

## 1 Datenstrukturen

### 1.1 Segmentbaum

SegTree baut den Baum auf  $O(n)$   
 query findet Summe über  $[l, r]$   $O(\log(n))$   
 update ändert einen Wert  $O(\log(n))$

```

1 struct SegTree {
2     using T = ll;
3     int n;
4     vector<T> tree;
5     static constexpr T E = 0; // Neutral element for combine
6
7     SegTree(vector<T>& a) : n(sz(a) + 1), tree(2 * n, E),
8     // SegTree(int size, T def = E) : n(size + 1), tree(2 * n, def),
9     h(_lg(2 * n)), lazy(n, UF), k(2 * n, 1) {
10        copy(all(a), tree.begin() + n);
11        for (int i = n - 1; i > 0; i--) {
12            k[i] = 2 * k[2 * i];
13            tree[i] = comb(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
14        }
15    }
16
17    T comb(T a, T b) {return a + b;} // modify this + E
18
19    void apply(int i, U val) { // And this + UF
20        tree[i] = val * k[i];
21        if (i < n) lazy[i] = val; // Don't forget this
22    }
23
24    void push_down(int i) {
25        if (lazy[i] != UF) {
26            apply(2 * i, lazy[i]);
27            apply(2 * i + 1, lazy[i]);
28            lazy[i] = UF;
29        }
30    }
31
32    void push(int i) {
33        for (int s = h; s > 0; s--) push_down(i >> s);
34    }
35
36    void build(int i) {
37        while (i /= 2) {
38            push_down(i);
39            tree[i] = comb(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
40        }
41
42        void update(int l, int r, U val) {
43            l += n, r += n;
44            int l0 = l, r0 = r;
45            push(l0), push(r0 - 1);
46            for (; l < r; l /= 2, r /= 2) {
47                if (l&1) apply(l++, val);
48                if (r&1) apply(--r, val);
49            }
50            build(l0), build(r0 - 1);
51
52        T query(int l, int r) {
53            l += n, r += n;
54            push(l), push(r - 1);
55            T resL = E, resR = E;
56            for (; l < r; l /= 2, r /= 2) {
57                if (l&1) resL = comb(resL, tree[l++]);
58                if (r&1) resR = comb(tree[--r], resR);
59            }
60            return comb(resL, resR);
61
62        // Optional:
63        int lower_bound(int l, int r, T x) {
64            l += n, r += n;
65            push(l), push(r - 1);
66            int a[64] = {}, lp = 0, rp = 64;
67            for (; l < r; l /= 2, r /= 2) {
68                if (l&1) a[lp++] = l++;
69                if (r&1) a[--rp] = --r;
70            }
71
72        }
73
74    }
75
76 };

```

#### 1.1.1 Lazy Propagation

Assignment modifications, sum queries

lower\_bound erster Index in  $[l, r] \geq x$  (erfordert max-combine)  $O(\log(n))$

```

1 struct SegTree {
2     using T = ll; using U = ll;
3     int n;
4     static constexpr T E = 0; // Neutral element for combine
5     static constexpr U UF = INF; // Unused value by updates
6     vector<T> tree;
7     int h;
8     vector<U> lazy;
9     vector<int> k; // size of segments (optional)

```

```

10    SegTree(const vector<T>& a) : n(sz(a) + 1), tree(2 * n, E),
11    // SegTree(int size, T def = E) : n(size + 1), tree(2 * n, def),
12    h(_lg(2 * n)), lazy(n, UF), k(2 * n, 1) {
13        copy(all(a), tree.begin() + n);
14        for (int i = n - 1; i > 0; i--) {
15            k[i] = 2 * k[2 * i];
16            tree[i] = comb(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
17        }
18
19        T comb(T a, T b) {return a + b;} // Modify this + E
20
21        void apply(int i, U val) { // And this + UF
22            tree[i] = val * k[i];
23            if (i < n) lazy[i] = val; // Don't forget this
24
25        void push_down(int i) {
26            if (lazy[i] != UF) {
27                apply(2 * i, lazy[i]);
28                apply(2 * i + 1, lazy[i]);
29                lazy[i] = UF;
30            }
31
32        void push(int i) {
33            for (int s = h; s > 0; s--) push_down(i >> s);
34        }
35
36        void build(int i) {
37            while (i /= 2) {
38                push_down(i);
39                tree[i] = comb(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
40            }
41
42            void update(int l, int r, U val) {
43                l += n, r += n;
44                int l0 = l, r0 = r;
45                push(l0), push(r0 - 1);
46                for (; l < r; l /= 2, r /= 2) {
47                    if (l&1) apply(l++, val);
48                    if (r&1) apply(--r, val);
49                }
50                build(l0), build(r0 - 1);
51
52            T query(int l, int r) {
53                l += n, r += n;
54                push(l), push(r - 1);
55                T resL = E, resR = E;
56                for (; l < r; l /= 2, r /= 2) {
57                    if (l&1) resL = comb(resL, tree[l++]);
58                    if (r&1) resR = comb(tree[--r], resR);
59                }
60                return comb(resL, resR);
61
62            // Optional:
63            int lower_bound(int l, int r, T x) {
64                l += n, r += n;
65                push(l), push(r - 1);
66                int a[64] = {}, lp = 0, rp = 64;
67                for (; l < r; l /= 2, r /= 2) {
68                    if (l&1) a[lp++] = l++;
69                    if (r&1) a[--rp] = --r;
70                }
71
72            }
73
74        }
75
76    };

```

```

65
66    for (int i : a) if (i != 0 && tree[i] >= x) { // Modify this
67        while (i < n) {
68            push_down(i);
69            if (tree[2 * i] >= x) i = 2 * i; // And this
70            else i = 2 * i + 1;
71        }
72        return i - n;
73    }
74    return -1;
75 }
76 };

