ВШБ БИ: ТВиМС 2025.
Лист seminar-only задач #6.
Непрерывные случайные величины. Специальные распределения: равномерное, экспоненциальное.

1. Оценка за задачу, решенную у доски, это случайная величина с плотностью

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ c, & x \in [1;5] \\ 0, & x > 5 \end{cases}$$

Найдите нормировочную константу, математическое ожидание, стандартное отклонение, функцию распределения, $P(a < X \leq b)$ при $a, b \in [1;5]$. (через определения, то есть через интегралы)

Решение: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$ - условие «нормировки» плотности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{5} cdx + \int_{5}^{+\infty} 0dx = cx\Big|_1^5 = (5-1)\cdot c = 4c \Rightarrow c = 1/4$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_1^5 x \cdot \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^5 = \frac{5^2-1^2}{8} = 3$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2 = \int_1^5 x^2\cdot\frac{1}{4}dx - 9 = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^5 - 9 = \frac{5^3-1^3}{8} - 9 = \frac{4}{3}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_1^x \frac{1}{4}dt = \frac{x-1}{4} \text{ при } x \in [1;5], \text{ до этого } 0, \text{ после этого } 1, \text{ то есть:}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ \frac{x-1}{4}, 1 \leq x \leq 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{b-1}{4} - \frac{a-1}{4} = \frac{b-a}{4} \text{ при } a, b \in [1;5]$$

2. Оценка за каждую из задач на контрольной работе это случайная величина с плотностью

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx, & x \in [0;2] \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

   (a) Найдите вероятность того, что такая случайная величина примет значение от 1 до 1.5,
   (b) Найдите вероятность того, что такая случайная величина примет значение меньше 1.7,
   (c) Найдите вероятность того, что такая случайная величина отклонится от своего математического ожидания более, чем на одно стандартное отклонение.

Решение: Сначала найдем константу $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ - условие «нормировки» плотности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^2 cxdx + \int_2^{+\infty} 0dx = c\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = c\frac{(2^2-0^2)}{2} = 2c \Rightarrow c = 1/2$$

а) $P(1 < X \leq 1.5) = \int_1^{1.5} \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big|_1^{1.5} = \frac{5}{16} = 0.3125$

б) $P(X \leq 1.7)$ - работаем по определению, через интеграл от плотности вероятности:

$$P(X \leq 1.7) = P(0 < X \leq 1.7) = \int_0^{1.7} \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^{1.7} = \frac{289}{400} = 0.7725$$

в) $P(|X - E(X)| < \operatorname{std}(X))$ - сначала найдем E(X) и Var(X) :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}xdx = \frac{4}{3}$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2}xdx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} = 0.222 \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.471$$

$$P(|X - E(X)| < \operatorname{std}(X)) = P\left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} < X < \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = P(0.862 < X < 1.805) =$$

$$= \int_{0.862}^{1.805} \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\bigg|_{0.862}^{1.805} = 0.629$$

3. Время (в часах), которое тратится на решение каждой из задач дз, это случайная величина с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-5x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

   (a) Найдите вероятность того, что время решения окажется в пределах от 7 до 11 минут

   (b) Найдите математическое ожидание и дисперсию такой случайной величины (через определения, то есть через интегралы)

Решение:

Сначала найдем константу $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ - условие «нормировки» плотности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} ce^{-5x}dx = c \cdot \frac{e^{-5x}}{-5}\bigg|_0^{+\infty} = 0 + \frac{c}{5} = 1 \Rightarrow c = 5$$

a) $P(7 < X \leq 11)$ - так неверно, так как все измеряется в часах

$$P\left(\frac{7}{60} < X \leq \frac{11}{60}\right) \int_{\frac{7}{60}}^{\frac{11}{60}} f(x)dx = \int_{7/60}^{11/60} 5e^{-5x}dx = -\, e^{-5x}\Big|_{7/60}^{11/60} = -e^{-5\cdot\frac{11}{60}} - \left(-e^{-5\cdot\frac{7}{60}}\right) = e^{-5\cdot\frac{7}{60}} - e^{-5\cdot\frac{11}{60}} = 0.158$$

b) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x{\cdot}5e^{-5x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-5x} = -\left(e^{-5x} \cdot x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-5x}dx\right) = -\left(0 - \frac{e^{-5x}}{-5}\Big|_0^{+\infty}\right) = -\frac{e^{-5x}}{5}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{5}$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, найдем отдельно $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$

$$\int_0^{+\infty} x^2 5e^{-5x}dx = -\int_0^{+\infty} x^2 de^{-5x} = -\left(e^{-5x} \cdot x^2\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2xe^{-5x}dx\right) = 2\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-5x}dx$$

$$2\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-5x}dx = 2 \cdot \frac{1}{5}\int_0^{+\infty} x \cdot 5e^{-5x}dx = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

$$E(X^2) = \frac{2}{25} \Rightarrow Var(X) = \frac{2}{25} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

4. (Простая! Быстро пока не нахожу другого. Захотите - можно ее для разминки, по крайней мере, её нет в дз.)

   Андрей считает, что общее число километров, которое автомобиль может проехать до того, как его нужно будет совсем списать, является экспоненциальной случайной величиной с параметром $\frac{1}{20}$.

   У Максима есть подержанный автомобиль, который, по его словам, и по показаниям одометра, проехал только $10,000$ км. (Но кто верит одометру, верно? :)) Если Андрей покупает этот автомобиль, какова вероятность того, что он проедет на нём хотя бы $20,000$ дополнительных километров?

   Повторите вычисления в предположении, что пробег автомобиля распределён не экспоненциально, а равномерно на интервале $(0,40)$ (в тысячах километров).

   Решение: Поскольку экспоненциальная случайная величина не имеет памяти, тот факт, что автомобиль проехал $10,000$ км, не имеет значения. Вероятность, которую мы ищем, равна

$$P\{T>20000\}=1-P\{T<20000\}=1-\left(1-e^{-\frac{1}{20}(20)}\right)=e^{-1}$$

   Если распределение пробега не экспоненциальное, а равномерное на $(0,40)$, то искомая вероятность задаётся формулой

$$P\left\{T_{\text{тыс}}>30 \mid T_{\text{тыс}}>10\right\}=\frac{P\{T>30\}}{P\{T>10\}}=\frac{(1/4)}{(3/4)}=\frac{1}{3}.$$

5. На отрезке длины L абсолютно случайным образом выбирается координата точки согласно равномерному распределению. Найдите вероятность того, что отношение длины меньшего отрезка к длине большего отрезка меньше $\frac{1}{4}$.

Решение: Интерпретация задачи состоит в том, что точка "X"выбирается из равномерного распределения на интервале $[0, L]$. Тогда задача требует найти

$$P\left\{\frac{\min(X, L-X)}{\max(X, L-X)} < \frac{1}{4}\right\}$$

Эту вероятность можно вычислить, интегрируя по подходящей области:

$$\int_E f_X(x)dx$$

где $f_X(x)$ — плотность равномерного распределения для нашей задачи, т.е. $\frac{1}{L}$, а множество "E—это некое множество значений X, удовлетворяющее неравенству выше, т.е.

$$\min(x, L-x) \leq \frac{1}{4}\max(x, L-x)$$

Нужно догадаться, что области значений X, по которым мы должны вычислять интеграл выше, ограничены двумя концами отрезка. Интеграл выше становится равным

$$\int_0^{l_1} f_X(x)dx + \int_{l_2}^{L} f_X(x)dx$$

Для l_1 мы должны решить

$$x = \frac{1}{4}(L-x)$$

решением которого является $x = \frac{L}{5}$. Для l_2 мы должны решить

$$L - x = \frac{1}{4}x$$

решением которого является $x = \frac{4}{5}L$. С этими двумя пределами считаем вероятность:

$$\int_0^{\frac{L}{5}} \frac{1}{L}dx + \int_{\frac{4}{5}L}^{L} \frac{1}{L}dx = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

6. (a) Пожарная станция должна быть расположена вдоль дороги длины A, $A < \infty$. Если пожары происходят в точках, равномерно выбранных на $(0, A)$, где должна быть расположена станция, чтобы минимизировать ожидаемое расстояние до пожара? То есть, выберите a так, чтобы минимизировать $E[|X - a|]$, когда X равномерно распределена на $(0, A)$.

