Métodos Avanzados en Estadística

Tema 4: Clasificación

Entrega de ejercicios

22 de diciembre 2021

Gloria del Valle Cano
gloria.valle@estudiante.uam.es

Ejercicio 4

Sea $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ un vector aleatorio tal que la distribución de Y condicionada a X es de Bernoulli de parámetro $(1+e^{-\beta X})^{-1}$, donde $\beta \in \mathbb{R}$, y $P(Y=0)=P(Y=1)=1/2$. Supongamos que queremos predecir Y a partir de X. Responde a las siguientes preguntas, dejando el resultado en función del parámetro β.

(a) Determina la regla de clasificación óptima en este modelo.

Se cumple por tanto que:

- $P(Y=1|X=x)=(1+e^{-\beta x})^{-1}$
- $P(Y=0|X=x)=1-(1+e^{-\beta x})^{-1}$

A raíz de esto podemos obtener los valores para los que la probabilidad es mayor que $\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
(1+e^{-\beta x})^{-1} > \frac{1}{2} &\iff 2 > 1+e^{-\beta x} && (1)\\
&\iff 1 < e^{-\beta x} && (2)\\
&\iff \ln(1) < \ln(e)\beta x && (3)\\
&\iff \beta x > 0 && (4)
\end{aligned}
$$

Por tanto, la regla de clasificación óptima es la siguiente:

$$
g^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \beta x > 0 \\ 0, & \text{si } \beta x \le 0 \end{cases}
$$

(b) Si X tiene distribución uniforme en $(0,1)$, calcula el error de la regla de clasificación del apartado anterior (error Bayes).

La probabilidad de error de clasificación viene dada por:

$$
\mathcal{L}^* = \mathbb{E}\big(min\{\eta(X), 1-\eta(X)\}\big) = \int \underbrace{min\{\eta(X), 1-\eta(X)\}}_{h(x)} f(x)dx,
$$

tomando como $\eta(X)=P(Y=1|X=x)=(1+e^{-\beta x})^{-1}$, $f(x)$ la distribución uniforme y $h(x)$:

$$
h(x) = \begin{cases} \eta(x), & \text{si } \beta < 0 \\ 1-\eta(x), & \text{si } \beta \ge 0 \end{cases}
$$

Por tanto, para $\beta < 0$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^* = \int (1+e^{-\beta x})^{-1} f(x)dx &= \int_0^1 (1+e^{-\beta x})^{-1}dx && (5)\\
&= \int_0^1 \frac{e^{\beta x}}{1+e^{\beta x}}dx && (6)\\
&= \frac{1}{\beta}\int_0^1 \frac{\beta e^{\beta x}}{1+e^{\beta x}}dx && (7)\\
&= \frac{1}{\beta}\ln(1+e^{\beta x})\Big|_0^1 && (8)\\
&= \frac{1}{2\beta}\ln\left(1+e^{\beta}\right) && (9)
\end{aligned}
$$

Para el caso completo

$$
\mathcal{L}^* = \begin{cases} \frac{1}{2\beta}\ln\left(1+e^{\beta}\right), & \text{si } \beta < 0 \\ 1-\frac{1}{2\beta}\ln\left(1+e^{\beta}\right), & \text{si } \beta \ge 0 \end{cases}
$$

(c) Si X tiene distribución uniforme en $(0,1)$, calcula $\lim_{n\to\infty} EL_n$, donde L_n es la probabilidad de error correspondiente al clasificador del vecino más próximo. Compara el resultado con el del apartado anterior.

Como vimos en clase, si (X_1, Y_1) es el vecino más próximo de (X,Y) entonces $X_1 \approx X$ y como consecuencia Y_1 e Y se comportan aproximadamente como vaiid $B(1,\eta(x))$. Entonces:

$$
\mathbb{E}(\mathcal{L}_n) \approx \mathcal{L}_{1NN} := 2\mathbb{E}(\eta(X)(1-\eta(X)))
$$

Por lo que se puede probar que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathcal{L}_n)=\mathcal{L}_{1NN}$ para cualquier distribución de datos. Como además se verifica

$$
\mathcal{L}^* \le \mathcal{L}_{1NN} \le 2\mathcal{L}^*(1-\mathcal{L}^*)
$$

calcularemos $\mathcal{L}_{1NN}$ y lo compararemos con el error bayes calculado en el apartado **b)**.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1NN} &= 2\int f(x)(\eta(x)(1-\eta(x)))dx && (10)\\
&= 2\int_0^1 (1+e^{-\beta x})^{-1}(1-(1+e^{-\beta x})^{-1})dx && (11)\\
&= 2\int_0^1 \frac{1-\frac{1}{1+e^{-\beta x}}}{1+e^{-\beta x}}dx && (12)\\
&= 2\frac{tanh(\frac{\beta}{2})}{2\beta} = \frac{tanh(\frac{\beta}{2})}{\beta} && (13)
\end{aligned}
$$

- Para $\beta < 0$, $\beta = -1$:

$$
-\frac{\ln(e^{-1}+1)}{2} \le -\tanh\left(-\frac{1}{2}\right) \iff -0.15... \le 0.46... \text{ Sí se cumple.}
$$

- Para $\beta \ge 0$, $\beta = 1$:

$$
1-\frac{\ln(e+1)}{2} \le \tanh\left(\frac{1}{2}\right) \iff 0.35... \le 0.46... \text{ Sí se cumple.}
$$

Ejercicio 6

En un experimento descrito en Prentice (1976) se expuso una muestra de escarabajos a cierto pesticida. Tras cinco horas de exposición a distintos niveles de concentración del pesticida algunos de los escarabajos murieron y otros sobrevivieron. Los resultados para cada dosis aparecen en la tabla siguiente.

