RPIS

Zadanie z egzaminacyjne

Yelyzaveta Ilman 341387 mod 4 = 3

Rozkład $\chi^2(k)$: $f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$, $k \in N$, $x \in [0, \infty)$

1. Definicja dystrybuanty rozkładu chi-kwadrat

Dystrybuanta dla rozkładu chi-kwadrat o k stopniach swobody w punkcie x określa prawdopodobieństwo, że zmienna losowa o tym rozkładzie przyjmie wartość $\leq x$

2. Wzór na dystrybuantę

Znamy wzór na gęstość rozkładu chi-kwadrat:

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} \cdot x^{k/2-1} e^{-x/2}$$

Wtedy wzór na dystrybuantę to całka z gęstości f(x):

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dt$$

Zauważmy, że część stała może zostać wyłączona przed całkę.

Mamy: $F(x) = \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} \cdot \int_0^x t^{k/2-1} \cdot e^{-t/2} dt = \frac{1}{\Gamma(k/2) \cdot e^{k/2 \cdot \ln(2)}} \cdot \int_0^x t^{k/2-1} \cdot e^{-t/2} dt$

3. Metoda Simpsona dla szacowania całki.

Metoda Simpsona polega na przybliżaniu funkcji podcałkowej przez parabolę.

Kroki:

1) Dzielimy przedział całkowania na n równoodległych części
2) Obliczamy szerokość każdego podprzedziału $h = \frac{x}{n}$
3) Wzór dla naszego przypadku ma postać:

$$\left[S = \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) \right) \right]$$

gdzie:
- h - szerokość
- x_0, x_n - krańce całkowania
- x_{2i-1} - punkty środkowe parzystych podprzedziałów
- x_{2i} - punkty środkowe nieparzystych podprzedziałów
- $f(x_i)$ - f-ja gęstości

Dla metody Simpsona błąd względny można oszacować jako:

$$E \leq \frac{h^4(x_n - x_0)}{180} \cdot \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^4(x)|$$

gdzie $f^4(x)$ to czwarta pochodna f-ji $f(x)$

Warto zauważyć, że im mniejsza szerokość h (im większa liczba przedziałów), tym mniejszy będzie błąd. W swoim rozwiązaniu wybrałam liczbę podprzedziałów $n = 100$.

Rozwiązanie zostało zaimplementowane przy użyciu Matlab.
Rozwiązanie składa się z trzech funkcji:

1. chi_squared_pdf (x, k)
   Funkcja, która oblicza wartość funkcji gęstości rozkładu chi-kwadrat dla wartości x i liczby stopni swobody k.

2. simpson (a, b, f, n)
   Implementuje metodę simpsona do przybliżenia całki dla funkcji f na przedziale całkowania [a, b] za pomocą n podprzedziałów

3. chi_squared_cdf (x, k)
   Oblicza wartość dystrybuanty dla wartości x i k stopni swobody.
   Wykorzystuje funkcję „Simpson" oraz dzieli wynik przez część stałą $\Gamma(k/2) \cdot e^{k/2 \cdot \ln(2)}$

Dodatkowo, program wypisuje wynik (wartość dystrybuanty) dla $x = 0{,}5$ i stopni swobody $k = 3$.