Lista 2 06.03.24

$F_x(t) = P(X \le t)$

$F_x(t) = P(X < t)$

ad 4

a) Dystrybuanta i wartość oczekiwana X ?

x_i	2	3	4	5
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

1) Dystrybuanta

x_i	$(-\infty, 2]$	$(2, 3]$	$(3; 4]$	$(4, 5]$	$(5, +\infty)$
$F(x)$	0	0,2	0,6	0,7	1

2) Wartość oczekiwana

$E(x) = \sum x_i p_i$

$E(x) = 0{,}4 + 1{,}2 + 0{,}4 + 1{,}5 = 3{,}5$

b) Dystrybuanta jest taka:

Postać f-ji gęstości $f(x)$?

x	$(-\infty, -2)$	$[-2, 1)$	$[1, 4)$	$[4; \infty)$
$F(x)$	0	0,2	0,7	1

$p_1 = 0{,}2$ $p_2 = 0{,}5$ $p_3 = 0{,}3$

Wtedy $f(x_i) = p_i$

zad 1 Teoria

Ω – przestrzeń zdarzeń (zbiór wyników)

wszystko co należy do Ω i nie należy do A

$\mathcal{F}$ – σ-ciało (sigma)

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$ dopełnienie zdarzenia jest zdarzeniem
3. $A_i \in \mathcal{F}, (i = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ suma jest zdarzeniem

elementarne operacje na zdarzeniach to zdarzenia

Σ – σ-ciało

zbiór pusty to dopełnienie samego siebie $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$

(a) $\emptyset \in \Sigma$

$$\Sigma - \sigma\text{-ciało} \Rightarrow \Omega \in \Sigma \overset{2}{\Rightarrow} \Omega^c \in \Sigma \Rightarrow \emptyset \in \Sigma$$

(b) $A_k \in \Sigma$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$

Cel: $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$

$$\left(\bigcup^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap^{\infty} A_i^c$$

(prawo de Morgana dla zbiorów)

traktujemy to po prostu jako zbiór

$$A_k \in \Sigma \overset{2}{\Rightarrow} (\Omega \setminus A_k) \in \Sigma \overset{3}{\Rightarrow} \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_k) \in \Sigma$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \Omega - \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Omega - A_k) \in \Sigma \overset{\text{Morgan}}{\Rightarrow} \bigcap_{k=1}^{\infty} (\Omega - (\Omega - A_k)) \in \Sigma$$

$$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$$

zad 2 $\Omega = \{d_1, d_2, d_3\}$

(a) Opisać σ-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń

Czyli podać pewne zbiory, które należą do tego σ-ciała

$\Sigma_1 : \{\emptyset, \Omega\}$ σ-ciało pełne

$\Sigma_2 : \{\emptyset, \{d_1, d_2, d_3\}\}$

$\Sigma_3 = \{\Omega, \emptyset, \{d_1\}, \{d_2, d_3\}\}$

— " — $\{d_2\}, \{d_1, d_3\}\}$

— " — $\{d_3\}\ \{d_1, d_2\}\}$

$\Sigma_4 = \{\emptyset, \Omega, \{d_1\}, \{d_2\}, \{d_3\}, \{d_1, d_2\}, \{d_1, d_3\}, \{d_2, d_3\}\}$

(b) Przykład f-cji X, Y t.ż. X - zmienna losowa, Y - nie zmienna losowa

zmienna losowa - funkcja która przypisuje liczbę rzeczywistą do każdego wyniku eksperymentu

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ to zmienna losowa $\iff \forall B \in \mathcal{B}\ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

„przeciwobraz zbioru borelowskiego jest zdarzeniem"

$\Sigma = \{\Omega, \emptyset, \{d_1\}, \{d_2, d_3\}\}$

- $X(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \in \{d_1\} \\ 1 & \text{dla } z \in \{d_2, d_3\} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} X^{-1}(0) = \{d_1\} \\ X^{-1}(1) = \{d_2, d_3\} \end{matrix}$

- $Y(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \in \{d_1, d_3\} \\ 1 & \text{dla } z \in \{d_2\} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} Y^{-1}(0) = \{d_1, d_3\} \\ Y^{-1}(1) = \{d_2\} \end{matrix}$

$f : A \to B$ PRZECIWOBRAZ

$f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$

„zbiór wszystkich x z A dla których $f(x) \in y$"