Dosis ($log_1 0CS_2mgl^{-1}$)	N. insectos	N. muertos
1.6907	59	6
1.7242	60	13
1.7552	62	18
1.7842	56	28
1.8113	63	52
1.8369	59	53
1.8610	62	61
1.8839	60	60

Formula un modelo de regresión logística para analizar estos datos y estima la probabilidad de que muera un escarabajo expuesto durante cinco horas a una dosis de concentración 1.8.

Se vuelcan los resultados del dataset en un dataframe y se ajusta el modelo con la función `glm` de R (Generalized Linear Model) con el parámetro *family* como binomial, donde X es referente a la dosis, $Y=0$ si el escarabajo sobrevive y $Y=1$ en caso contrario.

In [1]:

```
# Load data
data <- cbind(c(1.6907, 59, 6),
              c(1.7242, 60, 13),
              c(1.7552, 62, 18),
              c(1.7842, 56, 28),
              c(1.8113, 63, 52),
              c(1.8369, 59, 53),
              c(1.8610, 62, 61),
              c(1.8839, 60, 60))

# Create dataframe
df <- as.data.frame(t(data))
colnames(df) <- c("Dose", "Insects", "Deaths")
df

# Get dose values
value <- df$Dose

# Fit model (deaths vs survivors)
model <- glm(cbind(df$Deaths, df$Insects-df$Deaths) ~ value, family=binomial)

# Predict
predicted <- predict(model, data.frame(value=1.8), type='response')

# Print
cat("Probabilidad de que el escarabajo muera: ", predicted)
```

A data.frame: 8 × 3

Dose	Insects	Deaths
<dbl>	<dbl>	<dbl>
1.6907	59	6
1.7242	60	13
1.7552	62	18
1.7842	56	28
1.8113	63	52
1.8369	59	53
1.8610	62	61
1.8839	60	60

```
Probabilidad de que el escarabajo muera:  0.7249464
```

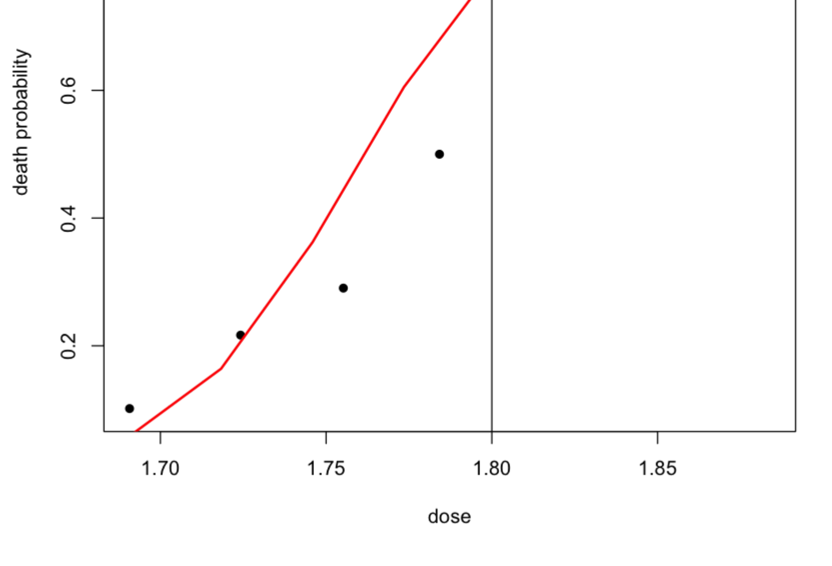
In [2]:

```
summary(model)
```

```
Call:
glm(formula = cbind(df$Deaths, df$Insects - df$Deaths) ~ value, 
    family = binomial)

Deviance Residuals: 
    Min       1Q   Median       3Q      Max  
-1.5941  -0.3944   0.8329   1.2592   1.5940  

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)    
(Intercept)  -60.717      5.181  -11.72   <2e-16 ***
value         34.270      2.912   11.77   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 284.202  on 7  degrees of freedom
Residual deviance:  11.232  on 6  degrees of freedom
AIC: 41.43

Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

In [6]:

```
new_data <- data.frame(Dose = seq(min(df$Dose), max(df$Dose), len=8))
pred_value <- predict(model, new_data, type='response')
plot(value, df$Deaths / df$Insects, pch=16, ylab='death probability', xlab='dose')
lines(new_data$Dose, pred_value, col='red', lwd=2)
abline(v=1.8)
```



In [ ]: