RPIS

Lista 10

$\boxed{\text{zad 2}}$ Dane z pliku. Wartość sigma $\sigma^2 = 19$

Testujemy hipotezę $H_0: \mu = 1{,}5$

Wartość dystrybuanty dla obliczonej statystyki testowej?

średnia $\bar{X} = 2{,}8$ (z exelu)

$n = 20$

Znamy wartość odchylenia standartowego σ, więc statystyka testowa to z-scope

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$$

$$z = \frac{2{,}8 - 1{,}5}{\underset{4{,}3589}{\sqrt{19}}} \cdot \overset{4{,}4721}{\sqrt{20}} = 1{,}33$$

$F(z) = 0{,}90824$ (z tablic dla rozkładu normalnego)

$\boxed{\text{zad 3}}$ To samo, co w $\boxed{\text{zad 2}}$, ale <u>NIE</u> znamy wart. sigmy σ

Nie znamy odch. stand., więc stat. testowa to t-scope (t-studenta)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n-1}$$

Przybliżone odch. stand. $S \approx 4{,}41$ (exel)

średnia $\bar{X} = 2{,}8$

$H_0: \mu = 1{,}5$

$$t = \frac{2{,}8 - 1{,}5}{4{,}41} \cdot \sqrt{19} \approx 1{,}28$$

Czyli ta <u>znajomość sigmy</u> <u>polepsza</u> dokładność obliczeń.

$F(t) = 0{,}8928$ (kalkul. dla t-studenta)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X_k - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2$$

$\boxed{\text{zad 5}}$ Dane z pliku

Testujemy hipotezę $H_0: \sigma^2 = 14$ $\Rightarrow \sigma \approx 3{,}74$, nie znamy μ.

Wart. dystryb. dla obl. statystyki testowej?

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$ lista 6, zad 8

Ze wskazówki mamy, że:

$$z = \frac{nS^2}{\sigma^2} \approx \frac{20 \cdot 19{,}45}{14} = 27{,}79$$

$F(27{,}79) \approx 0{,}9125$ (rozkład chi-kwadrat $\chi^2(19)$)

to jest wartość oczekiwana, a średnia – „wart. oczekiwana"

$\boxed{\text{zad 6}}$ Zad 5, ale $\mu = 2{,}8$ → przybliżamy przez μ → jest dokładniejsze

$$\text{Ze wskazówki: } z = \frac{nS^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right)^2 \approx \frac{20 \cdot 19{,}45}{14} + \left(\overset{=0}{\frac{2{,}8 - 2{,}8}{\ldots}} \right) =$$

$\approx 27{,}79$

$F(27{,}79) \approx 0{,}86$

Dla $\chi^2(20)$

Zad 7

$X_1 \sim N(2,4)$
$X_2 \sim N(3,9)$
$Cov(X_1, X_2) = 1$

$Y_1 = X_1 + X_2$
$Y_2 = 2X_1 - X_2$

Obliczyć: EY_1, EY_2, VY_1, VY_2, $Cov(Y_1, Y_2)$

$$\boxed{\text{Jeżeli } X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ to } EX = \mu,\ VX = \sigma^2}$$

Wiemy, że

$$\begin{bmatrix} VX_1 & cov(X_1,X_2) \\ cov(X_1,X_2) & VX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \Sigma$$

Z listy 1 zad 8 wiemy, że: A - odwracalna, $Y = A \cdot X$

$$S = (x-\bar{\mu})^T \Sigma^{-1} (x-\bar{\mu}) = (y - A\bar{\mu})^T (A \Sigma A^T)^{-1} (y - A\bar{\mu})$$

Jeżeli $X \sim N(\mu, \Sigma)$, to $\boxed{Y \sim N(A\mu, A\Sigma A^T)}$

A to z ▭ oznacza, że $EY = A\mu$
$\Sigma_y = A \Sigma A^T$

1) Obliczmy A

$$Y = AX \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ 2X_1 - X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 X_1 + a_2 X_2 = X_1 + X_2 \\ a_3 X_1 + a_4 X_2 = 2X_1 - X_2 \end{cases}$$

Z tego widzimy, że $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

2) Szukamy wariancje

$$A \Sigma A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix}$$

wtedy $\begin{bmatrix} VY_1 & cov(Y_1, Y_2) \\ cov(Y_1,Y_2) & VY_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix}$

3) Szukamy wart. oczek.