```

### 1.2 Wavelet Tree

WaveletTree baut den Baum auf  $O(n \cdot \log(\Sigma))$   
 kth sort([l, r])[k]  $O(\log(\Sigma))$   
 countSmaller Anzahl elemente in  $[l, r]$  kleiner als  $k$   $O(\log(\Sigma))$

```

1 struct WaveletTree {
2     using it = vector<ll>::iterator;
3     WaveletTree* ln = nullptr, *rn = nullptr;
4     vector<int> b = {};
5     ll lo, hi;
6
7     WaveletTree(vector<ll> in) : WaveletTree(all(in)) {}
8
9     WaveletTree(it from, it to) : // call above one
10        lo(*min_element(from, to)), hi(*max_element(from, to) + 1) {
11        ll mid = (lo + hi) / 2;
12        auto f = [&](ll x) {return x < mid;};
13        for (it c = from; c != to; c++) {
14            b.push_back(b.back() + f(*c));
15        }
16        if (lo + 1 >= hi) return;
17        it pivot = stable_partition(from, to, f);
18        ln = new WaveletTree(from, pivot);
19        rn = new WaveletTree(pivot, to);
20    }
21
22    // kth element in sort[l, r] all 0-indexed
23    ll kth(int l, int r, int k) {
24        if (k < 0 || l + k >= r) return -1;
25        if (lo + 1 >= hi) return lo;
26        int inLeft = b[r] - b[l];
27        if (k < inLeft) return ln->kth(b[l], b[r], k);
28        else return rn->kth(l - b[l], r - b[r], k - inLeft);
29    }
30
31    // count elements in [l, r] smaller than k
32    int countSmaller(int l, int r, ll k) {
33        if (l >= r || k <= lo) return 0;
34        if (hi <= k) return r - l;
35        return ln->countSmaller(b[l], b[r], k) +
36               rn->countSmaller(l - b[l], r - b[r], k);
37    }
38
39    ~WaveletTree() {delete ln; delete rn;}
40};

```

### 1.3 Fenwick Tree

init	baut den Baum auf	$O(n \cdot \log(n))$
prefix_sum	summe von $[0, i]$	$O(\log(n))$
update	addiert ein Delta zu einem Element	$O(\log(n))$

```

1 vector<ll> tree;
2 void update(int i, ll val) {
3     for (i++; i < sz(tree); i += i & -i) tree[i] += val;
4 }
5 void init(int n) {
6     tree.assign(n + 1, 0);
7 }
8 ll prefix_sum(int i) {
9     ll sum = 0;
10    for (i++; i > 0; i -= i & -i) sum += tree[i];
11    return sum;
12 }
```

init	baut den Baum auf	$O(n \cdot \log(n))$
prefix_sum	summe von $[0, i]$	$O(\log(n))$
update	addiert ein Delta zu allen Elementen $[l, r], l \leq r$	$O(\log(n))$

```

1 vector<ll> add, mul;
2 void update(int l, int r, ll val) {
3     for (int tl = l + 1; tl < sz(add); tl += tl & -tl)
4         add[tl] += val, mul[tl] -= val * l;
5     for (int tr = r + 1; tr < sz(add); tr += tr & -tr)
6         add[tr] -= val, mul[tr] += val * r;
7 }
8 void init(vector<ll>& v) {
9     mul.assign(sz(v) + 1, 0);
10    add.assign(sz(v) + 1, 0);
11    for (int i = 0; i < sz(v); i++) update(i, i + 1, v[i]);
12 }
13 ll prefix_sum(int i) {
14     ll res = 0; i++;
15     for (int ti = i; ti > 0; ti -= ti & -ti)
16         res += add[ti] * i + mul[ti];
17     return res;
18 }
```

### 1.4 STL-Rope (Implicit Cartesian Tree)

```

1 #include <ext/rope>
2 using namespace __gnu_cxx;
3 rope<int> v; // Wie normaler Container.
4 v.push_back(num); // O(log(n))
5 rope<int> sub = v.substr(start, length); // O(log(n))
6 v.erase(start, length); // O(log(n))
7 v.insert(v.mutable_begin() + offset, sub); // O(log(n))
8 for(auto it = v.mutable_begin(); it != v.mutable_end(); it++)
```

### 1.5 (Implicit) Treap (Cartesian Tree)

insert	fügt wert $val$ an stelle $i$ ein (verschiebt alle Positionen $\geq i$ )	$O(\log(n))$
remove	löscht werte $[i, i+count]$	$O(\log(n))$

```

1 mt19937 rng(0xc4bd5dad);
2 struct Treap {
3     struct Node {
4         ll val;
5         int prio, size = 1, l = -1, r = -1;
6         Node(ll x) : val(x), prio(rng()) {}
7     };
8     vector<Node> treap;
9     int root = -1;
10    int getSize(int v) {
11        return v < 0 ? 0 : treap[v].size;
12    }
13    void upd(int v) {
14        if (v < 0) return;
15        auto& V = treap[v];
16        V.size = 1 + getSize(V.l) + getSize(V.r);
17        // Update Node Code
18    }
19    void push(int v) {
20        if (v < 0) return;
21        //auto& V = treap[v];
22        //if (V.lazy) {
23        //    Lazy Propagation Code
24        //    if (V.l >= 0) treap[V.l].lazy = true;
25        //    if (V.r >= 0) treap[V.r].lazy = true;
26        //    V.lazy = false;
27        //}
28    }
29    pair<int, int> split(int v, int k) {
30        if (v < 0) return {-1, -1};
31        auto& V = treap[v];
32        push(v);
33        if (getSize(V.l) >= k) { // "V.val >= k" for lower_bound(k)
34            auto [left, right] = split(V.l, k);
35            V.l = right;
36            upd(v);
37            return {left, v};
38        } else {
39            // and only "k"
40            auto [left, right] = split(V.r, k - getSize(V.l) - 1);
41            V.r = left;
42            upd(v);
43            return {v, right};
44        }
45        int merge(int left, int right) {
46            if (left < 0) return right;
47            if (right < 0) return left;
48            if (treap[left].prio < treap[right].prio) {
49                push(left);
50                treap[left].r = merge(treap[left].r, right);
51                upd(left);
52                return left;
53            } else {
```

```

54                push(right);
55                treap[right].l = merge(left, treap[right].l);
56                upd(right);
57            }
58        }
59        void insert(int i, ll val) { // and i = val
60            auto [left, right] = split(root, i);
61            treap.emplace_back(val);
62            left = merge(left, sz(treap) - 1);
63            root = merge(left, right);
64        }
65        void remove(int i, int count = 1) {
66            auto [left, t_right] = split(root, i);
67            auto [middle, right] = split(t_right, count);
68            root = merge(left, right);
69        }
70        // for query use remove and read middle BEFORE remerging
71    };

