

## Линейная алгебра

Построение матрицы линейного отображения. Изменение матрицы при изменении базисов.

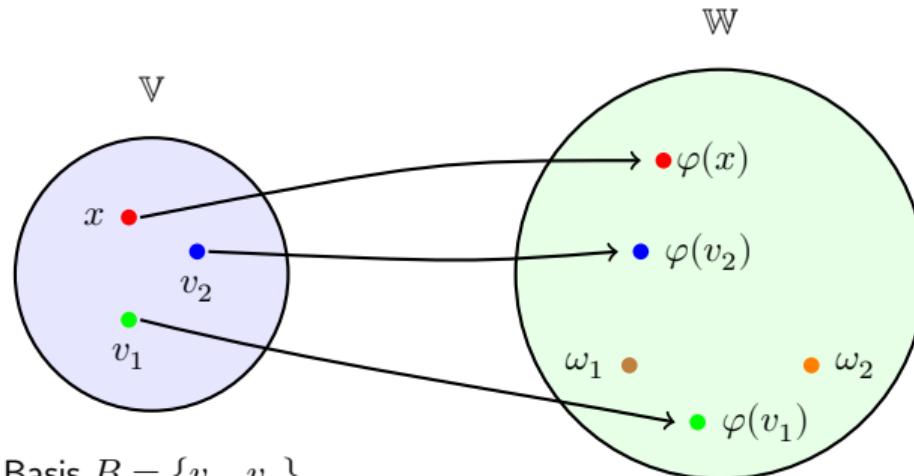
Глеб Карпов

МНад ФКН ВШЭ

# Линейные отображения и векторные пространства

Действующие лица

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



$$\text{Basis } B = \{v_1, v_2\}$$

$$\text{Basis } C = \{\omega_1, \omega_2\}$$

## Напоминание: построение матрицы линейного отображения

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов:  $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2)$

## Напоминание: построение матрицы линейного отображения

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов:  $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2)$
- Образы базисных векторов возможно разложить по базису в пространстве  $\mathbb{W}$ :

$$\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2, [\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2, [\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

## Напоминание: построение матрицы линейного отображения

- Для определения значения функции нам необходимо только знать значения функции от базисных векторов:  $\varphi(x) = \varphi(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 \varphi(v_1) + x_2 \varphi(v_2)$
- Образы базисных векторов возможно разложить по базису в пространстве  $\mathbb{W}$ :

$$\varphi(v_1) = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2, [\varphi(v_1)]_C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_2) = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2, [\varphi(v_2)]_C = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

- В результате получаем разложение  $\varphi(x)$  по базису в пространстве  $\mathbb{W}$ :  $\varphi(x) = \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2$ , где:

$$[\varphi(x)]_C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L_{\varphi, (B, C)} [x]_B$$

## Устройство матрицы линейного отображения

- Если обобщать наш игрушечный пример, то

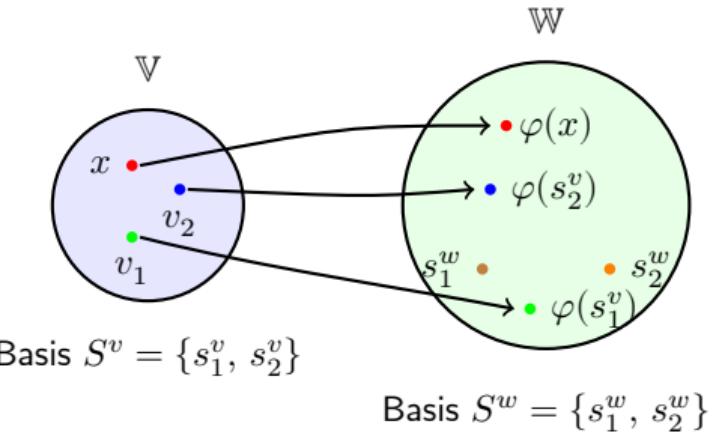
$$L_{\varphi, (B,C)} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ [\varphi(v_1)]_C & [\varphi(v_2)]_C & \cdots & [\varphi(v_n)]_C \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix}, \quad L_{\varphi, (B,C)} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

где  $[\varphi(v_i)]_C$  — это координаты образа базисного вектора  $v_i$  в базисе  $C$ .

- Базис  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  действует в области определения (пространстве аргументов) функции  $\mathbb{V}$ , базис  $C = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  действует в пространстве значений функции  $\mathbb{W}$ .

## Случай стандартных базисов

$$\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$



- В случае стандартных базисов получаем

$$L_\varphi = \begin{pmatrix} [\varphi(s_1^v)] & [\varphi(s_2^v)] & \cdots & [\varphi(s_n^v)] \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix},$$

где  $[\varphi(s_i^v)]$  — это координаты образа базисного вектора  $s_i^v$  в стандартном базисе  $S^w$  в пространстве  $\mathbb{W}$ .

