

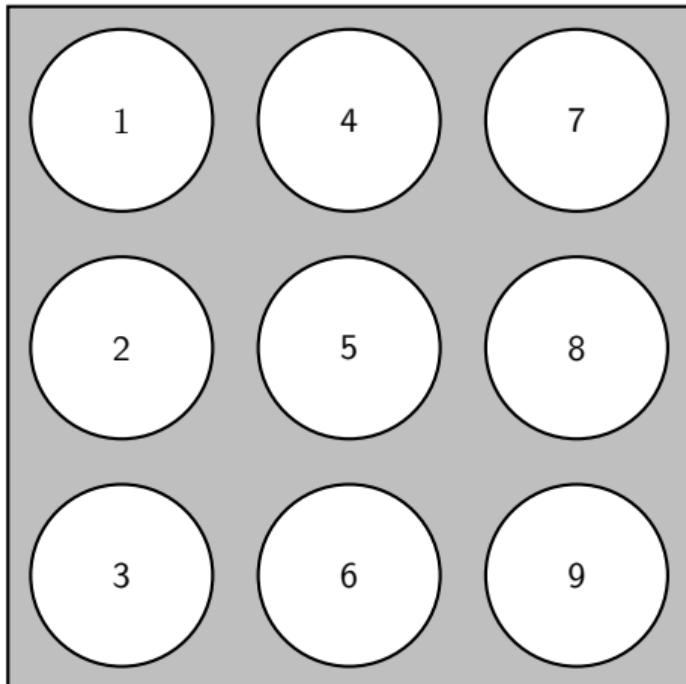
# Теория вероятностей и математическая статистика

## Условная вероятность. Полная вероятность. Формула Байеса.

Глеб Карпов

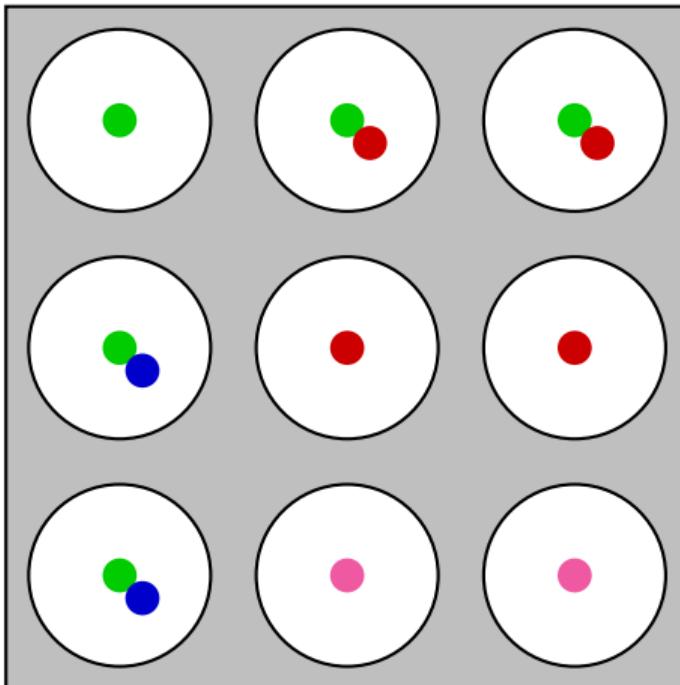
ВШБ Бизнес-информатика

## Мыслительный эксперимент



$$P(G|R) = \frac{2g}{4g} = \frac{1}{2}$$

Мыслительный эксперимент



- Зеленая группа: 1,2,3,4,7
- Красная группа: 4,5,7,8
- Синяя группа: 2,3
- Фиолетовая группа: 6,9