```

### 1.6 Range Minimum Query

init	baut Struktur auf	$O(n \cdot \log(n))$
queryIdempotent	Index des Minimums in $[l, r], l < r!$	$O(1)$
• better-Funktion muss idempotent sein!		

```

1 struct SparseTable {
2     vector<vector<int>> st;
3     ll *a;
4     int better(int lidx, int ridx) {
5         return a[lidx] <= a[ridx] ? lidx : ridx;
6     }
7     void init(vector<ll>* vec) {
8         int n = sz(*vec);
9         a = vec->data();
10        st.assign(__lg(n) + 1, vector<int>(n));
11        iota(all(st[0]), 0);
12        for (int j = 0; (2 << j) <= n; j++) {
13            for (int i = 0; i + (2 << j) <= n; i++) {
14                st[j + 1][i] = better(st[j][i], st[j][i + (1 << j)]);
15            }
16        }
17        int queryIdempotent(int l, int r) {
18            if (r <= l) return -1;
19            int j = __lg(r - l); // 31 - builtin_clz(r - l);
20            return better(st[j][l], st[j][r - (1 << j)]);
21        }
22    };

```

### 1.7 STL-Bitset

```

1 bitset<10> bits(0b000010100);
2 bits._Find_first(); // 2
3 bits._Find_next(2); // 4
4 bits._Find_next(4); // 10 bzw. N
5 bits[x] = 1; // not bits.set(x) or bits.reset(x)!
6 bits[x].flip(); // not bits.flip(x)!
7 bits.count(); // number of set bits

```

## 1.8 Link-Cut-Tree

LCT	baut Wald auf	$O(n)$
connected	prüft ob zwei Knoten im selben Baum liegen	$O(\log(n))$
link	fügt $\{x,y\}$ Kante ein	$O(\log(n))$
cut	entfernt $\{x,y\}$ Kante	$O(\log(n))$
lca	berechnet LCA von $x$ und $y$	$O(\log(n))$
query	berechnet query auf den Knoten des $xy$ -Pfades	$O(\log(n))$
modify	erhöht jeden wert auf dem $xy$ -Pfad	$O(\log(n))$

```

1 constexpr ll queryDefault = 0;
2 constexpr ll updateDefault = 0;
3 ll _modify(ll x, ll y) {
4     return x + y;
5 }
6 ll _query(ll x, ll y) {
7     return x + y;
8 }
9 ll _update(ll delta, int length) {
10    if (delta == updateDefault) return updateDefault;
11    //ll result = delta
12    //for (int i=1; i<length; i++) result = _query(result, delta);
13    return delta * length;
14 }
15 //generic:
16 ll joinValueDelta(ll value, ll delta) {
17     if (delta == updateDefault) return value;
18     return _modify(value, delta);
19 }
20 ll joinDeltas(ll delta1, ll delta2) {
21     if (delta1 == updateDefault) return delta2;
22     if (delta2 == updateDefault) return delta1;
23     return _modify(delta1, delta2);
24 }
25 struct LCT {
26     struct Node {
27         llnodeValue, subTreeValue, delta;
28         bool revert;
29         int id, size;
30         Node *left, *right, *parent;
31         Node(int id = 0, int val = queryDefault) :
32             nodeValue(val), subTreeValue(val), delta(updateDefault),
33             revert(false), id(id), size(1),
34             left(nullptr), right(nullptr), parent(nullptr) {}
35         bool isRoot() {
36             return !parent || (parent->left != this &&
37                               parent->right != this);
38         }
39         void push() {
40             if (revert) {
41                 revert = false;
42                 swap(left, right);
43                 if (left) left->revert ^= 1;
44                 if (right) right->revert ^= 1;
45             }
46             nodeValue = joinValueDelta(nodeValue, delta);
47     }
48     subTreeValue = joinValueDelta(subTreeValue,
49                                 _update(delta, size));
50     if (left) left->delta = joinDeltas(left->delta, delta);
51     if (right) right->delta = joinDeltas(right->delta, delta);
52     delta = updateDefault;
53 }
54 ll getSubtreeValue() {
55     return joinValueDelta(subTreeValue, _update(delta, size));
56 }
57 void update() {
58     subTreeValue = joinValueDelta(nodeValue, delta);
59     size = 1;
60     if (left) {
61         subTreeValue = _query(subTreeValue,
62                             left->getSubtreeValue());
63         size += left->size;
64     }
65     if (right) {
66         subTreeValue = _query(subTreeValue,
67                             right->getSubtreeValue());
68         size += right->size;
69     }
70     vector<Node> nodes;
71     LCT(int n) : nodes(n) {
72         for (int i = 0; i < n; i++) nodes[i].id = i;
73     }
74     void connect(Node* ch, Node* p, int isLeftChild) {
75         if (ch) ch->parent = p;
76         if (isLeftChild >= 0) {
77             if (isLeftChild) p->left = ch;
78             else p->right = ch;
79         }
80         void rotate(Node* x) {
81             Node* p = x->parent;
82             Node* g = p->parent;
83             bool isRootP = p-isRoot();
84             bool leftChildX = (x == p->left);
85             connect(leftChildX ? x->right : x->left, p, leftChildX);
86             connect(p, x, !leftChildX);
87             connect(x, g, isRootP ? -1 : p == g->left);
88             p->update();
89         }
90         void splay(Node* x) {
91             while (!x-isRoot()) {
92                 Node* p = x->parent;
93                 Node* g = p->parent;
94                 if (!p-isRoot()) g->push();
95                 p->push();
96                 x->push();
97                 if (!p-isRoot()) rotate((x == p->left) ==
98                                         (p == g->left) ? p : x);
99                 rotate(x);
100            }
101            x->push();
102        }
103    }
104    Node* expose(Node* x) {
105        Node* last = nullptr;
106        for (Node* y = x; y; y = y->parent) {
107            splay(y);
108            y->left = last;
109            last = y;
110        }
111        splay(x);
112        return last;
113    }
114    void makeRoot(Node* x) {
115        expose(x);
116        x->revert ^= 1;
117    }
118    bool connected(Node* x, Node* y) {
119        if (x == y) return true;
120        expose(x);
121        expose(y);
122        return x->parent;
123    }
124    void link(Node* x, Node* y) {
125        assert(!connected(x, y)); // not yet connected!
126        makeRoot(x);
127        x->parent = y;
128    }
129    void cut(Node* x, Node* y) {
130        makeRoot(x);
131        expose(y);
132        //must be a tree edge!
133        assert(!(y->right != x || x->left != nullptr));
134        y->right->parent = nullptr;
135        y->right = nullptr;
136    }
137    Node* lca(Node* x, Node* y) {
138        assert(connected(x, y));
139        expose(x);
140        return expose(y);
141    }
142    ll query(Node* from, Node* to) {
143        makeRoot(from);
144        expose(to);
145        if (to) return to->getSubtreeValue();
146        return queryDefault;
147    }
148    void modify(Node* from, Node* to, ll delta) {
149        makeRoot(from);
150        expose(to);
151        to->delta = joinDeltas(to->delta, delta);
152    }
153}

