

# Теория вероятностей и математическая статистика

## Многомерные случайные величины.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

## Введение

### Возвращение в дискретный мир

- Точно так же, как мы можем наблюдать результат одновременного подбрасывания двух монет, мы можем наблюдать результат более чем одной случайной величины одновременно.
- Для описания этого эксперимента мы используем новое понятие - многомерная случайная величина или случайный вектор:

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n), \text{ или в двумерном случае } (X, Y).$$

- Сравните это с элементарным исходом вида  $\omega = (\text{состояние}_1, \dots, \text{состояние}_n)$ , как например для одновременного или последовательного подбрасывания монет
- Теперь уникальным **элементарным исходом** будет набор одновременно наблюдаемых значений случайных величин. Например  $(x, y) = (10, 2)$ , где  $X$  - число на кубике с 20 гранями,  $Y$  - число на кубике с 6 гранями, бросили их вместе и наблюдаем вместе как единую целую картину.

## Совместная функция вероятности

- Нас интересует взаимное поведение этих случайных величин.
- Связаны ли они? Сопровождается ли некоторое значение одной величины более часто некоторым другим значением второй величины? Можем ли мы извлекать больше информации о происходящих случайных экспериментах, когда мы учитываем взаимодействие случайных величин друг с другом?
- Для описания этого взаимодействия, или взаимного поведения, мы используем **совместную функцию вероятности**, т.е.:

		$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$Y = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$Y = 2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

## Совместная функция вероятности

- В общем виде:

	$Y = y_1$	...	$Y = y_m$
$X = x_1$	$P(\{X = x_1, Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_1, Y = y_m\})$
...	...	...	...
$X = x_n$	$P(\{X = x_n, Y = y_1\})$	...	$P(\{X = x_n, Y = y_m\})$

- Мы также можем записать  $P(\{X = x_i, Y = y_j\})$  как  $P_{X,Y}(x_i, y_j)$

### Свойства

- $P_{X,Y}(x_i, y_j) \geq 0$ , для всех возможных  $(x_i, y_j)$
- Поскольку  $P(\Omega) = 1$ , здесь мы имеем  $\Omega = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_n, y_m)\}$ . Из этого следует:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = 1.$$

## Маргинальная функция вероятности

- От англ. *marginal*. В более старых переводах - частная функция вероятности, частное распределение
- Предположим, нас интересует получение результата  $X = x_i$ , независимо от того, чему равно  $Y$ . Это означает, что все следующие пары являются допустимыми, и они образуют специальное событие:

$$A = \{\text{мы получаем } X = x_i\} = \{(x_i, y_1), (x_i, y_2), \dots, (x_i, y_m)\}$$

- Если затем мы хотим найти вероятность этого события, то по свойству аддитивности:

$$P(\{X = x_i\}) = P_{X, Y}(x_i, y_1) + P_{X, Y}(x_i, y_2) + \dots + P_{X, Y}(x_i, y_m),$$

т.е. мы складываем вероятности всех элементарных исходов, формирующих это событие.

- Это означает, что используя совместную функцию вероятности, мы можем восстановить собственную функцию вероятности случайной величины, как бы изолируя её отдельно от случайного вектора.
- Раньше мы называли это просто **функцией вероятности**, но теперь нам нужно уточнять, потому что добавляется много новых видов функций вероятности.

## Маргинальная функция вероятности

- В общем виде:

$$P(\{X = x_i\}) = \sum_{j=1}^m P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = \sum_{j=1}^m P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

$$P(\{Y = y_j\}) = \sum_{i=1}^n P(\{X = x_i, Y = y_j\}) = \sum_{i=1}^n P_{X,Y}(x_i, y_j)$$

- Другими словами, маргинальные вероятности являются суммами по соответствующей строке или столбцу в таблице совместного распределения:

	$Y = y_1$	$\dots$	$Y = y_m$
$X = x_1$	$P(\{X = x_1, Y = y_1\})$	$\dots$	$P(\{X = x_1, Y = y_m\})$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$X = x_n$	$P(\{X = x_n, Y = y_1\})$	$\dots$	$P(\{X = x_n, Y = y_m\})$