$$P(G) = \frac{5}{9}$$
$$P(R) = \frac{4}{9}$$

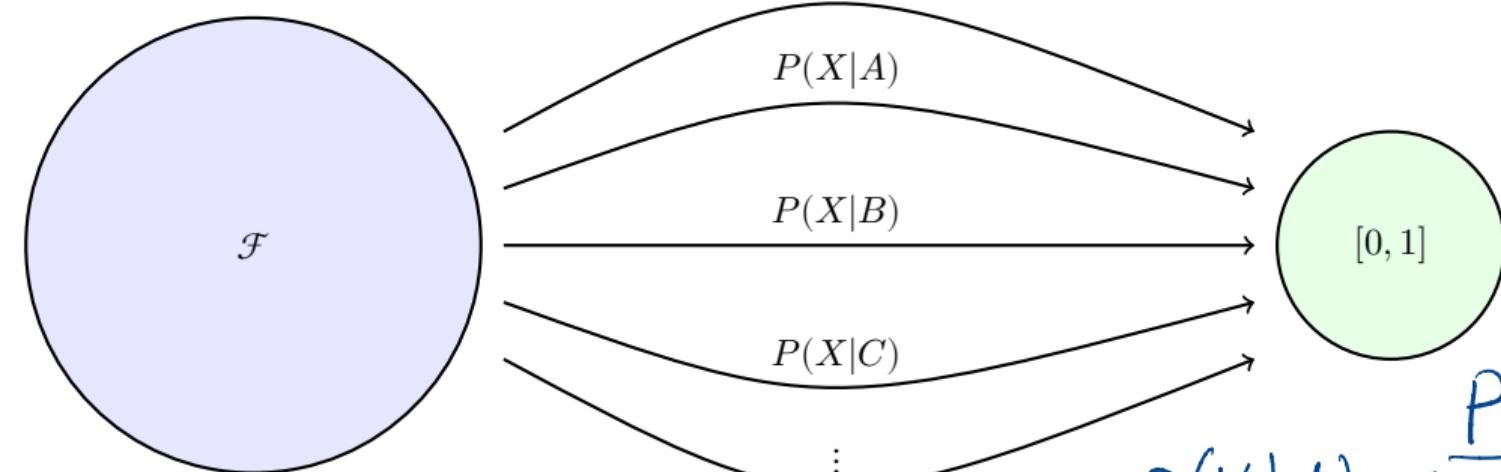
$$P(R|G) = \frac{P(R \cap G)}{P(G)} = \frac{2g}{5g} = \frac{2}{5}$$

$$P(G|B) = \frac{2g}{2g} = 1$$

## Условная вероятность

$$P(X)$$

$$\alpha x^2 + \beta x$$



$$P(X|A) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)}$$

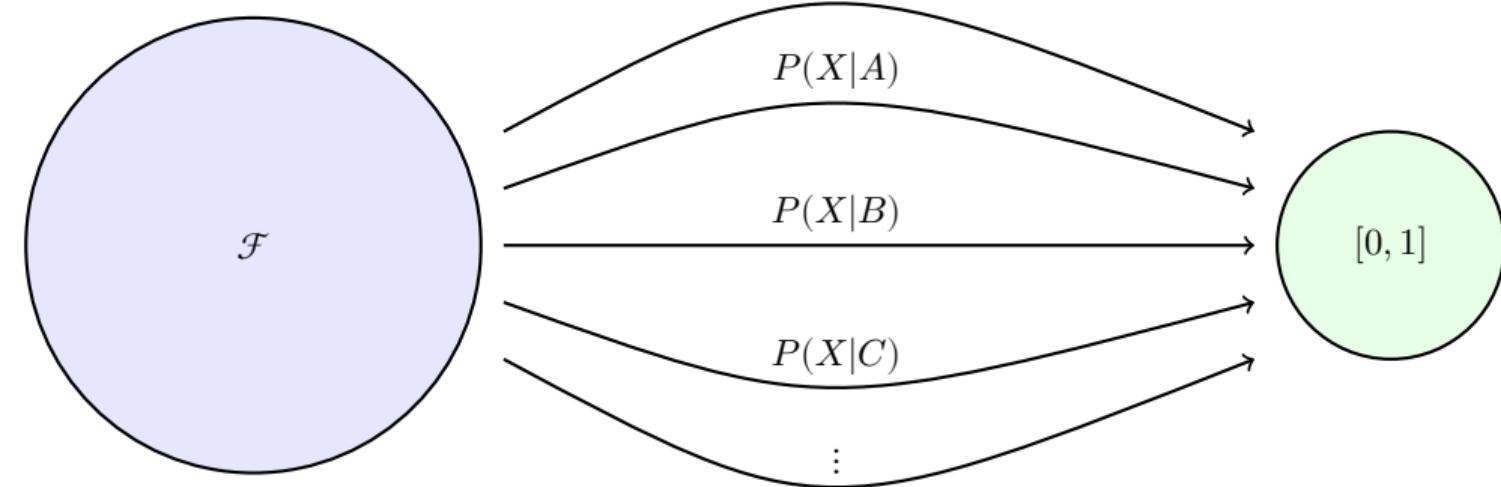
### Definition

Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## Условная вероятность

$$P(X)$$



### Definition

Условная вероятность пересчитывается через обычную вероятность в виде:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## Условная вероятность

