

# Теория вероятностей и математическая статистика

Устойчивость нормального распределения. ИТМЛ. Хи-квадрат распределение.

Глеб Карпов

ВШБ Бизнес-информатика

## Напоминание: Нормальное распределение

- Случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ , если её плотность:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Обозначение:  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Математическое ожидание:  $E[X] = \mu$
- Дисперсия:  $\text{Var}(X) = \sigma^2$

# Многомерное нормальное распределение

- До сих пор мы рассматривали **одномерные** нормальные распределения.
- Как обобщить понятие нормального распределения на случай нескольких случайных величин?

## Многомерное нормальное распределение

Пара случайных величин  $(X, Y)$  имеет **двумерное нормальное распределение**, если для всех  $a, b \in \mathbb{R}$  линейная комбинация  $aX + bY$  имеет одномерное нормальное распределение.

Вектор случайных величин  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  имеет **многомерное нормальное распределение**, если для всех векторов  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  скалярное произведение  $\mathbf{a}^\top \mathbf{X}$  имеет одномерное нормальное распределение.

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

## Устойчивость нормального распределения

- **Ключевое свойство:** Нормальное распределение **устойчиво** относительно линейных преобразований.
- Если  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , то для любых констант  $a \neq 0$  и  $b$ :

$$Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

- **Интерпретация:** Линейное преобразование нормальной случайной величины даёт нормальную случайную величину.

# Устойчивость нормального распределения

## Линейная комбинация двух независимых нормальных величин

- Частный случай: если  $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  и  $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  независимы, то:

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- **Связь с многомерным нормальным:** Независимые нормальные величины  $(X_1, X_2)$  формируют двумерное нормальное распределение, поэтому любая линейная комбинация  $aX_1 + bX_2$  имеет нормальное распределение.

# Устойчивость нормального распределения

## Обобщение на $n$ переменных

- Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — независимые нормальные случайные величины:

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \dots, n$$

- **Важно:** Вектор (коллекция, набор) независимых нормальных случайных величин имеет **многомерное нормальное распределение**.
- По определению многомерного нормального распределения, **любая** линейная комбинация имеет нормальное распределение:

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim \mathcal{N} \left( \sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \right)$$

## Пример 1: Линейная комбинация

- Пусть  $X \sim \mathcal{N}(2, 1)$  и  $Y \sim \mathcal{N}(3, 4)$  — независимы.
- Найти распределение  $W = 2X - 3Y$ .
- **Решение:**

$$E[W] = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 4 - 9 = -5$$

$$\text{Var}(W) = 2^2 \cdot 1 + (-3)^2 \cdot 4 = 4 + 36 = 40$$

- Таким образом:  $W \sim \mathcal{N}(-5, 40)$



## Пример 2: Выборочное среднее

- Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — независимые наблюдения из  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- Выборочное среднее:  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} S_n$
- Используя свойство устойчивости:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} S_n, \quad \text{где } S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\begin{aligned}\bar{X} &\sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n} \cdot n\mu, \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n\sigma^2\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)\end{aligned}$$

## Напоминание: Биномиальное распределение

- Пусть  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  — биномиальная случайная величина.
- $X$  можно представить как сумму  $n$  независимых бернуллиевских случайных величин:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \text{где } X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$$

- Характеристики:
  - $E[X] = np$
  - $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

## Интегральная теорема Муавра-Лапласа (ИТМЛ)

Пусть  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . При больших  $n$  биномиальное распределение приближается нормальным:

$$X \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

**Условие:**  $n$  достаточно велико (обычно  $n \geq 30$ ), и желательно  $np > 5$  и  $n(1-p) > 5$ .

Это частный случай ЦПТ для суммы бернуллиевских случайных величин!

## Нормализованная форма ИТМЛ

- Нормализованная случайная величина:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

- При больших  $n$ :

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Это позволяет использовать стандартную нормальную таблицу для вычисления вероятностей биномиального распределения!

## Применение ИТМЛ: вычисление вероятностей

- Для биномиального распределения  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ :

$$P(a \leq X \leq b) \approx P\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

где  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

- **Поправка на непрерывность** (без доказательства): поскольку  $X$  — дискретная случайная величина, а нормальное распределение — непрерывное, для повышения точности приближения расширяем интервал на 0.5 с каждой стороны:

$$P(a \leq X \leq b) \approx P\left(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- Вероятность  $P(a \leq X \leq b)$  включает все целые значения от  $a$  до  $b$  включительно. В непрерывном приближении это соответствует интервалу  $[a - 0.5, b + 0.5]$ .

