Audias: Audio, Data Intelligence and Speech

Universidad Autónoma de Madrid

Procesamiento de Información Temporal
Tema 1:
Modelos Clásicos de Series Temporales
Parte 2: ARMA, (S)ARIMA(X), Series Multivariadas

Alicia Lozano Díez

alicia.lozano@uam.es

Audias – Audio, Data Intelligence and Speech

Universidad Autónoma de Madrid

http://audias.ii.uam.es

Materiales basados en los de Daniel Ramos Castro

1

Contenidos: Tema 1 Parte 2

- Modelo MA y ARMA
- No estacionariedad: ARIMA y SARIMA
- Variables exógenas: SARIMAX
- Series multivariadas

< audias >
Audio, Data Intelligence and Speech

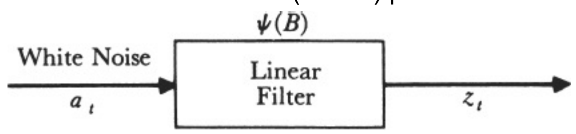
UAM Universidad Autónoma de Madrid

Modelos Autorregresivos de Media Móvil (ARMA)

3

Modelo MA

- Modelo Moving Average (MA)
  - Modela una secuencia de errores (ruidos) pasados



$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$ [Box06]

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q \qquad \tilde{z}_t = \theta(B) a_t$$

- Efecto de “suavizado” del error
- Si la serie presenta autocorrelación…
  - Es decir, “relación con sus propios valores pasados”
  - Entonces modelos MA poco adecuados
- Casi todas las series reales de interés son algo más que “ruido” a suavizar…

4

Modelo ARMA

- Modelo Autoregressive-Moving Average (ARMA)
  - Combina linealmente modelos AR y MA

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \cdots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\phi(B)\tilde{z}_t = \theta(B) a_t$$

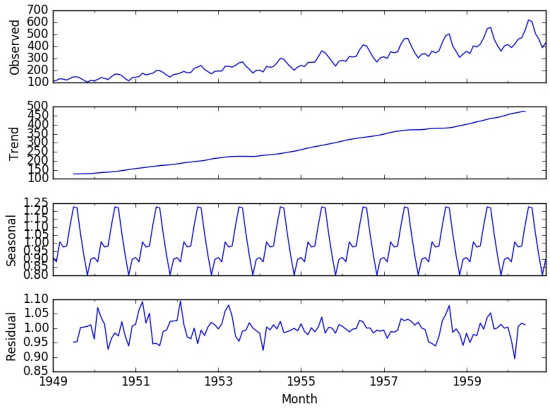
[Box06]

- Doble efecto
  - Es capaz de capturar relaciones de un punto con sus puntos anteriores (AR)
  - Es capaz de suavizar el ruido blanco para que no influya tanto (MA)
- Adecuado para muchas series temporales “reales”
- ¡Ojo! Siempre estacionarias
  - No tiene en cuenta posible no-estacionariedad

No Estacionariedad

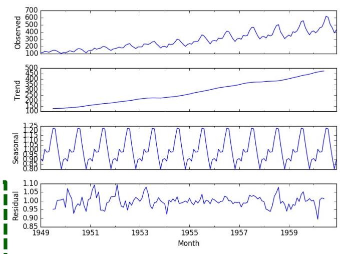
No Estacionariedad

- Muchas series temporales reales pueden descomponerse en varias componentes
  - Tendencia
  - Estacionalidad
  - Residuo



https://machinelearningmastery.com/decompose-time-series-data-trend-seasonality/

No Estacionariedad



- Residuo
  - Suele ser estacionaria ARMA

- Tendencia
  - Suele desaparecer derivando/diferenciando
    - En ocasiones varias veces ARIMA

- Estacionalidad
  - No desaparece derivando
    - Componente periódica
    - Derivada del seno = coseno…
    - Es necesario modelar esa parte por separado SARIMA

https://machinelearningmastery.com/decompose-time-series-data-trend-seasonality/

Modelo ARIMA

- Autorregresive Integrative Moving Average (ARIMA)
  - Primero derivamos hasta d veces
    - Objetivo: eliminar la influencia de la componente de tendencia

$$w_t = (1 - B)^d z_t = \nabla^d z_t \qquad \text{[Box08]}$$

  - Después, aplicar ARMA a dicho modelo derivado

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \cdots \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

