ВШБ Бизнес-информатика: ТВиМС 2025.
Лист задач для самостоятельного решения #5.
Распределения Бернулли, биномиальное, Пуассона.

1. Преподаватель высшей математики случайным образом выставляет оценки за сданное дз. С равной вероятностью он может поставить любую оценку от 5 до 10. В одной из групп дз сдали 20 человек.

   (a) Найти вероятность того, что ровно четверть студентов получит 10.

   (b) Найти вероятность того, что половина студентов получит удовлетворительно.

   (c) Найти наивероятнейшее число студентов, которые получат 6, найти вероятность того, что ровно такое количество студентов получит 6.

   (d) Найти вероятность того, что преподаватель выставит не менее чем, две отличные оценки.

   ОТВЕТ: а) 0.129 б) $4.93 * 10^{-4}$ в) 0.238 г) 0.99998

   РЕШЕНИЕ: есть серия из n=20 одинаковых независимых испытаний,
   благоприятный исход – в каждом пункте определенная оценка
   вероятность успеха в каждом отдельном испытании равна $p = \frac{1}{6} = const$,
   нас интересует вероятность того, что ровно k испытаний закончатся успехом, а значит это схема Бернулли, и $P(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, *наивероятнейшее число успехов* k_0 *находится в пределах*
   $np - q \le k_0 \le np + p$.

   а) найти вероятность того, что ровно четверть студентов получит 10: $k = 5$

   $\Rightarrow P(5) = C_{20}^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{15} \approx 0.129$

   б) найти вероятность того, что половина студентов получит 5: $k = 10$

   $\Rightarrow P(10) = C_{20}^{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10} = 0.0004934846 \approx 4.93 * 10^{-4}$

   в) Найти наивероятнейшее число студентов, которые получат 6, найти вероятность того, что ровно такое количество студентов получит 6: $20 * \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le k_0 \le 20 * \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow 2.5 \le k_0 \le 3.5 \Rightarrow k_0 = 3 \Rightarrow$

   $P\left(k_0\right) = P(3) = C_{20}^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{17} \approx 0.238$

   г) $k \ge 2$

   $\Rightarrow P(k \ge 2) = P(2) + P(3) + \dots + P(20) = 1 - P(K < 2) = 1 - (P(0) + P(1)) = 1 - \left(C_{20}^0\left(\frac{3}{6}\right)^0\left(1 - \frac{3}{6}\right)^{20} + C_{20}^1\left(\frac{3}{6}\right)^1\left(1 - \frac{3}{6}\right)^{19}\right) =$

   $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0.99997997284$

2. Круг от вертолетной площадки вписан в условный квадрат. Вы смотрите боевик, в котором с вертолета, пролетающего над этой площадкой, три человека спрыгивают в квадрат. Найдите вероятность того, что ровно один человек приземлился именно в круг посадочной площадки.

   ОТВЕТ: 0.109

   Если радиус круга r, то его площадь равна πr^2, *а площадь соответствующего квадрата* $(2r)^2$, *т.е для отдельной точки из квадрата вероятность оказаться внутри круга равна* $\pi/4$.

   Для ровно одной из трех:

   $\frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4} = 0.10851\ldots \approx 0.109$

3. Инвестор владеет акциями 7 предприятий одной отрасли. Известно, что вероятность роста цены акций по каждому из предприятий равна 0.4, вероятность падения равна 0.3. (будем считать, что акции ведут себя независимо)

   (a) Найти вероятность того, что изменится цена акций шести предприятий.

   (b) Найти вероятность того, цена акций вырастет более чем у двух предприятий.

   (c) Найти наивероятнейшее число предприятий, цена на акции у которых уменьшится. Найти соответствующую вероятность.

   (d) Найти наивероятнейшее число предприятий, цена на акции у которых не уменьшится. Найти соответствующую вероятность.

Схема Бернулли + действия над событиями

ОТВЕТ: а) 0.247, б) 0.58, в) $k_0 = 2$, $P(2) \approx 0.318$, г) $k_0 = 5$, $P(5) \approx 0.318$

УКАЗАНИЕ: $n=7$, $p = const$ *(в каждом пункте своя вероятность!!!)*, k *- количество успехов*

$\Rightarrow P(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, *а* $np - q \le k_0 \le np + p$.

