

ВШБ Бизнес-информатика: ТВиМС 2025.

Лист задач для самостоятельного решения #6.

Непрерывные случайные величины. Специальные распределения: равномерное, экспоненциальное.

Медианой случайной величины X называется такая точка m , что $P(\{X \leq m\}) = P(\{X \geq m\}) = \frac{1}{2}$.

Модой случайной величины X называется такая точка, в которой функция плотности вероятности $f_X(x)$ достигает максимального значения.

1. Функция плотности вероятности $f_X(x)$ случайной величины X имеет следующий вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ c, & x \in [2, 4] \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

- (a) Найдите нормировочную константу c ,
 - (b) Найдите функцию распределения случайной величины X и проверьте, что она корректна (поведения в пределах, неубывание),
 - (c) Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X ,
 - (d) Постройте графики функции распределения и функции плотности вероятности.
2. Функция плотности вероятности $f_X(x)$ случайной величины X имеет следующий вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx^3, & x \in [0, 1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

- (a) Найдите нормировочную константу c ,
 - (b) Найдите функцию распределения случайной величины X и проверьте, что она корректна (поведения в пределах, неубывание),
 - (c) Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X ,
 - (d) Постройте графики функции распределения и функции плотности вероятности,
 - (e) Найдите вероятность $P(0 < X < 0.5)$,
 - (f) Найдите моду и медиану случайной величины X .
3. Функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X имеет следующий вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx^3, & x \in [0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

- (a) Найдите нормировочную константу c ,
- (b) Найдите функцию плотности вероятности случайной величины X и постройте её график,
- (c) Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X ,
- (d) Постройте графики функции распределения и функции плотности вероятности,
- (e) Найдите моду и медиану случайной величины X .

4. Функция плотности вероятности $f_X(x)$ случайной величины X имеет следующий вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.5, & x \in [-1, 0] \\ 0, & x \in [0, 1] \\ 0.5, & x \in [1, 2] \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

- (a) Найдите функцию распределения случайной величины X и проверьте, что она корректна (поведения в пределах, неубывание),
- (b) Постройте графики функции распределения и функции плотности вероятности,
- (c) Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X ,

5. Случайная величина X распределена с плотностью вероятности:

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot (x - 1), & x \in [1, 4] \\ 0, & x \notin [1, 4] \end{cases}$$

Найдите неизвестный параметр c , математическое ожидание, дисперсию, стандартное отклонение и вероятность:

- (a) $P(X = 3)$,
- (b) $P(X < 2)$,
- (c) $P(X > 3)$,
- (d) $P(|X - E(X)| < std(X))$,
- (e) $P(|X - E(X)| > 1.5 \cdot std(X))$,

6. **Расширение задачи из списка 5.** Заказы на доставку еды из ресторана образуют простейший поток с интенсивностью 6 заказов в час. Найдите вероятность того, что:

- (a) за очередные 20 минут поступит хотя бы 2 заказа,
- (b) за очередные 5 минут – хотя бы 1 заказ,
- (c) время между двумя заказами окажется более 10 минут.

Указание: Задача на простейший поток, число событий – распределение Пуассона, время между событиями (или длительность события) – экспоненциальное распределение.

7. **Расширение задачи из списка 5.** В пожарную часть поступает в среднем 8 вызовов в сутки, вызовы образуют простейший поток. Найдите вероятность того, что

- (a) время ожидания очередного вызова превзойдет 4 часа,
- (b) время ожидания очередного вызова окажется менее 3 часов,
- (c) время ожидания очередного вызова окажется в пределах от 1 часа до 5 часов.

8. Студент может либо прийти от метро до учебного корпуса пешком, время в дороге в этом случае распределено по экспоненциальному закону, причем в среднем студент тратит на дорогу 15 минут (то есть математическое ожидание времени в пути равно 15 минутам), либо доехать на автобусе. Время ожидания автобуса распределено равномерно на отрезке от 0 до 9 минут, а время в пути равно трем минутам. Пешком он ходит в 70% случаев.

- (a) Найдите вероятность того, что он потратит на дорогу более 10 минут,
- (b) Известно, что он потратил на дорогу более 10 минут. Найдите вероятность того, что он ехал на автобусе.

Указание: у нас две случайные величины: в первом случае $X \sim \text{Exp}(1/15)$ – это следует из условия и формулы $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 15$, во втором случае $Y \sim \text{Uniform}[3; 12]$ – это время ожидания + время поездки.

9. Время приема пациента доктором – это случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону со средним значением 10 минут. На завтра у доктора записано 20 человек. Найдите вероятность того, что у половины из них время приема окажется больше среднего (больше 10 минут).

10. Заказы на доставку еды из ресторана образуют простейший поток с интенсивностью 6 заказов в час. Найдите вероятность того, что очередной заказ поступит более чем через k минут, если предыдущие n минут заказы не поступали. Простыми словами – найдите условную вероятность $P\{X > n + k \mid X > n\}$.
11. Для данной случайной величины найти вероятность того, что она отклонится от своего матожидания более чем на три стандартных отклонения.
- (a) $X \sim Bin(7, 0.2)$
 - (b) $Y \sim Pois(3)$
 - (c) $U \sim Uniform[2, 5]$
 - (d) $T \sim Exp(3)$