## Условная функция вероятности

- В многомерном мире мы также можем исследовать вопросы следующего вида:  $P(X = x_i | Y = y_j)$
- Мы называем это еще одной функцией вероятности - **условной функцией вероятности**
- Напомним: условная вероятность - это своего рода параметризованная функция, где событие-условие служит параметром. Функции  $P(X|A)$  и  $P(X|B)$ ,  $A \neq B$ , являются разными функциями!
- Применяя определение условной вероятности:

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{P(Y = y_j)} = \frac{P(\{X = x_i, Y = y_j\})}{P(Y = y_j)}$$

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{P(X = x_i)} = \frac{P(\{X = x_i, Y = y_j\})}{P(X = x_i)}$$

## Независимость

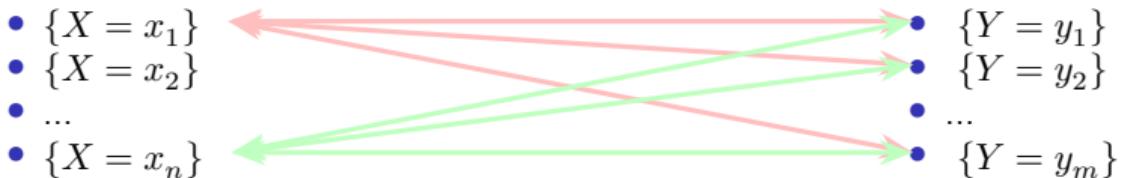
- Наконец, есть важный разговор о независимости случайных величин. В некотором смысле это даже более важно, чем независимость отдельных событий.
- Напомним. Независимость пары событий:

$$P(A) = P(A|B), \quad P(B) = P(B|A)$$

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

## Независимость

- Рассмотрим каждую возможную пару следующих событий:



Если каждая пара оказывается независимыми событиями, то мы говорим, что случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы.

$$\forall x_i, \forall y_j : P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(\{X = x_i, Y = y_j\}).$$

## Задачи

Совместная функция вероятности  $X$  и  $Y$  задана следующим образом:

		$Y = 1$	$Y = 2$
		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$		
	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$

1. Найдите маргинальные функции вероятности для каждой случайной величины.
2. Вычислите условную функцию вероятности  $X$  при условии  $Y = i$ ,  $i = 1, 2$ .
3. Независимы ли  $X$  и  $Y$ ?

## Решение задачи

### 1. Маргинальные функции вероятности

Для  $X$ :

$$P(X = 1) = \sum_{j=1}^2 P(X = 1, Y = j) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \sum_{j=1}^2 P(X = 2, Y = j) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Для  $Y$ :

$$P(Y = 1) = \sum_{i=1}^2 P(X = i, Y = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 2) = \sum_{i=1}^2 P(X = i, Y = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

## Решение задачи (продолжение)

### 2. Условные функции вероятности

$P(X|Y = 1)$ :

$$P(X = 1|Y = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2|Y = 1) = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$P(X|Y = 2)$ :

$$P(X = 1|Y = 2) = \frac{P(X = 1, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 2|Y = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

## Решение задачи (продолжение)

### 3. Проверка независимости

Проверим условие независимости для пары:

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \neq \frac{1}{8}$$

**Вывод:**  $X$  и  $Y$  не независимы.

## Функции от случайных векторов

- Мы обсуждали идею, что функция от случайной величины сама является случайной величиной, т.е.  $W = g(X)$ .
- Функция может быть от более чем одной переменной, и теперь мы можем получить  $W = f(X, Y)$ .
- Как и в случае с одной переменной, мы можем захотеть предсказать  $E[W] = E[f(X, Y)]$ .
- Напомним:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) P(X = x_i)$$

- В новом случае:

$$E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(x_i, y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

## Пример

Совместная функция вероятности  $X$  и  $Y$  задана следующим образом:

		$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$Y = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$Y = 2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

Рассмотрим функции  $W = XY$ ,  $G = X - Y$ . Найдите их функции вероятности и математические ожидания.

