RPIS

Lista 7

$\boxed{\text{zad 1}}$ Wykazać, że dla rozkładu Cauchy'ego wartość oczekiwana nie istnieje

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{dt}{2} = x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2t}\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot \ln(|t|)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{2\pi} - \lim_{y\to-\infty}\frac{\ln(y^2+1)}{2\pi} = \infty - \infty = \text{undefined}$$

Czyli wartość oczekiwana nie istnieje

$\boxed{\text{zad 5}}$ (X_1, X_2) ma gęstość postaci $f(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}$ $\quad 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$

$X_1 = Y_1 \cos Y_2 \qquad 0 < Y_1 < 1$

$X_2 = Y_1 \sin Y_2 \qquad 0 \leq Y_2 \leq 2\pi$

$g(y_1,y_2) - ?$

Czy Y_1, Y_2 są niezależne?

$$g(y_1,y_2) = f(x_1(y_1,y_2), x_2(y_1,y_2)) \cdot |J|$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \underset{y_2\text{-stała (po } x_1)}{\frac{\partial x_1}{\partial y_1}} & \underset{y_1\text{-stała (po } x_1)}{\frac{\partial x_1}{\partial y_2}} \\ \underset{y_2\text{-stała (po } x_2)}{\frac{\partial x_2}{\partial y_1}} & \underset{y_1\text{-stała (po } x_2)}{\frac{\partial x_2}{\partial y_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos y_2 & -y_1 \sin y_2 \\ \sin y_2 & y_1 \cos y_2 \end{vmatrix} = y_1 \cos y_2 \cdot \cos y_2 + y_1 \sin y_2 \cdot \sin y_2 =$$

$$= y_1 \cos^2 y_2 + y_1 \sin^2 y_2 = y_1(\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2) =$$

$$= y_1 \cdot 1 = y_1$$

Wtedy $g(y_1,y_2) = f(y_1\cos y_2, y_1 \sin y_2)\cdot \underset{|J|}{y_1} = \frac{1}{\pi}\cdot y_1 = \frac{y_1}{\pi}$

$$g_{y_1}(y_1) = \int_0^{2\pi} g(y_1,y_2)\,dy_2 = \int_0^{2\pi} \frac{y_1}{\pi}\,dy_2 = \frac{y_1 y_2}{\pi}\Big|_0^{2\pi} = y_1\cdot\frac{2\pi}{\pi} = 2y_1$$

gęstości brzegowe

$$g_{y_2}(y_2) = \int_0^1 g(y_1,y_2)\,dy_1 = \int_0^1 \frac{y_1}{\pi}\,dy_1 = \frac{y_1^2}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi}$$

Sprawdzamy niezależność:

$$g_{y_1}(y_1)\,g_{y_2}(y_2) = 2y_1 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{y_1}{\pi} = g(y_1,y_2)$$

Czyli Y_1, Y_2 są niezależne

$\boxed{\text{zad 7}}$ (X,Y) - punkt losowy

X, Y - niezależne, podlegają rozkładowi $N(0,1)$

od (X,Y) przechodzimy do (R,Θ) $\qquad R,\Theta$ - współrzędne biegunowe

Cel: $g(R,\Theta) = \frac{1}{2\pi}\cdot r \cdot e^{-\frac{r^2}{2}}$ $\qquad 0 < \Theta < 2\pi, \quad 0 < r < \infty$

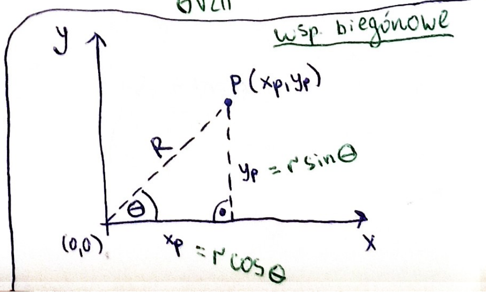
$$N(\mu, \sigma^2) \sim f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Skoro X, Y - niezależne, to:

$$f(x,y) = f_x(x)\cdot f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

Wtedy $g(R,\Theta) = f(r\cos\Theta, r\sin\Theta)\cdot |J| =$ (z zad 5)

