Examen de Procesos Estocásticos 2021-2022. [entrega: 2022/01/12, 20:00]

Apellidos: **Nombre:**
Grupo:

1	2	3	4	5	6	7	8	T

- **El trabajo debe ser individual.**
- Se puede utilizar el material del curso, así como información, excepto código, de otras fuentes siempre y cuando se poporcionen las debidas referencias.
- Se valorará el uso de fuentes originales para las cuales se proporcionará debida referencia en un formato estándar. En LaTeX, se recomienda el uso de BibTeX.
- Para que la entrega sea válida es necesario rellenar la declaración de autoría, firmarla y entregarla.
- En caso de no encontrar la forma de hacer una derivación de alguna expresión, se puede realizar la simulación directamente.
- La hora de finalización del examen es 20:00.
- Se permite la entrega hasta las 20:30.
- La entrega consiste en un único fichero .zip, con el siguiente nombre

  `<apellido1>_<apellido2>_<nombre>_PE_2021_2022.zip`

  No utilicéis espacios, mayúsculas, o tildes. Por ejemplo,

  `suarez_gonzalez_alberto_PE_2021_2022.zip`

  Este fichero comprimido debe incluir, al menos, los siguientes ficheros:

  - Un único fichero en formato *pdf* con las soluciones de los ejercicios que requieran alguna explicación o derivación. Puede ser escaneado a partir de un documento manuscrito. Los apartados a los que se debe responder en este fichero aparecen en el examen indicados como [PDF].
  - Un único cuaderno (*notebook*) de python con las soluciones de ejercicios que requieran gráficas, simulaciones, etc. Los apartados a los que se debe responder en este cuaderno aparecen en el examen indicados como [IPYNB]. En lugar del PDF, las derivaciones se pueden realizar en celdas de tipo *markdown* dentro del cuaderno de python.
  - Fichero .py en el que se incluyen las funciones que es necesario elaborar para realizar simulaciones. Los apartados a los que se debe responder en este fichero aparecen en el examen indicados como [PY].
  - Otros ficheros .py necesarios para se pueda ejecutar el código del cuaderno de python.
  - La declaración de autoría rellena y firmada. La firma puede ser escaneada.
- Se valorará la calidad del código entregado (PEP 20: The Zen of Python, PEP 8: estilo de programación, PEP 257: documentación, etc.)
- El notebook entregado debe poder ser ejecutado sin errores.
- Para realizar operaciones concretas (por ejemplo, simulación, cálculo de medias, covarianzas, etc.) se deben definir funciones debidamente documentadas en alguno de los ficheros (.py) entregados. No se debe definir funciones en el notebook (ipynb). .
- **Indicad vuestro nombre y apellidos y fecha de realización al principio de todos los ficheros entregados [PDF, IPYNB & PY].**

1. Consideremos una sede en red (*website*) compuesta por tres páginas cuyas etiquetas son P_1, P_2, P_3, respectivamente. Para identificar usuarios con un comportamiento atípico supondremos que el patrón de navegación sigue una cadena de Markov en tiempo continuo. Con el fin estimar los parámetros del modelo hemos recopilado datos de navegación para un grupo representativo de usuarios. Los datos han sido registrados el mismo día de la semana y a la misma hora, de forma que podamos asumir que los parámetros del modelo son constantes con el tiempo.

   Los resultados de las mediciones son los siguientes:

   - En promedio, los usuarios pasan 2 minutos en P_1, 30 segundos en P_2 y 1 minuto en P_3.
   - Las transiciones entre páginas del sitio en red tienen las siguientes probabilidades

Estado inicial / final	P_1	P_2	P_3
P_1	$*$	0.2	0.8
P_2	0.3	$*$	0.7
P_3	0.6	0.4	$*$

   (a) Dibuja el diagrama de transiciones de la cadena de Markov. Etiqueta las transiciones con la probabilidad correspondiente.
   [PDF o IPYNB]

   (b) Escribe la matriz de transiciones para el proceso de saltos subyacente (*jump process*).
   [PDF o IPYNB]