## Пример: применение ИТМЛ

- Пусть  $X \sim \text{Bin}(100, 0.3)$ . Найти  $P(25 \leq X \leq 35)$ .
- **Точное вычисление** (через биномиальное распределение):

$$P(25 \leq X \leq 35) = \sum_{k=25}^{35} \binom{100}{k} (0.3)^k (0.7)^{100-k} \approx 0.7698$$

- **Приближение через нормальное распределение:**

- Параметры:  $\mu = np = 30$ ,  $\sigma^2 = np(1-p) = 21$ ,  $\sigma \approx 4.58$
- С поправкой на непрерывность:

$$\begin{aligned} P(25 \leq X \leq 35) &\approx P\left(\frac{24.5 - 30}{4.58} \leq Z \leq \frac{35.5 - 30}{4.58}\right) \\ &= P(-1.20 \leq Z \leq 1.20) \\ &\approx 0.7699 \end{aligned}$$

- **Сравнение:** Нормальное приближение даёт результат 0.7699, очень близко к точному значению 0.7698.

## Распределение $\chi^2$ (хи-квадрат)

- Пусть  $Z_1, \dots, Z_k$  — независимые стандартные нормальные случайные величины:  $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
- Определим новую случайную величину:

$$\chi^2(k) = \sum_{i=1}^k Z_i^2$$

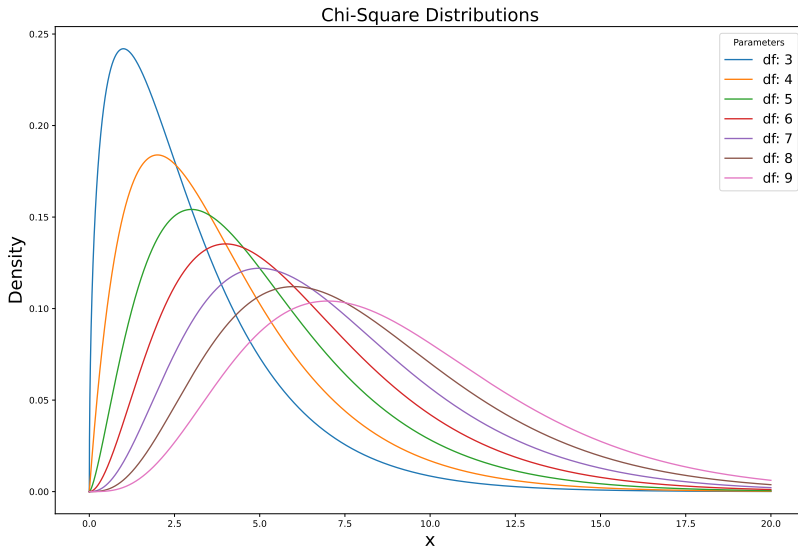
- Распределение такой случайной величины называется **распределением хи-квадрат**.
- Это распределение играет важную роль в статистических процедурах.

## Степени свободы

- Функция плотности распределения хи-квадрат **критично зависит** от числа слагаемых  $k$  в сумме.
- Число слагаемых  $k$  называется **степенями свободы** (degrees of freedom, df).
- Правильное обозначение:  $\chi^2(k)$  — читается как "хи-квадрат распределение с  $k$  степенями свободы".



## Функция плотности распределения хи-квадрат



## Математическое ожидание и дисперсия распределения хи-квадрат

- Если  $Y \sim \chi^2(k)$ , то:

$$E[Y] = k, \quad \text{Var}(Y) = 2k$$

- Доказательство для  $E[Y]$ :

Поскольку  $Y = \sum_{i=1}^k Z_i^2$ , где  $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  независимы:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^k E[Z_i^2] = \sum_{i=1}^k (\text{Var}(Z_i) + (E[Z_i])^2) = \sum_{i=1}^k (1 + 0) = k$$

## Свойство суммы отклонений от среднего

Пусть  $X_1, \dots, X_k$  — случайная выборка из некоторой генеральной совокупности. Тогда:

$$\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}) = 0$$

где  $\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$  — выборочное среднее.

