Rpis

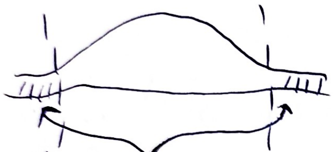
Lista 13

$\boxed{\text{zad 1}}$ Średnia z n obserwacji $\bar{X} = 12$, $\sigma = 7$.
Testujemy hipotezę o wartości średniej.

μ_0 \ n	10	20	40
9.0	0,175	0,55285	0,00671778
10.0	0,366256	0,2013	0,071
11.0	0,651	0,523	0,366

p

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1)$$



szukamy sumę tych ppd $\rightarrow 2 \cdot (1 - F_{N(0,1)}(z))$

wolfram

$\boxed{\text{zad 6}}$ Rozpatrujemy $X \sim B(20, p)$.

$H_0: p_0 = 0,5$

$H_1: p_1 = 0,75$

	Ho true	Ho false
reject Ho	I error $= \alpha$	correct
fail to reject	correct	II error

Obszar akceptacji: $\{0, 1, \dots, 12\}$.

Cel: Błędy I i II rodzaju

1) Błąd I rodzaju (α): $p_0 = 0,5$

$\alpha = P(x<0) + P(x>12) = F_{x_0}(0) + P(1 - F_{x_0}(12)) \approx 0 + 0,131588$

2) Błąd II rodzaju (β): $p = 0,75$

$\beta = P(x<0) + P(x>12) = F_{x_1}(0) + F_{x_1}(1 - F_{x_1}(12)) = 0 + 0,898188$

Zad 3 [3] X ma rozkład normalny z parametrami: $X \sim N(\mu, \Sigma)$

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(Wyznaczyć $\Sigma^{1/2}$ czyli taką, że $\Sigma^{1/2} \cdot \Sigma^{1/2} = \Sigma$)

Cel: Rozkład zmiennej $(X-\mu)^T \Sigma^{-1} (X-\mu)$

1) Obliczamy macierz $\Sigma^{1/2}$

$$\begin{array}{cc|cc} & & a & b \\ & & c & d \\ \hline a & b & 5 & 3 \\ c & d & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} ac + ab = 5 \\ bd + ab = 3 \\ ac + cd = 3 \\ bd + cd = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a(b+c) = 5 \\ b(a+d) = 3 \\ c(a+d) = 3 \\ d(b+c) = 2 \end{cases}$$

- $b+c = \frac{5}{a}$, $b+c = \frac{2}{d}$ $\rightarrow$ $\frac{5}{a} = \frac{2}{d} \Rightarrow 5d = 2a \Rightarrow \boxed{d = \frac{2}{5}a}$, $a = \frac{5}{2}d$

- $a+d = \frac{3}{b}$, $a+d = \frac{3}{c}$ $\rightarrow \boxed{b = c}$

- $a(b+c) = a(c+c) = 5$

  $2c = \frac{5}{a}$

  $c = \frac{5}{2a} = \frac{5}{2 \cdot \frac{5}{2} d} = \frac{5}{5d} = \frac{1}{d}$

- $d \cdot \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d}\right) = 2$

  $d = 1 = c = b$

- $1(a+1) = 3$

  $a = 2$

$$\Sigma^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Obliczamy macierz odwrotną:

$$\left[\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{I - II} \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow{II - I} \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}\right]$$

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\right)^T$$

$$\Sigma^{-1} = \underbrace{\Sigma^{-\frac{1}{2}}}_{\left(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\right)^T} \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

3) Wtedy:

$$(X-\mu)^T \cdot \Sigma^{-1} (X-\mu) = \underbrace{\left((X-\mu)^T \cdot \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\right)^T\right)}_{M^T} \cdot \underbrace{\left(\Sigma^{-\frac{1}{2}} (X-\mu)\right)}_{M} = M^T \cdot M$$

$$M = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(X-\mu) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(x_1-1) + (-1)(x_2-2) \\ -1(x_1-1) + 2(x_2-2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 - 1 - x_2 + 2 \\ -x_1 + 1 + 2x_2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3 \end{bmatrix}$$

Teraz zauważmy, że:

M_1, M_2 – liniowe kombinacje zm. X_1, X_2, które mają rozkł. normalny

$$\begin{cases} M_1 = x_1 - x_2 + 1 \\ M_2 = -x_1 + 2x_2 - 3 \end{cases}$$

$X \sim N(\mu, \Sigma)$

$\downarrow$

$X_1 \sim N(1,5)$, $X_2 \sim N(2,2)$

średnia wariancja

Obliczamy rozkład M_1

1) Wart. oczekiwana:

$$E(M_1) = E(x_1 - x_2 + 1) = E[x_1] - E(x_2) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

2) Wariancja: $Var(M_1) = Var(x_1) + Var(x_2) - 2\,Cov(x_1, x_2) = 5 + 2 - 2\cdot 3 = 1$

Zatem $M_1 \sim N(0,1)$

rozkład M_2:

1) Wart. oczek:

$$E(M_2) = E(-x_1 + 2x_2 - 3) = -1 + 4 - 3 = 0$$

2) Var:

$$Var(M_2) = 5 + 4\cdot 2 - 4\cdot 3 = 1$$

Zatem $M_2 \sim N(0,1)$

Skoro M_1, M_2 są niezal. zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0,1)$

$\rightarrow$ suma ich kwadratów $M_1^2 + M_2^2$ ma rozkład $\chi^2(2)$
(własność z wykładu)

$$M^T M = [M_1, M_2]\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = M_1^2 + M_2^2 \sim \chi^2(2)$$

(V)

zad 8 Zał., że $X \sim N(1,2)$ oraz $Y \sim N(4,7)$, $Cov(X,Y)=1$

Znaleźć wartości $P(X+Y>0)$, $P(X-Y<2)$, $P(3X+4Y>20)$

Wiemy, że dla $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2,\ a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\, Cov(X,Y))$$

Stąd

$$X+Y \sim N(5, 11)$$

$$X-Y \sim N(-3, 7)$$

$$3X+4Y \sim N(19,\ 9\cdot 2 + 16\cdot 7 + 2\cdot 3\cdot 4) = N(19, 154)$$

Wolfram: 1) $P(X+Y>0) \approx 0{,}675282$

2) $P(X-Y<2) \approx 0{,}762475$

2) $P(3X+4Y>20) \approx 0{,}45605$

zad 9

X_1, X_2, X_3 – niezależne, mają ten sam rozkład.

Cel: $P(X_1<X_2<X_3) = P(X_3<X_1<X_2)$

$$P(X_1<X_2 \wedge X_2<X_3) = P(X_1<X_2)\cdot P(X_2<X_3) =$$

$$= P(X_1<X_2)\,P(X_3<X_1) = P(X_3<X_1 \wedge X_1<X_2) = P(X_3<X_1<X_2)$$