```

## 1.9 Lichao

```

1 vector<ll> xs; // IMPORTANT: Initialize before constructing!
2 int findX(ll i) {return lower_bound(all(xs), i) - begin(xs);}
3
4 struct Fun { // Default: Linear function. Change as needed.
5     ll m, c;
6     ll operator()(int x) {return m*xs[x] + c;}
7 }
8
9 // Default: Computes min. Change lines with comment for max.
10 struct Lichao {
11     static constexpr Fun id = {0, INF}; // {0, -INF}
12     int n, cap;
13     vector<Fun> seg;
14     Lichao() : n(sz(xs)), cap(2 << __lg(n)), seg(2 * cap, id) {}
15     void _insert(Fun f, int l, int r, int i) {
16         while (i < 2 * cap) {
17             int m = (l+r)/2;
18             if (m >= n) {r = m; i = 2*i; continue;}
19             Fun &g = seg[i];
20             if (f(m) < g(m)) swap(f, g); // >
21             if (f(l) < g(l)) r = m, i = 2*i; // >
22             else l = m, i = 2*i+1;
23         }
24         void insert(Fun f) {_insert(f, 0, cap, 1);}
25         void _segmentInsert(Fun f, int l, int r, int a, int b, int i) {
26             if (l <= a && b <= r) _insert(f, a, b, i);
27             else if (a < r && l < b) {
28                 int m = (a+b)/2;
29                 _segmentInsert(f, l, r, a, m, 2*i);
30                 _segmentInsert(f, l, r, m, b, 2*i+1);
31             }
32             void segmentInsert(Fun f, ll l, ll r) {
33                 _segmentInsert(f, findX(l), findX(r), 0, cap, 1);
34             }
35             ll _query(int x) {
36                 ll ans = INF; // -INF
37                 for (int i = x + cap; i > 0; i /= 2)
38                     ans = min(ans, seg[i](x)); // max
39             }
40             ll query(ll x) {return _query(findX(x));}
41 }

```

## 1.10 Policy Based Data Structures

Wichtig: Verwende p.swap(p2) anstatt swap(p, p2)!

```

1 #include <ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
2 template<typename T>
3 using pQueue = __gnu_pbds::priority_queue<T>; //<T, greater<T>>
4
5 auto it = pq.push(5);
6 pq.modify(it, 6);
7 pq.join(pq2);
8 // push, join are O(1), pop, modify, erase O(log n) amortized

```

```

1 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 using namespace __gnu_pbds;
3 template<typename T>
4 using Tree = tree<T, null_type, less<T>, rb_tree_tag,
5                     tree_order_statistics_node_update>;
6 // T.order_of_key(x): number of elements strictly less than x
7 // *T.find_by_order(k): k-th element
8 constexpr uint64_t RNG = ll(2e18 * acos(-1)) | 199; // random odd
9 template<typename T>
10 struct chash {
11     size_t operator()(T o) const {
12         return __builtin_bswap64(hash<T>()(o) * RNG);
13     }
14     template<typename K, typename V>
15     using hashMap = gp_hash_table<K, V, chash<K>>;
16     template<typename T>
17     using hashSet = gp_hash_table<T, null_type, chash<T>>;

```

## 1.11 Lower/Upper Envelope (Convex Hull Optimization)

Um aus einem lower envelope einen upper envelope zu machen (oder umgekehrt), einfach beim Einfügen der Geraden  $m$  und  $b$  negieren.

```

1 // Min über Geraden mit MONOTONEN Inserts UND Queries. Jede neu
2 // Gerade hat kleineres pair(m, c) als alle vorherigen.
3 struct Line {
4     ll m, c;
5     ll operator()(ll x) {return m*x+c;}
6 };
7 vector<Line> ls;
8 ll ptr = 0;
9 bool bad(Line l1, Line l2, Line l3) {
10     return (l3.c-l1.c)*(l1.m-l2.m) < (l2.c-l1.c)*(l1.m-l3.m);
11 }
12 void add(ll m, ll c) { // m fallend, Laufzeit O(1) amortisiert
13     while (sz(ls) > 1 && bad(ls.end()[-2], ls.end()[-1], {m, c})) {
14         ls.pop_back();
15     }
16     ls.push_back({m, c});
17     ptr = min(ptr, sz(ls) - 1);
18 }
19 ll query(ll x) { // x >= letztes x, Laufzeit: O(1) amortisiert
20     ptr = min(ptr, sz(ls) - 1);
21     while (ptr + 1 < sz(ls) && ls[ptr + 1](x) < ls[ptr](x)) ptr++;
22     return ls[ptr](x);
23 }

```

```

1 struct Line {
2     mutable ll m, c, p;
3     bool operator<(const Line& o) const {return m < o.m;}
4     bool operator<(ll x) const {return p < x;}
5 };
6 struct HullDynamic : multiset<Line, less<> { // max über Geraden
7     // (for doubles, use INF = 1/.0, div(a,c) = a/c)
8     ll div(ll a, ll c) {return a / c - ((a ^ c) < 0 && a % c);}
9     bool isect(iterator x, iterator y) {

```

```

10     if (y == end()) {x->p = INF; return false;}
11     if (x->m == y->m) x->p = x->c > y->c ? INF : -INF;
12     else x->p = div(y->c - x->c, x->m - y->m);
13     return x->p >= y->p;
14 }
15 void add(ll m, ll c) {
16     auto x = insert({m, c, 0});
17     while (isect(x, next(x))) erase(next(x));
18     if (x != begin()) {
19         x--;
20         if (isect(x, next(x))) {
21             erase(next(x));
22             isect(x, next(x));
23         }
24         while (x != begin() && prev(x)->p >= x->p) {
25             x--;
26             isect(x, erase(next(x)));
27         }
28     }
29     ll query(ll x) {
30         auto l = *lower_bound(x);
31         return l.m * x + l.c;
32     }

