RPIS

Lista 9 FULL

zad 1 $\sigma = 1$

Testujemy hipotezę $H_0: \mu = 3,9$

Obliczyć 3 wartości dystrybuanty $F_Z(z_{10}), F_Z(z_{20}), F_Z(z_{40})$

exel $\begin{cases} \bar{X}_{10} \approx 4,25 \\ \bar{X}_{20} \approx 4,25 \\ \bar{X}_{40} \approx 4,25 \end{cases}$

$$z_{10} = \frac{4,25 - 3,9}{1} \cdot \sqrt{10} = 1,11$$
$$z_{20} = \frac{4,25 - 3,9}{1} \cdot \sqrt{20} = 1,57$$
$$z_{40} = \frac{4,25 - 3,9}{1} \cdot \sqrt{40} = 2,21$$

z-scope lub statystyka testowa

mówi jak obserwacja różni się od wart. oczekiwanej

gdy gipoteza H_0 jest prawdziwa, z-scope ma rozkład normalny

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

- σ (sigma) = odchylenie standardowe
- $\bar{X}$ - średnia próbka
- μ - średnia populacja
- n - wielkość próbki

$F(z_{10}) = 0,8665$ } dla tego hipoteza jest prawdziwa

$F(z_{20}) = 0,94179$
$F(z_{40}) = 0,98645$ } to odrzucamy bo wartość dystrybuanty $\geq 0,9$

Intuicja:

- używamy z-statystykę, kiedy odchylenie stand. jest znane
- — || — t-statystykę, kiedy — || — nie znane

zad 2 Nie znamy wartości σ Test t-studenta

Testujemy hipotezę $H_0: \mu = 3,9$

$F_T(t_{10}), F_T(t_{20}), F_T(t_{40})$

exel $\begin{cases} S_{10} \approx 0,95 \\ S_{20} \approx 0,95 \\ S_{40} \approx 0,95 \end{cases}$

$$t_{10} \approx \frac{4,25 - 3,9}{0,95} \cdot \sqrt{9} \approx 1,1$$
$$t_{20} \approx \frac{4,25 - 3,9}{0,95} \cdot \sqrt{19} \approx 1,61$$
$$t_{40} \approx \frac{4,25 - 3,9}{0,95} \cdot \sqrt{39} \approx 2,30$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n-1}$$

- S - przybliżone odch. stand.

$F(t_{10}) = 0,85$ } tak

$F(t_{20}) = 0,94$
$F(t_{40}) = 0,99$ } nie

zad 3 $\sigma = 1$

Znaleźć (z dokł. do 2-ch miejsc po przecinku) największe μ_0 takie, że $F_Z(z_{20}) \geq 0,9$

Szukamy minimum dla $F_Z(z_{20}) \geq 0,9$ w tablice.

$$\min \{ z \mid F(z) \geq 0,9 \} = 1,29$$

wtedy:
$$\frac{(4,25 - \mu_0) \cdot \sqrt{20}}{1} = 1,29$$
$$4,25 \cdot \sqrt{20} - \sqrt{20} \cdot \mu_0 = 1,29$$
$$19 - 4,47 \cdot \mu_0 = 1,29$$
$$4,47 \mu_0 = 17,71$$
$$\mu_0 = 3,96$$

Zad 4 Nie znamy σ

Znaleźć największe μ_0 t. ż $F_T(t_{10}) \geq 0,9$

Analogicznie:

$$t_{10} = \frac{4,25 - \mu_0}{0,95} \cdot \sqrt{9} = \frac{12,75}{0,95} - \frac{3}{0,95}\mu_0 = 13,42 - 3,16\mu_0$$

$$13,42 - 3,16\mu_0 = 1,39$$ ← ze strony internetowej

$$13,42 - 1,39 = 3,16\mu_0$$

$$12,03 = 3,16\mu_0$$

$$3,81 = \mu_0$$

Zad 5 Niech $X \sim \chi^2(k)$

Wyznaczyć $E(X)$ i $V(X)$

$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} \cdot x^{k/2-1} \cdot e^{-x/2}}{\Gamma(k/2)}$$ gęstość rozkładu chi-kwadrat

nośnik $x \in [0; +\infty)$

1) Wartość oczekiwana $\boxed{EX = \int_0^\infty x \cdot f(x)}$

$$EX = \int_0^\infty x \cdot \frac{x^{k/2-1} \cdot e^{-x/2}}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} = \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} \cdot \int_0^\infty \overbrace{x^{k/2}}^{x^{1+k/2-1}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx = \left| \begin{matrix} t = x/2 \\ dt = \frac{1}{2}dx \\ dx = 2dt \\ x = 2t \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} \cdot \int_0^\infty (2t)^{k/2} \cdot e^{-t} \cdot 2dt = \frac{1}{\cancel{2^{k/2}} \cdot \Gamma(k/2)} \cdot 2 \cdot \cancel{2^{k/2}} \cdot \int_0^\infty t^{k/2} \cdot e^{-t} dt \overset{②}{=}$$

$$= \frac{2}{\Gamma(k/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) \overset{③}{=} \frac{2}{\cancel{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}} \cdot \frac{k}{2} \cdot \cancel{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} = k$$

