Zadanie egzaminacyjne №3

Yelyzaveta Ilman
341387

May 13, 2024

1 Założenia

1. **Gestość**
   $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, gdzie $x > 0$.
2. **Lambda**
   $\lambda = 16$

2 Rozwiazanie

1. **Dowód MGF rozkładu wykładniczego** $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, gdzie $t < \lambda$

   Załóżmy, że $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Wtedy funkcja gestości prawdopodobieństwa jest dana przez:
   $$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
   Wtedy:
   $$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{x(t-\lambda)} dx$$
   $$= \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{x(t-\lambda)} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{x(t-\lambda)} - \frac{\lambda}{t-\lambda}$$
   Zauważmy, że t nie może być równe λ, w przeciwnym razie $M_X(t)$ jest niezdefiniowane. Ponadto, jeśli $t > \lambda$, to $\lim_{x \to \infty} e^{x(t-\lambda)} = \infty$. Musimy wiec ograniczyć dziedzine $M_X(t)$ do $t < \lambda$. Nastepnie możemy uprościć:
   $$M_X(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda} \left(\lim_{x \to \infty} e^{x(t-\lambda)} - 1 \right) = \frac{\lambda}{t-\lambda} (0 - 1) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

2. **Oszacowania dla** $P(X \geq \lambda a)$

   (a) **Markov**
   $$P(X \geq \lambda a) \leq \frac{1}{\lambda^2 a}$$

Przekształcenia:

$$P(X \geq \lambda a) \leq \frac{E(X)}{\lambda a} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda a} = \frac{1}{\lambda^2 a}$$

(b) **Chebyszev**

$$P(X \geq \lambda a) \leq \frac{1}{(a\lambda^2 - 1)^2}$$

Przekształcenia:

$$P(X - \frac{1}{\lambda} \geq \lambda a - \frac{1}{\lambda}) = P\left(|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \lambda a - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\leq \frac{V(X)}{(\lambda a - 1/\lambda)^2} = \frac{1}{(a\lambda^2 - 1)^2}$$

(c) **Chernoff**

$$P(X \geq \lambda a) \leq \frac{a\lambda^2}{e^{a\lambda^2 - 1}}$$

Przekształcenia:

$$P(X \geq a\lambda) \leq \frac{M_X(t)}{\exp(ta\lambda)} = \frac{\lambda}{\lambda - t} \cdot \frac{1}{\exp(ta\lambda)}$$

$$= \frac{\lambda}{\exp(ta\lambda) \cdot (\lambda - t)}$$

$$f'(t) = \left(\frac{(a\lambda^2 t - a\lambda^3 + \lambda) \cdot \exp(-a\lambda t)}{t^2 - 2\lambda t + \lambda^2}\right)$$

$$a\lambda^2 t - a\lambda^3 + \lambda = 0$$

$$a\lambda^2 t = a\lambda^3 - \lambda$$

$$t = \frac{a\lambda^3 - \lambda}{a\lambda^2}$$

$$t = \lambda - \frac{1}{a\lambda}$$

Podstawiamy:

$$\frac{\lambda}{\exp(ta\lambda) \cdot (\lambda - t)} = \frac{\lambda}{\exp(a\lambda(\lambda - \frac{1}{a\lambda})) \cdot (\lambda - \lambda + \frac{1}{a\lambda})}$$

$$= \frac{\lambda \cdot a\lambda}{\exp(a\lambda^2 - 1)} = \frac{a\lambda^2}{\exp(a\lambda^2 - 1)}$$

3. **Tabela z wartościami dokładnymi i oszacowaniami**

a	Wartość dokładna	Markov	Chebyszev	Chernoff
3	2.9×10^{-334}	$\frac{1}{768}$	$\frac{1}{588289}$	6.05×10^{-331}
4	1.9×10^{-445}	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{1046529}$	5.3×10^{-442}
6	8.4×10^{-668}	$\frac{1}{1536}$	$\frac{1}{2356225}$	3.5×10^{-664}
10	1.6×10^{-1112}	$\frac{1}{2560}$	$\frac{1}{6548481}$	1.1×10^{-1108}