

Линейная алгебра

Проекции. Ортогонализация базиса.

Глеб Карпов

МНэД ФКН ВШЭ

Ортогональные базисы.

Определение

Система векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ называется ортогональной, если любые два вектора взаимно ортогональны, то есть $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = 0$ при $j \neq k$.

Если дополнительно $\|\mathbf{v}_k\| = 1$ для всех k , то система называется ортонормированной.

Зачем это нужно?

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$$

Взяв скалярное произведение обеих частей равенства с \mathbf{v}_1 , получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_1) = \alpha_1 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = \alpha_1 \|\mathbf{v}_1\|^2$$

Аналогично, беря скалярное произведение обеих частей с \mathbf{v}_k , получаем

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = \alpha_k (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) = \alpha_k \|\mathbf{v}_k\|^2$$

Итак

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{\|\mathbf{v}_k\|^2}$$

Проекции

Ортогональная проекция на вектор.

Определение (ортогональная проекция)

Пусть $x \neq 0$. Обозначим единичный вектор в направлении x как

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

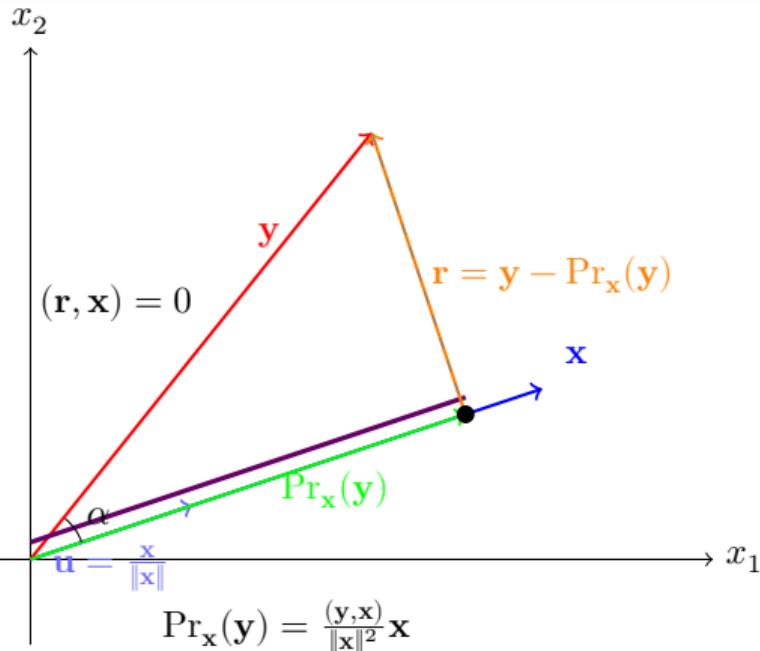
Ортогональная проекция вектора y на направление x (обозначение: $\text{Pr}_x(y)$) равна

$$\text{Pr}_x(y) = (y, \mathbf{u}) \mathbf{u} = \frac{(y, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x}.$$

Сопряжённый (ортогональный) остаток:

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \text{Pr}_x(\mathbf{y}), \quad (\mathbf{r}, \mathbf{x}) = 0.$$

Пример: ортогональная проекция



$$\text{Pr}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x} = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{\|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2 \cos(\alpha)}{\|\mathbf{x}\|_2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} = \|\mathbf{y}\|_2 \cos(\alpha) \cdot \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

Алгоритм Грама-Шмидта

Вход: линейно независимые векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$.

Шаги ортогонализации:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{v}_m &= \mathbf{x}_m - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(\mathbf{x}_m, \mathbf{v}_j)}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \mathbf{v}_j, \quad m = 2, \dots, k.\end{aligned}$$

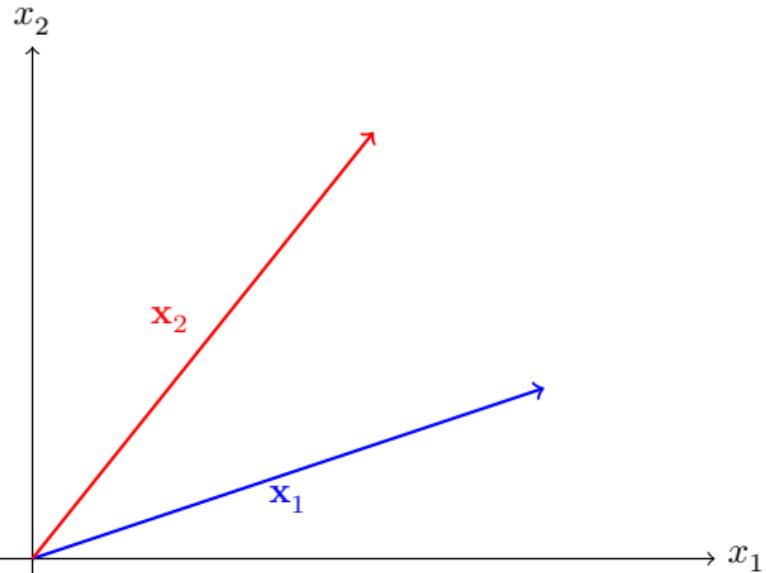
Получаем ортогональную систему $\{\mathbf{v}_j\}$ с теми же линейными оболочками:

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}.$$

Нормировка (получение ортонормированного базиса):

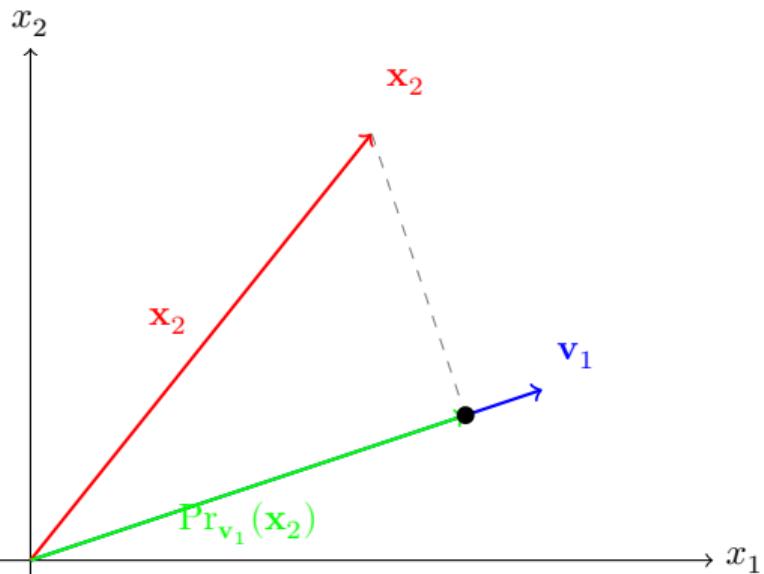
$$\mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{v}_m}{\|\mathbf{v}_m\|}, \quad m = 1, \dots, k.$$

Шаг 1: Исходные векторы



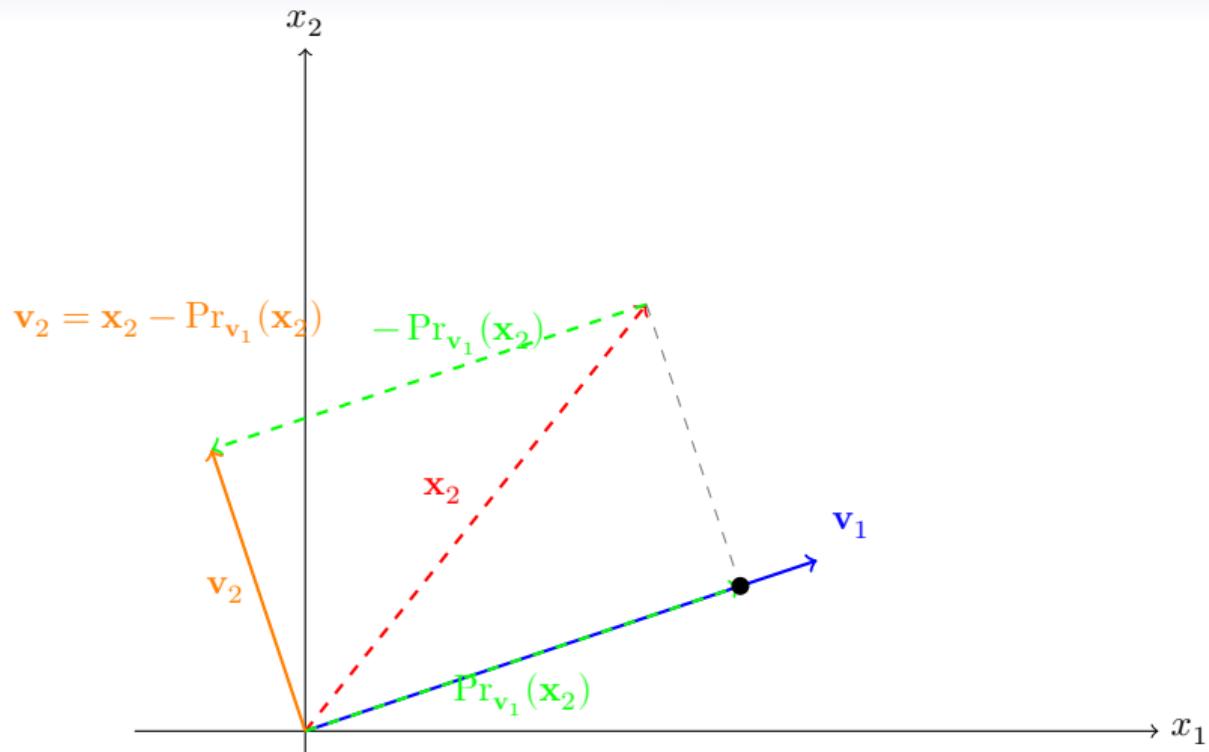
Шаг 1: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$