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{(r^2\cos^2\Theta + r^2\sin^2\Theta)}{2}}}_{f(r\cos\Theta,\, r\sin\Theta)} \cdot \underbrace{r}_{|J|} = \frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{r^2\cdot 1}{2}}\cdot r = \frac{1}{2\pi}\cdot r\cdot e^{-\frac{r^2}{2}}$$



zad 4) $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ – n-wymiarowa zmienna losowa

$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ określamy jako $\begin{cases} Y_1 = \bar{X} \\ Y_k = X_k - \bar{X} \end{cases}$ $k = 2, \ldots, n$

Znaleźć Jacobian:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

pochodna y_1 gdzie wszystkie x oprócz x_1 traktujemy jako stałe

Popatrzmy na przykładowe przypadki, a potem rozpiszę to ogólnie

Popatrzmy na $\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$

przykładowo

dla x_1

$y_1' = \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{N} \right)' = \frac{1}{N}$ } tak będzie dla każdego x_k

$y_2' = \left(x_2 - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{N} \right)' = -\frac{1}{N}$ } dla każdego x, oprócz x_k

$y_2' = \left(x_2 - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{N} \right) = 1 - \frac{1}{N}$ } przypadek dla x_k

Czyli mamy

ogólnie

$$\left.\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} = \frac{1}{N} & \text{dla } k = 1, \ldots, n \\ \frac{\partial y_k}{\partial x_m} = -\frac{1}{N} & \text{dla } m \neq k, \; m = 2, \ldots, n \\ \frac{\partial y_k}{\partial x_k} = 1 - \frac{1}{N}, & k \neq 1 \end{cases}\right\} \text{wtedy:}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & (1-\frac{1}{N}) & -\frac{1}{N} & \cdots & -\frac{1}{N} \\ \vdots & -\frac{1}{N} & (1-\frac{1}{N}) & & \\ \vdots & \vdots & -\frac{1}{N} & (1-\frac{1}{N}) & \\ -\frac{1}{N} & \vdots & \vdots & & (1-\frac{1}{N}) \end{vmatrix} =$$

do każdego wiersza dodajemy pierwszy =

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

macierz trójkątna dolna → wyznacznik jest iloczynem wyrazów na przekątnej $= \frac{1}{N}$

Jak $\frac{1}{J} = \frac{1}{N}$, to $J = N$

Scanned with ACE Scanner

[zad 8-9] Boki prostokąta są niezależnymi zmiennymi losowymi X_1, X_2 o rozkładzie $U[1,2]$

$Y_1 = 2X_1 + 2X_2$ (obwód)

$Y_2 = X_1 \cdot X_2$ (pole)

zad 8 Znaleźć wart. oczekiwane i wariancje zmiennych Y_1, Y_2

Skoro $U \in [1,2]$, to $f(x) = \frac{1}{2-1} = 1$ $\qquad F_X(t) = \int f(x)\,dx = x$

wart. oczekiw.

$$E(X_1) = E(X_2) = \int_1^2 x \cdot f(x)\,dx = \int_1^2 x \cdot 1\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$E(Y_1) = E(2(X_1+X_2)) \overset{\text{zm. niezal.}}{=} 2\cdot[E(X_1)+E(X_2)] = 2\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right) = 6$$ git

$$E(Y_2) = E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1)\cdot E(X_2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$ git

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(x))^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$V(X_1) = V(X_2) = \int_1^2 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot 1\,dx = \left[\begin{array}{l} t = x - \frac{3}{2} \\ dt = dx \end{array}\right] = \int_1^2 t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{(x-\frac{3}{2})^3}{3}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{(2-\frac{3}{2})^3}{3} - \frac{(1-\frac{3}{2})^3}{3} = \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{3} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$V(Y_1) = V(2(X_1+X_2)) = 4\cdot V(X_1+X_2) \overset{\text{[521]}}{=} 4\cdot(V(X_1)+V(X_2)) = 4\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$ git

$$V(Y_2) = E(X_1^2X_2^2) - (E(X_1X_2))^2 = E(X_1^2X_2^2) - \left(\frac{9}{4}\right)^2 =$$

