дату др двоих однокурсников, то вероятность того, что среди них есть нужный, чуть выше. Если бы на курсе училось 100-200-300 человек, то вероятность того, что среди них есть хотя бы один с нужной датой ДР, должна быть довольно большой.

- (a) У вас 215 однокурсников. Найти вероятность того, что среди них есть хотя бы один с нужной датой ДР.
- (b) Сколько человек должно учиться вместе с вами на курсе, чтобы вероятность того, что среди них есть хотя бы один нужный вам, была больше 0.5?

ОТВЕТ: а) 0.446, б) 253

$$\text{а)} 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{215} = 0.446$$

б) от обратного – найдем вероятность $P(\bar{A})$ – среди n опрошенных нет никого, совпадающего с нами. Тогда

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{364}{365}\right)^n \Rightarrow P(A) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n > 0.5 \Leftrightarrow \left(\frac{364}{365}\right)^n < 0.5 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0.5)}{\ln\ln\left(\frac{364}{365}\right)} = 252.652 \Rightarrow n = 253.$$

14. Нас интересует вероятность того, что в некоторой группе есть хотя бы два человека, у которых дни рождения приходятся на один день (то есть без учета года). Понятно, что если группа маленькая, то и вероятность такого совпадения маленькая, а если группа большая, то начиная с некоторого момента вероятность такого события равна 1.

Сколько человек должно быть в группе, чтобы вероятность того, что в этой группе есть хотя бы два человека с совпадающими др, оказалась более 0.5? *Указание: при решении этой задачи могут возникнуть вычислительные сложности, попробуйте их как-нибудь преодолеть.*

от обратного – найдем вероятность $P(\bar{A})$ – среди n опрошенных нет совпадающих. Тогда

$$P(\bar{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdots}{365^n} = \frac{A_{365}^n}{365^n} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n} > 0.5 \Leftrightarrow \frac{A_{365}^n}{365^n} < 0.5 \Rightarrow n = 23$$

$$1 - \frac{\text{perm}ut(365, 22)}{365^{22}} = 0.476 \quad 1 - \frac{\text{perm}ut(365, 23)}{365^{23}} = 0.507$$

при этом число возможных пар $23 \cdot 22 / 2 = 253$, что и связывает эту задачу с предыдущей.