Ejercicios: Descomposición QR y Valores singulares

1. Calcular los autovalores y autovectores asociados de las siguientes matrices 3 x 3. ¿Existe un conjunto de autovectores linealmente independientes?

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. Indicar si los vectores v_1 = (2,–1), v_2=(1,,1) y v_3=(1,3) son linealmente dependientes.

3. Considere los siguientes conjuntos de vectores. i) Muestre que el conjunto es linealmente independiente; ii) use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar un conjunto de vectores ortogonales; iii) determine un conjunto de vectores ortonormales a partir de los vectores en ii).

a. $\mathbf{v}_1 = (2, -1)^t,\ \mathbf{v}_2 = (1, 3)^t$

b. $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1)^t,\ \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)^t,\ \mathbf{v}_3 = (0, 2, 0)^t$

c. $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^t,\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1)^t,\ \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0)^t$

d. $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0, 2, 1)^t,\ \mathbf{v}_2 = (-1, 2, 0, -1, 1)^t,\ \mathbf{v}_3 = (0, 1, 0, 1, 0)^t,\ \mathbf{v}_4 = (-1, 0, 0, 1, 1)^t$

4. Calcular A = PDP^{-1} para las siguientes matrices D y P. Determine A^3.

a. $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b. $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d. $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. Para cada una de las siguientes matrices, determine si es diagonalizable y, en tal caso, encuentre P y D con A = PDP^{-1}.

a. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Para las matrices en el ejercicio 1 que tienen tres eigenvectores linealmente independientes, forme la factorización A = PDP^{-1}.

7. Muestre que cada una de las siguientes matrices son no singulares (determinante diferente de 0), pero no diagonalizables.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

8. Calcular la descomposición QR de las siguientes matrices (se recomienda hacer uno de los ejemplos a mano, y luego el resto con Python y comprobar el resultado)

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Determinar los valores singulares de las siguientes matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

10. Determinar la descomposición en valores singulares de las matrices del ejercicio anterior.