RPIS

Lista 5

zad 2 Zmienna losowa podlega standardowemu rozkładowi normalnemu $\left(f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}\right)$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad (X \sim N(0,1))$

$f_Y(y)$ zmiennej $Y = X^2$

gęstość

obliczamy dystrybuantę

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = P(X \leq \sqrt{t}) - P(X \leq -\sqrt{t}) =$$
$$= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$$

$$(F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}))' = (F_X(\sqrt{t}))' - (F_X(-\sqrt{t}))' = f_X(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + f_X(-\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} =$$

pochodna dystrybuanty = gęstość

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \left(f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{t}{2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \cancel{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} = f_Y(t)$$

zad 3 Wykazać, że $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ $\quad$ (podstawienie $t = \frac{x^2}{2}$)

Funkcja Γ-Eulera: $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, \; p > 0$

po prostu liczymy całkę z definicji

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x^2}{2} \\ dt = \frac{1}{2} \cdot 2x = x\,dx \end{array} \right|$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x\,dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{x} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \int_0^\infty \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2} \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\text{z listy pierwszej } \sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi} \quad \blacksquare$$

zad 4 X podlega rozkładowi Gama z $b, p > 0$ jedynie wtedy, gdy

$$f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-1} \cdot e^{-bx} \qquad x \in (0, \infty)$$

Czy Y z **zad 2** ma rozkład Gamma? Podaj b, p.

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

czyli $-bx = -\frac{x}{2}$

$2bx = x$

$\boxed{b = \frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-1}$$

$$" \quad \frac{1}{2^p \cdot \Gamma(p)} \cdot x^{p-1}$$

czyli $\boxed{p = \frac{1}{2}}$

Sprawdzamy: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}$$

Jest git

zad 7 $X \sim Gamma(b,p)$. Cel $M_X(t) = \left(1-\frac{t}{b}\right)^{-p}$

$X \sim Gamma(b,p)$

$\Updownarrow$

$f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-1} \cdot e^{-bx}$ $x \in (0,$

znowu po prostu obliczamy całkę

$$M_X(t) = \int_R e^{tx} \cdot f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{tx} \frac{b^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-1} e^{-bx}\,dx =$$

$$= \frac{b^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-bx+tx}\,dx = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x(b-t)}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} k = x(b-t) \\ dk = (b-t)\,dx \\ dx = \frac{dk}{b-t} \\ x = \frac{k}{b-t} \end{array} \right| = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{k}{b-t}\right)^{p-1} \cdot \frac{e^{-k}}{b-t}}_{\frac{k^{p-1}}{(b-t)^p} \cdot e^{-k}}\,dk = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \frac{1}{(b-t)^p} \cdot \underbrace{\int_0^\infty k^{p-1} \cdot e^{-k} \cdot dk}_{\Gamma(p)} =$$

$$= \frac{b^p}{\cancel{\Gamma(p)}} \frac{1}{(b-t)^p} \cdot \cancel{\Gamma(p)} = \frac{b^p}{(b-t)^p} = \left(\frac{b}{b-t}\right)^p = \left(\frac{b-t}{b}\right)^{-p} = \left(1-\frac{t}{b}\right)^{-p} \quad \blacksquare$$

zad 10 X, Y – niezależne zmienne losowe. Mają rozkład $Exp(\lambda)$ (rozkład wykładniczy)

$\Updownarrow$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$

Rozkład $S = X+Y$ - ?

Wtedy $$f_S(s) = \int_0^s f_X(t)\, f_Y(s-t)\,dt = \int_0^s \lambda e^{-\lambda t} \cdot \lambda e^{-\lambda(s-t)}\,dt =$$

$$= \lambda^2 \cdot \int_0^s e^{-\lambda t - \lambda(s-t)}\,dt = \lambda^2 \cdot \int_0^s e^{-\lambda s}\,dt = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda s} \cdot t\Big|_0^s = s \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda s}$$

rozkład $S = X+Y$

zad 9 X, Y mają rozkład $U[0,1]$

gęstość zmiennych $S = \min(X,Y)$, $T = \max(X,Y)$

1) $$F_S(t) = P(S \le t) = 1 - P(S > t) = 1 - P(\min(X,Y) > t) = 1 - P(X>t, Y>t) =$$