```

## 1.12 Union-Find

init	legt $n$ einzelne Unions an	$O(n)$
findSet	findet den Repräsentanten	$O(\log(n))$
unionSets	vereint 2 Mengen	$O(\log(n))$
$m\text{-findSet} + n\text{-unionSets}$	Folge von Befehlen	$O(n+m\cdot\alpha(n))$

```

1 // unions[i] >= 0 => unions[i] = parent
2 // unions[i] < 0 => unions[i] = -size
3 vector<int> unions;
4 void init(int n) { //Initialisieren
5     unions.assign(n, -1);
6 }
7 int findSet(int a) { // Pfadkompression
8     if (unions[a] < 0) return a;
9     return unions[a] = findSet(unions[a]);
10 }
11 void linkSets(int a, int b) { // Union by size.
12     if (unions[b] > unions[a]) swap(a, b);
13     unions[b] += unions[a];
14     unions[a] = b;
15 }
16 void unionSets(int a, int b) { // Diese Funktion aufrufen.
17     if (findSet(a) != findSet(b)) linkSets(findSet(a), findSet(b));
18 }
19 int size(int a) {
20     return -unions[findSet(a)];
21 }

```

### 1.13 Persistent

get berechnet Wert zu Zeitpunkt  $t$   $O(\log(t))$   
 set ändert Wert zu Zeitpunkt  $t$   $O(\log(t))$   
 reset setzt die Datenstruktur auf Zeitpunkt  $t$   $O(1)$

```
1 template<typename T>
2 struct persistent {
3     int& time;
4     vector<pair<int, T>> data;
5     persistent(int& time, T value = {}) : time(time), data(1, {2*time, value}) {}
6     T get(int t) {
7         return prev(upper_bound(all(data), pair{2*t+1, T()}))->second;
8     }
9     int set(T value) {
10        time++;
11        data.push_back({2*time, value});
12        return time;
13    }
14};
```

```
1 template<typename T>
2 struct persistentArray {
3     int time;
4     vector<persistent<T>> data;
5     vector<pair<int, int>> mods;
6     persistentArray(int n, T value = {}) : time(0), data(n, {time, value}) {}
7     T get(int p, int t) {return data[p].get(t);}
8     int set(int p, T value) {
9         mods.push_back({p, data[p].set(value)});
10        return mods.back().second;
11    }
12    void reset(int t) {
13        while (!mods.empty() && mods.back().second > t) {
14            data[mods.back().first].data.pop_back();
15            mods.pop_back();
16        }
17        time = t;
18    }
19};
```

## 2 Graphen

### 2.1 Kruskal

berechnet den Minimalen Spannbaum  $O(|E| \cdot \log(|E|))$

```
1 sort(all(edges));
2 vector<Edge> mst;
3 ll cost = 0;
4 for (Edge& e : edges) {
5     if (findSet(e.from) != findSet(e.to)) {
6         unionSets(e.from, e.to);
7         mst.push_back(e);
8         cost += e.cost;
9    }}
```

### 2.2 Minimale Spannbäume

**Schnitteigenschaft** Für jeden Schnitt  $C$  im Graphen gilt: Gibt es eine Kante  $e$ , die leichter ist als alle anderen Schnittkanten, so gehört diese zu allen minimalen Spannbäumen. ( $\Rightarrow$  Die leichteste Kante in einem Schnitt kann in einem minimalen Spannbaum verwendet werden.)

**Kreiseigenschaft** Für jeden Kreis  $K$  im Graphen gilt: Die schwerste Kante auf dem Kreis ist nicht Teil des minimalen Spannbaums.

### 2.3 Heavy-Light Decomposition

get\_intervals gibt Zerlegung des Pfades von  $u$  nach  $v$   $O(\log(|V|))$

Wichtig: Intervalle sind halboffen

Subbaum unter dem Knoten  $v$  ist das Intervall  $[in[v], out[v])$ .

```
1 vector<vector<int>> adj;
2 vector<int> sz, in, out, nxt, par;
3 int counter;
4 void dfs_sz(int v = 0, int from = -1) {
5     for (auto& u : adj[v]) if (u != from) {
6         dfs_sz(u, v);
7         sz[v] += sz[u];
8         if (adj[v][0] == from || sz[u] > sz[adj[v][0]]) {
9             swap(u, adj[v][0]); //changes adj!
10    }
11}
12 void dfs_hld(int v = 0, int from = -1) {
13    par[v] = from;
14    in[v] = counter++;
15    for (int u : adj[v]) if (u != from) {
16        nxt[u] = (u == adj[v][0]) ? nxt[v] : u;
17        dfs_hld(u, v);
18    }
19    out[v] = counter;
20}
21 void init(int root = 0) {
22    int n = sz(adj);
23    sz.assign(n, 1), nxt.assign(n, root), par.assign(n, -1);
24    in.resize(n), out.resize(n);
25    counter = 0;
26    dfs_sz(root);
27    dfs_hld(root);
28}
29 template<typename F>
30 void for_intervals(int u, int v, F& f) {
31    for (;;) v = par[nxt[v]] {
32        if (in[v] < in[u]) swap(u, v);
33        f(max(in[u], in[nxt[v]]), in[v] + 1);
34        if (in[nxt[v]] <= in[u]) return;
35    }
36    int get_lca(int u, int v) {
37        for (;;) v = par[nxt[v]] {
38            if (in[v] < in[u]) swap(u, v);
39            if (in[nxt[v]] <= in[u]) return u;
40        }
41    }
```