## Чувствительность матрицы к выбору пары базисов

### Пример

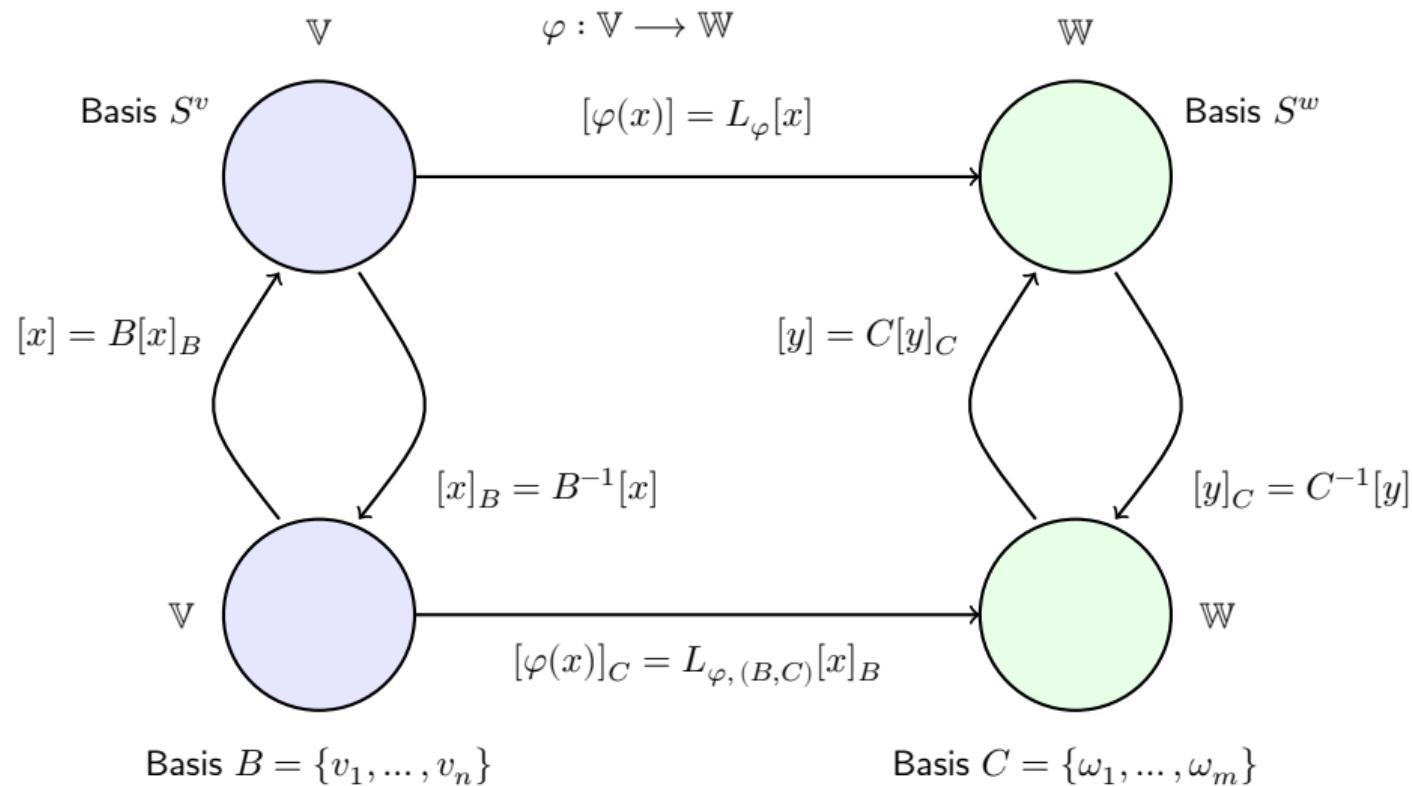
- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.

## Чувствительность матрицы к выбору пары базисов

### Пример

- Построенная матрица линейного преобразования крайне хрупка. По факту она работает только с теми базисами, которые были выбраны при ее построении.
- Пример:  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

## Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств



## Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов  $B$  и  $C$  в стандартные:

$$[x] = P_{B \rightarrow S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [y] = P_{C \rightarrow S^w}[y]_C = C[y]_C$$

## Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов  $B$  и  $C$  в стандартные:

$$[x] = P_{B \rightarrow S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [y] = P_{C \rightarrow S^w}[y]_C = C[y]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу  $[\varphi(x)] = L_\varphi[x]$ :

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

## Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов  $B$  и  $C$  в стандартные:

$$[x] = P_{B \rightarrow S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [y] = P_{C \rightarrow S^w}[y]_C = C[y]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу  $[\varphi(x)] = L_\varphi[x]$ :

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

- Используем трюк с обратной матрицей:

$$[\varphi(x)]_C = C^{-1}L_\varphi B[x]_B = L_{\varphi, (B,C)}[x]_B$$

## Изменение матрицы отображения при изменении базисов пространств

Ура, мы добрались!

- Подключаем наши знания о переходах между базисами. Пусть следующие матрицы выполняют переходы из базисов  $B$  и  $C$  в стандартные:

$$[x] = P_{B \rightarrow S^v}[x]_B = B[x]_B, \quad [y] = P_{C \rightarrow S^w}[y]_C = C[y]_C$$

- Подставим выражения в известную формулу  $[\varphi(x)] = L_\varphi[x]$ :

$$C[\varphi(x)]_C = L_\varphi B[x]_B$$

- Используем трюк с обратной матрицей:

$$[\varphi(x)]_C = C^{-1}L_\varphi B[x]_B = L_{\varphi, (B,C)}[x]_B$$

- Финально, формула для изменения матрицы линейного отображения при одновременном изменении пары базисов из стандартного:

$$L_{\varphi, (B,C)} = C^{-1}L_\varphi B$$

## Примеры

## Слайд для записей