   (c) Deriva la distribución estacionaria para el proceso de saltos.
   [PDF o IPYNB]

   (d) Deriva la distribución estacionaria para la cadena de Markov en tiempo continuo.
   [PDF o IPYNB]

   (e) Deriva el correspondiente generador infinitesimal.
   [PDF o IPYNB]

   (f) A partir del generador infinitesimal deriva la distribución estacionaria del proceso y compárala con el resultado anterior.
   [PDF o IPYNB]

   (g) Simula trayectorias del proceso suponiendo que en el instante $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado $P(t = 0) = P_1$.
   [PY & IPYNB]

   (h) Utilizando la secuencia de estados de la cadena de Markov en el régimen estacionario:

      i. Estima la distribución estacionaria del proceso de saltos subyacente a partir de una única trayectoria de la cadena de Markov en tiempo continuo.
      [IPYNB]

      ii. Estima la distribución estacionaria de la cadena de Markov en tiempo continuo a partir de una única trayectoria del proceso.
      [IPYNB]

      iii. Estima la distribución de la cadena de Markov en tiempo continuo en el límite $t \to \infty$ a partir de los estados finales en $M = 1000$ trayectorias simuladas.
      [IPYNB]

      iv. Comenta los resultados de los apartados anteriores.
      [IPYNB]

   (i) ¿Coinciden las distribuciones estacionarias para una cadena de Markov en tiempo discreto y para el proceso en tiempo continuo, ambas con el mismo diagrama de transición? En caso de que coincidan indica la razón. En caso de que no coincidan, define una cadena de Markov en tiempo continuo con el mismo diagrama de transiciones que tenga la misma distribución estacionaria que la correspondiente en tiempo discreto.
   [IPYNB]

   (j) En el modelo hemos supuesto que no hay usuarios que accedan desde paginas externas o abandonen el sito en red: todas las transiciones son entre páginas dentro del sitio. ¿Cómo podríamos modificar el modelo de forma que se tengan en cuenta los usuarios que acceden y los que abandonan el sitio en red durante el tiempo de observación? ¿En qué condiciones el modelo modificado alcanzaría un estado estacionario?
   [PDF o IPYNB].

2. **Modelo de Vasicek (finanzas).**

En el modelo de Vasicek se realiza la suposición de que la curva que describe la evolución del tipo de interés a corto plazo con el tiempo ($r(t)$) es una realización de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. La ecuación diferencial estocástica para este proceso es

$$dr(t) = -\alpha \left(r(t) - r_\infty \right) dt + \sigma dW(t), \quad r(s) \perp dW(t), \ \forall s \leq t, \tag{1}$$

donde $\alpha > 0$ es la tasa de reversión a la media, r_∞ el tipo de interés a largo plazo y $\sigma > 0$ la volatilidad instantánea.

Este proceso tiene las siguientes propiedades:

- Es estacionario.
- Presenta reversión a la media.

La solución de esta ecuación diferencial estocástica para $t \geq t_0$ a partir de la condición inicial $r(t_0) = r_0$ es

$$r(t) = r_\infty + \left(r_0 - r_\infty \right) e^{-\alpha(t-t_0)} + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha(t-t_0)}}{2\alpha}} Z, \quad Z \sim N(0, 1). \tag{2}$$

(a) A partir de Eq. (2) deriva las expresiones para $\mathbb{E}\left[r(t) | r(t_0) = r_0 \right]$ y $\mathrm{Cov}\left[r(t), r(t') | r(t_0) = r_0 \right]$.
[PDF o IPYNB]

(b) Suponiendo que r_∞ y r_0 son del mismo orden de magnitud, y en función del los parámetros del modelo ¿En qué escala de tiempo se alcanza el estado estacionario para este proceso? Teniendo en cuenta que en doble precisión los valores 1.0 y $(1.0 + eps)$ con $eps \approx 10^{-16}$ son idénticos, ¿cuánto tiempo es necesario simular para que se pueda considerar que, numéricamente, el proceso está en estado estacionario?
[PDF o IPYNB]

