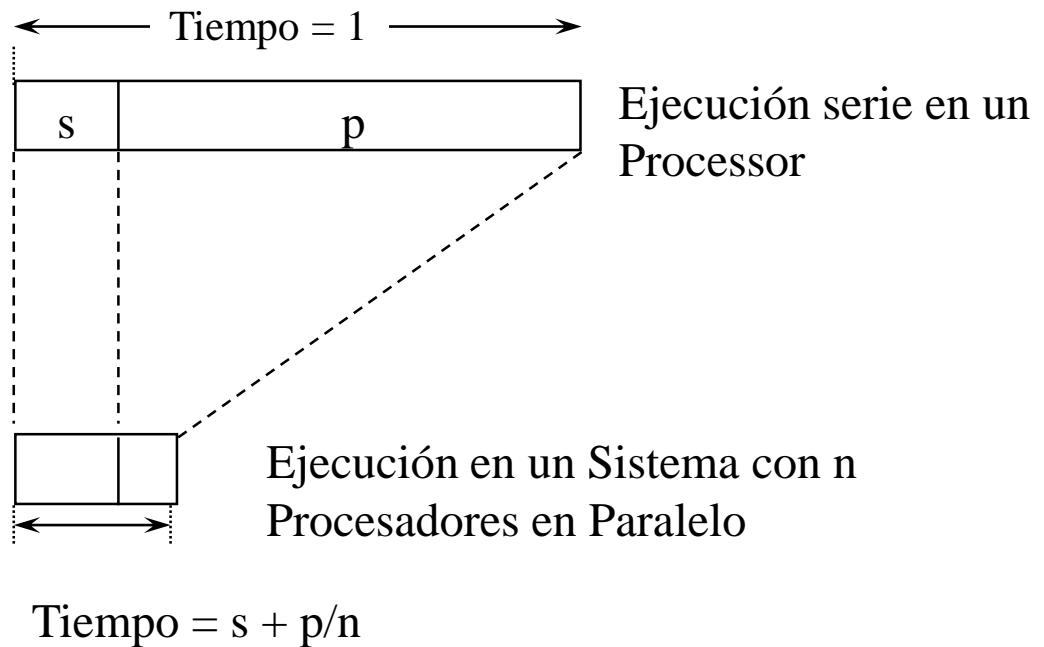


El Rendimiento del Sistema

Ley de Amdahl: “Cuando la fracción de un trabajo serie de un problema es pequeña, y la denominamos s, la máxima aceleración o Speedup alcanzable (incluso para un número infinito de procesadores) es sólo $1/s$.”

by Amdahl, G: “Validity of the single-processor approach to achieve large-scale computer capabilities” AFIPS Conf. Proceedings 30, 1967, pp 483-485

$$\text{Speedup} = \frac{1}{s + p/n} \stackrel{s \ll p}{\approx} \frac{1}{p/n} = n/p$$



El Rendimiento del Sistema

T_s: Tiempo requerido para resolver el problema con un algoritmo optimizado en un procesador individual (“Tiempo en serie”)

T_p: Tiempo requerido para resolver el problema en un sistema de n procesadores (“Tiempo en paralelo”)

- * **T(x) Tiempo que se tarda en ejecutar un problema usando x procesadores de una maquina M, que dispone de N procesadores.**

Complejidad o tamaño del problema: algoritmo de complejidad O(r)

Speed-up o Aceleración: S = T_s / T_p

- * $S(n) = T(1)/T(n)$
- * $S^s(n) = T_s/T(n)$ con T_s el mejor tiempo serie posible no necesariamente T(1)
- * $S'(n) = T'(1)/T(n)$ con T'(1) algoritmo serie modificado para uno de los n procesadores

Metricas de Rendimiento

Efficiencia, Utilizacion, Redundancia, Calidad de Paralelismo

Eficiencia del sistema: Sea $O(n)$ el número total de operaciones elementales realizadas en un intervalo de tiempo por un sistema con n -procesadores y $T(n)$ es el tiempo de ejecución expresado en unidades de tiempo:

- * **Speedup :**

$$S(n) = T(1) / T(n)$$

- * **Eficiencia del sistema con n -procesadores:**

$$E(n) = S(n)/n = T(1)/[nT(n)]$$

Redundancia:

$$R(n) = O(n)/O(1)$$

Utilización:

$$U(n) = R(n)E(n) = O(n) / [nT(n)]$$

Nótese que: $O(1)=T(1)$

Calidad del Paralelismo:

$$Q(n) = S(n) E(n) / R(n) = T^3(1) / [nT^2(n)O(n)]$$

Medidas de Ganancia de Velocidad (Speedup)

