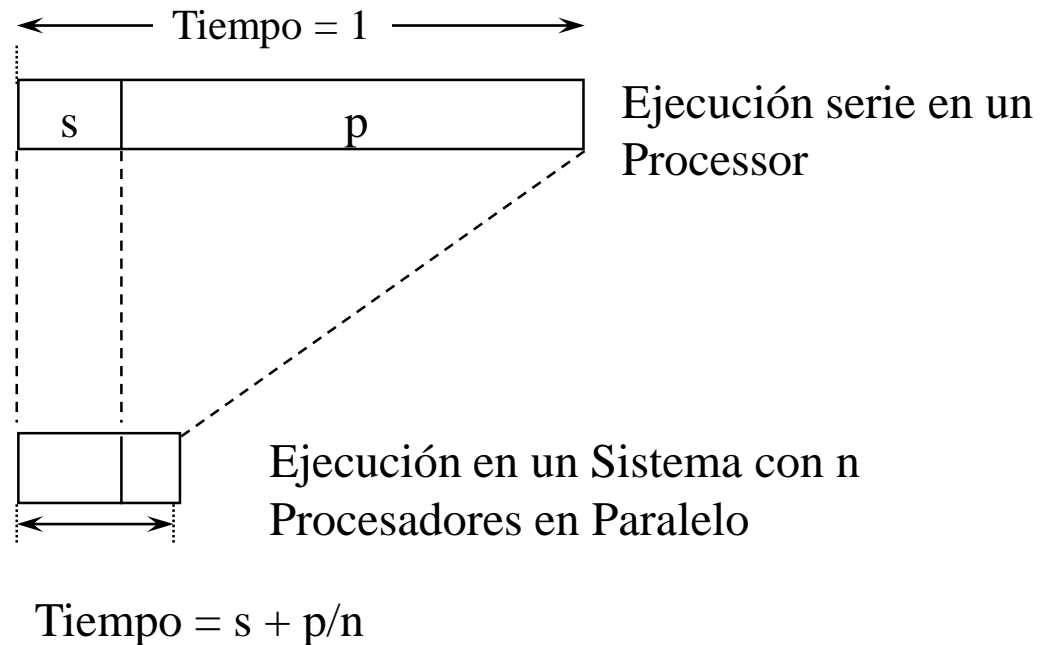


# El Rendimiento del Sistema

**Ley de Amdahl:** “Cuando la fracción de un trabajo serie de un problema es pequeña, y la denominamos  $s$ , la máxima aceleración o Speedup alcanzable ( incluso para un número infinito de procesadores) es sólo  $1/s$ .”

by Amdahl, G: “Validity of the single-processor approach to achieve large-scale computer capabilities” AFIPS Conf. Proceedings 30, 1967, pp 483-485

$$\text{Speedup} = \frac{1^{s+p}}{s + p/n}$$



# El Rendimiento del Sistema

$T_s$ : Tiempo requerido para resolver el problema con un algoritmo optimizado en un procesador individual (“Tiempo en serie”)

$T_p$ : Tiempo requerido para resolver el problema en un sistema de  $n$  procesadores (“Tiempo en paralelo”)

- ★  **$T(x)$  Tiempo que se tarda en ejecutar un problema usando  $x$  procesadores de una maquina  $M$ , que dispone de  $N$  procesadores.**

Complejidad o tamaño del problema: algoritmo de complejidad  $O(r)$

**Speed-up o Aceleración:  $S = T_s / T_p$**

- ★  $S(n) = T(1)/T(n)$
- ★  $S^s(n) = T_s/T(n)$  con  $T_s$  el mejor tiempo serie posible no necesariamente  $T(1)$
- ★  $S'(n) = T'(1)/T(n)$  con  $T'(1)$  algoritmo serie modificado para uno de los  $n$  procesadores

# Metricas de Rendimiento

## Efficiencia, Utilizacion, Redundancia, Calidad de Paralelismo

Eficiencia del sistema: Sea  $O(n)$  el número total de operaciones elementales realizadas en un intervalo de tiempo por un sistema con  $n$ -procesadores y  $T(n)$  es el tiempo de ejecución expresado en unidades de tiempo:

★ **Speedup :**

$$S(n) = T(1) / T(n)$$

★ **Eficiencia del sistema con  $n$ -procesadores:**

$$E(n) = S(n) / n = T(1) / [nT(n)]$$

Redundancia:

$$R(n) = O(n) / O(1)$$

Utilización:

$$U(n) = R(n)E(n) = O(n) / [nT(n)]$$

Nótese que:  $O(1)=T(1)$

Calidad del Paralelismo:

$$Q(n) = S(n) E(n) / R(n) = T^3(1) / [nT^2(n)O(n)]$$

## Medidas de Ganancia de Velocidad (Speedup)

$$\text{Speedup} = \text{Velocidad (n)} / \text{Velocidad (1)} = \\ [\text{Trabajo (n)} / \text{Tiempo (n)}] / [\text{Trabajo (1)} / \text{Tiempo (n)}]$$

$$\text{Speed-up(WC)} = \text{Tiempo (1)} / \text{Tiempo (n)}$$

Trabajo Fijo (Work Constrained)

$$\text{Speed-up(TC)} = \text{Trabajo (n)} / \text{Trabajo (1)}$$

Tiempo Fijo (Time Constrained)

$$\text{Speed-up(MC)} = (\text{Trabajo (n)} / \text{Trabajo (1)}) / (\text{Tiempo(n)} / \text{Tiempo (1)})$$

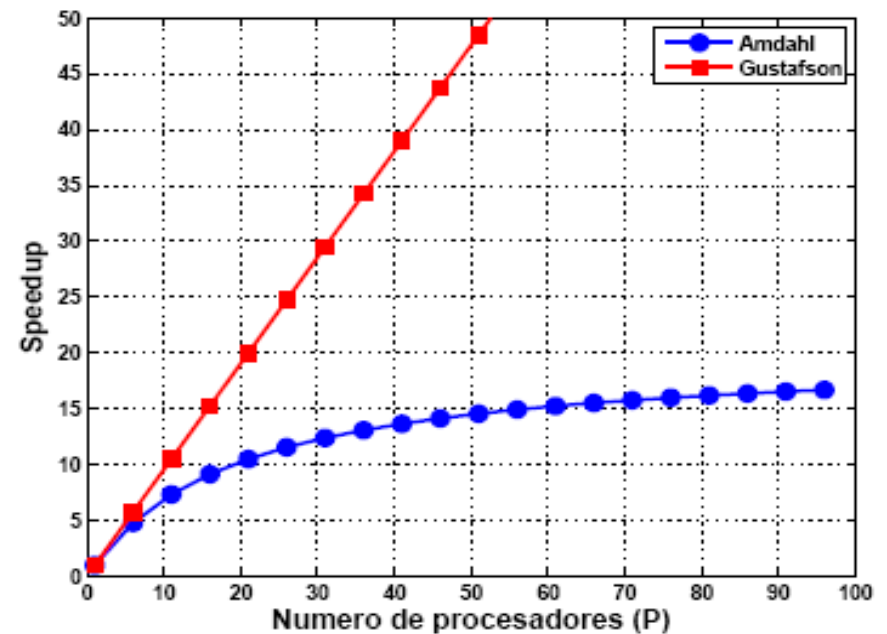
Recursos por Procesador  
(memoria) Fija

## Ley Gustafson vs Ley de Amdahl

Cuando la fracción paralelizable es escalable con  $n$ ,  
manteniendo el tiempo serie sin modificar, obtenemos un  
speedup escalable

$$S(n) = \frac{T_s + nT_p}{T_s + T_p}$$

Notese que el tiempo monoprocesador crece con  
el número de procesadores, pero el tiempo  
paralelo permanece constante



# Grado de paralelismo - Degree of parallelism (DOP)

- ★ Refleja la coincidencia entre el paralelismo software y el hardware.
- ★ Función en tiempo discreto que mide en cada periodo de tiempo el número de procesadores utilizado(#).
- ★ El perfil del paralelismo es un gráfico del DOP como una función del tiempo.
- ★ Idealmente se dispone de recurso ilimitados ( $n \gg m$ ).
  - ★  $n$ : procesadores homogéneos
  - ★  $M$ : máximo paralelismo en un perfil
  - ★  $\Delta$ : capacidad de computo de un procesador (tasa de ejecución sin overhead)
  - ★  $DOP = \#$  procesadores ocupados durante un instante de observación.