Шаг 2: Вычисление проекции



$$\text{Pr}_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{x}_2) = \frac{(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1$$

Шаг 3: Получение ортогонального вектора



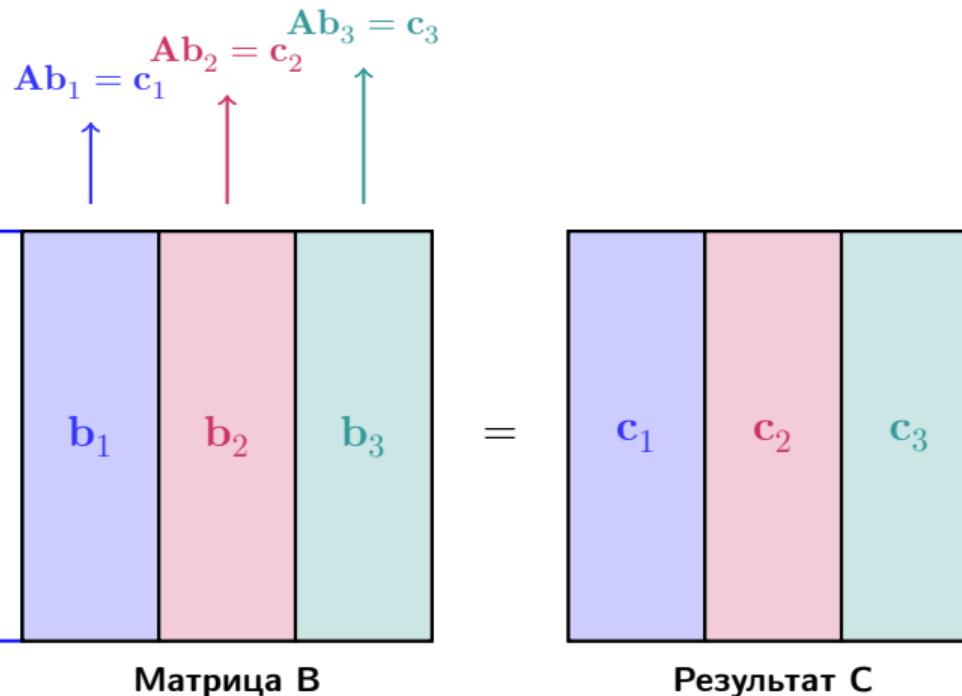
Результат: $v_1 \perp v_2, (v_1, v_2) = 0$

Пример

Ортогонализовать набор векторов $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Слайд для записей

Обращение матриц через СЛУ: Идея



Три системы линейных уравнений

$$A[x_1|x_2|x_3] = [e_1|e_2|e_3] = I$$

Результат

Объединяем



$$Ax_1 = e_1$$

$$Ax_2 = e_2$$

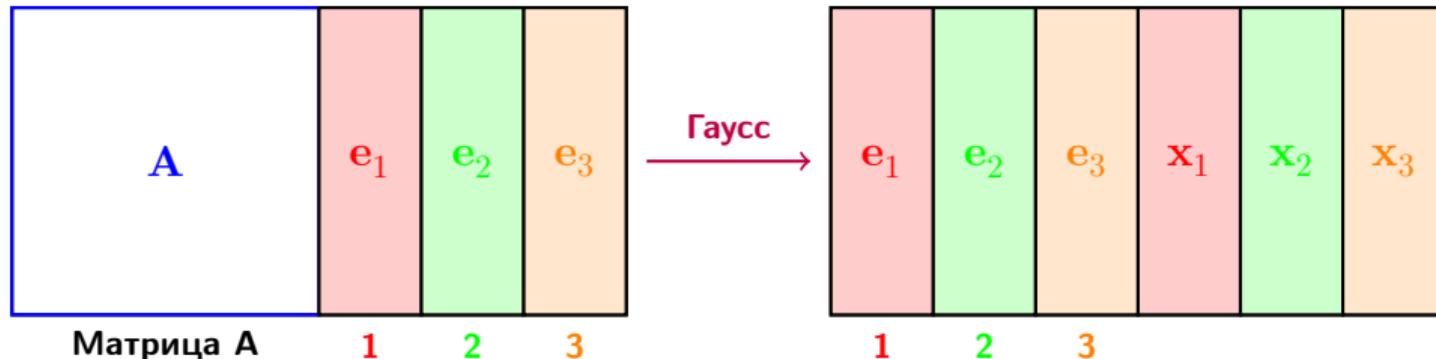
$$Ax_3 = e_3$$

Система 1

Система 2

Система 3

Визуализация расширенной матрицы



$$A[x_1|x_2|x_3] = [e_1|e_2|e_3] = I$$

$$\Rightarrow [x_1|x_2|x_3] = A^{-1}$$

Пример: Обращение матрицы 3x3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Слайд для записей