а) $p = 0.7$, $k = 6$, $P(6) = 0.247$

б) $p = 0.4$, $k > 2$, $P(k > 2) = 1 - P(k \le 2) \approx 0.58$

в)

$p = 0.3 \Rightarrow np - q \le k_0 \le np + p \Rightarrow 7 * 0.3 - 0.7 \le k_0 \le 7 * 0.3 + 0.3 \Rightarrow 1.4 \le k_0 \le 2.4 \Rightarrow k_0 = 2$, $P(2) \approx 0.318$

г) По смыслу: наивероятнейшие числа этого пункта в сумме с предыдущим пунктом дают 7, итоговые вероятности совпадают: $k_0 = 5$, $P(5) \approx 0.318$

---

4. В забеге участвуют 12 лошадей (равной силы). Каждый из 30 зрителей пытается составить свой прогноз для трех призовых мест, и отмечает случайным образом трех участников забега. Какова вероятность того, что хотя бы один из них окажется прав, если:

   (a) надо угадать победителей и их места.

   (b) достаточно указать тройку лидеров в любом порядке.

Решение:

   (a) В этом варианте условия вероятность правильного угадывания $P(W) = p = \frac{1}{P_{12}^3}$, где

$$P_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$$

   Соответственно, вероятность неправильного угадывания $P(\overline{W}) = q = 1 - p = 1 - \frac{1}{P_{12}^3}$. Тогда вероятность того, что хотя бы один из зрителей окажется прав, является комплементарным событием (англ. *complementary event*) к вероятности того, что ни один из зрителей не угадает. Получаем:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{P_{12}^3}\right)^{30} \approx 0.0225.$$

   (b) В данном случае вероятность правильного угадывания $P(W) = p = \frac{1}{C_{12}^3}$. Вероятность того, что хотя бы один из зрителей окажется прав получаем аналогичным способом:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{C_{12}^3}\right)^{30} \approx 0.128.$$

5. Подбрасывается кубик, а затем монетка подбрасывается столько раз, сколько очков выпало на кубике. Известно, что орел выпал ровно 4 раза. Какова вероятность того, что на кубике выпала «6»?

Решение: Из информации, что орел выпал ровно 4 раза, мы можем сделать вывод, что на кубике выпало как минимум 4 очка.

Пусть случайная величина X - число очков на кубике, а случайная величина T - число орлов при подбрасывании монетки.

Тогда вероятность того, что орел выпал ровно 4 раза, равна:

$$P(T=4)=P(T=4|X=4)P(X=4)+P(T=4|X=5)P(X=5)+P(T=4|X=6)P(X=6)$$
$$P(T=4)=\left(C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)\cdot\frac{1}{6}$$
$$P(T=4)\approx 0.0755$$

Искомая же вероятность $P(X=6|T=4)$ равна:

$$P(X=6|T=4)=\frac{P(T=4|X=6)P(X=6)}{P(T=4)}$$
$$P(X=6|T=4)=\frac{C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^6\frac{1}{6}}{0.0755}\approx 0.517$$

6. В гостинице 35 номеров. Управляющий знает, что клиент, забронировавший номер, с вероятностью 0.1 не приедет. Но на каждом пустом номере гостиница теряет деньги, так что управляющий бронирует номера для 38 клиентов, с запасом - «все равно кто-нибудь не приедет». Найти вероятность того, что у него возникнут проблемы – количество приехавших окажется больше количества номеров.

Решение: Схема Бернулли с $n=38$, $p=0.9$, $k>35$, $P(k>35)=P(k=36)+P(k=37)+P(k=38)=0.254$. Очень похоже на overbooking в авиаперевозках :)

7. Студент Антон опаздывает на занятие с вероятностью 0.65, студентка Валерия опаздывает с вероятностью 0.75. Вероятность того, что они опоздают оба, равна 0.55.

   (a) Антон пришел на занятие вовремя. Найти вероятность того, что Валерия тоже пришла вовремя.

   (b) На занятие опоздал только один из них. Найти вероятность того, что это был Антон.

