Ejercicios — Teoría de la Información

Gloria del Valle Cano
gloria.valle@estudiante.uam.es

Ejercicio 1 Demostrar que para $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$, la entropía de X es $S(X) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma^2)$.

Tomando $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (1) y $S(X) = -\int_{\mathcal{X}} f(x)\log_2 f(x)dx$ (2) para el caso continuo y sabiendo que $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ (3):

$$\begin{aligned}
S(X) = (1)(2) &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)dx \\
(3) &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)dx \\
&= -\frac{1}{\log 2}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\,dx\right) \\
&= -\frac{1}{\log 2}\left(\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)\overbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx}^{1} - \frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)(x-\mu)^2\,dx}_{E[(X-\mu)^2]}\right) \\
&= \frac{-\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)}{\log 2} + \frac{\overbrace{Var[X]}^{\sigma^2}}{2\sigma^2\log 2} \\
&= \frac{-\log 1 + \log(\sqrt{2\pi}\sigma)}{\log 2} + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2\log 2} \\
&= \frac{\log(\sqrt{2\pi}\sigma)}{\log 2} + \frac{1}{2\log 2} \\
&= \log_2(\sqrt{2\pi}\sigma) + \frac{\log e}{2\log 2} \\
&= \log_2(\sqrt{2\pi}\sigma) + \frac{1}{2}\log_2 e \\
&= \frac{1}{2}(\log_2((\sqrt{2\pi}\sigma)^2) + \log_2 e) \\
&= \frac{1}{2}\log_2(2\pi\sigma^2 e)
\end{aligned}$$

De esta manera se puede observar que la entropía no depende de la media de la gaussiana sino de la varianza.

Ejercicio 2 Demostrar que $MI(X,Y) = MI(Y,X)$.

La información mutua media de dos variables aleatorias X e Y es por definición para el caso discreto:

$$MI(X,Y) = \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 \left(\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \right)$$

Para todo $x \in X, y \in Y$. Separando e intercambiando los sumatorios se puede entender que la igualdad anterior también es equivalente a:

$$MI(X,Y) = \sum_y \sum_x p(y,x) \log_2 \left(\frac{p(y,x)}{p(y)p(x)} \right) = MI(Y,X)$$

Ya que:

$$\frac{p(x,y)}{p(x)} = \frac{p(x,y)p(y)}{p(x)p(y)} = \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} = \frac{p(y)p(x)}{p(y)}$$

También se puede demostrar para el caso continuo resolviendo la integral doble definida para X e Y.

Ejercicio 3 Demostrar que $MI(X,Y) = S(X) + S(Y) - S(X,Y)$.

Por definición de información mutua promedio de X e Y, teniendo $x \in X, y \in Y$ y aplicando propiedades de los logaritmos:

$$\begin{aligned}
MI(X,Y) &= \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 \left(\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \right) \\
&= \sum_x \sum_y p(x,y)(\log_2 p(x,y) - \log_2 p(x) - \log_2 p(y)) \\
&= \underbrace{\sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 p(x,y)}_{-S(X,Y)} - \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 p(x) - \sum_x \sum_y p(x,y) \log_2 p(y) \\
&= -S(X,Y) - \sum_x \log_2 p(x) \sum_y p(x,y) - \sum_y \log_2 p(y) \sum_x p(x,y) \\
&= -S(X,Y) - \sum_x \log_2 p(x)p(x) - \sum_y \log_2 p(y)p(y) \\
&= -S(X,Y) + S(X) + S(Y)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4 Demostrar los siguientes enunciados:

(a) $S(X,Y) = S(X) + S(Y|X) = S(Y) + S(X|Y)$

$$\begin{aligned}
S(X,Y) &= -\sum_{x,y} p(x,y)\log_2 p(x,y) \\
&= -\sum_{x,y} p(x,y)\log_2 (p(y|x)p(x)) \\
&= -\sum_{x,y} p(x,y)\log_2 p(x) - \sum_{x,y} p(y|x)p(x)\log_2 p(y|x) \\
&= -\sum_{x} \log_2 p(x)p(x) - \sum_{x} p(x)\sum_{y} p(y|x)\log_2 p(y|x) \\
&= S(X) + S(Y|X)
\end{aligned}$$