## Пример

Найти математическое ожидание  $E[XY]$

**Вариант 1: Через распределение новой случайной величины**

Сначала найдем распределение  $W = XY$ :

- $W = 1$ : когда  $(X = 1, Y = 1)$ ,  $P(W = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{8}$
- $W = 2$ : когда  $(X = 1, Y = 2)$  или  $(X = 2, Y = 1)$ ,  $P(W = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- $W = 4$ : когда  $(X = 2, Y = 2)$ ,  $P(W = 4) = P(X = 2, Y = 2) = \frac{1}{2}$
- Теперь вычислим математическое ожидание:

$$E[XY] = E[W] = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{4}{2} = \frac{23}{8}$$

## Пример

**Вариант 2: Используя формулу непосредственного подсчета**

$$E[XY] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{4}{2} \\ &= \frac{23}{8} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $E[XY] = \frac{23}{8} = 2.875$

## Пример

Найти математическое ожидание  $E[X - Y]$

**Вариант 1: Через распределение новой случайной величины**

Сначала найдем распределение  $G = X - Y$ :

- $G = -1$ : когда  $(X = 1, Y = 2)$ ,  $P(G = -1) = P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{4}$
- $G = 0$ : когда  $(X = 1, Y = 1)$  и  $(X = 2, Y = 2)$ ,  
 $P(G = 0) = P(\{(X = 1, Y = 1), (X = 2, Y = 2)\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$
- $G = 1$ : когда  $(X = 2, Y = 1)$ ,  $P(G = 1) = P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{8}$
- Теперь вычислим математическое ожидание:

$$E[X - Y] = E[G] = 0 \cdot \frac{5}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

## Пример

**Вариант 2: Используя формулу непосредственного подсчета**

$$E[X - Y] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (x_i - y_j) P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\begin{aligned} E[X - Y] &= (1 - 1) \cdot \frac{1}{8} + (1 - 2) \cdot \frac{1}{4} + (2 - 1) \cdot \frac{1}{8} + (2 - 2) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0 \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $E[X - Y] = -\frac{1}{8} = -0.125$

## Линейная комбинация случайных величин

### Математическое ожидание комбинации

- Часто важно анализировать поведение суммы двух или более случайных величин
- В основном мы хотим понять, как ведет себя переменная  $T = aX \pm bY$ , каковы ее характеристики.
- Линейное свойство математического ожидания:  $E[aX \pm bY] = aE[X] \pm bE[Y]$ .

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (ax_i \pm by_j) P(X = x_i, Y = y_j) = \\ &\quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ax_i P(X = x_i, Y = y_j) \pm \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m by_j P(X = x_i, Y = y_j) = \\ &\quad a \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\sum_{j=1}^m P(X = x_i, Y = y_j)}_{\text{marginal for } X} \pm b \sum_{j=1}^m y_j \underbrace{\sum_{i=1}^n P(X = x_i, Y = y_j)}_{\text{marginal for } Y} = \\ &\quad a \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \pm b \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j) = aE[X] \pm bE[Y] \end{aligned}$$

## Линейная комбинация случайных величин

Но дисперсия - это уже совсем другая история...

- Нас интересует  $Var[T] = Var[aX \pm bY]$ .
- Давайте применим сокращенную формулу для дисперсии:

$$\begin{aligned} Var[T] &= E[T^2] - (E[T])^2 = E[(aX \pm bY)^2] - (aE[X] \pm bE[Y])^2 \\ &= E[a^2X^2 \pm 2abXY + b^2Y^2] - ((aE[X])^2 \pm 2abE[X]E[Y] + (bE[Y])^2) \\ &= a^2E[X^2] \pm 2abE[XY] + b^2E[Y^2] - a^2(E[X])^2 \mp 2abE[X]E[Y] - b^2(E[Y])^2 \\ &= a^2Var[X] + b^2Var[Y] \pm 2ab(E[XY] - E[X]E[Y]) \end{aligned}$$

- В процессе использовали свойство линейности математического ожидания.
- Слагаемое  $E[XY] - E[X]E[Y]$  называется **ковариацией**  $X$  и  $Y$ .