   (c) На следующей неделе будет 20 пар. Найти наивероятнейшее число пар, на которое опоздает ровно один из этих студентов. Найти соответствующую вероятность.

Решение:

(Схема Бернулли + действия над событиями, условные вероятности) УКАЗАНИЕ: Пусть событие A заключается в том, что Антон опоздал на занятие, событие B заключается в том, Валерия опоздала. Зная вероятности $P(A)$, $P(B)$ и $P(A\cap B)$, мы можем найти все остальное.

   (a) Вероятность $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ можно найти, например, используя закон де Моргана:

   $$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

   В итоге получаем:

   $$P\left(\bar{B}\mid\bar{A}\right)=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{1-0.65-0.75+0.55}{1-0.65}\approx 0.429$$

   (b) Пусть T - событие, что опоздал только один из них. Мы можем его записать как $T=(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$. Тогда нам нужна $P(A\mid T)$.

   $$P(T)=P(\bar{A}\cap B)+P(A\cap\bar{B})=(P(B)-P(A\cap B))+(P(A)-P(A\cap B))=$$
   $$=P(B)+P(A)-2P(A\cap B)=0.75+0.65-2\cdot 0.55=0.3$$

   Тогда $P(A\mid T)=\frac{P(A\cap T)}{P(T)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(T)}=\frac{0.65-0.55}{0.3}=\frac{1}{3}$.

   (c) Успех - опоздание только одного из них. Эту вероятность мы уже нашли, это $P(T)$. Тогда получаем схеме Бернулли: $n=20, p=0.3\Rightarrow k_0=6, P(k_0)\approx 0.192$.

8. Студент Николай прогуливает пару с вероятностью 0.25. Если он прогуляет, то студент Андрей прогуляет эту пару с вероятностью 0.6. Если же Николай не прогуляет, то и Андрей не прогуляет с вероятностью 0.7.

   (a) Найти вероятность того, что Андрей прогуляет очередную пару.

   (b) Известно, что Андрей пришел на пару. Найти вероятность того, что Николай тоже пришел.

   (c) Всего на прошлой неделе было 20 пар. Найти наивероятнейшее число пар, прогулянных Андреем, найти вероятность того, что он прогулял именно такое количество пар.

   (d) На прошлой неделе было 7 пар, которые Андрей прогулял. Найти наивероятнейшее число пар из этих 7, прогулянных и Николаем, найти вероятность того, что он прогулял именно такое количество пар.

ОТВЕТ: а) 0.375 б) 0.84 в) $P(7) = 0.18$ г) $P(3) = 0.29$

УКАЗАНИЕ: Пусть событие А заключается в том, что Андрей прогуляет занятие, гипотеза H_1 заключается в том, Николай прогуляет, гипотеза H_2 - в том, что Николай не прогуляет. Далее учитываем фразу "Если же Николай не прогуляет, то и Андрей не прогуляет с вероятностью 0.7", *в которой дано, что* $P(\overline{A}|H_2) = 0.7$. *Теперь можно записать все нужные вероятности:*

$P(H_1) = 0.25,\ \ P(H_2) = 0.75,\ \ P(A|H_1) = 0.6,\ \ P(A|H_2) = 0.3$, *еще нам для пункта б) может потребоваться вероятность* $P(\overline{A}|H_1) = 1 - P(A|H_1)$. *Далее записываем нужные формулы и все нужные обоснования, и получаем ответы:*

а) $P(A) = 0.375$ - по формуле полной вероятности

б) $P(H_2 \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \mid H_2)\cdot P(H_2)}{P(\overline{A} \mid H_1)\cdot P(H_1) + P(\overline{A} \mid H_2)\cdot P(H_2)} = \frac{0.7\cdot 0.75}{(1-P(A|H_1))\cdot 0.25 + 0.7\cdot 0.75} = \frac{0.7\cdot 0.75}{0.6\cdot 0.25+0.7\cdot 0.75} = 0.84$

в) $n = 20,\ p = P(A) = 0.375,\ \Rightarrow k_0 = 7,\ P(7) \approx 0.18$

г) $n = 7,\ p = P(H_1|A) = 0.4,\ \Rightarrow k_0 = 3,\ P(3) \approx 0.29$

9. На дополнительный курс «Английский для менеджеров» ходят студенты первых трех курсов, причем состав слушателей такой: 30% - 1 курс, 20% - 2 курс, 50% - третий. Ходят, правда, так себе – вероятность прогула первокурсника – 30%, второкурсника – 40%, третьекурсника – 50%.

   (a) Найти вероятность того, что случайно выбранный студент, пришедший на занятие – со второго курса.

   (b) На занятие пришли 20 человек. Найти вероятность того, что из них ровно шесть второкурсников.

   (c) На занятие пришли 20 человек. Найти наивероятнейшее число второкурсников, пришедших на занятие, найти вероятность того, что именно такое число второкурсников придет на занятие.

   (Внимательный читатель заметит, что тут нужна соответствующая оговорка – мы считаем курс очень большим, то есть если мы взяли студента, и он оказался первокурсником, то вероятность того, что следующий студент тоже первокурсник, не меняется)

ОТВЕТ: а) 0.207, б) 0.119 или 0.118, в) к0=4 ⇒ 0.218

УКАЗАНИЕ: а) Формула Байеса с гипотезами – номерами курса и событием - приходом студента на занятие. 0.207

б) схема Бернулли: n=20, p=0.207, k=6 ⇒ 0.118585 или без промежуточных округлений 0.118446 ответ 0.119 или 0.118.

в) 20*0.207-(1-0.207)=3.347⇒к0=4⇒0.218

10. В команде 10 хороших стрелков, попадающих в цель при одном выстреле с вероятностью 0.8, и 3 плохих, попадающих с вероятностью 0.5. Один стрелок производит 5 выстрелов. Чему равна вероятность того, что это хороший стрелок, если он попал более двух раз?

ОТВЕТ: 0.863

УКАЗАНИЕ: ***Пусть событие A заключается в том, что стрелок попал более двух раз, H_1 – стрелял хороший стрелок, H_2 – стрелял плохой стрелок. В соответствии с этими обозначениями нас просят найти $P(H_1|A)$. Так как введенные гипотезы составляют полную группу событий, то мы можем использовать формулу Байеса. Найдем $P(A|H_1)$ – это схема Бернулли с*** $n = 5,\ p = 0.8,\ k > 2 \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{H}_1) = P(3) + P(4) + P(5) = 0.942$ ***, аналогично найдем $P(A|H_2)$ – это схема Бернулли с*** $n = 5,\ p = 0.5,\ k > 2 \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{H}_2) = P(3) + P(4) + P(5) = 0.5.$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\frac{10}{13}*0.942}{\frac{10}{13}*0.942 + \frac{3}{13}*0.5} \approx 0.863$$

11. Иван живет на 12 этаже и обычно спускается вниз на лифте. Ему известно, что в будний день вероятность того, что лифт остановится на любом промежуточном этаже, одинакова для всех этажей и равна 0.4. В выходные эта вероятность равна 0.2. В некоторый произвольный день Иван ехал со своего этажа на первый, лифт остановился по дороге 2 раза. Найти вероятность того, что это было в будний день.

(Считаем, что все остановки на каждом из этажей независимы, праздничных дней не существует)

ОТВЕТ: **≈0.5**

УКАЗАНИЕ:

Всего есть 10 промежуточных этажей, на каждом из которых лифт останавливается либо с вероятностью 0.4 либо с вероятностью 0.2.

Пусть А – ровно 2 остановки, H1 – будни, H2 – выходные. Тогда нам надо найти

$$P(H_1|A) = \frac{P(A \mid H_1)\cdot P(H_1)}{P(A \mid H_1)\cdot P(H_1) + P(A \mid H_2)\cdot P(H_2)} = \frac{C_{10}^2 0.4^2 0.6^8 \cdot \frac{5}{7}}{C_{10}^2 0.4^2 0.6^8 \cdot \frac{5}{7} + C_{10}^2 0.2^2 0.8^8 \cdot \frac{2}{7}} \approx 0.5002821 \approx 0.5$$

12. Каждый понедельник в промежуток времени от 12-00 до 20-00 в порт заходят два корабля (в случайные моменты и независимо друг от друга). Первый из кораблей разгружается два часа, второй – три, причем в один момент времени может разгружаться только один корабль.

    (a) Найти вероятность того, что ни одному из кораблей не придется ждать разгрузки.

    (b) Найти вероятность того, что за ближайшие два месяца (8 недель) будет ровно 4 дня, когда ни одному из кораблей не придется ждать разгрузки.

ОТВЕТ: а) 0.477 б) 0.271

Задача о встрече, по тексту обратите внимание, что корабли приходят по понедельникам, раз в неделю, т.е. в пункте б) серия из восьми испытаний.

УКАЗАНИЕ: а) $\Omega: [0; 8] \times [0; 8]$, $\overline{A}: x - 3 < y < x + 2$, $P(A) = \dfrac{\frac{6^2}{2} + \frac{5^2}{2}}{8^2} \approx 0.477$

б) $n = 8$, $p = P(A) \approx 0.477$, $k = 4$, $P(4) \approx 0.271$

13. Для случайной величины X, распределенной по закону Пуассона с матожиданием 2, найти вероятность того, что она примет значение:

    (a) равное 1,

    (b) не больше 2,

    (c) больше 2,

    (d) вероятность того, что случайная величина X отклонится от матожидания более чем на половину стандартного отклонения.

Ответ: а) 0.271, б) 0.677, в) 0.323, г) 0.729

Указание:

$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2)) = 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) = 1 - e^{-2} * 5 = 0.323$

$P(|X - EX| > 0.5\sigma) = P\left(|X - 2| > 0.5\sqrt{2}\right) = P(|X - 2| > 0.707) = P(X < 1.293) + P(X > 2.707) = 1 - P(2) = 0.729$

14. В поселке 1000 домов, каждый из которых застрахован от пожара в одной страховой компании на сумму 100, 000 рублей. Страховой взнос составляет 300 рублей за год. Для данного поселка вероятность пожара в доме в течение года равна 0.002. Какова вероятность того, что в течение года страховая компания по данному виду полиса выплатит больше, чем соберет? *(Указание: при решении использовать распределение Пуассона)*

***Ответ:* 0.143.**

Указание: ***Всего собрано* 300,000 *рублей, при больших выплатах будут убытки, получаем***

$n = 1000,\ p = 0.002,\ k > 3$: $P(k > 3) = 1 - (P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2) + P(k = 3))$, *но т.к.*

$\lambda = np = 1000 * 0.002 = 2 = O(1)$, *то можно воспользоваться формулой Пуассона* $P(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$,

получаем ответ **0.143**

15. Всего на одном курсе учится 397 студентов. Вероятность того, что студент придет на экзамен, равна 0.99.

    (a) Найти вероятность того, что на экзамене будет не менее 395 студентов. Использовать биномиальное распределение.

    (b) Найти вероятность того, что на экзамене будет не менее 395 студентов. Использовать приближение пуассоновским распределением.

0.241, 0.243

dbinom(395, 397, 0.99) + dbinom(396, 397, 0.99) + dbinom(397, 397, 0.99) = 0.2410609

Для использования Пуассона надо перейти к противоположной вероятности, чтобы она «стремилась» к нулю, а лямбда была соизмерима с 1

$\lambda := 397\cdot(1 - 0.99) = 3.97$

$$\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^2}{2!} = 0.14873115$$

dbinom(395, 397, 0.99) = 0.14837392

$$\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^2}{2!} + \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^0}{0!} = 0.2425321$$

16. Сессия состоит из 5 экзаменов, для каждого из студентов вероятность сдать на хорошо любой из экзаменов одинакова, равна 0.4, и не зависит от других студентов и экзаменов, вероятность сдать на отлично равна 0.1.

    (a) Найти вероятность того, что в группе из 20 студентов ровно 7 получит по два «хорошо» за эту сессию.

    (b) Найти вероятность того, что из 200 первокурсников ровно у двоих человек будет ровно по три отличные оценки. (Использовать приближение пуассоновским распределением)

    Ответ: а) P(2)=0.3456, P(7)=0.184 б) 0.26
    Указание: а) найдем вероятность получить два «хорошо» за сессию (биномиальное распределение), потом найдем вероятность того, что из 20 человек ровно 7 будут такими (еще одно биномиальное распределение), б) аналогично – биномиальное + Пуассона (как предельное к биномиальному).