### 2.4 Lowest Common Ancestor

init baut DFS-Baum über  $g$  auf  $O(|V| \cdot \log(|V|))$   
 getLCA findet LCA  $O(1)$   
 getDepth berechnet Distanz zur Wurzel im DFS-Baum  $O(1)$

```
1 struct LCA {
2     vector<ll> depth;
3     vector<int> visited, first;
4     int idx;
5     SparseTable st; //sparse table Seite 2
6     void init(vector<vector<int>>& adj, int root) {
7         depth.assign(2 * sz(adj), 0);
8         visited.assign(2 * sz(adj), -1);
9         first.assign(sz(adj), 2 * sz(adj));
10        idx = 0;
11        dfs(adj, root);
12        st.init(&depth);
13    }
14    void dfs(vector<vector<int>>& adj, int v, ll d=0) {
15        visited[idx] = v, depth[idx] = d;
16        first[v] = min(idx, first[v]), idx++;
17        for (int u : adj[v]) {
18            if (first[u] == 2 * sz(adj)) {
19                dfs(adj, u, d + 1);
20                visited[idx] = v, depth[idx] = d, idx++;
21            }
22        }
23        int getLCA(int u, int v) {
24            if (first[u] > first[v]) swap(u, v);
25            return visited[st.queryIdempotent(first[u], first[v] + 1)];
26        }
27        ll getDepth(int v) {return depth[first[v]];}
28    };
29};
```

### 2.5 Centroids

find\_centroid findet alle Centroids des Baums (maximal 2)  $O(|V|)$

```
1 vector<int> s;
2 void dfs_sz(int v, int from = -1) {
3    s[v] = 1;
4    for (int u : adj[v]) if (u != from) {
5        dfs_sz(u, v);
6        s[v] += s[u];
7    }
8    pair<int, int> dfs_cent(int v, int from, int n) {
9        for (int u : adj[v]) if (u != from) {
10            if (2 * s[u] == n) return {v, u};
11            if (2 * s[u] > n) return dfs_cent(u, v, n);
12        }
13        return {v, -1};
14    }
15    pair<int, int> find_centroid(int root = 0) {
16        s.resize(sz(adj));
17        dfs_sz(root);
18        return dfs_cent(root, -1, s[root]);
19    }
20};
```

## 2.6 Eulertouren

euler berechnet den Kreis  $O(|V|+|E|)$

```

1 vector<vector<pair<int, int>>> adj; // gets destroyed!
2 vector<int> cycle;
3 void addEdge(int u, int v) {
4     adj[u].emplace_back(v, sz(adj[v]));
5     adj[v].emplace_back(u, sz(adj[u]) - 1); // remove for directed
6 }
7 void euler(int v) {
8     while (!adj[v].empty()) {
9         auto [u, rev] = adj[v].back();
10        adj[v].pop_back();
11        if (u < 0) continue; // remove for directed
12        adj[u][rev].first = -1; // remove for directed
13        euler(u);
14    }
15    cycle.push_back(v); // Zyklus in umgekehrter Reihenfolge.
16 }
```

- Zyklus existiert, wenn jeder Knoten geraden Grad hat (ungerichtet), bei jedem Knoten Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen (gerichtet).
- Pfad existiert, wenn genau  $\{0,2\}$  Knoten ungeraden Grad haben (ungerichtet), bei allen Knoten Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen oder einer eine Ausgangskante mehr hat (Startknoten) und einer eine Eingangskante mehr hat (Endknoten).
- Je nach Aufgabenstellung überprüfen, wie ein unzusammenhängender Graph interpretiert werden sollen.
- Wenn eine bestimmte Sortierung verlangt wird oder Laufzeit vernachlässigbar ist, ist eine Implementierung mit einem `vector<set<int>>` adj leichter
- Wichtig: Algorithmus schlägt nicht fehl, falls kein Eulerzyklus existiert. Die Existenz muss separat geprüft werden.

## 2.7 Baum-Isomorphie

treeLabel berechnet kanonischen Namen für einen Baum  $O(|V|\log(|V|))$

```

1 vector<vector<int>> adj;
2 map<vector<int>, int> known; // dont reset!
3 int treeLabel(int v, int from = -1) {
4     vector<int> children;
5     for (int u : adj[v]) {
6         if (u == from) continue;
7         children.push_back(treeLabel(u, v));
8     }
9     sort(all(children));
10    if (known.find(children) == known.end()) {
11        known[children] = sz(known);
12    }
13    return known[children];
14 }
```

## 2.8 DFS

Kantentyp $(v,w)$	$\text{dfs}[v] < \text{dfs}[w]$	$\text{fin}[v] > \text{fin}[w]$	$\text{seen}[w]$
in-tree	true	true	false
forward	true	true	true
backward	false	false	true
cross	false	true	true

## 2.9 Strongly Connected Components (TARJAN)

scc berechnet starke Zusammenhangskomponenten  $O(|V|+|E|)$

Info: SCCs sind in umgekehrter topologischer Reihenfolge!

```

1 vector<vector<int>> adj;
2 int sccCounter;
3 vector<int> low, idx, s; // idx enthält Index der SCC pro Knoten.
4 void visit(int v) {
5     int old = low[v] = sz(s);
6     s.push_back(v);
7     for (auto u : adj[v]) {
8         if (low[u] < 0) visit(u);
9         if (idx[u] < 0) low[v] = min(low[v], low[u]);
10    }
11    if (old == low[v]) {
12        for (int i = old; i < sz(s); i++) idx[s[i]] = sccCounter;
13        sccCounter++;
14        s.resize(old);
15    }
16    void scc() {
17        low.assign(sz(adj), -1);
18        idx.assign(sz(adj), -1);
19        sccCounter = 0;
20        for (int i = 0; i < sz(adj); i++) {
21            if (low[i] < 0) visit(i);
22        }
23 }
```

## 2.10 2-SAT

```

1 constexpr int var(int i) {return i << 1;} // use this!
2 struct sat2 {
3     int n; // + scc variablen
4     vector<int> sol;
5     sat2(int vars) : n(vars*2), adj(n) {}
6     void addImpl(int a, int b) {
7         adj[a].push_back(b);
8         adj[1^b].push_back(1^a);
9     }
10    void addEquiv(int a, int b) {addImpl(a, b); addImpl(b, a);}
11    void addOr(int a, int b) {addImpl(1^a, b);}
12    void addXor(int a, int b) {addOr(a, b); addOr(1^a, 1^b);}
13    void addTrue(int a) {addImpl(1^a, a);}
14    void addFalse(int a) {addTrue(1^a);}
15    void addAnd(int a, int b) {addTrue(a); addTrue(b);}
16    void addNand(int a, int b) {addOr(1^a, 1^b);}
17    bool solve() {
18        scc(); // scc code von oben
19        sol.assign(n, -1);
20        for (int i = 0; i < n; i += 2) {
21            if (idx[i] == idx[i + 1]) return false;
22            sol[i] = idx[i] < idx[i + 1];
23            sol[i + 1] = !sol[i];
24        }
25        return true;
26    }
27 }
```

