RPIS

Lista 11 (1-4, 8-10)

15.05.24

zad 1

Testujemy hipotezę o wariancji $s^2 = 25$, nie znamy μ. → $(n-1)$ stopni swobody

W - kolumnie zawarte są wartości σ_0^2

- wierszu — " — liczebność próbki n
- wewnątrz — " — wartość_p

$\sim \chi(n-1)$

wart_p

σ^2 \ n	10	40	80
20,25	0,3890	0,2464	0,1311
19,36	0,3331	0,1690	0,0692
17,64	0,2327	0,0666	0,0136

$Z = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ (wiemy, że to ma rozkład chi-kwadrat z $(n-1)$ st. swobody)

dla odpowiednich n i σ^2 z tabeli

↓

więc liczymy ze wzoru, w exel

=ROZKŁ.CHI.PS

(prawostronne prawdopodob. chi-kwad

1. argument Z
2. argument stopni swobody

↓

więc razy 2 końcowy wynik

σ^2 \ n	10	40	80
20,25	12,35	49,38	98,77
19,36	12,91	51,65	103,31
17,64	14,17	56,69	113,38

Statystyka Z

Zad 8 (PWO++) generuje liczbę losową z rozkładu $U[0,1]$. jednostajny
Podać pseudokod losowania liczby z rozkładu:

(a) $Exp(\lambda)$ wykładniczy

Dystrybuanta rozkładu $Exp(\lambda)$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Zauważmy, że $F(x) = P(X \leq x)$

Czyli:
- jeżeli $x \to \infty$, to $e^{-\lambda x} \to 0$, wtedy $(1 - e^{-\lambda x}) \to 1$
- jeżeli $x \to 0$, to $e^{-\lambda x} \to 1$, wtedy $(1 - e^{-\lambda x}) \to 0$

Idea: kiedy generujemy liczbę u z rozkładu $U[0,1]$ chcemy uzyskać odpowiadającą jej wartość x z rozkł. $Exp(\lambda)$

Więc

$$\begin{cases} u = 1 - e^{-\lambda x} \\ e^{-\lambda x} = 1 - u \\ -\lambda x = \ln(1-u) \\ x = -\dfrac{\ln(1-u)}{\lambda} \end{cases}$$

po przekształceniach otrzymujemy odwrotność dystrybuanty, którą równa się X.

① Czyli losujemy U z $U[0,1]$

② podstawiamy do wzoru

③ mamy x z $Exp(\lambda)$ ☺

z wykładu: (do (b))

x_1, x_2 z $U[0,1]$ niezależne
↓
$z_1, z_2 \sim N(0,1)$ niezależne

$$z_1 = \sqrt{-2\ln x_1} \cdot \cos 2\pi x_2$$
$$z_2 = \sqrt{-2\ln x_1} \cdot \sin 2\pi x_2$$

(b) $N(0,1)$ normalny z parametrami $(0,1)$

① Generujemy u_1, u_2 z $U[0,1]$

② obliczamy ze wzoru

③ zwracamy jedną z nich ☺

(c) $N(\mu, \sigma^2)$ z parametrami (mi, sigma²)

① Robimy podpunkt (b)

② Przeskalowujemy i przesuwamy zmienną, aby uzyskać $N(\mu, \sigma^2)$

$$X = \underbrace{\overset{\text{mi}}{\mu} + z \cdot \overset{\text{sigma}}{\sigma}}$$

z ze wzoru z (b) ☺

zad 2) Wyznaczyć przedziały ufności dla σ^2, $\alpha = 0,05$

$S^2 = 25$, $n = \{10, 40, 80\}$

Wzór: GIZMO

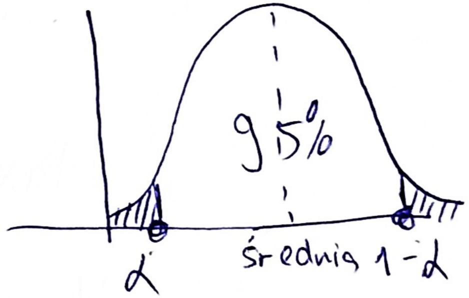
$$\frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