Speedup = Velocidad (n) / Velocidad (1) =
[Trabajo (n) / Tiempo (n)] / [Trabajo (1) / Tiempo (n)]

Speed-up(WC) = Tiempo (1) / Tiempo (n)

Trabajo Fijo (Work Constrained)

Speed-up(TC) = Trabajo (n) / Trabajo (1)

Tiempo Fijo (Time Constrained)

Speed-up(MC) = (Trabajo (n) / Trabajo (1)) / (Tiempo(n) / Tiempo (1))

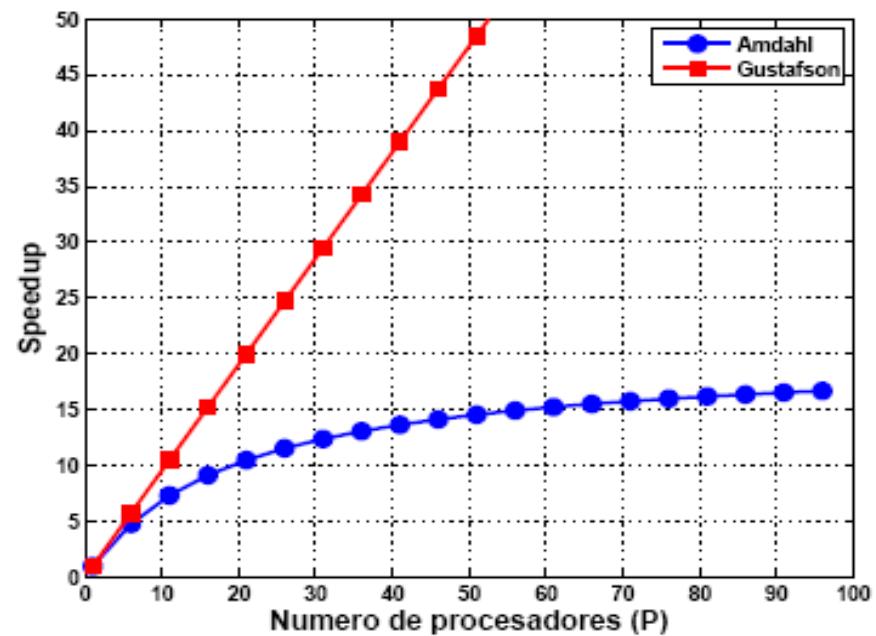
Recursos por Procesador
(memoria) Fija

Ley Gustafson vs Ley de Amdahl

Cuando la fracción paralelizable es escalable con n, manteniendo el tiempo serie sin modificar, obtenemos un speedup escalable

$$S(n) = \frac{T_s + nT_p}{T_s + T_p}$$

Notese que el tiempo monoprocesador crece con el número de procesadores, pero el tiempo paralelo permanece constante



Grado de paralelismo - Degree of parallelism (DOP)

- * Refleja la coincidencia entre el paralelismo software y el hardware.
- * Función en tiempo discreto que mide en cada periodo de tiempo el número de procesadores utilizado(#).
- * El perfil del paralelismo es un gráfico del DOP como una función del tiempo.
- * Idealmente se dispone de recurso ilimitados ($n \gg m$).
 - * n : procesadores homogéneos
 - * M : máximo paralelismo en un perfil
 - * Δ : capacidad de computo de un procesador (tasa de ejecución sin overhead)
 - * $DOP = \#$ procesadores ocupados durante un instante de observación.