    а)P(2)=0.3456, P(7)=0.184
    Мы можем ссылаться просто на схему Бернулли, но посмотрите, как это будет выглядеть, если говорить о распределениях:
    а) Пусть СВ X – это количество хороших оценок за сессию. Тогда $X \sim Bin(5;0.4)$, и $P(X=2)=\ldots=0.3456$. Пусть СВ Y это количество студентов группы, получивших по два «хор» за сессию. Тогда $Y \sim Bin(20;0.3456)$, и $P(Y=7)=\ldots=0.184$.

    б) Сначала для каждого студента надо найти вероятность получить три отличные оценки. Число испытаний 5, вероятность успеха 0.1, число успехов в серии 3. Получаем $Bin(5;0.1)$ и $P(3)=C_5^3 0.1^3 0.9^2=0.0081$.
    Далее мы получаем еще одно биномиальное распределение $Bin(200;0.0081)$. Число испытаний велико, вероятность успеха мала, $\lambda=np=1.62=O(1)$, т.е. можно перейти к распределению Пуассона $Pois(1.62)$.
    Тогда $P(2)=\frac{e^{-1.62}*1.62^2}{2!}=0.26$

17. Заказы на доставку еды из ресторана образуют простейший поток с интенсивностью 6 заказов в час. Найти вероятность того, что:

    (a) за очередные 20 минут поступит хотя бы 2 заказа.

    (b) за очередные 5 минут – хотя бы один.

    Указание: Задача на простейший поток, число событий – распределение Пуассона. Пусть единица времени час, тогда $\lambda = 6$. Пусть случайная величина X – число заказов за час, тогда X распределена по закону Пуассона

    ОТВЕТ: 0.594, 0.393
    Указание: $X \sim Pois(6)$

    а) $t_0=\frac{1}{3}$, $P(X\geq 2)=1-P(0)-P(1)=\ldots\ 1-\left(\frac{e^{-6\cdot\frac{1}{3}}\left(6\cdot\frac{1}{3}\right)^0}{0!}+\frac{e^{-6\cdot\frac{1}{3}}\left(6\cdot\frac{1}{3}\right)^1}{1!}\right)=0.594$

    б) $t_0=\frac{1}{12}$, $P(X\geq 1)=1-P(0)=1-\frac{e^{-6\cdot\frac{1}{12}}\left(6\cdot\frac{1}{12}\right)^0}{0!}=0.393$

18. В пожарную часть поступает в среднем 8 вызовов в сутки, вызовы образуют простейший поток.

   (a) Найти вероятность того, что за одну смену (12 часов) поступит 5 вызовов.

   (b) Найти вероятность того, что за последние 20 смен было ровно три таких смены, за которые поступило по 5 вызовов.

   Указание: так как в задаче идет речь о потоке событий во времени, о простейшем потоке, то проще всего сначала ввести какую-то удобную единицу времени, чтобы все встречающиеся интервалы времени удобно выражались через эту единицу. Например, пусть единица времени – это сутки. Тогда интенсивность потока $\lambda = 8$ событий/ед. времени.

Ответ: 0.156; 0.242

Решение: Пусть единица времени это сутки. Тогда интенсивность потока $\lambda = 8$ *вызовов за сутки.*

а) Число событий (СВ X) в простейшем потоке распределено по закону Пуассона: $X \sim Pois(8)$*, и по известным формулам* $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda t_0}(\lambda t_0)^k}{k!}$*. Промежуток времени, который нас интересует, в выбранных единицах равен* $t_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow P(X = 5) = \frac{e^{-8 \cdot 1/2} \cdot \left(8 \cdot \frac{1}{2}\right)^5}{5!} = 0.156$

б) Нас интересует СВ Y – число успехов в схеме Бернулли с $n = 20$ *одинаковых независимых испытаний,* $p = 0.156 = const$ *(из предыдущего пункта), а значит* $Y \sim Bin(20,\ 0.156)$ *и* $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$*. Мы ищем вероятность того, что нужных смен было 3:* $k = 3 \Rightarrow P(X = 3) = C_{20}^3 \cdot 0.156^3 \cdot (1 - 0.156)^{17} = 0.242$