(b) $MI(X,Y) = S(X) - S(X|Y) = S(Y) - S(Y|X)$

$$\begin{aligned}
MI(X,Y) &= \sum_{x,y} p(x,y)\log_2\left(\frac{p(x|y)}{p(x)}\right) \\
&= \sum_{x,y} p(x,y)(\log_2 p(x|y) - \log_2 p(x)) \\
&= \sum_{x,y} p(x|y)p(y)\log_2 p(x|y) - \sum_{x} \log_2 p(x)p(x) \\
&= -S(X|Y) + S(X).
\end{aligned}$$

(c) $MI(X,X) = S(X)$

$$\begin{aligned}
MI(X,X) &= S(X) - S(X|Y) \\
&= S(X) + \sum_{x} p(x)\overbrace{\sum_{x} p(x|x)\log_2 p(x|x)}^{0} \\
&= S(X)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5 Demostrar que cuando $\Delta t \ll \frac{1}{r}$, $S(X) = Tr\log_2\frac{e}{(r\Delta t)}$, donde $Tr = N$ (número de disparos en una secuencia de longitud T).

Teniendo en cuenta que:

- T es el intervalo de tiempo.
- Δt el tamaño de la ventana temporal para la cual se aplica un 1 si se detecta un spike y un 0 en el caso contrario.
- r es la tasa de aparición de un spike, tal que, $p = P(spike) = r\Delta t$ y $N = \frac{T}{\Delta t}$ el número total de ventanas o codificaciones.

- $N_1 = pN$ es el número de 1s en T y $N_0 = (1-p)N$ como el número de 0s en T, de forma que $N = N_1 + N_0$.
- La entropía S se puede tomar como el logaritmo binario del número posible de eventos (sucesos equiprobables):

$$S = \log_2\left(\frac{N!}{N_1!N_0!}\right).$$

Ya que suponemos que las cadenas utilizadas son suficientemente grandes, aplicamos la *Fórmula de Stirling*, que se interpreta como:

$$\log(x!) = x(\log(x) - 1) + \mathcal{O}(\log x)$$

Y teniendo en cuenta que cuando $x \to \infty$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
S &\approx \frac{1}{\log 2}\left(\frac{N!}{N_1!N_0!}\right) \\
&= \frac{1}{\log 2}\left(\log(N!) - \log(N_1!) - \log(N_0!)\right) \\
&= \frac{1}{\log 2}\left(N\log(N) - N_1\log(N_1) - N_0\log(N_0) - N + N_1 + N_0\right) \\
&= \frac{1}{\log 2}\left((N_1+N_0)\log(N) - N_1\log(N_1) - N_0\log(N_0)\right) \\
&= \frac{1}{\log 2}\left(N_1(\log(N) - \log(N_1)) + N_0(\log(N) - \log(N_0))\right) \\
&= -\frac{N}{\log 2}\left(\frac{N_1}{N}\log\left(\frac{N_1}{N}\right) + \frac{N_0}{N}\log\left(\frac{N_0}{N}\right)\right) \\
&= -\frac{N}{\log 2}\left(p\log(p) + (1-p)\log(1-p)\right) \\
&= -\frac{T}{\Delta t\log 2}\left(r\Delta t\log(r\Delta t) + (1-r\Delta t)\log(1-r\Delta t)\right)
\end{aligned}$$

Simplificando la expresión y teniendo en cuenta que la probabilidad de contar un spike es baja tal que $p = r\Delta t \ll 1$:

$$\begin{aligned}
S &\approx \frac{1}{\log 2}\left(-Tr\log(r\Delta t) + Tr\right) \\
&= \frac{Tr}{\log 2}(1 - \log(r\Delta t)) \\
&= \frac{Tr}{\log 2}\log\left(\frac{e}{r\Delta t}\right) \\
&= Tr\log_2\left(\frac{e}{r\Delta t}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 6 Demostrar $S(X, Y|Z) = S(X|Z) + S(Y|X, Z)$.

Dadas tres variables aleatorias X, Y y Z, el teorema de Bayes con tres eventos se puede escribir como:

$$p(x, y|z) = \frac{p(z)p(x|z)p(y|x, z)}{p(z)} = p(x|z)p(y|x, z).$$

Tomando logaritmos y esperanzas a ambos lados:

$$E\left[\log_2 p(x, y|z)\right] = E\left[\log_2 p(x|z)\right] + E\left[\log_2 p(y|x, z)\right]$$

Lo que es equivalente por definición a:

$$S(X, Y|Z) = S(X|Z) + S(Y|X, Z)$$