Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)"
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра системных исследований

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика
Направленность (профиль) подготовки: Методы и технологии искусственного интеллекта

Проект по методам оптимизации №7

Студенты:
Кузьмин Глеб Юрьевич
Шарафутдинов Якуб Насырьянович

г. Долгопрудный
2020

Рассматривается функция Нестерова-Скокова:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - 2x_i^2 + 1)^2. \tag{1}$$

Экстремум функция достигает в точке глобального минимума $x_* = (1, 1, ..., 1)$, $f(x_*) = 0$.

Требуется доказать, что функция Нестерова-Скокова удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича:

$$f(x) - f(x_*) \leq \frac{1}{2\mu}||\nabla f(x)||_2^2. \tag{2}$$

Используя переход от функции к системе уравнений, использованный в пособии (стр. 27), получим матрицу Якоби для системы уравнений g. В нашем случае функция $f(x)$ соответствует системе уравнений g следующего вида: $x_1 = 1$, $x_2 = 2x_1^2 - 1$, $x_3 = 2x_2^2 - 1$, ..., $x_n = 2x_{n-1}^2 - 1$. Для оценки числа обусловленности воспользуемся условием из пособия:

$$\lambda_{min}(\partial g(x)/\partial x \cdot [\partial g(x)/\partial x]^T) \geq \mu \tag{3}$$

и верхней оценкой для L: $L \geq tr(\partial g(x)/\partial x \cdot [\partial g(x)/\partial x]^T)$. Обозначим матрицу $\partial g(x)/\partial x \cdot [\partial g(x)/\partial x]^T$ как G, тогда:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 4x_1 & (4x_1)^2 + 1 & 0 & ... & 0 \\ 16(2x_1^3 - x_1) & 4x_1(16(2x_1^3 - x_1)) + 4x_2 & (16(2x_1^3 - x_1))^2 + (4x_2)^2 + 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_1} & ... & ... & ... & (\frac{\partial x_n}{\partial x_1})^2 + ... + 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Таким образом получим $\mu = 1$ и $L = ((4x_1)^2 + 1) \cdot ((16(2x_1^3 - x_1))^2 + (4x_2)^2 + 1) \cdots ((\frac{\partial x_n}{\partial x_1})^2 + ... + 1)$. В итоге мы получили что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича, но с очень большим числом обусловленности $\frac{L}{\mu}$.