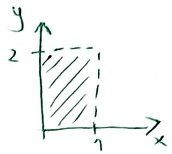
RPIS

Lista 8   1–7

**zad 1** Zmienna losowa $(X,Y)$ ma gęstość określoną wzorem $f(x,y)=xy$ na $[0,1]\times[0,2]$. Wyznaczyć dystrybuantę $F(s,t)$ tej zmiennej



Sprawdzamy niezależność (gęstości brzegowe)

$$f_X(x)=\int_0^2 xy\,dy = x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 2x$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 xy\,dx = y\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}y$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot y = xy = f(x,y) \rightarrow \text{zmienne są niezależne}$$

Więc:
$$F(S,T)=P(X\le s, Y\le t) \overset{\boxed{\text{z niez}}}{=} P(X\le s)P(Y\le t) =$$
$$=\int_0^s 2x\,dx\int_0^t \frac{1}{2}y\,dy = \cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^s\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^t = s^2\cdot\frac{t^2}{4} = \frac{s^2\cdot t^2}{4}$$
dla $s\in[0,1]$, $t\in[0,2]$

- Dla $s<0$ lub $t<0$ $F(s,t)=0$

- Dla $s>1$ oraz $t\in[0,2]$:
$$F(s,t)=\int_0^t\int_0^{s=1} xy\,dx\,dy = \int_0^t\left[\frac{x^2}{2}\cdot y\Big|_0^1\right]dy = \int_0^t \frac{y}{2}\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^t = \frac{t^2}{4}$$

- Dla $s\in[0,1]$, $t>2$
$$F(s,t)=\int_0^{t=2}\int_0^{s} xy\,dx\,dy = \int_0^2\left[y\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^s\right]dy = \int_0^2\frac{s^2}{2}\cdot y\,dy = \frac{s^2}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{s^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{4}{2} = s^2$$

- Dla $s>1 \wedge t>2$
$$F(s,t)=\int_0^{t=2}\int_0^{s=1} xy\,dx\,dy = \int_0^2\left[y\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right]dy = \int_0^2\frac{1}{2}y\,dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{4}{4} = 1$$

Scanned with ACE Scanner

Zad 3 $X \sim Poisson(\lambda)$, $a \geqslant 3$

① Podać oszacowanie dla $P(X \geqslant a\lambda) \to$ Markov

$$P(X \geqslant a\lambda) \leqslant \frac{E(X)}{a\lambda} = \frac{\lambda}{a\lambda} = \frac{1}{a}$$

z def to $\lambda$

② Wykazać, że zachodzi nierówność

$$P(X \geqslant a\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda(a-1)^2}$$

$\lambda$ jest dodatnie z def. Poissona

$$P(X \geqslant a\lambda) = P(X - \lambda \geqslant a\lambda - \lambda) =$$

$$= P(|X-\lambda| \geqslant a\lambda - \lambda) = P(|X - EX| \geqslant (a-1)\lambda) =$$

Chebyszev

$$\leqslant \frac{EX}{((a-1)\lambda)^2} = \frac{\lambda}{(a-1)^2 \cdot \lambda^2} = \frac{1}{\lambda \cdot (a-1)^2}$$

Zad 4 (Chernoff) Wykazać, że

$$P(X \geqslant a\lambda) \leqslant \left(\frac{1}{a}\right)^{a\lambda} e^{\lambda(a-1)}$$

Z nierówności Chernoffa mamy:

$$P(X \geqslant a\lambda) \leqslant \min_{t>0} \frac{M_X(t)}{e^{ta\lambda}} = ⚝$$

Wyliczmy minimum tej funkcji:

$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$ [notatka 5 – MGF dla rozkładu Poissona]

$$f(t) = \frac{e^{\lambda(e^t-1)}}{e^{ta\lambda}} = e^{-ta\lambda} \cdot e^{\lambda(e^t-1)} = e^{-ta\lambda + \lambda e^t - \lambda} =$$

$$= e^{\lambda(-at + e^t - 1)}$$

$$f'(t) = e^{\lambda \cdot (-at + e^t - 1)} \cdot (\lambda \cdot e^t - \lambda a) =$$

$$= e^{\lambda(-at + e^t - 1)} \cdot \lambda(e^t - a)$$

$$f'(t) = 0 \iff \underbrace{e^{\lambda \cdot (-at + e^t - 1)}}_{>0} \cdot \lambda(e^t - a) = 0$$

$$\lambda(e^t - a) = 0$$

$$e^t - a = 0$$

$$\boxed{e^t = a}$$

podstawiamy min, który wyliczyliśmy

$$⚝ = e^{-ta\lambda} \cdot e^{\lambda(e^t-1)} = ((e^t)^{-1})^{a\lambda} \cdot e^{\lambda(e^t-1)} = ((a)^{-1})^{a\lambda} \cdot e^{\lambda(a-1)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{a\lambda} \cdot e^{\lambda(a-1)} \blacksquare$$