## 2.11 Artikulationspunkte, Brücken und BCC

find berechnet Artikulationspunkte, Brücken und BCC  $O(|V|+|E|)$

Wichtig: isolierte Knoten und Brücken sind keine BCC.

```

1 vector<vector<Edge>> adj;
2 vector<int> num;
3 int counter, rootCount, root;
4 vector<bool> isArt;
5 vector<Edge> bridges, st;
6 vector<vector<Edge>> bcc;
7 int dfs(int v, int from = -1) {
8     int me = num[v] = ++counter, top = me;
9     for (Edge& e : adj[v]) {
10        if (e.id == from) continue;
11        if (num[e.to]) {
12            top = min(top, num[e.to]);
13            if (num[e.to] < me) st.push_back(e);
14        } else {
15            if (v == root) rootCount++;
16            int si = sz(st);
17            int up = dfs(e.to, e.id);
18            top = min(top, up);
19            if (up >= me) isArt[v] = true;
20            if (up > me) bridges.push_back(e);
21            if (up <= me) st.push_back(e);
22            if (up == me) {
23                bcc.emplace_back(si + all(st));
24                st.resize(si);
25            }
26        }
27    }
28    void find() {
29        counter = 0;
30        num.assign(sz(adj), 0);
31        isArt.assign(sz(adj), false);
32        bridges.clear();
33        st.clear();
34        bcc.clear();
35        for (int v = 0; v < sz(adj); v++) {
36            if (!num[v]) {
37                root = v;
38                rootCount = 0;
39                dfs(v);
40                isArt[v] = rootCount > 1;
41            }
42        }
43    }
44 }
```

## 2.12 Cycle Counting

findBase berechnet Basis  $O(|V|\cdot|E|)$

count zählt Zykel  $O(2^{|\text{base}|})$

• jeder Zyklus ist das xor von einträgen in base.

```

1 constexpr int maxEdges = 128;
2 using cycle = bitset<maxEdges>;
3 struct cycles {
4     vector<vector<pair<int, int>>> adj;
5     vector<bool> seen;
6     vector<cycle> paths, base;
7 }
```

```

7 vector<pair<int, int>> edges;
8 cycles(int n) : adj(n), seen(n), paths(n) {}
9 void addEdge(int u, int v) {
10    adj[u].push_back({v, sz(edges)}); 
11    adj[v].push_back({u, sz(edges)}); 
12    edges.push_back({u, v}); 
13}
14 void addBase(cycle cur) {
15    for (cycle o : base) {
16        o ^= cur;
17        if (!o._Find_first() > cur._Find_first()) cur = o;
18    }
19    if (cur.any()) base.push_back(cur);
20}
21 void findBase(int v, int from = -1, cycle cur = {}) {
22    if (from < 0 && seen[v]) return;
23    if (seen[v]) {
24        addBase(cur ^ paths[v]);
25    } else {
26        seen[v] = true;
27        paths[v] = cur;
28        for (auto [u, id] : adj[v]) {
29            if (u == from) continue;
30            cur[id].flip();
31            findBase(u, v, cur);
32            cur[id].flip();
33        }
34    bool isCycle(cycle cur) //cycle must be constructed from base
35    if (cur.none()) return false;
36    init(sz(adj)); // union find Seite 4
37    for (int i = 0; i < sz(edges); i++) {
38        if (cur[i]) {
39            cur[i] = false;
40            if (findSet(edges[i].first) ==
41                findSet(edges[i].second)) break;
42            unionSets(edges[i].first, edges[i].second);
43        }
44    return cur.none();
45}
46 int count() {
47    for (int i = 0; i < sz(adj); i++) findBase(i);
48    assert(sz(base) < 30);
49    int res = 0;
50    for (int i = 1; i < (1 << sz(base)); i++) {
51        cycle cur;
52        for (int j = 0; j < sz(base); j++)
53            if (((i >> j) & 1) != 0) cur ^= base[j];
54        if (isCycle(cur)) res++;
55    }
56    return res;
57}

```

## 2.13 Kürzeste Wege

### 2.13.1 FLOYD-WARSHALL-Algorithmus

floydWarshall kürzeste Pfade oder negative Kreise finden  $O(|V|^3)$

- $\text{dist}[i][i] = 0$ ,  $\text{dist}[i][j] = \text{edge}[j, j].\text{weight}$  oder  $\text{INF}$
- $i$  liegt auf einem negativen Kreis  $\Leftrightarrow \text{dist}[i][i] < 0$ .

```

1 vector<vector<ll>> dist; // Entfernung zwischen je zwei Punkten
2 vector<vector<int>> next;
3 void floydWarshall() {
4    next.assign(sz(dist), vector<int>(sz(dist), -1));
5    for (int i = 0; i < sz(dist); i++) {
6        for (int j = 0; j < sz(dist); j++) {
7            if (dist[i][j] < INF) {
8                next[i][j] = j;
9            }
10       }
11       for (int k = 0; k < sz(dist); k++) {
12           for (int i = 0; i < sz(dist); i++) {
13               for (int j = 0; j < sz(dist); j++) {
14                   // only needed if dist can be negative
15                   if (dist[i][k] == INF || dist[k][j] == INF) continue;
16                   if (dist[i][j] > dist[i][k] + dist[k][j]) {
17                       dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j];
18                       next[i][j] = next[i][k];
19                   }
20               }
21       vector<int> getPath(int u, int v) {
22           if (next[u][v] < 0) return {};
23           vector<int> path = {u};
24           while (u != v) path.push_back(u = next[u][v]);
25       return path; //Pfad u -> v
26   }

```

### 2.13.2 Matrix-Algorithmen

Sei  $d_{ij}$  die Distanzmatrix von  $G$ , dann gibt  $d_{ij}^k$  die kürzeste Distanz von  $i$  nach  $j$  mit maximal  $k$  Kanten an mit der Verknüpfung:  $c_{ij} = a_{ij} \otimes b_{ij} = \min\{a_{ik} \cdot b_{kj}\}$

