Procesos Estocásticos

Sistemas en Tiempo Discreto

Ejercicios Finales

Gloria del Valle Cano
13 de diciembre 2021

```
In [1]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        from random import uniform
        from tqdm import tqdm
        from kalman_aux import *
        from sklearn.linear_model import LinearRegression
        from IPython.display import display, Math, Latex
```

Ejercicio I

Enunciado. En los apuntes hay un ejemplo del *Gambler's Ruin* como cadena de Markov. Hacer un gráfico del número medio de jugadas que el jugador puede hacer antes de arruinarse en función del dinero inicial. En cada jugada se juega 1 Euro, y el juego es ecuo (el jugador tiene una probabilidad 1/2 de ganar). Estimar media y varianza (usar unas 20 ejecuciones. . . deberían ser más que suficientes) considerando un dinero inicial de 1, . . . , 50 Euros. Indicar media y varianza. ¿Cómo varían la media y la varianza cuando aumenta el dinero inicial? Dar una estimación de la función T(є) que da el tiempo medio necesario para arruinarse en función de la cantidad inicial de dinero, є. Según esta función, ¿cuánto tarda el jugador en arruinarse si empieza a jugar con 200 Euros?

Solución. Es preciso destacar que, como hemos visto en la teoría, la probabilidad de arruinarse es siempre 1. Rescatando de los apuntes, tenemos que estimar $k_m := \mathbb{E}_m(H^0|m;0)$ para $m \geq 0$, siendo m el capital inicial. Asimismo, es viable calcular estos valores como soluciones minimales no negativas del sistema:

$$\begin{cases} k_0 = 0 \\ k_m = 1 + \frac{1}{2}k_{m-1} + \frac{1}{2}k_{m+1}, \qquad m \geq 1. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se llega a la siguiente solución:

$$k_m = mA - m^2 + m, \quad m \geq 0$$

Sabiendo que $k_m \geq 0$ para todo m, $A = \infty$, por lo que también $k_m = \infty$ para todo $m \geq 1$.

Para la implementación de este ejercicio se ha implementado la clase `GamblersRuin`, el cual simula la ruina del apostador como cadena de Markov, la cual se muestra a continuación.

```
In [2]: class GamblersRuin:

            def __init__(self, p, k):
                """
                Init function for Gambler's Ruin simulation.
                Args:
                    p (float): probability of winning a round.
                    k (int): gamblers wealth.
                """
                self.p = p    # p
                self.k = k    # wealth
                self.c = 0    # counter

            def update_wealth(self):
                """
                Computes every step for simulation
                """
                if self.k == 0:
                    return 0
                else:
                    self.c += 1
                    self.k += 2*int(uniform(0,1) < self.p) - 1
                return self.k
```

A continuación se muestran las funciones creadas para la simulación, el tiempo medio y la varianza del tiempo hasta la ruina.

```
In [3]: def gr_simulate(n, limit, p):
            times = np.zeros((limit, n))
            for k in tqdm(range(1, limit)):
                for ex in range(n):
                    gr = GamblersRuin(p, k+1)
                    while gr.update_wealth() and gr.c < 1e5:
                        pass
                    times[k][ex] = gr.c
            return times

        def gr_plot_median(limit, times):
            plt.figure(figsize=(18, 6))
            plt.plot(np.arange(limit), np.median(times, axis=1), color="b", marker='o')
            plt.xlabel(f'Initial wealth')
            plt.ylabel(f'Median gambles till ruin')
            plt.title(f'Median')

        def gr_plot_mean_var(limit, times):
            fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(18, 6))
            ax[0].set_xlabel(f'Initial wealth')
            ax[1].set_xlabel(f'Initial wealth')
            ax[0].set_title(f'Mean')
            ax[1].set_title(f'Variance')
            ax[0].set_ylabel(f'Average till ruin')
            ax[1].set_ylabel(f'Variance till ruin')
            ax[0].plot(np.arange(limit), np.mean(times, axis=1), color="g", marker='o')
            ax[1].plot(np.arange(limit), np.var(times, axis=1), color="b", marker='o')
            fig.suptitle("Mean and variance analysis")
```

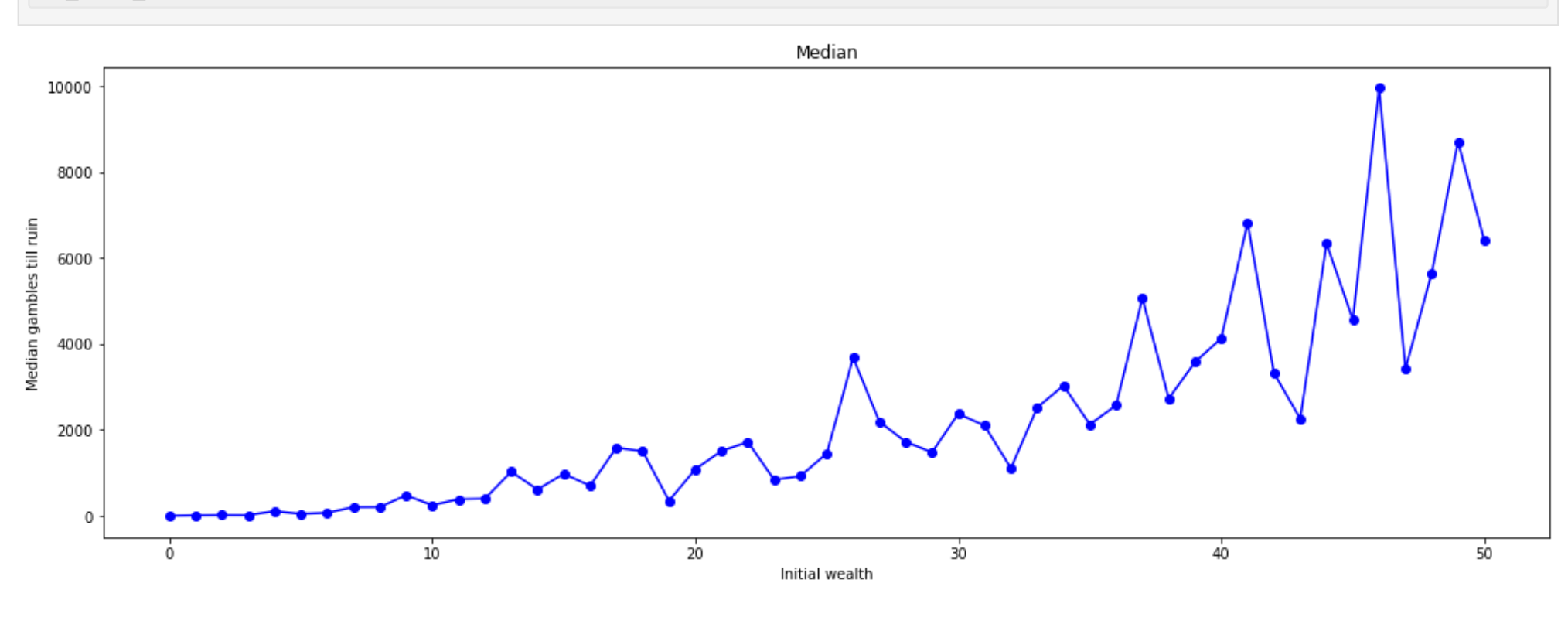
Realizamos 20 simulaciones para una riqueza inicial de $1 \ldots 50$ euros.

```
In [4]: n = 20
        limit = 51
        p = 0.5
        times = gr_simulate(n, limit, p)
```

```
100%|████████████████████████████████████████████████████████████| 50/50 [00:07<00:00,  6.3
0it/s]
```

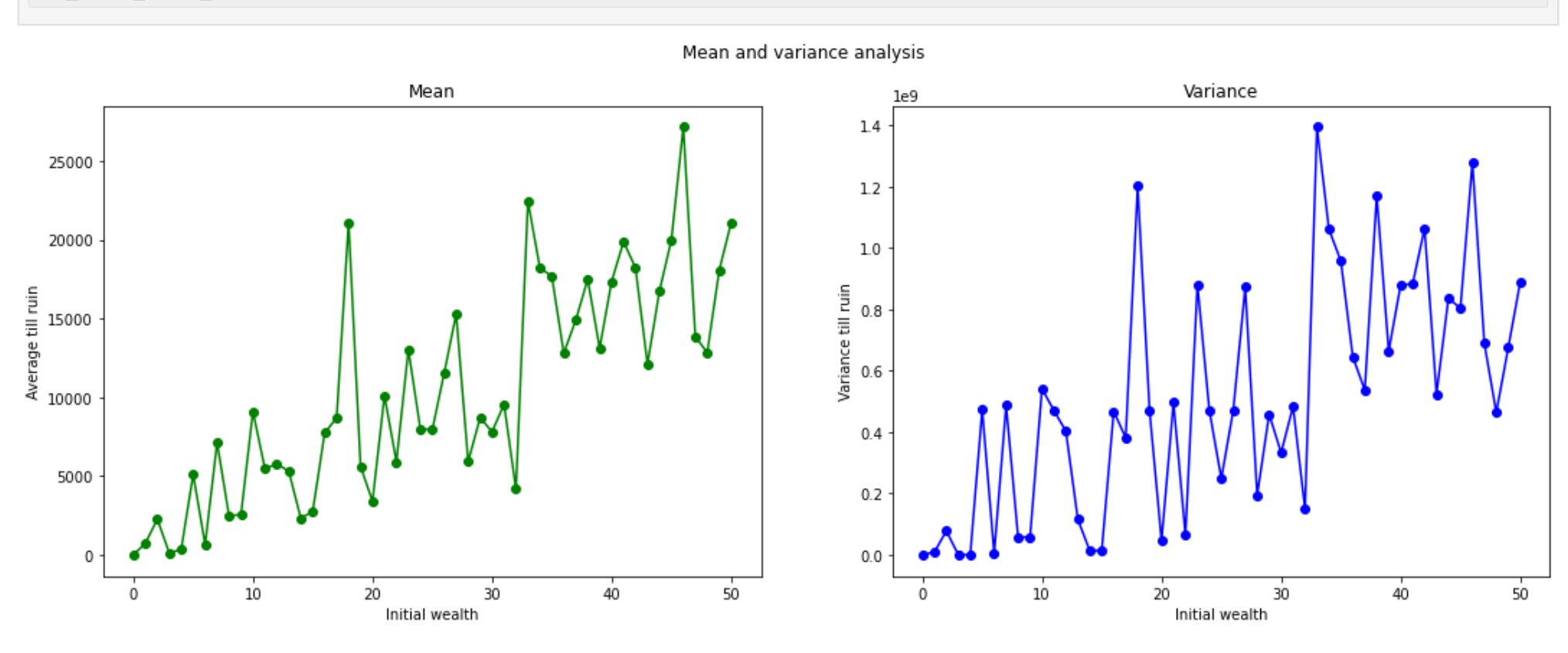
A priori, esperamos que el cálculo del número medio de apuestas que el jugador puede realizar en función de su riqueza antes de arruinarse va a tener mucha varianza, por lo que la representación va a dar lugar a picos muy altos. Es por ello que se decide además mostrar la mediana además, con el fin de visualizar mejor el comportamiento del problema.

```
In [5]: gr_plot_median(limit, times)
```