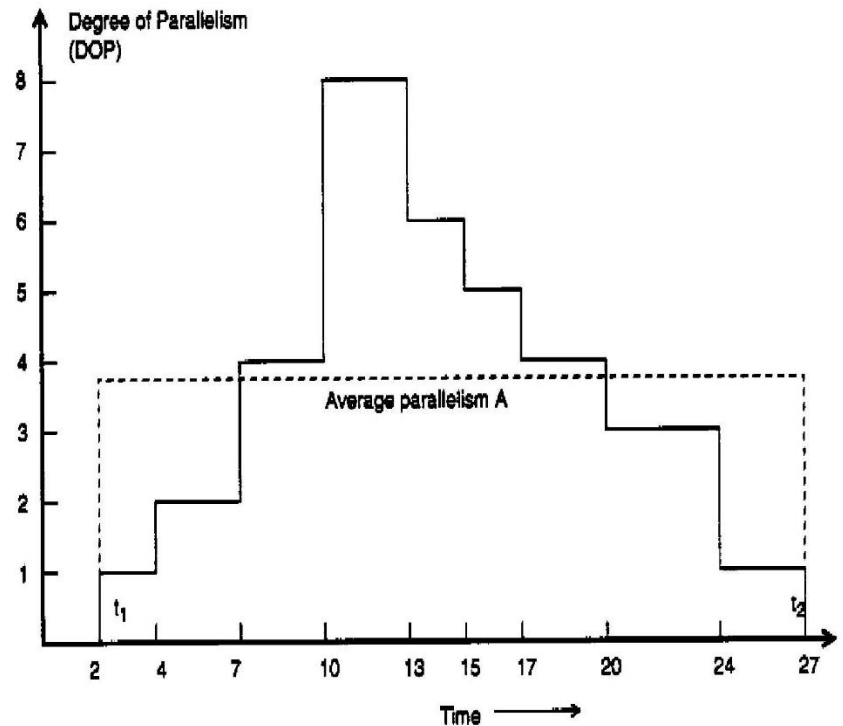


Figure 3.1 Parallelism profile of a divide-and-conquer algorithm.

## Paralelismo Medio

La cantidad de trabajo total  
realizado es proporcional al área  
bajo la curva del perfil de  
paralelismo.

$$W = \Delta \int_{t_1}^{t_2} DOP(t) dt$$

$$W = \Delta \sum_{i=1}^m i \cdot t_i$$

Average parallelism

$$A = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} DOP(t) dt$$

$$A = \left( \sum_{i=1}^m i \cdot t_i \right) / \left( \sum_{i=1}^m t_i \right)$$

## Ejemplo: Perfil de Paralelismos de un algoritmo Divide y Vencerás

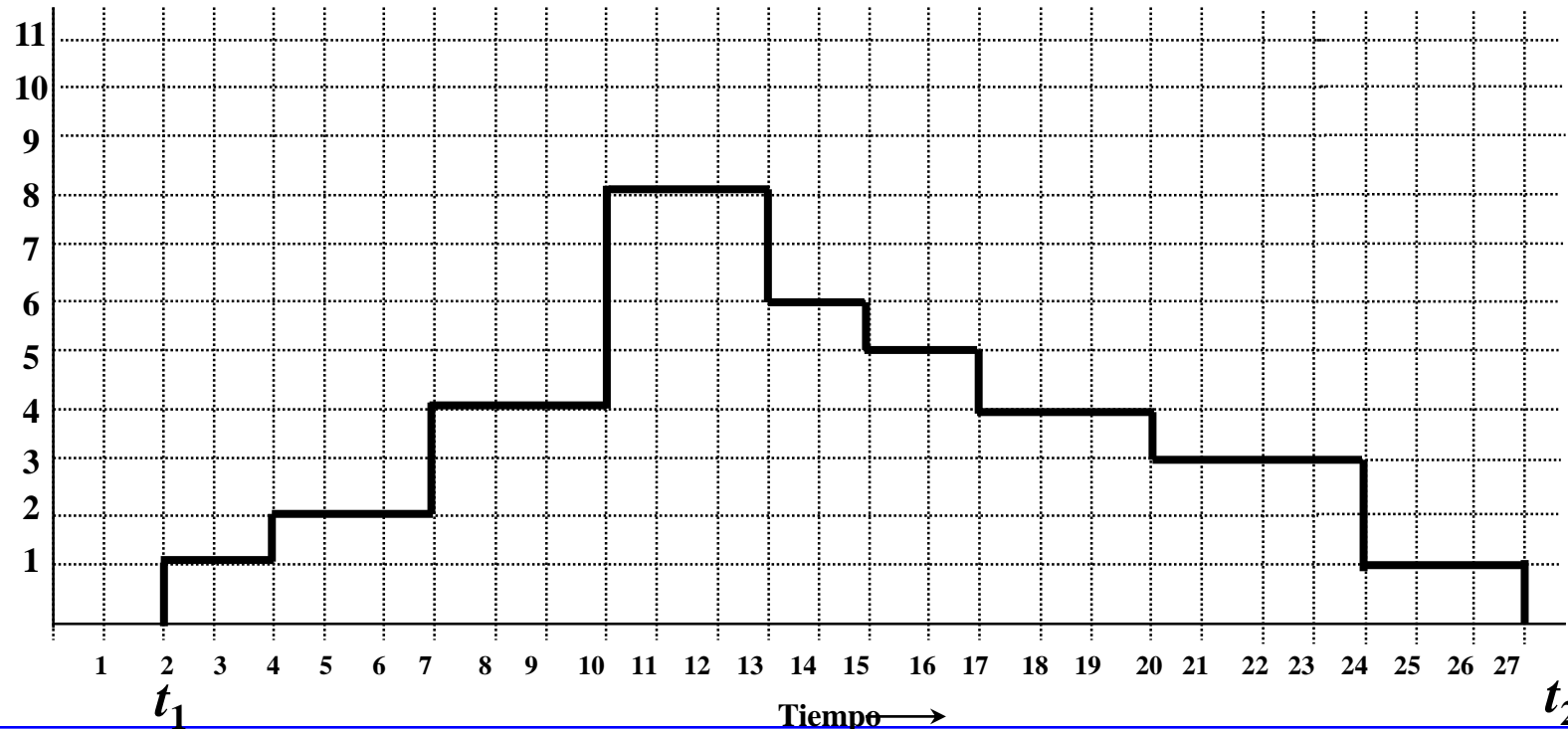
Tiempo de Ejecución desde  $t_1 = 2$  a  $t_2 = 27$