to jest z tego, że $P(S \le t) + P(S > t) = 1$

$\min(x,y) > t \Leftrightarrow y > t \wedge x > t$

$$= 1 - P(X>t)P(Y>t) = 1 - (1 - P(X \le t))(1 - P(Y \le t)) =$$

$$= 1 - (1 - P(Y \le t) - P(X \le t) + P(X \le t)P(Y \le t)) = \cancel{1-1} + P(Y \le t) + P(X \le t) - P(X \le t)P(Y \le t) =$$

$$= F_Y(t) + F_X(t) - F_X(t)F_Y(t) = t + t - t^2 = 2t - t^2$$

$$F_Y(t) = F_X(t) = \int_{-\infty}^t 1\,dt = t$$

$$f_S(s) = (2s - s^2)' = 2 - 2s$$

$\max(x,y) \le t \Leftrightarrow x \le t \wedge y \le t$

2) $$F_T(t) = P(T \le t) = P(\max(X,Y) \le t) = P(X \le t, Y \le t) = P(X \le t) \cdot P(Y \le t) =$$

$$= F_X(t) \cdot F_Y(t) = t^2$$

$$f_T(t) = (t^2)' = 2t$$

Zad 1 Zmienne losowe X, Y są niezależne

Cel: $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

$$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (EX + EY)^2 =$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (EX)^2 - 2(EX)(EY) - (EY)^2 =$$

$$= \Big(\underbrace{E(X^2) - (EX)^2}_{V(X)}\Big) + \Big(\underbrace{E(Y^2) - (EY)^2}_{V(Y)}\Big) + 2\Big(\underbrace{E(X \cdot Y) - (EX)(EY)}_{\overset{*}{\text{(kowariacja)}}}\Big) =$$

$$= V(X) + V(Y) + 2(*) = V(X) + V(Y)$$

$$(*) = E(XY) - (EX)(EY) = \iint xy\, f(xy)\, dx\, dy - \int x \cdot f(x)\, dx \cdot \int y f(y)\, dy =$$

$$= \iint xy\, f(xy)\, dx\, dy - \iint xy\, f(xy)\, dx\, dy = 0$$

możemy zapisać jako jedną f-ję bo zmienne są niezależne

Zad 6 Zmienna (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x,y) = xy$ na $[0,1] \times [0,2]$

Rozkład $Z = \frac{X}{Y}$ - ? $\quad E(Z)$ - ? (wart. oczek.)

1) Przejście $(X,Y) \to (Z,T)$

$$\begin{cases} Z = \frac{X}{Y} \\ T = Y \end{cases} \quad \begin{cases} X = ZY \\ Y = T \end{cases} \quad \begin{cases} X = ZT \\ Y = T \end{cases}$$

2) Jakobian odwrócenia

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T & Z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = T$$

3) Wstawianie odwrócenia do gęstości $f(x,y) \cdot |J|$

$$g(z,t) = f(x(z,t), y(z,t)) \cdot |J| = \underbrace{zt}_{x} \cdot \underbrace{t}_{y} \cdot \underbrace{t}_{|J|} = zt^3$$

4) Wyznaczenie obszaru zmienności t dla ustalonego z:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le T \le 2 \\ 0 \le zT \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le T \le \frac{1}{z}$$

Czyli $T \in [0, \min(2, \frac{1}{z})]$

$z \in [0, +\infty)$: $\quad z \in [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow T \in [0, 2]$

$\quad z \in [\frac{1}{2}, +\infty) \Rightarrow T \in [0, \frac{1}{z}]$

5) Obliczamy:

$$g_2(z) = \int_0^2 zt^3\, dt = z \frac{t^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{z \cdot 2^4}{2^2} = 4z$$

$$\int_0^{\frac{1}{z}} zt^3\, dt = z \frac{t^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{z}} = \frac{z \cdot \frac{1}{z^4}}{4} = \frac{1}{z^3 \cdot 4}$$

$$EZ = \int_0^{\frac{1}{2}} z \cdot 4z\, dz + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} z \cdot \frac{1}{z^3 4}\, dz =$$

$$= 4 \cdot \frac{z^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{z}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}(0 + 2) =$$

$$= \frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{8}_2} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6}$$