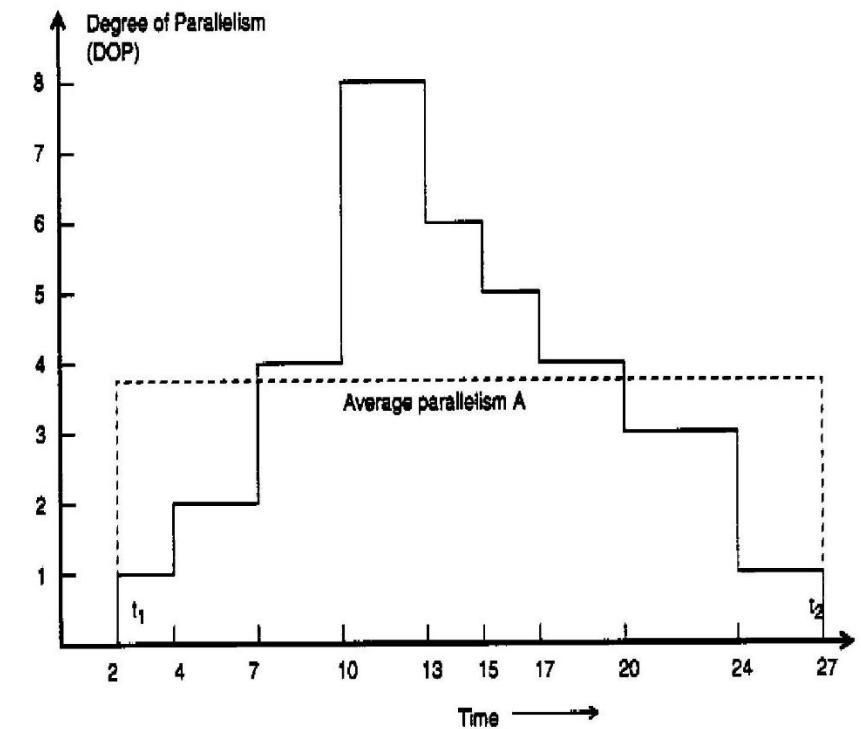


Figure 3.1 Parallelism profile of a divide-and-conquer algorithm.

Paralelismo Medio

La cantidad de trabajo total realizado es proporcional al área bajo la curva del perfil de paralelismo.

Average parallelism

$$W = \Delta \int_{t_1}^{t_2} DOP(t) dt$$

$$W = \Delta \sum_{i=1}^m i \cdot t_i$$

$$A = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} DOP(t) dt$$

$$A = \left(\sum_{i=1}^m i \cdot t_i \right) / \left(\sum_{i=1}^m t_i \right)$$

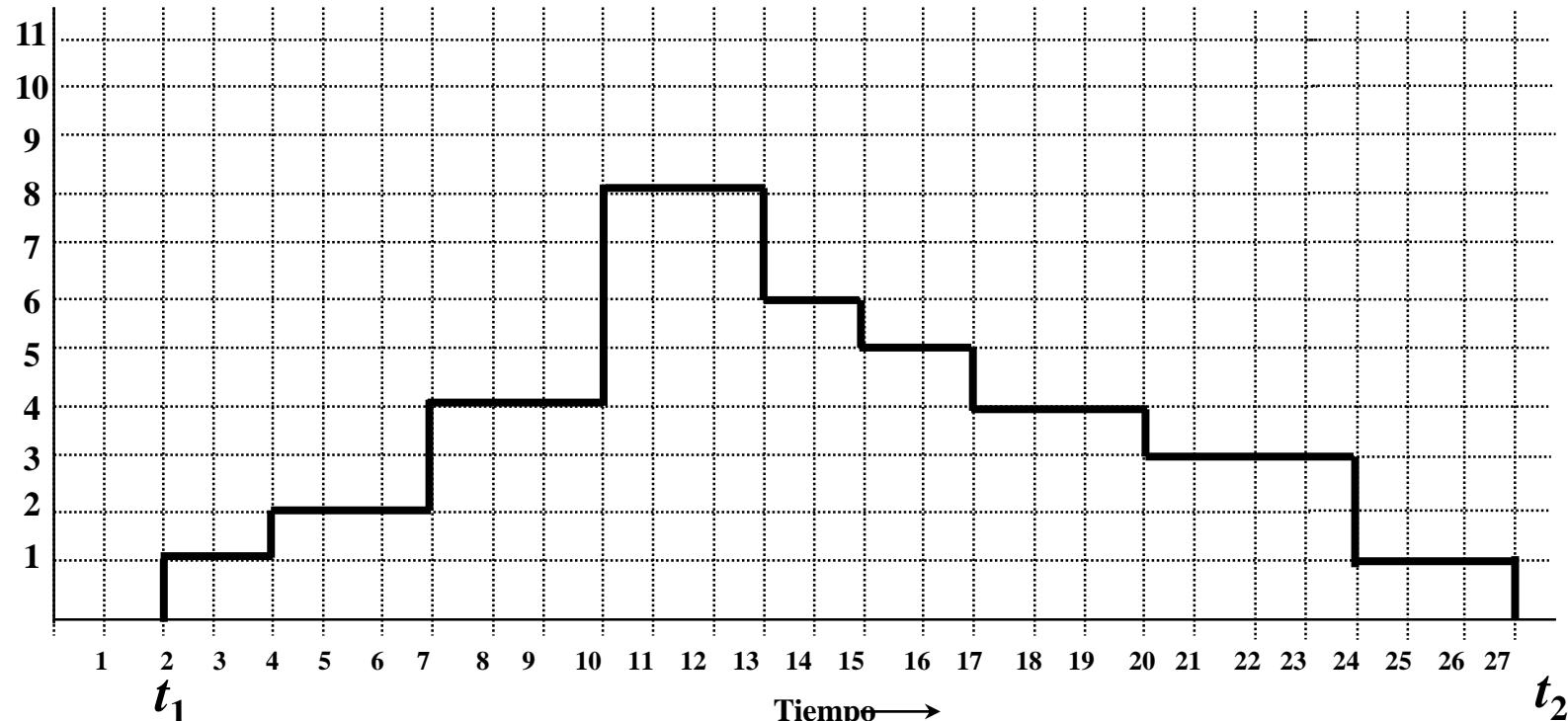
Ejemplo: Perfil de Paralelismos de un algoritmo Divide y Vencerás