Nierówność Markova

Intuicja: „jeżeli $X \geqslant 0$ i $E[X]$ małe to $X$ prawdopodobnie nie będzie duże"

Jeżeli $X \geqslant 0$ i $a > 0$, to

random value; random number

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E[X]}{a}$$

Nierówność Chebyszeva

Intuicja: „Jeżeli variacja jest mała, to $X$ nie będzie bardzo daleko od średniej"

$$P(|X - EX| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Nierówność Chernoffa (rozszerzenie Markova) ← dla e

Wiemy, że z def. funk. tworząca momenty to:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Wtedy:

$$\left[P(X \geqslant a) = P(e^{tX} \geqslant e^{ta}) \overset{\text{Markov}}{\leqslant} \frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}} = \frac{M_X(t)}{e^{ta}}\right]$$

Jeżeli $P(X \geqslant k) \leqslant \frac{M_X(t)}{e^{tk}}$ dla KAŻDEGO $t > 0$, to musi być $\leqslant$ dla minimalnego $t$

$$\left[P(X \geqslant a) \leqslant \min_{t>0} \frac{M_X(t)}{e^{ta}}\right]$$

Scanned with ACE Scanner

$X_1, \dots, X_{10}$ – niezależne zm. losowe ; podlegają rozkł. Poissona

$\boxed{\text{zad 2}}$ z $\lambda = 2$

? Oszacowanie dla $P(\sum X_i \geq 40)$ + porównać z wynikiem dokładnym.

Wiemy, że :

$Z = \sum X_i \sim \text{Poisson}(\sum \lambda_i)$, czyli $Z \sim \text{Poisson}(20)$

bo mamy 10 niezal. zm. los. i parom. $\lambda = 2$

Rozkład Poissona

$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$\lambda$ - parametr

Jeżeli $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$, $X_i$ są niezal, to:

$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \text{Pois}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i)$

① Markov :

$E(X) = \lambda$ dla Poisson

$$P(\sum x_i \geq \underset{a}{40}) \leq \frac{E(\sum x_i)}{40 = a} = \frac{\sum E(x_i)}{40} = \frac{10 \cdot \lambda}{40} = \frac{\lambda}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

② Chebyszev :

$\lambda = E(X) = Var(X)$

Zauważmy, że

$$\sum x_i \geq 40 \iff \sum x_i - \underset{\substack{\| \\ 10\lambda \\ \| \\ E(\sum x_i)}}{20} \geq 20 \iff \sum x_i - E(\sum x_i) \geq 20$$

Wtedy:

$$P(\sum x_i - E(\sum x_i) \geq 20) \leq \frac{V(\sum x_i)}{20^2} \overset{,,10\lambda = 20}{=} \frac{20}{20^2} = \frac{1}{20}$$


③ Wynik dokładny

$$f = \sum_{k \leq 40} e^{-20} \cdot \frac{20^k}{k!}$$

$$P(\sum x_i \geq 40) = 1 - P(\sum x_i < 40) = 1 - \sum_{k \leq 40} \frac{20^k}{k!} \cdot e^{-20} \approx 1 - 0{,}999975 = 0{,}000025 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$$

Czyli przybliżenia są słabe.

$\boxed{\text{zad 6}}$ Znaleźć oszacowanie Chernoffa dla $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $P(X \geq a\mu)$

Chernoff

$P(X \geq a) \leq e^{-at} M_X(t) \quad \forall t > 0$

$P(X \geq a) \leq \min_{t>0} e^{-at} \cdot M_X(t)$

$$P(X \geq a\mu) \leq e^{-ta\mu} \cdot M_X(t) = e^{-ta\mu} \cdot \underbrace{e^{\mu t} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}_{}$$

MGF dla $N(\mu, \sigma^2)$

$$= e^{\left(-ta\mu + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)} \quad (*)$$