$P(GIZMO) = 1 - \alpha$

1^0 $n = 10$

$$\frac{10 \cdot 25}{\chi^2_{\frac{0,05}{2}, 9}} < \sigma^2 < \frac{10 \cdot 25}{\chi^2_{1-\frac{0,05}{2}, 9}}$$

Poziom Zaufania



Dlatego 1 - α

$$\frac{250}{\chi^2_{0,025;9}} < \sigma^2 < \frac{250}{\chi^2_{0,975;9}}$$

z tablic

$$\frac{250}{19,022} < \sigma^2 < \frac{250}{2,7} \implies \sigma^2 \in (13,14; 92,59)$$

Dalej to samo dla każdego. n

$\boxed{\text{zad 10}}$ max wyrażenia $|N(0,1) - t(30)|$ na zbiorach:

rozkład norm. — rozkład t-Studenta

1) od 0 do 3 z krokiem 0,1 MAX = 0,005239942

2) od 3 do 6 z krokiem 0,1 MAX = 0,001345084

EXEL

$\boxed{\text{zad 9}}$ max wyrażenia $|\chi^2(n) - \chi^2(n-1)|$ na (stopnie swobody)

zbiorze dyskretnym $\{n, n+1, \ldots, 2n\}$ — liczby (czyli od 20 do 40; od 50 do 100;)

$n = 20$
$n = 50$

$Max_{20} = 0{,}063351532$

$Max_{50} = 0{,}03996 1771$

EXEL

$\boxed{\text{zad 5}}$

a) $P((y_1 < X_1 < x_n) \wedge \ldots \wedge (y_n < X_n < x_n)) = \prod_{i=1}^{n} P(y_i < X_i < x_i) = \prod (F(x_i) - F(y_i))$

$\underbrace{P(X_i < x_i)}_{F(x_i)}$ $\underbrace{P(X_i < y_i)}_{F(y_i)}$

nawias - ustawienie (czyli permutacja) $X_{(1)} < X_{(2)} < X_{(3)} \ldots < X_{(n)}$

b) $X_{(i)}$ $P(A) = \Sigma$

$\underbrace{P((y_1 < X_{(1)} < x_1) \wedge \ldots \wedge (y_n < X_{(n)} < x_n))}_{A} = \sum_{\sigma}$

$X_i \to X_{(j)}$

$\underbrace{j = \sigma(i)}_{\text{ta permutacja}}$

$A_\sigma = \{\bigwedge_i y_i < X_{\sigma(i)} < x_i \wedge \bigwedge_{0 \le k \le n} X_{\sigma(k)} < X_{\sigma(k+1)}\}$

$P(A) = \sum_{\sigma} P(\Sigma = \sigma) \cdot P(A | \Sigma = \sigma)$

$= n! \cdot P(\ldots)$

prawdop. dla konkretnej σ

$P(\ldots) = \prod_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(y_i))$

c) $f_{X_{(1)} \ldots X_{(n)}}(x_1, \ldots x_n) =$

$= \underbrace{\frac{d}{dx_1} \ldots \frac{d}{dx_n} P((X_{(1)} < x_1) \wedge \ldots \wedge (X_{(n)} < x_n))}_{\text{dystrybuanta}} =$

$= \frac{d}{dx_1} \ldots \frac{d}{dx_n} [P((\underset{y_1}{-\infty} < X_{(1)} < X_1) \wedge \ldots \wedge (\underset{y_1}{-\infty} < X_{(n)} < X_n))]$

$= \frac{d}{dx_1} \ldots \frac{d}{dx_n} [n! \cdot \prod_{j=1}^{n} (F(x_j) - \underset{0}{F(-\infty)}) =$

$= n! \cdot \prod_{j=1}^{n} f(x_i)$