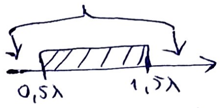
$\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ — z X_1, X_2

$$A\mu = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EY_1 \\ EY_2 \end{bmatrix}$$

Zad 8 $X \sim Poisson(\lambda)$.

Oszacować ppb $P(0{,}5\lambda < X < 1{,}5\lambda)$ – Chernoff

to musimy odrzucić



$P(0{,}5\lambda < x < 1{,}5\lambda)$ możemy zapisać jako:

$$1 - P(x < 0{,}5\lambda) - P(x > 1{,}5\lambda) = 1 - \left(P(x<0{,}5\lambda) + P(x > 1{,}5\lambda)\right)$$

Chernoff

• $P(x \geq a) \leq \frac{M_x(t)}{e^{ta}}$

$\downarrow$

$P(x \geq a) \leq \min_{t>0} \frac{M_x(t)}{e^{ta}}$

Obliczamy po kolei:

1) $P(x < 0{,}5\lambda) \leq e^{-t\frac{\lambda}{2}} \cdot \underbrace{e^{\lambda(e^t-1)}}_{\text{funkc. tworz. momenty dla Poissona}}, \quad t<0$

$$f(t) = e^{-t\frac{\lambda}{2}} e^{\lambda(e^t-1)} = e^{\lambda(e^t - 1 - \frac{t}{2})}$$

$$f'(t) = e^{\lambda(e^t - \frac{t}{2} - 1)} \cdot \lambda\left(e^t - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$e^t = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{t = \ln\frac{1}{2}} < 0 \ ✓$$

Podstawiamy: $P(x < \frac{1}{2}\lambda) \leq e^{\lambda(e^t - 1 - \frac{t}{2})} \leq e^{\lambda\left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{\ln\frac{1}{2}}{2}\right)} = \boxed{e^{-\frac{\lambda}{2}(\ln\frac{1}{2}+1)}}$

2) $P(x \geq 1{,}5\lambda) \leq e^{-1{,}5\lambda \cdot t} \cdot e^{\lambda(e^t-1)} = e^{\lambda(e^t-1) - 1{,}5\lambda t}$

Skoro f-ja monotoniczna, wystarczy zbadać pochodną wykładnika

$$\lambda e^t - 1{,}5\lambda = 0$$
$$e^t = 1{,}5$$
$$t = \ln(1{,}5)$$

Podstawiamy: $P(x < 1{,}5\lambda) \leq e^{\lambda(e^t-1) - 1{,}5\lambda t} \leq e^{\lambda\overset{0{,}5}{(1{,}5-1)} - 1{,}5\lambda \cdot \ln(1{,}5)}$

$$= e^{0{,}5\lambda - 1{,}5\lambda \cdot \ln(1{,}5)} = e^{\lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln(1{,}5)\right)}.$$

Zad 9 Tw graniczne do (8)

$$P\left(\frac{\lambda}{2} < x < \frac{3\lambda}{2}\right) = 1 - \left(P\left(x \leq \frac{\lambda}{2}\right) + P\left(x \geq \frac{3\lambda}{2}\right)\right) = 1 - \left(P\left(x \leq \frac{\lambda}{2}\right) + P\left(x > \frac{3\lambda - 1}{2}\right)\right) =$$

$$= 1 - \left(P\left(x \leq \frac{\lambda}{2}\right) + 1 - P\left(x \leq \frac{3\lambda-1}{2}\right)\right) = P\left(x \leq \frac{3\lambda-1}{2}\right) - P\left(x \leq \frac{\lambda}{2}\right) \quad (*)$$

Obliczamy:

1) $P\left(x \leq \frac{3\lambda-1}{2}\right) = P\left(\underbrace{\frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}_{Z} \leq \frac{\frac{3\lambda-1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) = P\left(Z \leq \frac{\lambda - 1}{2\sqrt{\lambda}}\right)$ dla $\lambda = 10$ $P\left(Z \leq \frac{10-1}{2\sqrt{10}}\right) = 0{,}9226$

2) $P\left(x \leq \frac{\lambda}{2}\right) = P\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{\frac{\lambda}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) = P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)$ $\lambda = 10$ $P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 0{,}0569$

Wtedy $(*) = 0{,}8657$