Funkcja Γ-Eulera:

① $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} \cdot e^{-t} dt$

② $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty t^p e^{-t}$

③ $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$

2) Wariancja $\boxed{VX = E(x^2) - (EX)^2}$

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{x^{k/2-1} \cdot e^{-x/2}}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} dx = \left| \begin{matrix} t = x/2 \\ x = 2t \\ dt = 1/2 dx \\ dx = 2dt \end{matrix} \right| = \frac{2}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} \cdot \int_0^\infty (2t)^2 \cdot (2t)^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-t} dt =$$

$$= \frac{2}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} \int_0^\infty 2^{k/2+1} \cdot t^{\frac{k}{2}+1} \cdot e^{-t} dt = \frac{\cancel{2}^{k/2+2}}{\cancel{2^{k/2}} \cdot \Gamma(k/2)} \int_0^\infty t^{\frac{k}{2}+1} \cdot e^{-t} dt \overset{①}{=} \frac{4\Gamma\left(\overbrace{\frac{k}{2}+2}^{(k/2+1)+1}\right)}{\Gamma(k/2)} =$$

$$\overset{③}{=} \frac{4 \cdot (k/2+1) \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma(k/2)} = \frac{4 \cdot (k/2+1) \cdot k/2 \cdot \cancel{\Gamma(k/2)}}{\cancel{\Gamma(k/2)}} = \frac{(2k+4) \cdot k}{2} = \frac{2k^2 + 4k}{2} = k^2 + 2k$$

$$(EX)^2 = k^2$$

Wtedy: $VX = k^2 + 2k - k^2 = 2k$

$\boxed{\text{zad 6}}$ Niech $X \sim \chi^2(k)$, $\alpha > 2$

Znaleźć oszacowania dla $P(X \geq k\alpha)$ – Markov, Chebyshev

Markov

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

Chebyszev

- $P(|X - EX| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$
- $P(X \geq a) \leq \frac{EX}{a}$

1) Markov

$$P(X \geq k\alpha) \leq \frac{EX}{k\alpha} \overset{\text{z zad 5}}{=} \frac{k}{k\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

2) Chebyszev

$$P(X \geq k\alpha) = P(X - k \geq k(\alpha - 1))$$

$$P(|X - k| \geq k(\alpha - 1)) \leq \frac{VX}{k^2(\alpha-1)^2} \overset{\text{z zad 5}}{=} \frac{2k}{k^2(\alpha-1)^2} = \frac{2}{k(\alpha-1)^2}$$

bo $\alpha > 2$

$\boxed{\text{zad 7}}$ Niech $X_1 \sim N(2,4)$
$X_2 \sim N(3,9)$
$Cov(X_1, X_2) = 1$

Niech $Y_1 = X_1 + X_2$
$Y_2 = 2X_1 - X_2$

Obliczyć: EY_1, EY_2, VY_1, VY_2, $Cov(Y_1, Y_2)$

$\boxed{\text{Jeżeli } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{, to } EX = \mu,\ VX = \sigma^2}$ $\longrightarrow$ $EX_1 = 2$ $VX_1 = 4$
$EX_2 = 3$ $VX_2 = 9$

Własności EX

① $E(X+Y) = EX + EY$
② $E(a \cdot X) = a \cdot EX$
③ $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$

③ tylko gdy niezal.

