RPIS

Lista 6

zad 1

psi	Ψ	ψ	
delta	Δ	δ	
kappa	K	$\varkappa$	
sigma	Σ	σ	ς mała na końcu wyrazu

Gęstości rozkładów

$$N(\mu,\sigma^2) \sim f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$Gamma(b,p) \sim f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{(-bx)}$$

[zad 2-3] Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład, $f(x) > 0$ dla $x \in [0,1]$.

Podać granice całkowania (układy nierówności) jeżeli

zad 2 $Y_k = X_k$; $k = 2, \ldots, n$

Z treści zadania wiemy, że $Y_k = X_k$ dla $k = 2, \ldots, n$, a granice dla X_k to $[0,1]$.

Więc dla Y_k też będzie $[0,1]$

zad 3 $Y_k = X_k + \ldots + X_n$; $k = 2, \ldots, n$

$$0 \le X_i \le 1$$
$$0 \le \sum_{i=k}^{n} X_i \le \sum_{i=k}^{n} 1$$
$$0 \le Y_k \le n-k$$

Stąd mamy, że granice dla Y_k to $[0, n-k]$

zad 4 Niech $f(x)$ - gęstość zmiennej losowej określonej na $\mathbb{R}$

$F(x)$ - dystrybuanta

Cel: $\int_{-\infty}^{t} f(x)F(x)\,dx = \frac{1}{2}[F(t)]^2$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{t} f(x)F(x)\,dx}_{(*)} = \int_{-\infty}^{t} \underbrace{F'(x)}_{dv} \cdot \underbrace{F(x)}_{u}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = F(x) & du = F'(x) \\ dv = F'(x) & v = F(x) \end{matrix}\right\} =$$

$u \cdot v - \int v \cdot du$

$$= F^2(x)\Big|_{-\infty}^{t} - \underbrace{\int F(x) \cdot F'(x)\,dx}_{(*)} = [F(t)]^2 - (*)$$

$F^2(t) - F^2(-\infty)$

$P(X < -\infty) = 0$

$F(-\infty) = 0$, bo nie możemy mieć nic mniejszego od $-\infty$

Czyli mamy:

$$(*) = [F(t)]^2 - (*)$$
$$2(*) = [F(t)]^2$$
$$(*) = \frac{1}{2}[F(t)]^2$$

$\boxed{\text{Zad 5}}$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ / $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0,1)$

W jaki sposób można utworzyć poniższe zmienne:

(a) $U \sim \chi^2(k)$

$U = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2$ (rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody)

$U \sim Gamma(1/2, n/2) \equiv \chi^2(n)$

(b) $T \sim t(n)$ - rozkład studenta z n st. swobody

$T = \frac{Y_k}{\sqrt{\sum Y_k^2}} \cdot \sqrt{n}$

zmienna losowa mająca standardowy rozkład normalny $N(0,1)$

ma rozkład chi-kwadrat

są niezależne

$\boxed{\text{Zad 6}}$ Zm. los. X ma MGF o postaci $M_X(t)$

Zm. los. Y jest pewną funkcją zmiennej X.

Co można powiedzieć o Y, jeżeli:

(a) $M_Y(t) = M_X(2t) \cdot M_X(4t) =$

$\stackrel{①}{=} M_{2X}(t) \cdot M_{4X}(t)$

Czyli $Y = 2X + 4X = 6X$

(bo zm. są niezależne)

(b) $M_Y(t) = e^{2t} M_X(t) = M_{X+2}(t)$

$\Downarrow$

$Y = X + 2$

$M_{X+2}(t) = E(e^{(X+2)t}) = E(e^{Xt} e^{2t}) = e^{2t} M_X(t)$

(c) $M_Y(t) = 4M_X(t)$

Moment od zera jest zawsze równy 1

Gdy $t=0$, to:

$M_Y(0) = 4M_X(0)$

$1 = 4 \cdot 1$

$1 = 4$ ↯ To nie jest MGF

Tw. 1:

ⓒ $V = aX$

$M_V(t) = E(e^{(at) \cdot X}) = M_X(at)$

① $V = aX + b$

$M_V(t) = E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{tb} \cdot e^{(at) \cdot X}) =$

$= e^{tb} \cdot M_X(at)$

② $Z = X + Y$

$M_Z(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}) \cdot E(e^{tY}) =$

$= M_X(t) \cdot M_Y(t)$