Czyli $X^{-1} \in \Sigma$, $Y^{-1} \notin \Sigma$

zad 3 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$S = \{2, 4\}$

Najmniejsze σ-ciało zbiorów zawierające S

$\{\Omega, \emptyset, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$

to dlatego że z def. jeżeli S należy do σ-ciała, to dopełnienie też musi należeć.

zad 5 (a) X - dyskretna zm. losowa

Cel: $E(aX + b) = aE(X) + b$
wartość oczekiwana

$E(x) = \sum x_i p_i$
(w wypadku dyskretnym)

$$E(aX+b) = \sum (ax_i + b) \cdot p_i = \sum p_i a x_i + b \cdot p_i = \sum a x_i p_i + \sum b \cdot p_i =$$

$$= a \sum x_i p_i + b \cdot \underbrace{\sum p_i}_{\text{z def sumuje się do } 1} = a \cdot E(x) + b \cdot 1 = a \cdot E(x) + b \quad \blacksquare$$

(b) Z - ciągła zm. losowa

Cel: $E(aZ + b) = a \cdot E(Z) + b$

$E(x) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)\, dx$
(w wypadku ciągłym)

$$E(aZ + b) = \int_{\mathbb{R}} (az + b) \cdot f(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}} a \cdot z \cdot f(z) + b \cdot f(z)\, dz =$$

f-cja gęstości

$$= \int_{\mathbb{R}} a\, z \cdot f(z)\, dz + \int_{\mathbb{R}} b \cdot f(z)\, dz = a \int_{\mathbb{R}} z \cdot f(z)\, dz + b \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(z)\, dz}_{\text{z def } = 1} =$$

$$= a \cdot E(z) + b \cdot 1 = a \cdot E(z) + b \quad \blacksquare$$

d 7 (a) $X \sim B(n,p)$ Wyznaczyć n, p:

x_i:	0	1	2	...	n
p:	0,028	0,121	0,233	...	...

← wart. zm. losowej

…mienna losowa X podlega rozkładowi Bernoulliego z parametrami n, p

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \quad p>0,\ q>0$$

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$p_0 = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$$

$$p_1 = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = n p \cdot (1-p)^{n-1}$$

$$p_2 = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\, p^2 \cdot (1-p)^{n-2} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$$

Rozkład ppb dla Bernoulliego – prawdopodobieństwa dla różnych ilości sukcesów (x_i) w n probach prawdopodob – p!

Teraz probujemy wyrazić n przez p_0, p_1, p_2.

$$(\Delta) \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{n\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}}{(1-p)^n} = \frac{n\cdot p}{(1-p)}$$

$$(\square) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\cancel{n}\cdot(n-1)}{2}\cdot \cancel{p^2}^{\,p}\cdot \cancel{(1-p)^{n-2}}}{\cancel{n}\cancel{p}\cdot(1-p)^{\cancel{n-1}\,1}} = \frac{\frac{(n-1)}{2}\cdot p}{(1-p)}$$

$$\frac{\square}{\Delta} = \frac{\frac{(n-1)}{2}\cdot \cancel{p}}{\cancel{(1-p)}} \cdot \frac{\cancel{(1-p)}}{n\cdot \cancel{p}} = \frac{\frac{(n-1)}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(n-1)}{n} = \frac{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}{n} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_0}{p_1} = \frac{p_2 p_0}{p_1^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$\frac{0{,}233 \cdot 0{,}028}{0{,}121^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$\frac{0{,}006524}{0{,}014641} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$0{,}4456 = 0{,}5 - \frac{1}{2n}$$

$$0{,}0544 = \frac{1}{2n}$$

$$2n \cdot 0{,}0544 = 1$$

$$2n = 18{,}3823$$

$$n = 9{,}19$$

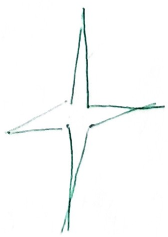
$$n = 9$$

$$p_0 = (1-p)^{10}$$

$$\sqrt[10]{p_0} = (1-p)$$

$$p = 1 - \sqrt[10]{p_0} = 1 - \sqrt[10]{0{,}028} =$$

$$\approx 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$



(b) $X \sim Poisson(\lambda)$ $\quad \lambda - ?$

x_i	0	1	....
p_i	0,1353	0,2707	....

$$p_0 = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$$

$$p_1 = e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} = \lambda e^{-\lambda}$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}} = \lambda$$

$$\lambda = \frac{0,2707}{0,1353} = 2,0007 \approx 2$$

Rozkład Poissona

Zliczenie zdarzeń w ustalonej jednostce czasu

λ - parametr - rzeczywiste dodatnie

$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

$p_k = P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$\boxed{\text{Zad 6}}$