Finalmente se representan los resultados obtenidos tanto para la media como para la varianza. Vemos como siguen un patrón creciente, además de poderse interpretar como más o menos lineal.

```
In [6]: gr_plot_mean_var(limit, times)
```



Para poder estimar $T(e)$ utilizamos una regresión lineal, apoyándonos en que el problema parece poder tratarse como tal. Simulamos el problema para una riqueza de 200 euros.

```
In [7]: limit = 201
        times = gr_simulate(n, limit, p)
```

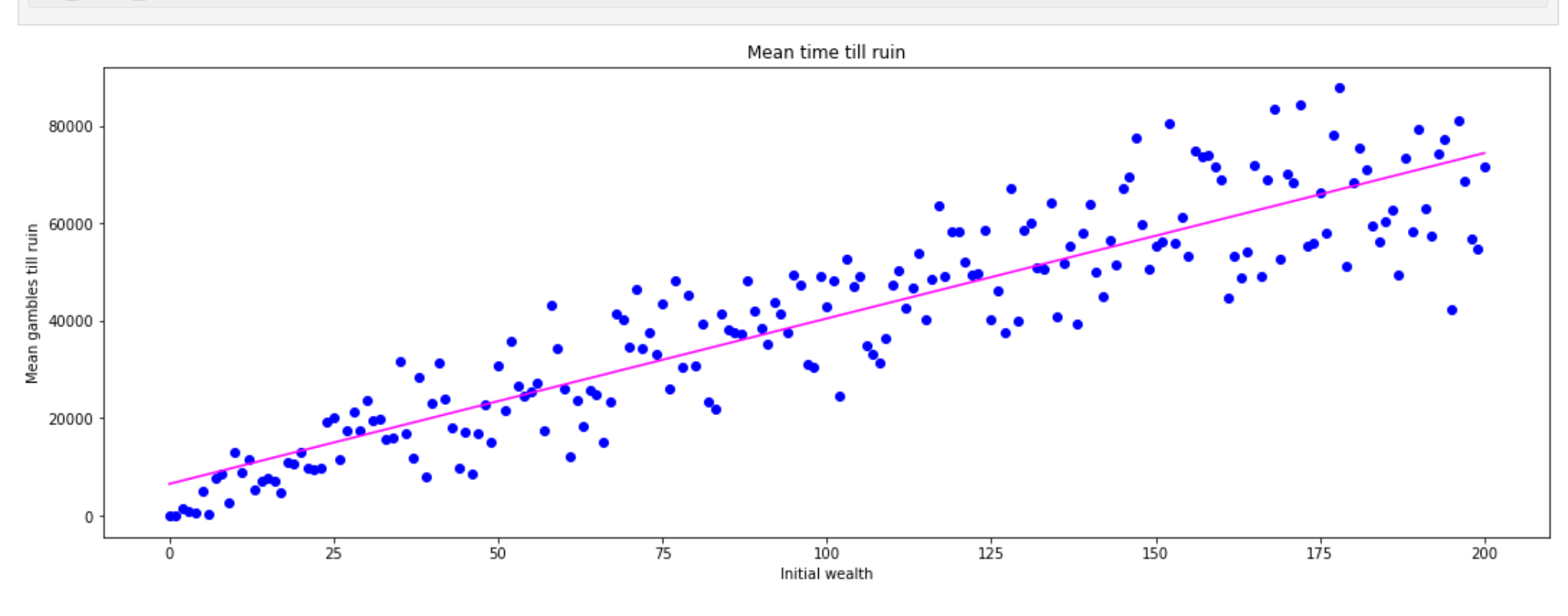
```
100%|████████████████████████████████████████████████████████████| 200/200 [02:05<00:00,  1.5
9it/s]
```

Obtenemos la aproximación mediante regresión lineal.

```
In [8]: def gr_te(limit, times):
            x = np.arange(limit)
            lr = LinearRegression().fit(x.reshape(-1, 1), np.mean(times, axis=1))
            T = lambda i: np.round(lr.predict(np.array([i]).reshape(-1, 1)))
            return x, T

        def gr_plot_te(x, times, T):
            plt.figure(figsize=(18, 6))
            plt.plot(T(x), color='magenta')
            plt.scatter(x, np.mean(times, axis=1), color='b')
            plt.xlabel(f'Initial wealth')
            plt.ylabel(f'Mean gambles till ruin')
            plt.title(f'Mean time till ruin')
            plt.show()
```

Mostramos los resultados de la regresión.

```
In [9]: x, T = gr_te(limit, times)
        gr_plot_te(x, times, T)
```



Se obtiene que para $e = 200$ la ruina se alcanza en 71856 pasos.

```
In [10]: int(T(200)[0])

Out[10]: 74405
```

Si lo llevamos a la vida real, esto no sería viable ya que los jugadores tendrían que jugar como unos 80000 turnos, por lo que podríamos concluir con que nunca llegarían a arruinarse.

