

# Теория вероятностей и математическая статистика

## Точечные оценки.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

## Напоминание: задачи статистики

- Случайные процессы вокруг нас — чёрные ящики — случайные генераторы. Мы хотим ”расшифровать” один такой ящик и выяснить его параметры и/или свойства, например, математическое ожидание и дисперсию. Для этого мы наблюдаем случайную величину некоторое количество раз и затем делаем выводы на основе накопленной информации.
- Параметры случайной величины — числа, **точки** на числовой оси. Процесс угадывания этих значений обычно называется **точечной оценкой**, то есть мы хотим эти точки на числовой оси как можно ближе угадать.

## Точечные оценки

- **Оценка** — это специальная статистика, функция от случайной выборки. Её реализация может быть использована в качестве кандидата-значения, **предположения** о значении какого-либо параметра неизвестной случайной величины.
- Пусть  $\theta$  — неизвестный параметр случайной величины (например,  $\mu$  или  $\sigma^2$ ). Тогда оценка:  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ , функция от случайной выборки, тоже является случайной величиной.
- **Реализация оценки** — конкретное числовое значение, полученное из конкретного наблюдения выборки.

## Точечная оценка: визуализация

Идеальная ситуация: мы знаем характеристики / параметры



Реальная ситуация: характеристики и параметры неизвестны

Значения будто скрыты от нас туманом



## Цель точечной оценки

- На основе реализации случайной выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  получить **предположения**  $\hat{\theta}$  для скрытых в тумане реальности параметров
- Идея состоит в том, чтобы посчитать значение оценки на реальных имеющихся данных, и чтобы полученное число было бы как можно ближе к истинным значениям параметров
- Следуя аналогии, мы хотим найти затерянные в тумане точки, путём их угадывания специальным способом, с помощью функции **оценки**.

Значения точечных оценок  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}^2$  и  $\hat{\theta}$   
”попадают” близко к истинным значениям



## Смещенность и несмещенность

Оценка  $\hat{\theta}$  называется **несмещенной**, если:

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

Оценка  $\hat{\theta}$  называется **смещенной**, если:

$$E[\hat{\theta}] \neq \theta$$

**Смещение** (bias) определяется как:

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$

## Среднеквадратичная ошибка (MSE)

**Среднеквадратичная ошибка** (Mean Squared Error, MSE) оценки  $\hat{\theta}$  определяется как:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

- MSE измеряет средний квадрат отклонения оценки от истинного значения параметра.
- **Разложение MSE:**

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + [\text{Bias}(\hat{\theta})]^2$$

- MSE учитывает как дисперсию оценки, так и её смещение, и является неким "мерилом" качества точечной оценки. Чем меньше MSE, тем лучше работает точечная оценка.

## Разложение MSE

- Докажем формулу разложения:

$$\begin{aligned}\text{MSE}(\hat{\theta}) &= E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \\ &= E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}] + E[\hat{\theta}] - \theta)^2] \\ &= E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])^2] + 2E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])(E[\hat{\theta}] - \theta)] + E[(E[\hat{\theta}] - \theta)^2]\end{aligned}$$

- Второе слагаемое равно нулю, так как  $E[\hat{\theta}] - \theta$  — константа.
- Получаем:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + (E[\hat{\theta}] - \theta)^2 = \text{Var}(\hat{\theta}) + [\text{Bias}(\hat{\theta})]^2$$



## Состоятельность оценки

Оценка  $\hat{\theta}$  называется **состоятельной**, если при увеличении размера выборки  $n \rightarrow \infty$  оценка “сходится” к истинному значению параметра  $\theta$ .

- **Интуиция:** Чем больше данных мы собираем, тем точнее становится наша оценка, тем ближе “в тумане” мы находим значения параметров.
- При  $n \rightarrow \infty$  оценка должна становиться сколь угодно близкой к истинному значению параметра.
- **Важно:** Состоятельность — это асимптотическое свойство (при больших выборках).
- **Связь с несмещённостью:** Несмещённая оценка с дисперсией, стремящейся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , является состоятельной.
- Заметим, что состоятельная оценка может быть смещённой для малых выборок, но смещение должно исчезать при росте  $n$ .

## Свойства основных оценок

Для всех последующих примеров предположим, что у нас есть случайная выборка  $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  (Независимые, одинаково распределенные) с  $\mu \equiv E[X_i]$ ,  $\sigma^2 \equiv \text{Var}[X_i]$ .

### Выборочное среднее $\bar{X}$

- Выборочное среднее  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  является оценкой неизвестного математического ожидания  $\mu$  для исследуемой случайной величины.
- Проверим несмещенность:

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

- **Вывод:**  $\bar{X}$  — **несмещенная** оценка  $\mu$ .
- Проверим состоятельность. Дисперсия выборочного среднего:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

- При  $n \rightarrow \infty$  имеем  $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$ .
- **Вывод:**  $\bar{X}$  — **состоятельная** оценка  $\mu$  (несмещённая с дисперсией, стремящейся к нулю).

## Свойства основных оценок

### Выборочная дисперсия с делением на $n - 1$

Выборочная дисперсия  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  является оценкой дисперсии для исследуемой случайной величины.

- Используем факт:  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$  (хи-квадрат с  $n - 1$  степенями свободы). Для такой хи-квадрат случайной величины:

$$E[\chi_{n-1}^2] = n - 1, \quad \text{Var}(\chi_{n-1}^2) = 2(n - 1)$$

- Проверим несмещённость:

$$E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = n - 1 \Rightarrow E[S^2] = \sigma^2$$

- Вывод:**  $S^2$  — **несмещенная** оценка для  $\sigma^2$ .
- Проверим состоятельность. Дисперсия  $S^2$ :

$$\text{Var}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \Rightarrow \text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- Вывод:**  $S^2$  — **состоятельная** оценка для  $\sigma^2$  (несмещённая с дисперсией, стремящейся к нулю).

## Свойства основных оценок

### Выборочная дисперсия с делением на $n$

Рассмотрим другой вариант оценки дисперсии:  $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

- Связь с несмещенной  $S^2$ :

$$S_n^2 = \frac{n-1}{n} S^2 = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S^2$$

- Используя  $E[S^2] = \sigma^2$ , получаем:

$$E[S_n^2] = E\left[\frac{n-1}{n} S^2\right] = \frac{n-1}{n} E[S^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$$

- **Вывод:**  $S_n^2$  — **смещенная** оценка  $\sigma^2$ .
- Вычислим смещение:

$$\text{Bias}(S_n^2) = E[S_n^2] - \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 = \frac{n-1-n}{n} \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$$

## Свойства основных оценок

### Выборочная дисперсия с делением на $n$

- Проверим состоятельность. Дисперсия  $S_n^2$ :

$$\text{Var}(S_n^2) = \text{Var}\left(\frac{n-1}{n}S^2\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \text{Var}(S^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$$

- При  $n \rightarrow \infty$  смещение стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Bias}(S_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\sigma^2}{n}\right) = 0$$

- И дисперсия стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(S_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} = 0$$

- **Вывод:**  $S_n^2$  — **состоятельная** оценка  $\sigma^2$  (смещение стремится к нулю при росте выборки).