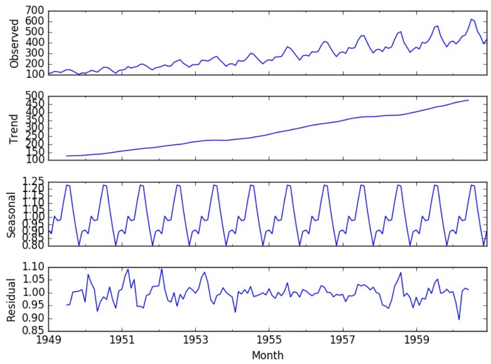
  - Al realizar una predicción, se obtiene z_t como…

$$S w_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_{t-j} = w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + \cdots \qquad z_t = S^d w_t \qquad S = \nabla^{-1} = (1 - B)^{-1}$$

  - De dicha suma viene lo de "Integrative"

Modelo SARIMA

- Seasonal Autorregresive Integrative Moving Average (SARIMA)
  - Intenta estimar la componente estacional de la serie
    - Supone que dicha componente se suma o multiplica al resto
    - A la serie resultante le aplicamos ARIMA



Modelo SARIMA

- Suposición clave
  - La estacionariedad tiene periodo S (unidades temporales)
- Por ello, aplicamos un ARIMA que en lugar de tomar una unidad temporal toma S unidades temporales
  - Modelo de "estacionalidad" (diferenciación y oper. "backward" B de orden S)

$$\Phi(B^s)\nabla_s^D z_t = \Theta(B^s)\alpha_t$$

- Estrategia típica:
  - Suponer que dicha componente estacional es multiplicativa (más común)
    - La componente estacional "modula" la amplitud del resto de componentes de la serie
    - SARIMA multiplicativo: SARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)$_s$
  - Existen otras estrategias

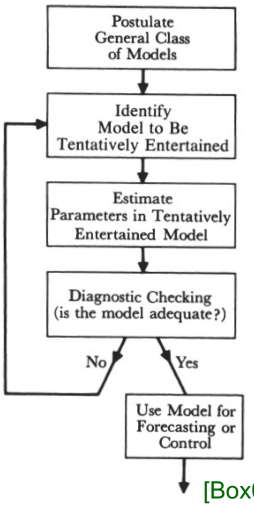
Audio, Data Intelligence and Speech

Universidad Autónoma de Madrid

Selección y Ajuste de Modelo
Metodología Box-Jenkins

Metodología Box-Jenkins

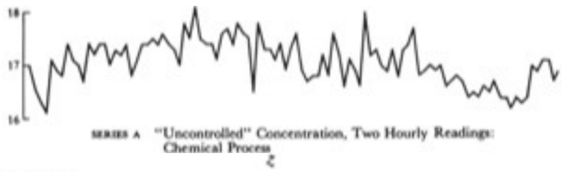
- Cinco pasos clave
  - Paso 1: postular clase general de modelos
    - Se selecciona una familia de modelos
      - Por ejemplo, modelos basados en filtros lineales…
  - Paso 2: identificar el modelo
    - Función de autocorrelación (ACF)
      - Correlación de una serie y ella misma desplazada
    - Función de autocorrelación parcial (PACF)
      - ACF eliminando la influencia de otros valores de desplazamiento



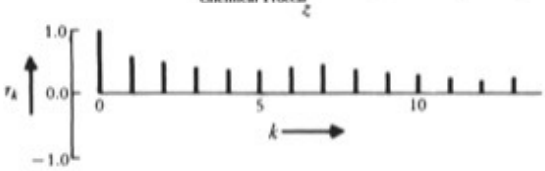
[Box08]

Metodología Box-Jenkins

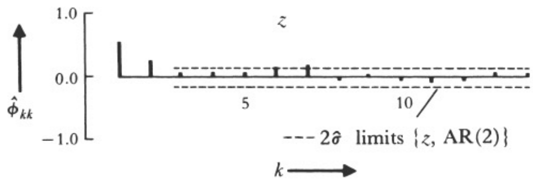
- Ejemplo [Box08]
  - "Serie A"