Ejercicio II

Enunciado.

a) Crear cuatro sistemas dinámicos del tipo

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= Ax_t + Bu_t + w_t, \\ z_t &= Cx_t + v_t, \end{aligned}$$

con $x_t \in \mathbb{R}^4$, $u_t \in \mathbb{R}$, $z_t \in \mathbb{R}^2$, y

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}',$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los sistemas se distinguen por la matriz A, que es, por cada sistema una de las cuatro matrices generadas usando la función **mk_mat** (en el fichero **kalman_aux.py**) a partir de las siguientes listas de autovalores:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= [0.2, 0.1, 0., -0.1] \\ \Lambda_2 &= [0.99, 0.1, 0., -0.1] \\ \Lambda_3 &= [1., 0.1, 0., -0.1] \\ \Lambda_4 &= [0.2, 0.1, 0., -1.] \end{aligned}$$

Los ruidos $w_t \in \mathbb{R}^4$ y $v_t \in \mathbb{R}^2$ son gaussianos y tienen matrices de covarianza

$$\begin{aligned} Q &= \sigma_w^2 \mathbb{I}_4 \\ R &= \sigma_v^2 \mathbb{I}_2 \end{aligned}$$

donde $\mathbb{I}_n$ es la matriz identidad de orden n.

El fichero **kalman_aux.py** define las matrices $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, y proporciona la función **mk_mat** para crear la matriz $\mathbb{A}$ dada la lista de autovalores. (La matriz $\mathbb{A}$ tiene autovectores generados aleatoriamente, por tanto cada llamada a la función con los mismos autovalores generará matrices diferentes que tienen esos autovalores).

b) Por cada uno de los sistemas generados, crear un filtro de Kalman para estimar el estado de este sistema utilizando como función de input la función

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 50 \\ 1 & t > 50 \end{cases}$$

(el fichero también contiene una función auxiliar **u_f(t)** que define la función).

Realizar la simulación con $t = 0, \ldots, 99$ y dibujar una gráfica del error relativo

$$e(t) = \sum_{k=1}^{t} \frac{||\hat{x}_{t,k} - x_{t,k}||^2}{||x_t||^2}$$

c) Discutir cómo los autovalores afectan al error.

Solución.

Para poder computar de manera unificada se crea la clase `KalmanFilter` sobre la cual se crea el sistema dinámico planteado. Además la clase define la recursión del filtro y permite realizar n experimentos de t ejecuciones, sobre los cuales se calculan los errores correspondientes.

Consideraciones de la implementación

- La estimación inicial de x_t se ha tomado como 0, por lo que P podemos tomarla también inicializada a 0. Como no se conocen los estados anteriores, para las primeras iteraciones no se van a obtener buenas estimaciones, pero se espera que tras ello el sistema será mas estable.
- Para el cálculo del error podemos intuir que la traza de P es en sí misma:

  $$T[P_t] = \mathbb{E}\Big[\sum_k (\hat{x}_{t,k} - x_{t,k})^2\Big]$$

  Por lo que la utilizaremos para la parte del numerador del error relativo. Finalmente obtendremos el error relativo dividiendo por la norma de x_t.

```
In [11]: class KalmanFilter:

             def __init__(self, A, B, C, Q, R, n, times):
                 """
                 Init function for Kalman Filter
                 """
                 self.A = A                                                                      # A,
         hidden process for state matrix
                 self.B = B                                                                      # B,
         hidden process for state matrix
                 self.C = C                                                                      # C,
         observable process for state matrix

                 self.Q = Q                                                                      # Q,
         covariance matrix related to w_t (defined in kalman_aux.py)
                 self.R = R                                                                      # R,
         covariance matrix related to v_t (defined in kalman_aux.py)

                 self.times = times                                                              # save
         times for simulation
                 self.P = np.zeros((4,4))                                                        # P,
         process covariance matrix initial estimation

                 self.z_t = np.zeros((2,))                                                       # init
         observation process
                 self.x_t = np.zeros((4,))                                                       #
         uniform initial

                 self.u_t = np.array([u_f(i) for i in range(times)])                             # input
         function

                 self.w_t = np.random.normal(mu, sigma, (100, 4))                                #
         gaussian noise R^2
                 self.v_t = np.random.normal(mu, sigma, (100, 2))                                #
         gaussian noise R^4

                 self.n = n                                                                      #
         number of experiments
                 self.e_t = []                                                                   # init
         relative error
                 self.K_t = np.zeros((A.shape[0], C.shape[0]))                                   # init
         K Gain

             def kf_system(self, t):
                 """
                 Computes dynamic system defined by
                     x_{t+1} = Ax_t + w_t
                         z_t = Cx_t + v_t
                 """
                 self.x_t = self.A @ self.x_t + self.B * self.u_t[t] + self.w_t[t]               #
         update states
                 self.z_t = self.C @ self.x_t + self.v_t[t]                                      #
         update observation process

             def kf_gain(self, P_bar):
                 """
                 Computes the Kalman Gain given by
                     K_t(C \bar P_t C' + R) = \bar P_t C'
                 """
                 self.K_t = P_bar @ self.C.T @ np.linalg.inv(self.C @ P_bar @ self.C.T + self.R) #
         update kalman gain

             def kf_update_matrix(self, x_bar, P_bar):
                 """
                 Updates the estimate and the covariance
                 """
                 x_hat = x_bar + self.K_t @ (self.z_t - self.C @ x_bar)                         #
         update the estimate
                 P_t = (np.identity(self.C.shape[1]) - self.K_t @ self.C) @ P_bar               #
         update the covariance

                 return x_hat, P_t

             def kf_compute_priors(self, x_hat, P_t, t):
                 """
                 Computes the priors (predict)
                 """
                 x_bar = self.A @ x_hat + self.B * self.u_t[t]                                  #
         compute the priors (state matrix)
                 P_bar = self.A @ P_t @ self.A.T + self.Q                                        #
         compute the priors (process covariance matrix)

                 return x_bar, P_bar

             def kf_relative_error(self, abs, err):
                 """
                 Computes relative error
                 """
                 rel_err = abs / err                                                             #
         relative error
                 self.e_t.append(rel_err)                                                        # save
         error

             def kf_run(self):
                 """
                 KF simulation for n experiments and t times
                     1) create dinamic system
                     2) compute kalman gain
                     3) update
                         3.1) update estimate
                         3.2) update covariance
                     4) predict
                         4.1) prior for estimate
                         4.2) prior for covariance
                 and then computes relative error
                 """

                 # n experiments
                 for i in range(self.n):

                     # initial values
                     x_bar = self.x_t
                     P_bar = self.P
                     abs_ = np.array([])
                     err_ = np.array([])

                     # simulation times = 0,...,99
                     for t in range(self.times):

                         # recursive filter
                         self.kf_system(t)
                         self.kf_gain(P_bar)
                         x_hat, P_t = self.kf_update_matrix(x_bar, P_bar)
                         x_bar, P_bar = self.kf_compute_priors(x_hat, P_t, t)

                         # relative error
                         abs_ = np.append(abs_, np.trace(P_t))
                         err_ = np.append(err_, np.linalg.norm(self.x_t))

                     # update relative error
                     self.kf_relative_error(abs_, err_)

                 return self.e_t
```