Cel: $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$ $\quad p,q \in \mathbb{R}^+$

$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt \quad p>0$

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^\infty y^{p-1} e^{-y} dy =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1} y^{p-1} e^{-(x+y)} dy$$

$u = x+y \Rightarrow x = u-y$

$s = \frac{x}{x+y} = \frac{x}{u} \Rightarrow x = su$ $\quad [0,\infty)$

$\begin{cases} u - y = su \\ y = u - su = u(1-s) \end{cases}$ $\quad [0, \infty)$

po s dla x

po u dla x

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & s \\ -u & 1-s \end{vmatrix} = u\cdot(1-s) + us = u - us + us = u$$

po s dla y

po u dla y

$$\begin{cases} su \geq 0 \\ u - su \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} su \geq 0 \\ u \geq su \end{cases} \Rightarrow u \geq 0 \Rightarrow s \geq 0$$

$u \geq su$
$s \leq 1$

$(u \geq 0$
$u \geq 0$ z treści)

wtedy $s \in [0, 1]$
$u \in [0, \infty]$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1} y^{p-1} e^{-(x+y)} dy = \int_0^\infty \int_0^1 (su)^{p-1} \cdot (u(1-s))^{p-1} e^{-u} \cdot u \cdot ds\, du =$$

$$= \int_0^\infty u^{p-1} u^{q-1} e^{-u} du \cdot \int_0^1 s^{p-1} (1-s)^{q-1} ds = \int_0^\infty u^{p+q} \cdot e^{-u} du \cdot \int_0^1 s^{p-1} (1-s)^{q-1} ds =$$

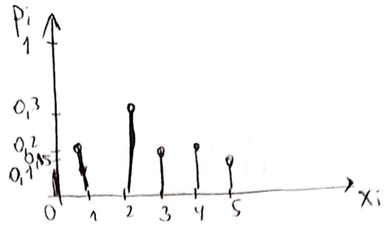
$$= \Gamma(p+q) B(p,q)$$

X_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,15	t	0,1

← rozkład zmiennej losowej X

Suma po p_i jest 1

(bo prawdopodobieństwo sprowadza się do 1 „badamy 100% przypadków")



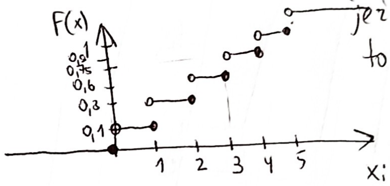
Dystrybuanta

x_i	$(-\infty,0]$	$[0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$	$(5,\infty)$
F(x)	0	0,1	0,3	0,6	0,75	0,9	1

schodki

na początku 0

(kolejne - przez dodanie p_i)



jeżeli inna to ile

Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe

$E(x) = \sum x_i p_i$

$D(x) = \sqrt{D^2(x)}$ wariancja

$E(x) = 0 + 0,2 + 0,6 + 0,35 + 0,6 + 0,5 = 2,35$

$D^2(x) = Ex^2 - (Ex)^2 = 7,65 - (2,35)^2 = 2,1275$

$Ex^2 = 0 + 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,15 + 16 \cdot 0,15 + 25 \cdot 0,1 = 7,65$

$D(x) \approx 1,46$

Obliczyć prawdopodobieństwa

1) $P(1,5 < x \leq 3)$ $(1,5; 3]$ $= 0,3 + 0,15 = 0,45$

(czyli zsumować x-sy w tym przedziale)

2) $P(x \leq 4) = 0,9$

3) $P(6 < x) = P(\emptyset) = 0$

zmienna losowa
- → dyskretna (skończony \ przeliczalny zbiór wartości) — przyjmuje
- ↘ ciągła (wszystkie) — a ——— b

$X = \begin{cases} 1 & \text{orzeł} \\ -1 & \text{reszka} \end{cases}$

Y = (dokładna) masa losowo wybranego zwierzęcia — 0 ——— 6000

Z - liczba rzutów do I orła — dyskretna

{ 1, 2, 3, 4, ... }

T - $\boxed{\text{dokładny}}$ czas biegu — 0 — 8 — 11

(ale jeżeli zaokrąglimy to wtedy to będzie zmienna dyskretna bo będziemy mogli policzyć wszystkie wyniki)

Scanned with ACE Scanner