## Свойство суммы отклонений от среднего

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}) &= \sum_{i=1}^k (X_i) - k\bar{X} \\ &= \sum_{i=1}^k X_i - k \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{k} \\ &= \sum_{i=1}^k X_i - \sum_{i=1}^k X_i = 0\end{aligned}$$

## Теорема о $k\bar{Z}^2$

Пусть  $Z_1, \dots, Z_k$  — случайная выборка из стандартного нормального распределения, т.е.  $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Тогда случайная величина  $k\bar{Z}^2$  имеет распределение хи-квадрат с одной степенью свободы:

$$k\bar{Z}^2 \sim \chi^2(1)$$

## Теорема о $k\bar{Z}^2$

- Характеристики:

$$E[\bar{Z}] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E[Z_i] = 0, \quad \text{Var}[\bar{Z}] = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \text{Var}[Z_i] = \frac{1}{k^2} k = \frac{1}{k}$$

- По свойству устойчивости, как сумма независимых нормальных случайных величин,  $\bar{Z} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{k}\right)$
- Далее рассмотрим случайную величину  $\sqrt{k}\bar{Z}$ :

$$E[\sqrt{k}\bar{Z}] = 0, \quad \text{Var}(\sqrt{k}\bar{Z}) = k\text{Var}(\bar{Z}) = k \frac{1}{k} = 1$$

- Значит,  $\sqrt{k}\bar{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  — имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому одна такая величина в квадрате будет распределена как хи-квадрат:

$$(\sqrt{k}\bar{Z})^2 = k\bar{Z}^2 \sim \chi^2(1)$$

## Разложение суммы квадратов

- Рассмотрим преобразование:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k Z_i^2 &= \sum_{i=1}^k [(Z_i - \bar{Z} + \bar{Z})^2] = \sum_{i=1}^k \left[ \left( (Z_i - \bar{Z}) + \bar{Z} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \left[ (Z_i - \bar{Z})^2 + 2 (Z_i - \bar{Z}) \bar{Z} + \bar{Z}^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^k (Z_i - \bar{Z})^2 + 2\bar{Z} \sum_{i=1}^k (Z_i - \bar{Z}) + k\bar{Z}^2\end{aligned}$$

- По свойству суммы отклонений:  $\sum_{i=1}^k (Z_i - \bar{Z}) = 0$
- Получаем:

$$\sum_{i=1}^k Z_i^2 = \sum_{i=1}^k (Z_i - \bar{Z})^2 + k\bar{Z}^2$$

## Распределение суммы квадратов отклонений

- Из разложения:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^k Z_i^2}_{k \text{ степеней свободы}} = \underbrace{\sum_{i=1}^k (Z_i - \bar{Z})^2}_{(k-1) \text{ степеней свободы}} + \underbrace{k\bar{Z}^2}_{1 \text{ степень свободы}}$$

- Известно:

- $\sum_{i=1}^k Z_i^2 \sim \chi^2(k)$ , и  $k\bar{Z}^2 \sim \chi^2(1)$

- В итоге получаем, что оставшееся слагаемое имеет  $(k-1)$  степень свободы:

$$\sum_{i=1}^k (Z_i - \bar{Z})^2 \sim \chi^2(k-1)$$

- Ключевой результат:** Сумма квадратов отклонений от выборочного среднего имеет распределение хи-квадрат с  $(k-1)$  степенями свободы. Это фундаментальный результат для статистических тестов и доверительных интервалов.



## Выборочная дисперсия

- Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — случайная выборка из нормального распределения:  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

- **Выборочная дисперсия:**

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- Выборочная дисперсия используется для оценки неизвестной дисперсии генеральной совокупности  $\sigma^2$ .

## Связь выборочной дисперсии с хи-квадрат

- Нормализуем наблюдения:  $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- Тогда выборочное среднее нормализованных величин:  $\bar{Z} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$
- Из предыдущих результатов:

$$\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} - \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

## Распределение выборочной дисперсии

- Подставляя определение выборочной дисперсии:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- Важный результат:

$$\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)}$$

- Это означает, что выборочная дисперсия имеет распределение хи-квадрат с  $(n-1)$  степенями свободы.
- Математическое ожидание и дисперсия:

$$E\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right] = n-1, \quad \text{Var}\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1)$$

- Следствия для выборочной дисперсии:

$$E[s^2] = \sigma^2, \quad \text{Var}(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$