a) El sistema dinámico lo hemos definido gracias al constructor de la clase y los parámetros siguientes de entrada.

b) El filtro se ha creado teniendo en cuenta los siguientes pasos:

1. Creación del sistema dinámico
2. Cómputo de la ganancia: $K_t = \bar{P}_t C'(C\bar{P}_t C' + R)^{-1}$
3. Actualización de x y P

   3.1. Actualización del estimador: $\hat{x}_t = \bar{x}_t + K_t(z_t - C\bar{x}_t)$

   3.2. Actualización de la covarianza: $P_t = (\mathbb{I} - K_t C)\bar{P}_t$

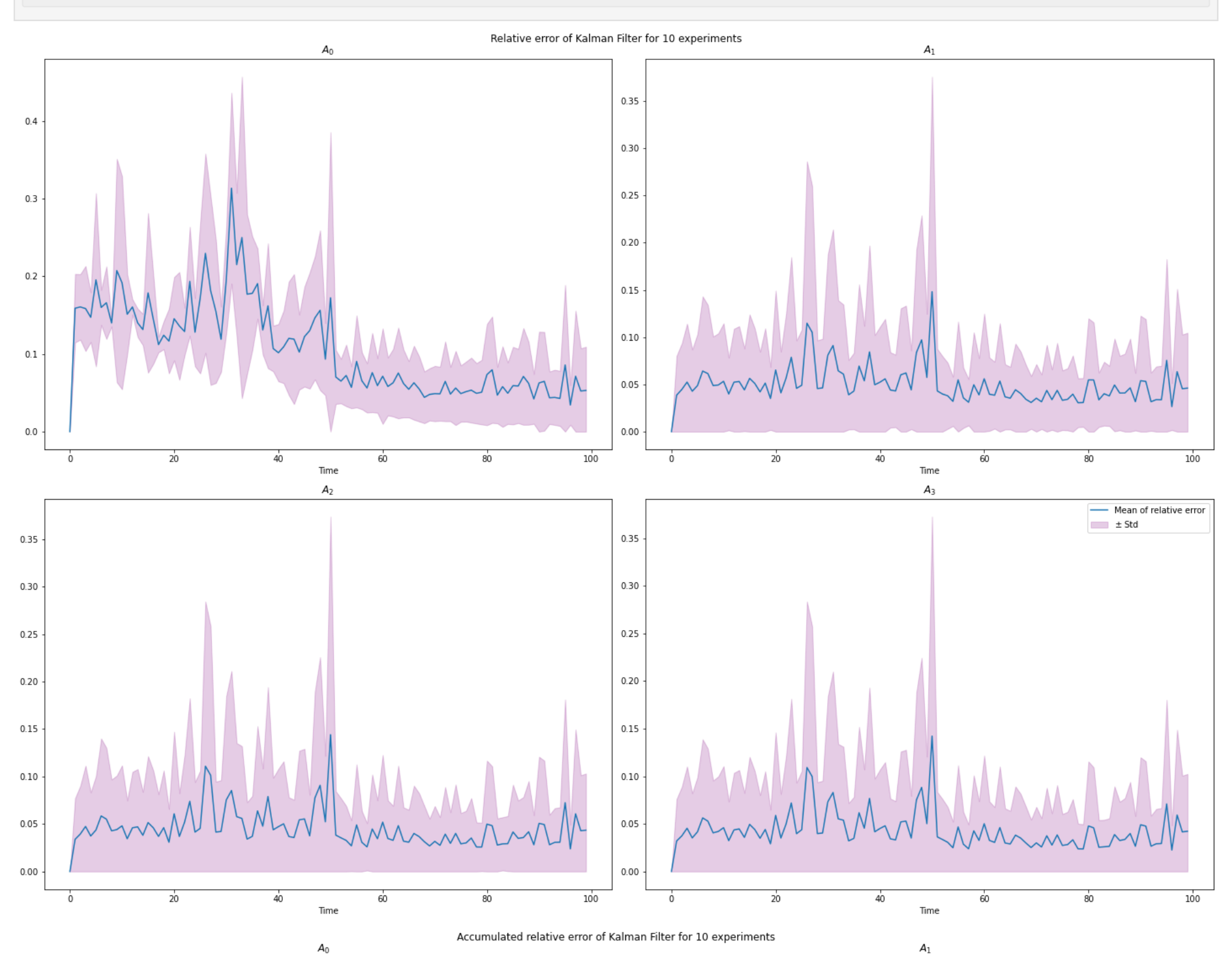
4. Predicción

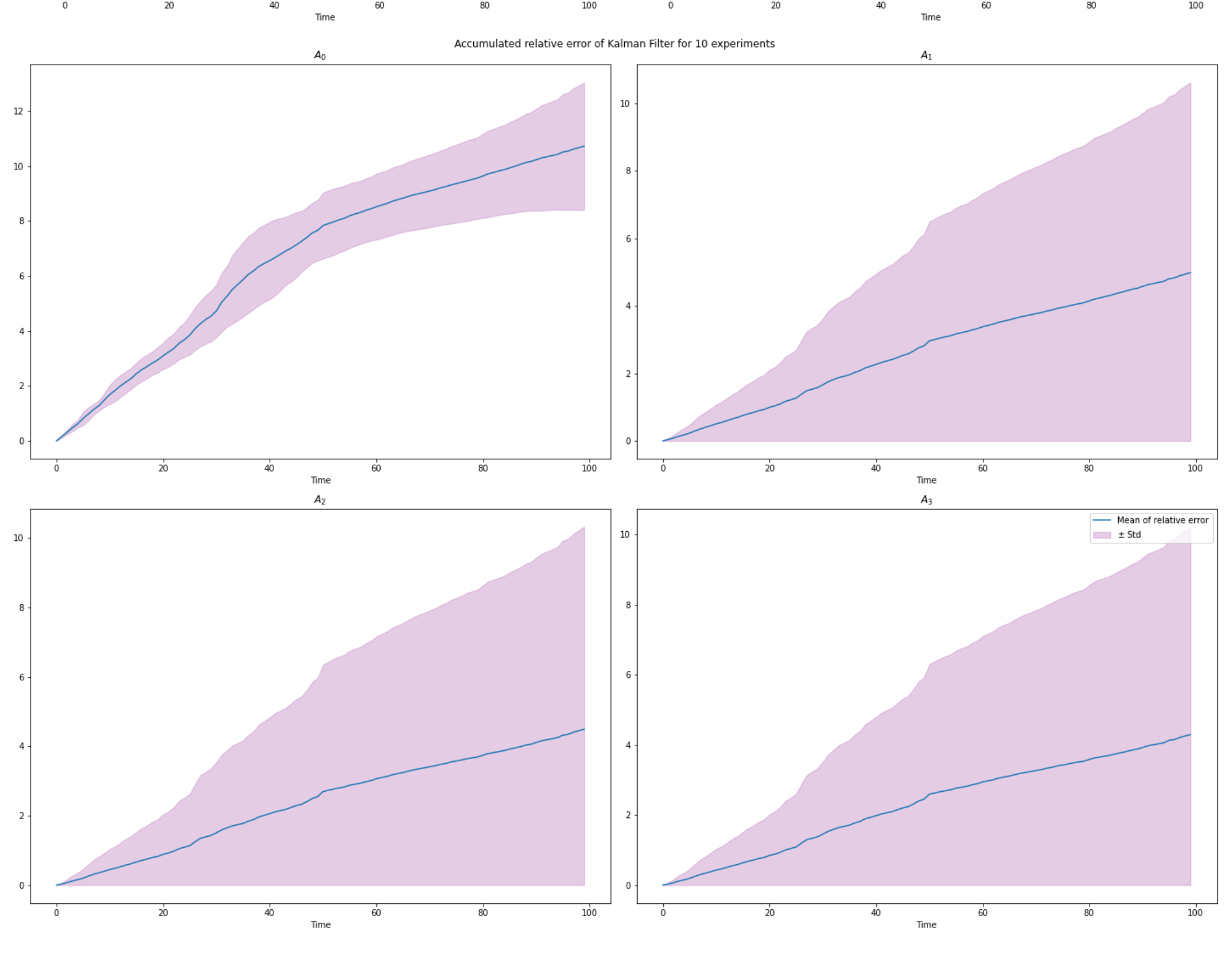
   4.1. Prior para la estimación: $\bar{x}_{t+1} = A\hat{x}_t + Bu_t$

   4.2. Prior para la covarianza: $\bar{P}_{t+1} = AP_tA' + Q$

c) A continuación se muestran los resultados del error relativo para cada matriz $\mathbb{A}$ generada, repitiendo 10 veces el número de ejecuciones (100).