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2Cov(X,Y)$$

1) Wartość oczekiwana

- $EY_1 = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 2 + 3 = 5$
- $EY_2 = E(2X_1 - X_2) = 2E(X_1) - E(X_2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

2) Wariancja

- $VY_1 = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) =$
$= 4 + 9 + 2 \cdot 1 = 15$
- $VY_2 = V(2X_1 - X_2) = 4V(X_1) + V(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 4 \cdot 4 + 9 - 2 = 23$

$$\boxed{Cov(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1) \cdot E(Y_2)}$$

3) Kowariancja

$E(Y_1 Y_2) = E((X_1 + X_2)(2X_1 - X_2)) = E(2X_1^2 - X_1X_2 + 2X_1X_2 - X_2^2) = E(2X_1^2 + X_1X_2 - X_2^2) =$

$= 2E(X_1^2) + E(X_1X_2) - E(X_2^2) =$ ⊛

$$\begin{cases} E(X_1^2) = VX_1 + (EX_1)^2 = 4 + 4 = 8 \\ E(X_1X_2) = Cov(X_1, X_2) + E(X_1)E(X_2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\ E(X_2^2) = VX_2 + (EX_2)^2 = 9 + 9 = 18 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ $\boxed{VX = E(X^2) - (EX)^2}$

⊛ $= 2 \cdot 8 + 7 - 18 = 5$

Wtedy $Cov(Y_1, Y_2) = 5 - 5 \cdot 1 = 0$

Zad 8 Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Znaleźć oszacowanie Chernoffa dla $P(X \geq \mu + 3\sigma)$

$$P(X \geq \mu+3\sigma) \leq e^{-(\mu+3\sigma)t} \cdot \underbrace{e^{\mu t} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}_{\text{MGF dla } N(\mu,\sigma^2)} =$$

$$= e^{-(\mu+3\sigma)t + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{\sigma t \left(\frac{\sigma t}{2} - 3\right)}$$

$$-(\mu+3\sigma)t + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} = -\mu t - 3\sigma t + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} =$$

$$= -3\sigma t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} = \sigma t\left(\frac{\sigma t}{2} - 3\right)$$

Chernoff

- Def. funk tworz. momenty: $M_X(t) = E(e^{tX})$

Wtedy:

$$\left[P(X \geq a) \leq e^{-at} M_X(t) \quad \forall t > 0\right]$$

to znaczy, że dla min tej

$$\left[P(X \geq a) \leq \min_{t>0} \frac{M_X(t)}{e^{ta}}\right]$$

Wyliczmy min tej f-ji:

$$f'(t) = e^{-(\mu+3\sigma)t + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \left(-(\mu+3\sigma) + \mu + \sigma^2 t\right) = 0$$

$$-\mu - 3\sigma + \mu + \sigma^2 t = 0$$

$$\sigma^2 t - 3\sigma = 0$$

$$t = \frac{3\sigma}{\sigma^2}$$

$$t = \frac{3}{\sigma} \text{ – to jest minimum}$$

Ograniczamy przez min: (zamiast t podstawiamy min)

$$P(X \geq \mu + 3\sigma) \leq e^{\cancel{\sigma} \cdot \frac{3}{\cancel{\sigma}} \cdot \left(\frac{\cancel{\sigma} \cdot \frac{3}{\cancel{\sigma}}}{2} - 3\right)} = e^{\frac{9}{2} - 9} = e^{-\frac{9}{2}}$$

Zad 10

Z nierówności Czebyszewa oszacuj

$$P(|X-\mu| \geq 3\sigma) = P(|X - EX| \geq 3\sigma) \leq \frac{VX}{(3\sigma)^2}$$

$$\frac{VX}{(3\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{3^2\sigma^2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$$

Czyli to oszacowanie jest gorsze.

Zad 9 Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Znaleźć oszacowanie Chernoffa dla $P(X \leq \mu - 3\sigma)$

Wsk: Dla $t > 0$, $P(X \leq a) = P(e^{-tX}) \geq e^{-ta}) = \dots$

$$1 - P(X \geq \mu - 3\sigma) + P(X = \mu - 3\sigma) = P(X \leq \mu - 3\sigma)$$

1) $P(X \geq \mu - 3\sigma) = e^{-(\mu - 3\sigma)t + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} = (*)$

= pohodna =

$$-(\mu - 3\sigma) + \mu + \sigma^2 t = 0$$

$$-\mu + 3\sigma + \mu + \sigma^2 t = 0$$

$$3\sigma + \sigma^2 t = 0$$

$$t = -\frac{3}{\sigma} \text{ – minimum}$$

Wtedy: $(*) = e^{t\left(-\cancel{\mu} + 3\sigma + \cancel{\mu} + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)} = e^{-\frac{3}{\sigma}\left(3\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \left(-\frac{3}{\sigma}\right)\right)} = e^{-\frac{3}{\sigma} \cdot 3\sigma + \frac{3}{\sigma} \cdot \frac{3\sigma}{2}} = e^{-\frac{9}{2}}$

2) $P(X = \mu - 3\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{((\mu - 3\sigma) - \mu)^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(-3)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{9}{2}}$

Ostatecznie: $P(X \leq \mu - 3\sigma) = 1 - e^{-9/2} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{9}{2}}$.