## Ковариация и независимость

**Утверждение:** Если  $X$  и  $Y$  - независимые случайные величины, то  $E[XY] = E[X]E[Y]$

Используем определение независимости величин:

$$\forall x_i, \forall y_j : P_X(X = x_i) P_Y(Y = y_j) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j P_X(x_i) P_Y(y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i P_X(x_i) \sum_{j=1}^m y_j P_Y(y_j) = E[X]E[Y]. \end{aligned}$$

Будьте внимательны: обратное утверждение неверно!

## Корреляция

- Ковариация не является хорошей мерой зависимости, поскольку она зависит от масштабов  $X$  и  $Y$ .
- Идея: нормализовать ковариацию и избавиться от масштабов.
- Корреляция:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}}$$

- Она строго ограничена от  $-1$  до  $1$  и:

$$\text{Corr}(X, Y) = 1 \leftrightarrow Y = kX + b, \quad k > 0$$

$$\text{Corr}(X, Y) = -1 \leftrightarrow Y = -kX + b, \quad k > 0$$

- Важно: Если переменные независимы, то их ковариация (и корреляция) равна нулю. Обратное утверждение НЕВЕРНО. Очень может быть, что ковариация равна нулю, но при этом величины являются зависимыми

## Пример:

	$Y = 3$	$Y = -3$
$X = -1$	$\frac{3}{4}$	0
$X = 2$	0	$\frac{1}{4}$

1. Найдите маргинальные функции вероятности для  $X$  и  $Y$ .
2. Независимы ли  $X$  и  $Y$ ?
3. Найдите ковариацию (и корреляцию) между  $X$  и  $Y$ .

## Решение задачи

### 1. Маргинальные функции вероятности

Для  $X$ :

$$P(X = -1) = \sum_j P(X = -1, Y = y_j) = \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}$$

$$P(X = 2) = \sum_j P(X = 2, Y = y_j) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Для  $Y$ :

$$P(Y = 3) = \sum_i P(X = x_i, Y = 3) = \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}$$

$$P(Y = -3) = \sum_i P(X = x_i, Y = -3) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

## Пример

### Проверка независимости

Проверим условие независимости для пары:

$$P(X = -1, Y = 3) = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad P(X = -1)P(Y = 3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \neq \frac{3}{4}$$

**Ответ:  $X$  и  $Y$  не независимы.**

## Пример

### Ковариация и корреляция

Сначала найдем математические ожидания:

$$E[X] = (-1) \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$E[Y] = 3 \cdot \frac{3}{4} + (-3) \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

Теперь найдем  $E[XY]$ :

$$\begin{aligned} E[XY] &= (-1) \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} + (-1) \cdot (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{4} \\ &= -\frac{9}{4} + 0 + 0 - \frac{6}{4} = -\frac{15}{4} \end{aligned}$$

## Пример

Ковариация:

$$\begin{aligned}Cov(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] = -\frac{15}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{2} \\&= -\frac{15}{4} + \frac{3}{8} = -\frac{30}{8} + \frac{3}{8} = -\frac{27}{8}\end{aligned}$$

Для корреляции найдем дисперсии:

$$\begin{aligned}E[X^2] &= (-1)^2 \cdot \frac{3}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} \\Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{7}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{16} = \frac{27}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[Y^2] &= 3^2 \cdot \frac{3}{4} + (-3)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = 9 \\Var[Y] &= E[Y^2] - (E[Y])^2 = 9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}\end{aligned}$$

## Пример

Корреляция:

$$\begin{aligned} \text{Corr}(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}} = \frac{-\frac{27}{8}}{\sqrt{\frac{27}{16} \cdot \frac{27}{4}}} \\ &= \frac{-\frac{27}{8}}{\sqrt{\frac{729}{64}}} = \frac{-\frac{27}{8}}{\frac{27}{8}} = -1 \end{aligned}$$

Корреляция равна  $-1$ , что означает полную отрицательную линейную зависимость между  $X$  и  $Y$ .