(c) A partir de las expresiones para $\mathbb{E}\left[r(t) | r(t_0) = r_0 \right]$ y $\mathrm{Cov}\left[r(t), r(t') | r(t_0) = r_0 \right]$, deriva las expresiones para las funciones de media y de covarianza del proceso en el estado estacionario; es decir, $\mathbb{E}\left[r(t) \right]$ y $\mathrm{Cov}\left[r(t), r(t') \right]$.
[PDF o IPYNB]

(d) A partir de los resultados de los apartados anteriores deriva la expresión de

$$\mathbb{P}\left(t, r(t) | t_0, r_0 \right),$$

la probabilidad de que el valor del tipo de interés a tiempo t sea $r(t)$ dado que a tiempo t_0 su valor es $r(t_0) = r_0$.
[PDF o IPYNB]

(e) Deriva la expresión para $\mathbb{P}\left(t, r(t) | t_0, r_0 \right)$ en el estado estacionario.
[PDF o IPYNB]

(f) Deriva los siguientes límites

$$\lim_{t \to 0} \mathbb{P}\left(t, r(t) | t_0, r_0 \right)$$
$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(t, r(t) | t_0, r_0 \right).$$

y explica su significado.
[PDF o IPYNB]

(g) Suponiendo que $r_\infty = 5\%$, $\tau_\alpha = 2$, $r_0 = 10\%$, simula $M = 10000$ trayectorias del proceso desde $t_0 = 0$ (hoy) hasta $t_0 + T$ con $T = 15$ años, en $N = 100$ pasos de tiempo, utilizando los siguientes algoritmos:

- El algoritmo de Euler estocástico.
- El algoritmo de Milstein.
- La basada en la solución exacta, dada por Eq. (2).

[PY & IPYNB]

(h) Para cada una de las simulaciones, compara gráficamente las estimaciones muestrales de la media y la desviación estandar de $r(t)$ con sus valores exactos, derivados anteriormente, y con sus valores en el régimen estacionario.
[PY & IPYNB]

(i) Estima a partir de las simulaciones el valor de las autocorrelaciones en el régimen estacionario, $\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$, con $\gamma(\tau) = \text{Cov}\left[r(t+\tau)r(t)\right]$. Para ello, utiliza como referencia $t = 10$ años.

[PY & IPYNB]

(j) Dibuja las primeras 50 trayectorias simuladas, superponiendo en la gráfica,

- La media condicional ($\mathbb{E}\left[r(t)|r(t_0) = r_0\right]$),
- La media condicional mas/menos 2 veces la distribución estándar condicional ($\text{Std}\left[r(t)|r(t_0) = r_0\right]$),
- La media incondicional ($\mathbb{E}\left[r(t)\right]$),
- La media incondicional mas/menos 2 veces la distribución estándar ($\text{Std}\left[r(t)\right]$).

[PY & IPYNB]

(k) Los valores de los parámetros del modelo utilizados para la simulación no reflejan la situación financiera actual. Busca información sobre el tipo de interés en España hoy (por ejemplo, el Euríbor), el tipo de interés a largo plazo (por ejemplo, el que se utiliza en bonos a 10 años), la tasa de reversión a la media (α) y la volatilidad (σ) y repite las simulaciones. Muestra la misma gráfica del apartado anterior (es decir, 50 trayectorias, junto con la media y la media más/menos 2 desviaciones estándar).

[PDF o IPYNB]

(l) A la vista de los resultados de las simulaciones,

- ¿Qué quiere decir que el proceso tenga reversión a la media?
- ¿En qué escala de tiempo se observa dicha reversión a la media?
- ¿Qué quiere decir que el proceso es estacionario?
- ¿Es la simulación realizada estacionaria?
- ¿Cuál es la escala de tiempo para el régimen transitorio?
- ¿Qué relación hay entre las escalas de tiempo de reversión a la media y la correspondiente al régimen transitorio?

[PDF o IPYNB]