  - ACF



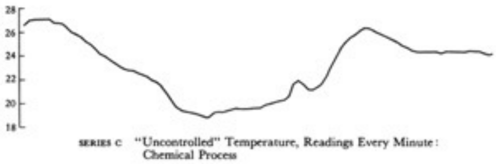
  - PACF



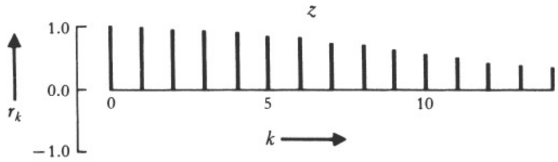
[Box08]

Metodología Box-Jenkins

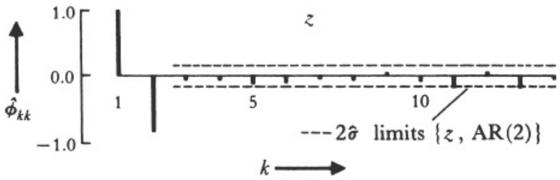
- Ejemplo [Box08]
  - "Serie C"



  - ACF



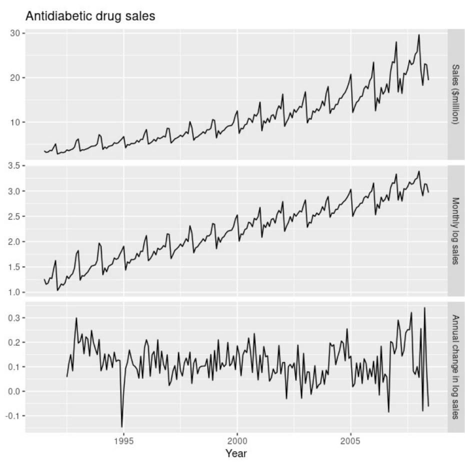
  - PACF



[Box08]

Metodología Box-Jenkins

- Identificación del modelo (un método, hay variaciones)
  - Primero, identificar estacionariedad
    - Tendencia
      - Se puede detectar derivando la serie y viendo que la ACF se convierte en una función que es 1 en desplazamiento 0, y 0 en el resto
    - Periodicidad
      - Mediante la autocorrelación (un pico en la autocorrelación en un desplazamiento determinado)
  - Segundo, eliminar estacionalidad y tendencia



https://otexts.com/fpp2/stationarity.html

Metodología Box-Jenkins

- Tercero: determinar el tipo de modelo estacionario sobre la señal resultante con ACF

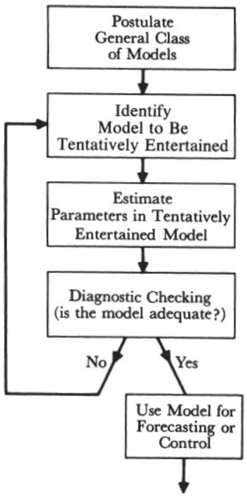
ACF	Modelo
Caída exponencial según aumenta el |desplazamiento|	AR
Caída alternativa (positiva, negativa) según aumenta el |desplazamiento|, o sinusoide amortiguada	AR
Hay uno o dos picos en desplazamientos dif. de cero, resto cero	MA
Caída según aumenta el |desplazamiento| empezando tras un cierto desplazamiento inicial	ARMA
Todos los valores cero salvo pico en desplazamiento cero	Ruido blanco
Valores altos a intervalos fijos	Componente estacional
No hay caída a cero	Serie no estacionaria

- PACF se usa para elegir el valor de p
  - Último pico importante en PACF es con desplazamiento p
- ACF se usa para elegir el valor de q
  - Último pico importante en ACF es con desplazamiento q

[Box08]

Metodología Box-Jenkins

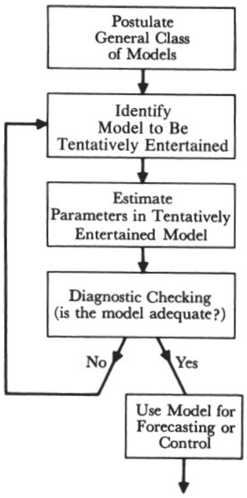
- Ajuste de los parámetros del modelo
  - Métodos basados en minimizar el error cuadrático medio entre la serie estimada y la serie a estimar
  - Varias metodologías
    - Modelo AR: Ecuaciones de Yule-Walker
      - Similar al método Durbin, o Levison-Durbin
    - Máxima verosimilitud
    - …



[Box08]