При каждом зафиксированном значении параметра (условия)  $P(X|K)$  - отдельная самостоятельная вероятностная функция. Для каждой справедливы указанные ранее свойства:

- $\forall X, K \in \mathcal{F} : 0 \leq P(X|K) \leq 1$
- $\forall K \in \mathcal{F} : P(\Omega|K) = 1$ . Easy to show:  $P(\Omega|K) = \frac{P(\Omega \cap K)}{P(K)} = (K \subseteq \Omega) = \frac{P(K)}{P(K)} = 1$
- Аддитивность вероятности:

$$\forall X, Y, K \in \mathcal{F} : X \cap Y = \emptyset, P((X \cup Y)|K) = P(X|K) + P(Y|K)$$

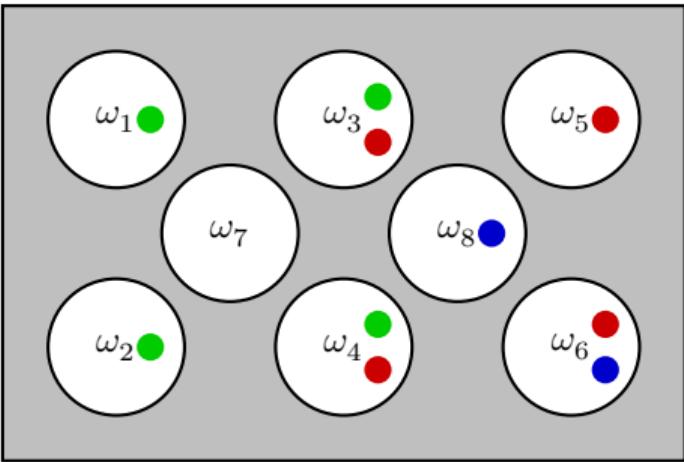
$$P(X|A)$$
$$P(Y|B)$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

## Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$

- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$



Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

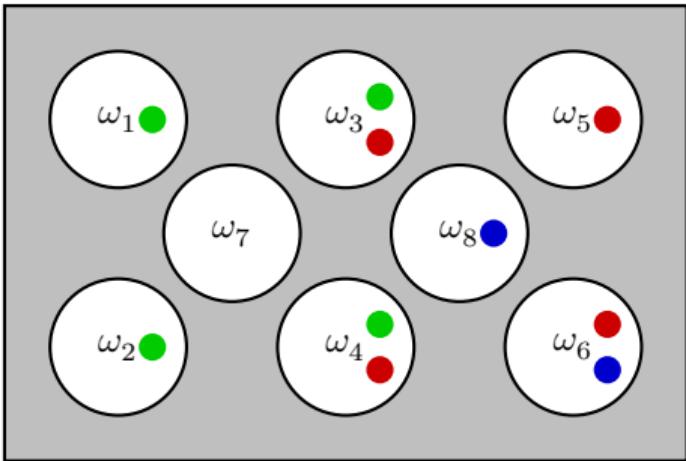
$$P(G|R) = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2} \quad P(R|G) = \frac{2/8}{4/8} = \frac{1}{2}$$

Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

## Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

Question

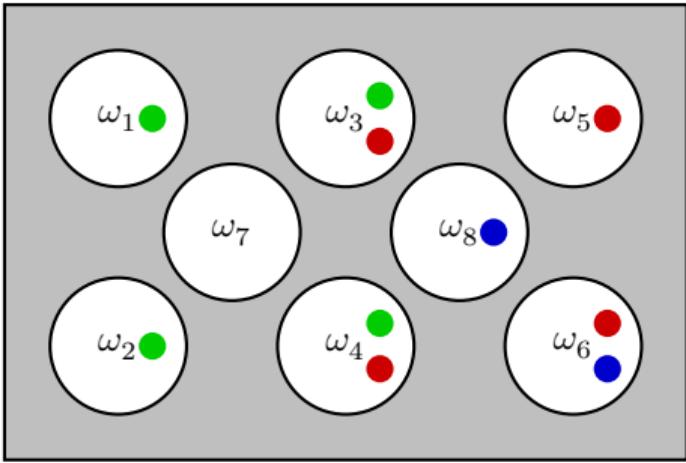
$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

$$P(R|B) = \frac{1/8}{2/8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|R) = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$$

## Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

ℹ Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

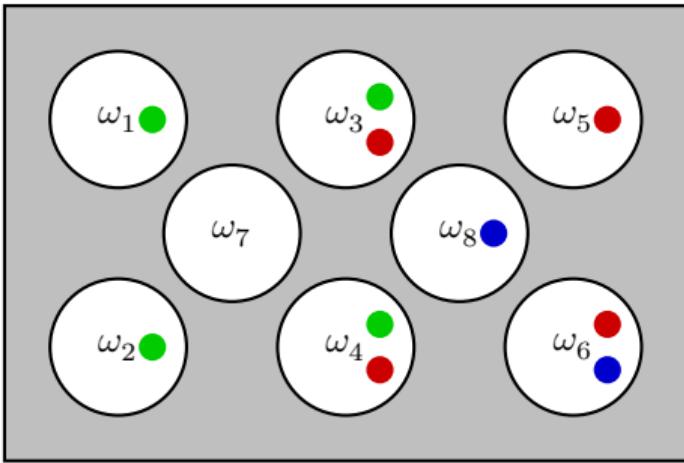
ℹ Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

- $P(R|B) = 0.5, P(B|R) = 0.25$

## Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

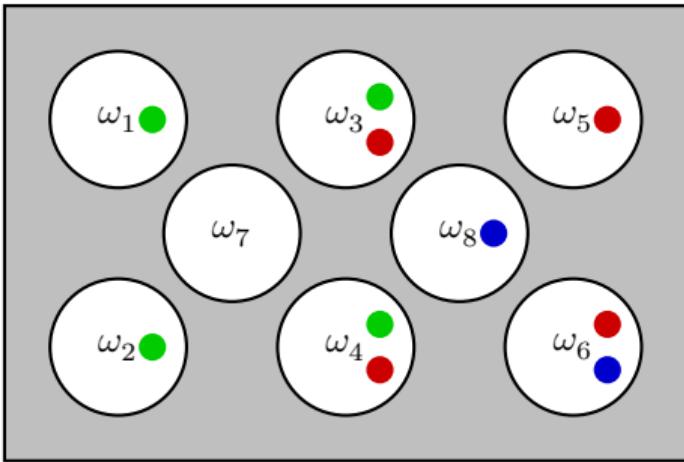
- $P(R|B) = 0.5, P(B|R) = 0.25$

- Наблюдаем:  $P(B) = P(B|R), P(R) = P(R|B)$ . Коэффициент ожидания этих событий а.к.а. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.

$$P(B) = P(B|R) = P$$

## Независимость событий

- $G = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{3, 4, 5, 6\}$
- $B = \{6, 8\}$



- $P(G) = 0.5, P(R) = 0.5, P(B) = 0.25$

Question

$$P(G|R), P(R|G) = ?$$

- $P(G|R) = 0.5, P(R|G) = 0.5$

Question

$$P(R|B), P(B|R) = ?$$

- $P(R|B) = 0.5, P(B|R) = 0.25$

- Наблюдаем:  $P(B) = P(B|R), P(R) = P(R|B)$ . Коэффициент ожидания этих событий а.к.а. вероятность не зависит от того, происходит ли одновременно другое событие или нет. Мы называем такие события **независимыми**.
- Более формально, чтобы называть  $A$  и  $B$  независимыми, должно выполняться:

$$P(A|B) = P(A) \text{ И } P(B|A) = P(B), \text{ при } P(A), P(B) > 0.$$

## Независимость событий



- Если немного поработаем с идеей о независимости, получим более удобное определение:

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

### Definition

События  $A$  и  $B$  из одного вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называются независимыми, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

и зависимыми в обратном случае.