Wyliczmy min tej f-ji

$$f'(t) = e^{\left(-ta\mu + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)} \cdot \left(-a\mu + \mu + \frac{\sigma^2 \cdot 2t}{2}\right) = 0$$

$$-a\mu + \mu + \sigma^2 \cdot t = 0$$

$$t = \frac{a\mu - \mu}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \mu \cdot (a-1)$$

zamiast t podstawiamy min t

(*)
$$= e^{t\left(-a\mu + \mu + \frac{\sigma^2}{2} t\right)} = e^{t\left(-a\mu + \mu + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \underline{\frac{1}{\sigma^2} \cdot \mu(a-1)}\right)} = e^{t \cdot \left(-a\mu + \mu + \frac{\mu(a-1)}{2}\right)} =$$

$$= e^{\left(t\mu \cdot \left(-a + 1 + \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)} = e^{t\mu \cdot \left(\frac{1-a}{2}\right)} = e^{\underline{\frac{1}{\sigma^2} \cdot \mu \cdot (a-1)} \cdot \mu \left(\frac{1-a}{2}\right)} = e^{\frac{(a-1)(1-a) \cdot \mu^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= e^{\left(-\frac{(a-1)^2 \mu^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Scanned with ACE Scanner

zad 5 [2]

Niech $\lambda = 10$, $a \in \{2,4,6\}$. Podać wart. dokładną $P(X \geq a\lambda)$, $X \sim Poisson(\lambda)$, $a \geq 3$

oraz oszacowania Markova, Chebyszewa i Chernoffa.

① Wartość dokładna

a) $a=2$

$$P(x \geq a\lambda) = P(x \geq 20) = 1 - P(x < 20) = 1 - \sum_{k=0}^{19} P(y=k) = 1 - \sum_{k=0}^{19} e^{-10} \cdot \frac{10^k}{k!} \approx 0{,}00345$$

- $P(x=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ (Poisson)
- Markov $P(x \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$
- Chebyszev $P(|x - Ex| \geq a) \leq \frac{V(x)}{a^2} \parallel P(x \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$
- Chernoff $P(x \geq a) = \frac{M_x(t)}{e^{ta}}$
  $P(x \geq a) \leq \min_{t>0} \frac{M_x(t)}{e^{ta}}$

b) $a=4$

$$P(x \geq a \cdot \lambda) = P(x \geq 40) = 1 - P(x < 40) =$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{39} P(y=k) = 1 - \sum_{k=0}^{39} e^{-10} \cdot \frac{10^k}{k!} \approx 7{,}34079 \cdot 10^{-13}$$

c) $a=6$

$$P(x \geq a \cdot \lambda) = P(x \geq 60) = 1 - P(x < 60) =$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{59} P(y=k) = 1 - \sum_{k=0}^{59} e^{-10} \cdot \frac{10^k}{k!} \approx 6{,}52190 \cdot 10^{-27}$$

② Markov

a) $a=2$

$$P(x \geq 2 \cdot \lambda) = P(x \geq 20) \leq \frac{E(x)}{20} = \frac{\lambda}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

b) $a=4$

$$P(x \geq 2 \cdot \lambda) = P(x \geq 40) \leq \frac{E(x)}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

c) $a=6$ $\quad = \text{II} = \quad = \frac{1}{6}$

③ Chebyszev

$$P(x \geq a\lambda) = P(x - Ex \geq a\lambda - \underset{\lambda}{EX}) = P(|x - Ex| \geq (a-1)\lambda) \leq \frac{V(x)}{(a-1)^2 \cdot \lambda^2} = \frac{\lambda}{(a-1)^2 \cdot \lambda^2} = \frac{1}{(a-1)^2 \cdot \lambda}$$

a) $a=2$ $\quad \frac{1}{(2-1) \cdot 10} = \frac{1}{10}$ $\qquad$ b) $a=4$ $\quad \frac{1}{(4-1)^2 \cdot 10} = \frac{1}{90}$ $\qquad$ c) $a=6$ $\quad \frac{1}{(6-1)^2 \cdot 10} = \frac{1}{250}$

④ Chernoff

$$P(x \geq a\lambda) \leq \left(\frac{1}{a}\right)^{a\lambda} \cdot e^{\lambda(a-1)}$$ - z $\boxed{\text{zad 4}}$

a) $a=2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot 10} \cdot e^{10 \cdot 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cdot e^{10} = 0{,}021$$

b) $a=4$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{40} \cdot e^{30} = 8{,}83964 \cdot 10^{-12}$$

c) $a=6$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{60} \cdot e^{50} = 1{,}06083 \cdot 10^{-25}$$