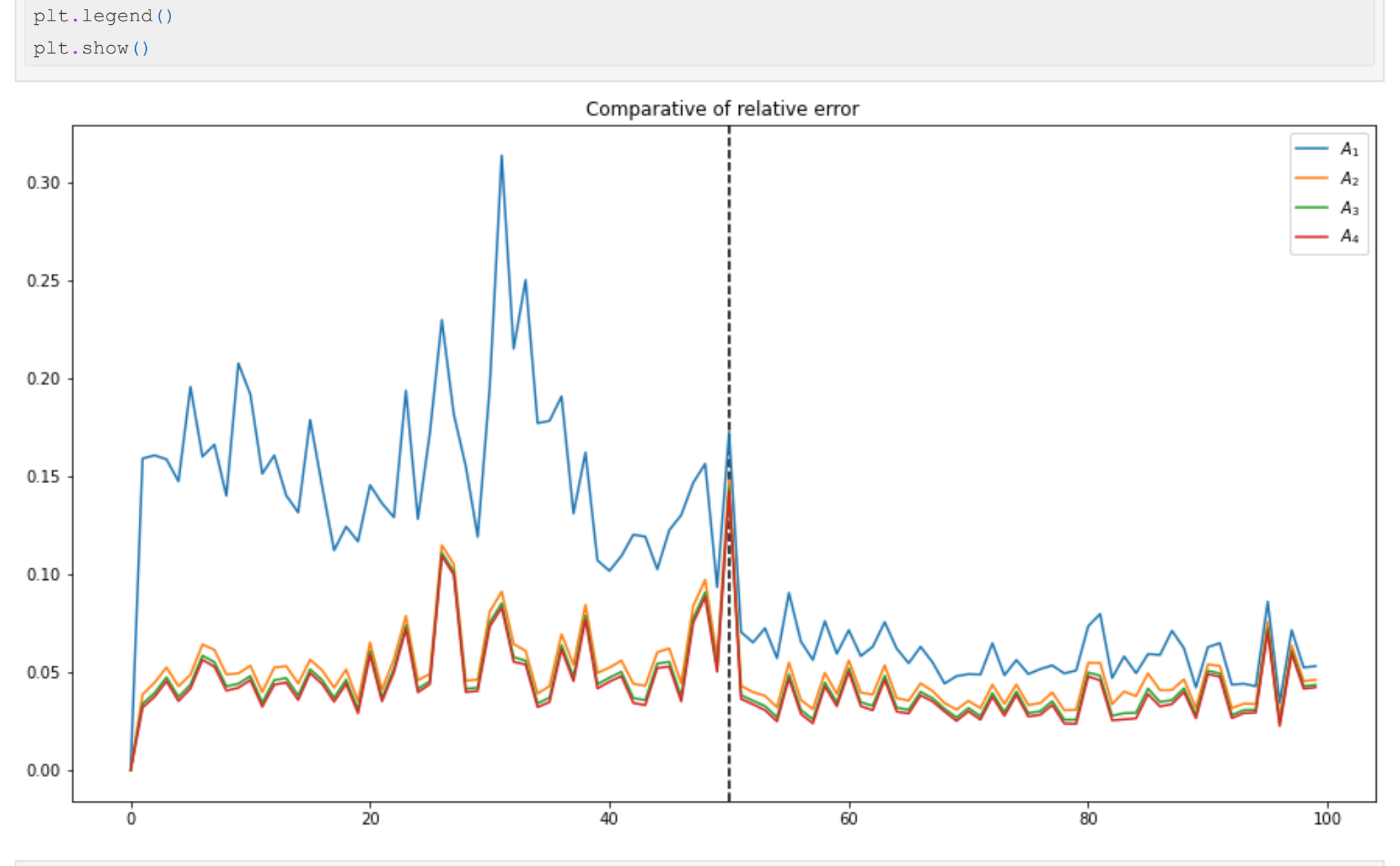
```
In [12]: # Define eigenvalues
         a_1 = [0.2, 0.1, 0., -0.1]
         a_2 = [0.99, 0.1, 0., -0.1]
         a_3 = [1., 0.1, 0., -0.1]
         a_4 = [0.2, 0.1, 0., -1.]
         a_values = [a_1, a_2, a_3, a_4]

         # Define B & C matrix
         B = np.ones(4).T
         C = np.array([[1., 0., 0., 0.],
                       [0., 1., 0., 0.]])

         # Input
         n = 10
         times = 100
         mu, sigma = 0., 1.

         # Save errors
         all_err, all_acc = [], []
         for matrix in a_values:
             A = np.array(mk_mat(matrix))
             mean_err = KalmanFilter(A, B, C, Q, R, n, times).kf_run()
             all_err.append(mean_err)
             all_acc.append(np.cumsum(mean_err, axis=1))

         # Get errors
         means = np.mean(all_err, axis=0)
         stds = np.std(all_err, axis=0)

         # Plot errors
         fig, ax = plt.subplots(2, 2, figsize=(20, 15))
         fig.suptitle(f'Relative error of Kalman Filter for {n} experiments')
         ax = np.array(ax).flatten()
         for i in range(4):
             ax[i].plot(np.arange(times), means[i], label=f"Mean of relative error")
             ax[i].fill_between(np.arange(times), np.maximum(means[i] - stds[i],0), means[i] + stds[i], color =
         'purple', alpha = 0.2, label = r"$\pm$ Std")
             ax[i].set_title(f'$A_{i}$')
             ax[i].set_xlabel("Time")
         fig.tight_layout()
         plt.legend()
         plt.show()

         # Get accumulated errors
         means_c = np.mean(all_acc, axis=0)
         stds_c = np.std(all_acc, axis=0)

         # Plot accumulated errors
         fig, ax = plt.subplots(2, 2, figsize=(20, 15))
         fig.suptitle(f'Accumulated relative error of Kalman Filter for {n} experiments')
         ax = np.array(ax).flatten()
         for i in range(4):
             ax[i].plot(np.arange(times), means_c[i], label=f"Mean of relative error")
             ax[i].fill_between(np.arange(times), np.maximum(means_c[i] - stds_c[i], 0), means_c[i] + stds_c[i], color =
         'purple', alpha = 0.2, label = r"$\pm$ Std")
             ax[i].set_title(f'$A_{i}$')
             ax[i].set_xlabel("Time")
         fig.tight_layout()
         plt.legend()
         plt.show()
```