Metodología Box-Jenkins

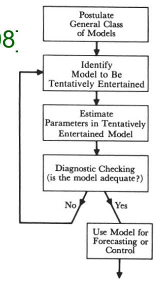
- Ajuste del modelo
  - Recordemos: modelo probabilístico
    - Error: gaussiana estándar
  - Métodos de bondad de ajuste probabilístico
    - Aikake Information Criterion
    - Bayesian Information Criterion
    - …
  - Buena bondad de ajuste con modelos gaussianos
    - Fácil de calcular



[Box08]

Metodología Box-Jenkins

[Box08]



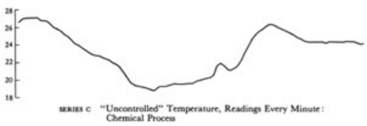
- Predicción
  - Utilizando el modelo de filtro lineal a partir de valores anteriores

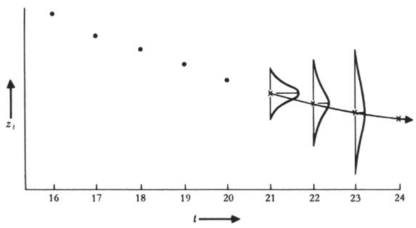
$$z_{t+l} = \varphi_1 z_{t+l-1} + \cdots + \varphi_{p+d} z_{t+l-p-d} - \theta_1 a_{t+l-1} - \cdots - \theta_q a_{t+l-q} + a_{t+l}$$

  - O de los “shocks”, resolviendo: $\varphi(B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = \theta(B)$

$$z_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+l-j}$$

  - Intervalos gaussianos de credibilidad





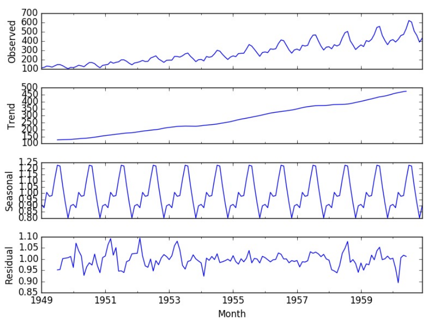
< audias >
Audio, Data Intelligence and Speech

Universidad Autónoma de Madrid

Variables Exógenas: ARMAX, ARIMAX, SARIMAX

Variables Exógenas

- No forman parte de la serie bajo análisis
  - Pero influyen en la misma
    - Es decir, son dependientes de la misma
- Ejemplo
  - Un activo varía
  - A la vez que otro activo varía
  - O a la vez que otro evento externo varía
    - Estación del año
    - Geopolítica
    - Demografía…



https://machinelearningmastery.com/decompose-time-series-data-trend-seasonality/

Variables Exógenas

- Se añaden al modelo como variables adicionales de entrada
  - Se modelan con coeficientes pasados como en AR y MA
  - Ejemplo, ARMAX:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-q} - \theta_1 a_{t-q} \boxed{- \beta_1 e_{t-1} - \beta_r e_{t-r}}$$

$$\phi(B)\tilde{z}_t = \phi(B) a_t \boxed{+ \beta(B) e_t}$$

- A partir de ahí, si se conoce la serie "exógena", los procedimientos siguiendo la metodología Box-Jenkins son similares (con alguna diferencia)
- Posibles modelos:
  - ARX
  - MAX
  - ARMAX
  - ARIMAX
  - SARIMAX

Series Temporales Multivariadas

Series Temporales Multivariadas

- Metodología similar (modelo de filtro lineal)
- Pero considerando la extensión multivariante…
  - Los escalares (valor de la serie en tiempo t) son vectores, no escalares
    - Todos los valores de la serie en t van en un mismo vector
  - Los coeficientes son matrices
    - No solo contemplan multiplicar un valor de cada serie en tiempo pasado "t-l"
    - Sino además la relación de unas series en el instante t-l con otras series en el instante t
      - Es decir, una serie en t-l puede influir en otra serie diferente en t
- Las herramientas se complican por la generalización al caso multivariante
  - Cálculo vectorial y matricial
  - Tiene en cuenta a la covarianza entre las series

Referencias Bibliográficas

- [Box08] George E. P. Box, Gwilym M Jenkins and Gregory C Reinsel. "Time series analysis : forecasting and control, 4th ed.". John Wiley and Sons, 2008.