Tiempo de Ejecución desde $t_1 = 2$ a $t_2 = 27$
Paralelismo Pico $M = 8$

$$A = \left(\sum_{i=1}^m i \cdot t_i \right) / \left(\sum_{i=1}^m t_i \right)$$

Paralelismo Medio = $A = (1 \times 5 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 6 + 5 \times 2 + 6 \times 2 + 8 \times 3) / (5 + 3 + 4 + 6 + 2 + 2 + 3) = 93/25 = 3.72$

Grado de Paralelismo(GDP) -- Degree of Parallelism (DOP)



Métricas de Rendimiento

Speedup Asintótico :

Tiempo de ejecución
con un procesador

Tiempo de ejecución
con un número infinito
de procesadores

Speedup asintótico S_∞

$$T(1) = \sum_{i=1}^m t_i(1) = \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{\Delta}$$

$$T(\infty) = \sum_{i=1}^m t_i(\infty) = \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{i\Delta}$$

$$S_\infty = \frac{T(1)}{T(\infty)} = \frac{\sum_{i=1}^m W_i}{\sum_{i=1}^m W_i / i}$$

Rendimiento: Speedup de Caga de Trabajo Fija (Fixed-Workload)

Cuando DOP = $i > n$ ($n = \text{numero de procesadores}$)

Tiempo ejecución de W_i

$$t_i(n) = \frac{W_i}{i\Delta} \left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil$$

Tiempo total

$$T(n) = \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{i\Delta} \left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil$$

$$(\text{Si DOP} = i < n, \text{ entonces } t_i(n) = t_i(\infty) = \frac{W_i}{i\Delta})$$

Speedup de carga fija (Fixed-load)

se define como el cociente $T(1)$ entre $T(n)$:

$$S_n = \frac{T(1)}{T(n)} = \frac{\sum_{i=1}^m W_i}{\sum_{i=1}^m \frac{W_i}{i} \left\lceil \frac{i}{n} \right\rceil}$$

Ley de Amdahl: Caso particular de Speedup con carga fija

Para el caso especial donde el sistema opera en modo serie ($DOP = 1$) o en modo perfectamente paralelo ($DOP = n$), el Speedup de carga fija se simplifica a:

$$S_n = \frac{W_1 + W_n}{W_1 + W_n/n}$$

Para el caso normalizado donde:

$$W_1 + W_n = f_s + (1 - f_s) = 1 \text{ with } f_s = W_1 \text{ and } 1 - f_s = W_n$$

La ecuación se convierte en la

Ley de Amdahl:

$$S_n = \frac{n}{1 + (n - 1)f_s}$$

Ley de Gustafson: Speedup de Tiempo Fijo

Para el caso especial de Speedup de tiempo fijo donde el DOP puede ser 1 o n y asumiendo $Q(n) = 0$

$$S'_n = \frac{T'(1)}{T'(n)} = \frac{\sum_{i=1}^m W'_i}{\sum_{i=1}^m W_i} = \frac{W'_1 + W'_n}{W_1 + W_n} = \frac{W_1 + nW_n}{W_1 + W_n}$$

Donde $W'_n = nW_n$ y $W_1 + W_n = W'_1 + W'_n / n$

Asumiendo $f_s = W_1$ y $1-f_s = W_n$ and $W_1 + W_n = 1$

$$S'_n = \frac{T'(1)}{T'(n)} = \frac{f_s + n(1-f_s)}{f_s + (1-f_s)} = n - f_s(n-1)$$