$$= \int_1^2 \underbrace{\int_1^2 x_1^2 x_2^2 \cdot dx_1}_{\frac{x_1^3}{3}\cdot x_2^2\Big|_1^2} \cdot dx_2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \int_1^2 \frac{8}{3}x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^2\,dx_2 = \int_1^2 \frac{7}{3}x_2^2\,dx_2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{7}{3}\cdot\frac{x_2^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{81}{16} = \frac{7}{3}\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) - \frac{81}{16} = \frac{49}{9} - \frac{81}{16} = \frac{784-729}{144} = \frac{55}{144}$$ git

zad 9 Obliczyć wartość współczynnika korelacji ρ zmiennych Y_1, Y_2

$$\boxed{\rho_{Y_1Y_2} = \frac{cov(Y_1,Y_2)}{\sigma_{Y_1}\,\sigma_{Y_2}}} \qquad \boxed{\sigma_X = \sqrt{V(X)}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY)) \\ \text{jeżeli } X,Y - \text{niezal.},\ cov(X,Y) = \emptyset \end{array}}$$

Czyli $\sigma_{Y_1} = \sqrt{V(Y_1)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\sigma_{Y_2} = \sqrt{V(Y_2)} = \sqrt{\frac{55}{144}}$

$$cov(Y_1,Y_2) = E((Y_1-E(Y_1))(Y_2-E(Y_2))) = E\left((Y_1-6)(Y_2-\tfrac{9}{4})\right) =$$

$$= E\left(Y_1Y_2 - 6Y_2 - \frac{9}{4}Y_1 + \frac{54}{4}\right) = E(Y_1Y_2) - 6E(Y_2) - \frac{9}{4}E(Y_1) + \frac{54}{4} =$$

$$= E(Y_1Y_2) - 6\cdot\frac{9}{4} - \frac{9}{4}\cdot 6 + \frac{54}{4} = \underbrace{E(Y_1Y_2)}_{14} - \frac{54}{4} = \frac{1}{2}$$

$$E(Y_1Y_2) = E(2(X_1+X_2)\cdot X_1X_2) =$$
$$= E(2X_1^2X_2 + 2X_2^2X_1) =$$
$$= 2E(X_1^2X_2) + 2E(X_1X_2^2) =$$
$$= 2E(X_1^2)E(X_2) + 2E(X_1)E(X_2^2) =$$
$$= 2\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{2} = 14$$

$$\int_1^2 x^2\cdot 1\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

i teraz $\rho_{Y_1 Y_2} = \frac{cov(Y_1, Y_2)}{\sigma_{Y_1} \sigma_{Y_2}}$

$$\rho_{Y_1 Y_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{55}{144}}} = \frac{1\sqrt{3 \cdot 144}}{2\sqrt{2 \cdot 55}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3 \cdot 72}}{\sqrt{55}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3 \cdot 72} \cdot \sqrt{55}}{55} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6} \cdot \sqrt{55}}{55} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{55}}{55} = \frac{3\sqrt{330}}{55}$$ git

zad 2 $X_1, X_2, \dots, X_n$ - niezależne i mają ten sam rozkład

$X_1 + \dots + X_n \neq 0$

Wartość oczekiwana $Y_k = \frac{\sum_{j=1}^{k} X_j}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ – ?

$$E(Y_k) = E\left(\sum_{j=1}^{k} X_j / \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{j=1}^{k} E\left(X_j / \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = (*)$$

(z niezależności) ~~możemy wyłączyć przed nawias~~

możemy wyłączyć przed nawias

$\forall_{i,j} \quad E(X_i / \sum X_i) = E(X_j / \sum X_i)$

wszystkie X mają ten sam rozkład, czyli funkcja gęstości jest taka sama $\rightarrow E(X_i) = E(X_j)$

obliczmy wart. oczek. dla Y_n

$$E Y_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{\text{to samo}}{\text{to samo}} = 1 = E(1)$$

$(*) = k \cdot E(X_1 / \sum X_i)$ bo wszystkie są takie same

$1 = E Y_n = n \cdot E(X_1 / \sum X_i)$

$E(X_1 / \sum X_i) = \frac{1}{n}$

$E Y_k = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$

Jeżeli suma po wszystkich jest równa 1, to jeżeli chcemy znaleźć wartość jednego, to musimy podzielić przez n. A jak mamy je k sztuk, to mnożymy przez