

# Линейная алгебра

## Нормированные пространства

Глеб Карпов

МНаД ФКН ВШЭ

# Пространства со скалярным произведением (Inner product spaces)

## Скалярное произведение

Пусть  $V$  — векторное пространство. Скалярное произведение на  $V$  — это **функция**, которая каждой паре векторов  $x, y$  сопоставляет скаляр, обозначаемый как  $(x, y)$  или  $\langle x, y \rangle$ , так что выполняются свойства 1–4 ниже.

1. Симметричность (сопряжённая):  $(x, y) = (y, x)$ ,
2. Линейность:  $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$  для любых векторов  $x, y, z$  и любых скаляров  $\alpha, \beta$ ,
3. Неотрицательность:  $(x, x) \geq 0 \quad \forall x$ ,
4. Невырожденность:  $(x, x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ .

## Слайд для записей

## Скалярное произведение в координатных пространствах

Скалярное произведение двух векторов  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  — это число, вычисляемое по формуле:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

**Геометрический смысл:**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \theta$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ .

# Обозначения скалярного произведения

## Различные способы записи

### 1. Через транспонирование

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

**Матричная форма:**

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

**Результат:**

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

### 2. Через угловые скобки

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

**Альтернативно:** -  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  — точечное произведение

**Обозначения эквивалентны:**

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

# Нормированные пространства

## Свойства нормы:

1. Однородность:  $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$  для любых  $\mathbf{v}$  и скаляров  $\alpha$ .

## Определение (норма и нормированное пространство)

Пусть в векторном пространстве  $V$  каждой вектору  $\mathbf{v}$  сопоставлено число  $\|\mathbf{v}\|$  так, что выполняются свойства 1–4 выше. Тогда функция  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$  называется нормой. Векторное пространство  $V$ , оснащённое нормой, называется нормированным пространством.

# Нормированные пространства

## Свойства нормы:

1. Однородность:  $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$  для любых  $\mathbf{v}$  и скаляров  $\alpha$ .
2. Неравенство треугольника:  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ .

## Определение (норма и нормированное пространство)

Пусть в векторном пространстве  $V$  каждой вектору  $\mathbf{v}$  сопоставлено число  $\|\mathbf{v}\|$  так, что выполняются свойства 1–4 выше. Тогда функция  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$  называется нормой. Векторное пространство  $V$ , оснащённое нормой, называется нормированным пространством.

# Нормированные пространства

## Свойства нормы:

1. Однородность:  $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$  для любых  $\mathbf{v}$  и скаляров  $\alpha$ .
2. Неравенство треугольника:  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ .
3. Неотрицательность:  $\|\mathbf{v}\| \geq 0$  для всех векторов  $\mathbf{v}$ .

## Определение (норма и нормированное пространство)

Пусть в векторном пространстве  $V$  каждой вектору  $\mathbf{v}$  сопоставлено число  $\|\mathbf{v}\|$  так, что выполняются свойства 1–4 выше. Тогда функция  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$  называется нормой. Векторное пространство  $V$ , оснащённое нормой, называется нормированным пространством.

# Нормированные пространства

## Свойства нормы:

1. Однородность:  $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$  для любых  $\mathbf{v}$  и скаляров  $\alpha$ .
2. Неравенство треугольника:  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ .
3. Неотрицательность:  $\|\mathbf{v}\| \geq 0$  для всех векторов  $\mathbf{v}$ .
4. Невырожденность:  $\|\mathbf{v}\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

## Определение (норма и нормированное пространство)

Пусть в векторном пространстве  $V$  каждой вектору  $\mathbf{v}$  сопоставлено число  $\|\mathbf{v}\|$  так, что выполняются свойства 1–4 выше. Тогда функция  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$  называется нормой. Векторное пространство  $V$ , оснащённое нормой, называется нормированным пространством.

## Разные нормированные пространства

Любое пространство со скалярным произведением является нормированным, поскольку норма  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$  удовлетворяет свойствам 1–4. Однако существуют и другие нормы. Например, для  $p, 1 \leq p < \infty$ , можно определить норму  $\|\cdot\|_p$  на  $\mathbb{R}^n$  как

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Также можно определить норму  $\|\cdot\|_\infty$  (при  $p = \infty$ ) как

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max \{|x_k| : k = 1, 2, \dots, n\}$$

## Ортогональность. Ортогональные и ортонормированные базисы.

### Определение

Два вектора  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  называются ортогональными (перпендикулярными), если  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ . Запись  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$  обозначает ортогональность векторов.

Для ортогональных векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  верно тождество Пифагора:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \quad \text{if } \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\quad ((\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \text{ because of orthogonality}). \end{aligned}$$