Paralelismo Pico  $M = 8$

Paralelismo Medio  $= A = (1 \times 5 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 6 + 5 \times 2 + 6 \times 2 + 8 \times 3) / (5 + 3 + 4 + 6 + 2 + 2 + 3) = 93 / 25 = 3.72$

$$A = \left( \sum_{i=1}^m i \cdot t_i \right) / \left( \sum_{i=1}^m t_i \right)$$

Grado de Paralelismo(GDP) -- Degree of Parallelism (DOP)





# Métricas de Rendimiento

Speedup Asintótico :

Tiempo de ejecución  
con un procesador

$$T(1) = \sum_{i=1}^m t_i(1) = \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{\Delta}$$

Tiempo de ejecución  
con un número infinito  
de procesadores

$$T(\infty) = \sum_{i=1}^m t_i(\infty) = \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{i\Delta}$$

Speedup asintótico  $S_\infty$

$$S_\infty = \frac{T(1)}{T(\infty)} = \frac{\sum_{i=1}^m W_i}{\sum_{i=1}^m W_i / i}$$

## Rendimiento: Speedup de Carga de Trabajo Fija (Fixed-Workload)

Cuando  $DOP = i > n$  ( $n = \text{numero de procesadores}$ )

**Tiempo ejecución de  $W_i$**

$$t_i(n) = \frac{W_i}{i\Delta} \left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil$$

**Tiempo total**

$$T(n) = \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{i\Delta} \left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil$$

( Si  $DOP = i < n$ , entonces  $t_i(n) = t_i(\infty) = \frac{W_i}{i\Delta}$  )

**Speedup de carga fija (Fixed-load)**

se define como el cociente  $T(1)$  entre  $T(n)$ :

$$S_n = \frac{T(1)}{T(n)} = \frac{\sum_{i=1}^m W_i}{\sum_{i=1}^m \frac{W_i}{i} \left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil}$$

## Ley de Amdahl: Caso particular de Speedup con carga fija

Para el caso especial donde el sistema opera en modo serie (DOP = 1) o en modo perfectamente paralelo (DOP =  $n$ ), el Speedup de carga fija se simplifica a:

$$S_n = \frac{W_1 + W_n}{W_1 + W_n/n}$$

Para el caso normalizado donde:

$$W_1 + W_n = f_s + (1 - f_s) = 1 \quad \text{with} \quad f_s = W_1 \quad \text{and} \quad 1 - f_s = W_n$$

La ecuación se convierte en la

Ley de Amdahl:

$$S_n = \frac{n}{1 + (n - 1)f_s}$$

## Ley de Gustafson: Speedup de Tiempo Fijo

Para el caso especial de Speedup de tiempo fijo donde el DOP puede ser 1 o  $n$  y asumiendo  $Q(n) = 0$

$$S'_n = \frac{T'(1)}{T'(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{m'} W'_i}{\sum_{i=1}^m W_i} = \frac{W'_1 + W'_n}{W_1 + W_n} = \frac{W_1 + nW_n}{W_1 + W_n}$$

Donde  $W'_n = nW_n$  y  $W_1 + W_n = W'_1 + W'_n/n$

Asumiendo  $f_s = W_1$  y  $1 - f_s = W_n$  and  $W_1 + W_n = 1$

$$S'_n = \frac{T'(1)}{T'(n)} = \frac{f_s + n(1 - f_s)}{f_s + (1 - f_s)} = n - f_s(n - 1)$$