   (b) Теперь предположим, что дорога имеет бесконечную длину — простирается от точки 0 до ∞. Если расстояние пожара от точки 0 распределено экспоненциально с параметром λ, где теперь должна быть расположена пожарная станция? То есть, мы хотим минимизировать $E[|X - a|]$, где X теперь распределена экспоненциально с параметром λ.

Решение:

Часть (a): Пусть X (место пожара) равномерно распределена на $(0, A)$, и мы хотим выбрать a (положение пожарной станции) так, чтобы $l(a) = E[|X - a|]$ было минимальным. Мы вычислим это, разбив интеграл, участвующий в определении математического ожидания, на области, где $x - a$ отрицательно и положительно. Получаем, что

$$\begin{aligned}
E[|X-a|] &= \int_0^A |x-a| \frac{1}{A} dx \\
&= -\frac{1}{A}\int_0^a (x-a)dx + \frac{1}{A}\int_a^A (x-a)dx \\
&= -\left.\frac{1}{A}\frac{(x-a)^2}{2}\right|_0^a + \left.\frac{1}{A}\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^A \\
&= -\frac{1}{A}\left(0 - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{1}{A}\left(\frac{(A-a)^2}{2} - 0\right) \\
&= \frac{a^2}{2A} + \frac{(A-a)^2}{2A}
\end{aligned}$$

Чтобы найти a, минимизирующее это выражение, мы вычисляем $l'(a)$ и приравниваем к нулю:

$$l'(a) = \frac{a}{A} + \frac{2(A-a)(-1)}{2A} = 0.$$

Отсюда получаем решение a^*, задаваемое формулой $a^* = \frac{A}{2}$. Вторая производная нашей функции l показывает, что $l''(a) = \frac{2}{A} > 0$, что означает, что точка $a^* = A/2$ действительно является минимумом.

Часть (b): Формулировка задачи та же, что и в части (a), но поскольку распределение положения пожаров теперь экспоненциальное, мы хотим минимизировать

$$l(a) = E[|X-a|] = \int_0^\infty |x-a|\lambda e^{-\lambda x} dx$$

Мы вычислим это, разбив интеграл, участвующий в определении математического ожидания, на области, где $x - a$ отрицательно и положительно. Получаем, что

$$\begin{aligned}
E[|X-a|] &= \int_0^\infty |x-a|\lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= -\int_0^a (x-a)\lambda e^{-\lambda x} dx + \int_a^\infty (x-a)\lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= -\lambda\left(\left.\frac{(x-a)}{-\lambda}e^{-\lambda x}\right|_0^a + \frac{1}{\lambda}\int_0^a e^{-\lambda x} dx\right) \\
&\quad +\lambda\left(\left.\frac{(x-a)}{-\lambda}e^{-\lambda x}\right|_a^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_a^\infty e^{-\lambda x} dx\right) \\
&= -\lambda\left(\frac{-a}{\lambda} - \left.\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right|_0^a\right) + \lambda\left(0 - \left.\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right|_a^\infty\right) \\
&= a + \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda a} - 1\right) - \frac{1}{\lambda}\left(-e^{-\lambda a}\right) \\
&= a + \frac{-1 + 2e^{-\lambda a}}{\lambda}
\end{aligned}$$

Чтобы найти a, минимизирующее это выражение, мы вычисляем $l'(a)$ и приравниваем к нулю. Получаем, что

$$l'(a) = 1 - 2e^{-\lambda a} = 0$$

Отсюда получаем решение a^*, задаваемое формулой $a^* = \frac{\ln(2)}{\lambda}$. Вторая производная нашей функции l показывает, что $l''(a) = 2\lambda e^{-\lambda a} > 0$, что означает, что точка $a^* = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ действительно является минимумом.