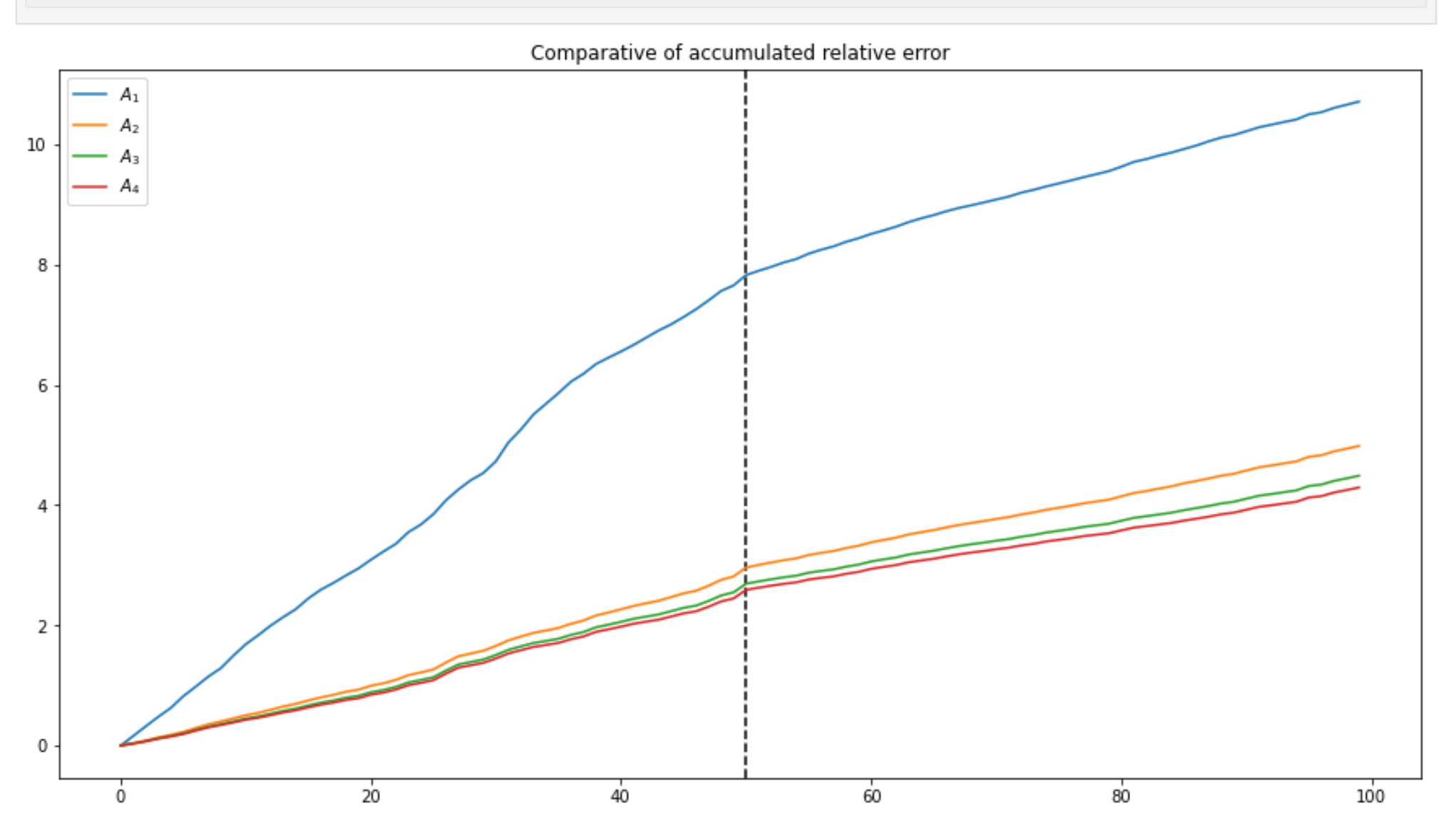


Para poder comparar los resultados, superponemos las salidas para cada caso.

```
In [13]: # Plot errors all in one
         plt.figure(figsize=(15,8))
         plt.title('Comparative of relative error')
         plt.axvline(50, color='k', linestyle='--')
         plt.plot(np.arange(times), means[0], label=f'$A_1$')
         plt.plot(np.arange(times), means[1], label=f'$A_2$')
         plt.plot(np.arange(times), means[2], label=f'$A_3$')
         plt.plot(np.arange(times), means[3], label=f'$A_4$')
         plt.legend()
         plt.show()
```



```
In [14]: # Plot accumulated errors all in one
         plt.figure(figsize=(15,8))
         plt.title('Comparative of accumulated relative error')
         plt.axvline(50, color='k', linestyle='--')
         plt.plot(np.arange(times), means_c[0], label=f'$A_1$')
         plt.plot(np.arange(times), means_c[1], label=f'$A_2$')
         plt.plot(np.arange(times), means_c[2], label=f'$A_3$')
         plt.plot(np.arange(times), means_c[3], label=f'$A_4$')
         plt.legend()
         plt.show()
```



Podemos extraer las siguientes conclusiones:

- La función de input **u_f(t)** se activa a partir de $t = 50$, por lo cual podemos ver una reducción del error a partir de entonces.
- El primer sistema para el que $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1$ tiene autovalores para los cuales $|\lambda| < 1$, lo que explica que oscile tanto entre estados.
- Los sistemas para los que $\mathbb{A} = \mathbb{A}_2$ y $\mathbb{A} = \mathbb{A}_3$ tienen autovalores muy similares, por lo que su comportamiento se parece mucho entre sí, además de tener un valor propio muy próximo a 1. Por lo que estarán cerca de converger a 0.
- El último sistema para el que $\mathbb{A} = \mathbb{A}_4$ tiene un autovalor de -1 por lo que no debería converger a 0.