# ВШБ БИ: ТВиМС 2025.
# Лист seminar-only задач #8.
# Многомерные случайные величины. Ковариация и корреляция.

1. Предположим, что $X$ имеет распределение, заданное следующим образом:

$$P\{X=-1\}=P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{3},$$

а $Y$ задана следующим образом:

$$Y=\begin{cases}0, & \text{если } X=0\\ 1, & \text{иначе}\end{cases}$$

Проверьте, являются ли $X$ и $Y$ независимыми. Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.

**Решение:** Основная проблема может быть в интерпретации условия.

На самом деле там зашита условная вероятность: $Y=0$ **только если** $X=0$, то есть $P(Y=0\mid X=-1)=0$ и $P(Y=0\mid X=1)=0$, а еще $Y$ точно не может быть равна 1, если $X=0$, то есть $P(Y=1\mid X=0)=0$.

Тогда:

$$P(X=-1,Y=0)=P(Y=0\mid X=-1)P(X=-1)=0\times\frac{1}{3}=0,$$

$$P(X=1,Y=0)=P(Y=0\mid X=1)P(X=1)=0\times\frac{1}{3}=0,$$

$$P(X=0,Y=1)=P(Y=1\mid X=0)P(X=0)=0\times\frac{1}{3}=0,$$

А дальше восстанавливаем по таблице, зная маргинальные вероятности $X$.

| | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|
| $X=-1$ | 0 | 1/3 |
| $X=0$ | 1/3 | 0 |
| $X=1$ | 0 | 1/3 |

В процессе решения дальше получаем тот самый пример, когда ковариация равна нулю, но величины зависимы.

2. Известно, что $E(X)=-1, E(Y)=1, Var(X)=9, Var(Y)=4, \mathrm{Corr}(X,Y)=1$. Найдите
   (a) $E(Y-2X-3), Var(Y-2X-3)$,
   (b) $\mathrm{Corr}(Y-2X-3,X)$,
   (c) Можно ли выразить $Y$ через $X$ ? Если да, то запишите уравнение связи.

3. Вася сидит на контрольной работе между Дашей и Машей и отвечает на 10 тестовых вопросов. На каждый вопрос есть два варианта ответа, «да» или «нет». Первые три ответа Васе удалось списать у Маши, следующие три - у Даши, а оставшиеся четыре пришлось проставить наугад. Маша ошибается с вероятностью 0.1, а Даша - с вероятностью 0.7.
   (a) Найдите вероятность того, что Вася ответил на все 10 вопросов правильно.
   (b) Вычислите корреляцию между числом правильных ответов Васи и Даши, Васи и Маши.

Подсказка: иногда задача упрощается, если представить случайную величину в виде суммы.

4. Из коробки, содержащей три синих стержня, два красных стержня и три зелёных стержня, случайным образом выбираются два стержня для шариковой ручки. Определим следующие случайные величины: $X =$ количество выбранных синих стержней, $Y =$ количество выбранных красных стержней.

   (a) Покажите, что $P(X=1, Y=1) = \frac{3}{14}$.

   (b) Составьте таблицу совместного распределения вероятностей $X$ и $Y$.

   (c) Найдите ковариацию между $X$ и $Y$.

   (d) Являются ли $X$ и $Y$ независимыми случайными величинами? Обоснуйте свой ответ.

**Решение:**

(a) При обозначениях $B$ синий и $R$ красный:

$$P(X=1, Y=1) = P(BR) + P(RB) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}.$$

(b) Имеем:

| | | $X = x$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| $Y = y$ | 0 | $\frac{3}{28}$ | $\frac{9}{28}$ | $\frac{3}{28}$ |
| | 1 | $\frac{3}{14}$ | $\frac{3}{14}$ | 0 |
| | 2 | $\frac{1}{28}$ | 0 | 0 |

(c) Маргинальное распределение $X$:

| $X = x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_X(x)$ | $\frac{10}{28}$ | $\frac{15}{28}$ | $\frac{3}{28}$ |

Отсюда:

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{10}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{3}{4}.$$

Маргинальное распределение $Y$:

| $Y = y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_Y(y)$ | $\frac{15}{28}$ | $\frac{12}{28}$ | $\frac{1}{28}$ |

Отсюда:

$$\mathrm{E}(Y) = 0 \times \frac{15}{28} + 1 \times \frac{12}{28} + 2 \times \frac{1}{28} = \frac{1}{2}.$$

Распределение $XY$:

| $XY = xy$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p_{XY}(xy)$ | $\frac{22}{28}$ | $\frac{6}{28}$ |

Отсюда:

$$\mathrm{E}(XY) = 0 \times \frac{22}{28} + 1 \times \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

и:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{3}{14} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{9}{56}.$$

(d) Поскольку $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$, необходимое условие независимости не выполняется. Случайные величины не являются независимыми.

5. Случайные величины $X_1$ и $X_2$ независимы и имеют одинаковую функцию вероятности $p_X(x)$ (т.е. вместо $X$ подставляем $X_1$ или $X_2$), заданную следующим образом:

| $X = x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_X(x)$ | 0.2 | 0.4 | 0.3 | 0.1 |

Предположим теперь, что случайные величины $W$ и $Y$ определены как:

$$W = \max(X_1, X_2), \quad Y = \min(X_1, X_2).$$

Найдите:

(a) Составьте таблицу совместного распределения $W$ и $Y$.

(b) Найдите маргинальное распределение $W$,

(c) Найдите условную функцию вероятности $Y$ при условии $W = 2$,

(d) Найдите ковариацию между $W$ и $Y$.

**Решение:**

(a) Совместное распределение $W$ и $Y$:

| | | $W = w$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | 0 | $(0.2)^2$ | $2(0.2)(0.4)$ | $2(0.2)(0.3)$ | $2(0.2)(0.1)$ |
| $Y = y$ | 1 | 0 | $(0.4)(0.4)$ | $2(0.4)(0.3)$ | $2(0.4)(0.1)$ |
| | 2 | 0 | 0 | $(0.3)(0.3)$ | $2(0.3)(0.1)$ |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | $(0.1)(0.1)$ |
| | | $(0.2)^2$ | $(0.8)(0.4)$ | $(1.5)(0.3)$ | $(1.9)(0.1)$ |

Что в итоге переходит в:

| | | $W = w$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | 0 | 0.04 | 0.16 | 0.12 | 0.04 |
| $Y = y$ | 1 | 0.00 | 0.16 | 0.24 | 0.08 |
| | 2 | 0.00 | 0.00 | 0.09 | 0.06 |
| | 3 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| | | 0.04 | 0.32 | 0.45 | 0.19 |

(b) Отсюда маргинальное распределение $W$:

| $W = w$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_W(w)$ | 0.04 | 0.32 | 0.45 | 0.19 |

(c) Условное распределение $Y$ при условии $W = 2$:

| $Y = y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{Y\|W=2}(y \mid W = 2)$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{2}{10}$ | 0 |

(d) $E(WY) = 1.69$, $E(W) = 1.79$ и $E(Y) = 0.81$, следовательно:

$$\text{Cov}(W, Y) = E(WY) - E(W)E(Y) = 1.69 - 1.79 \times 0.81 = 0.2401.$$