Sei  $a_{ij}$  die Adjazenzmatrix von  $G$  (mit  $a_{ii} = 1$ ), dann gibt  $a_{ij}^k$  die Anzahl der Wege von  $i$  nach  $j$  mit Länge genau (maximal)  $k$  an mit der Verknüpfung:  $c_{ij} = a_{ij} \otimes b_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj}$

### 2.13.3 BELLMANN-FORD-Algorithmus

bellmanFord kürzeste Pfade oder negative Kreise finden  $O(|V| \cdot |E|)$

```

1 auto bellmannFord(int n, vector<edge>& edges, int start) {
2    vector<ll> dist(n, INF), prev(n, -1);
3    dist[start] = 0;
4    for (int i = 1; i < n; i++) {
5        for (edge& e : edges) {
6            if (dist[e.from] != INF &&
7                dist[e.from] + e.cost < dist[e.to]) {
8                dist[e.to] = dist[e.from] + e.cost;
9                prev[e.to] = e.from;
10           }
11           for (edge& e : edges) {
12               if (dist[e.from] != INF &&
13                   dist[e.from] + e.cost < dist[e.to]) {
14                   // Negativer Kreis gefunden.
15               }
16       return dist; //return prev?
17   }

```

### 2.13.4 Algorithmus von DIJKSTRA

dijkstra kürzeste Pfade in Graphen ohne negative Kanten  $O(|E| \cdot \log(|V|))$

```

1 using path = pair<ll, int>; //dist, destination
2 auto dijkstra(const vector<vector<path>>& adj, int start) {
3    priority_queue<path, vector<path>, greater<path> pq;
4    vector<ll> dist(sz(adj), INF);
5    vector<int> prev(sz(adj), -1);
6    dist[start] = 0; pq.emplace(0, start);
7    while (!pq.empty()) {
8        auto [dv, v] = pq.top(); pq.pop();
9        if (dv > dist[v]) continue; // WICHTIG!
10       for (auto [du, u] : adj[v]) {
11           ll newDist = dv + du;
12           if (newDist < dist[u]) {
13               dist[u] = newDist;
14               prev[u] = v;
15               pq.emplace(dist[u], u);
16       }
17   return dist; //return prev;
18 }

```

## 2.14 Dynamic Connectivity

Constructor erzeugt Baum ( $n$  Knoten,  $m$  updates)  $O(n+m)$

addEdge fügt Kannte ein, id=delete Zeitpunkt  $O(\log(n))$

eraseEdge entfernt Kante id  $O(\log(n))$

```

1 struct connect {
2    int n;
3    vector<pair<int, int>> edges;
4    LCT lct; // min LCT Seite 3, no updates required
5    connect(int n, int m) : n(n), edges(m), lct(n+m) {}
6    bool connected(int u, int v) {
7        return lct.connected(&lct.nodes[u], &lct.nodes[v]);
8    }
9    void addEdge(int u, int v, int id) {
10        lct.nodes[id + n] = LCT::Node(id + n, id);
11        edges[id] = {u, v};
12        if (connected(u, v)) {
13            int old = lct.query(&lct.nodes[u], &lct.nodes[v]);
14            if (old < id) eraseEdge(old);
15        }
16        if (!connected(u, v)) {
17            lct.link(&lct.nodes[u], &lct.nodes[id + n]);
18            lct.link(&lct.nodes[v], &lct.nodes[id + n]);
19        }
20    void eraseEdge(ll id) {
21        if (connected(edges[id].first, edges[id].second) &&
22            lct.query(&lct.nodes[edges[id].first],
23                      &lct.nodes[edges[id].second]) == id) {
24            lct.cut(&lct.nodes[edges[id].first], &lct.nodes[id + n]);
25            lct.cut(&lct.nodes[edges[id].second], &lct.nodes[id + n]);
26        }
27    };

```

## 2.15 Maximal Cliques

bronKerbosch berechnet alle maximalen Cliquen  $O(3^{\frac{n}{3}})$   
 addEdge fügt ungerichtete Kante ein  $O(1)$

```

1 using bits = bitset<64>;
2 vector<bits> adj, cliques;
3 void addEdge(int a, int b) {
4     if (a != b) adj[a][b] = adj[b][a] = 1;
5 }
6 void bronKerboschRec(bits R, bits P, bits X) {
7     if (P.none() && X.none()) {
8         cliques.push_back(R);
9     } else {
10        int q = (P | X).FindFirst();
11        bits cands = P & ~adj[q];
12        for (int i = 0; i < sz(adj); i++) if (cands[i]) {
13            R[i] = 1;
14            bronKerboschRec(R, P & adj[i], X & adj[i]);
15            R[i] = P[i] = 0;
16            X[i] = 1;
17        }
18    void bronKerbosch() {
19        cliques.clear();
20        bronKerboschRec({}, {(1ull << sz(adj)) - 1}, {});
21    }

```

## 2.16 Maximum Cardinality Bipartite Matching

kuhn berechnet Matching  $O(|V| \cdot \min(|V|^2, |E|))$   
 • die ersten  $[0..l]$  Knoten in adj sind die linke Seite des Graphen

```

1 vector<vector<int>> adj;
2 vector<int> pairs; // Der gematchte Knoten oder -1.
3 vector<bool> visited;
4 bool dfs(int v) {
5     if (visited[v]) return false;
6     visited[v] = true;
7     for (int u : adj[v]) if (pairs[u] < 0 || dfs(pairs[u])) {
8         pairs[u] = v; pairs[v] = u; return true;
9     }
10    return false;
11}
12 int kuhn(int l) { // l = #Knoten links.
13    pairs.assign(sz(adj), -1);
14    int ans = 0;
15    // Greedy Matching. Optionale Beschleunigung.
16    for (int v = 0; v < l; v++) for (int u : adj[v])
17        if (pairs[u] < 0) {pairs[u] = v; pairs[v] = u; ans++; break;}
18    for (int v = 0; v < l; v++) if (pairs[v] < 0) {
19        visited.assign(l, false);
20        ans += dfs(v);
21    }
22    return ans; // Größe des Matchings.
23}

```

hopcroft\_karp berechnet Matching  $O(\sqrt{|V| \cdot |E|})$

```

1 vector<vector<int>> adj;
2 // pairs ist der gematchte Knoten oder -1
3 vector<int> pairs, dist, ptr;
4 bool bfs(int l) {
5     queue<int> q;
6     for (int v = 0; v < l; v++) {
7         if (pairs[v] < 0) {dist[v] = 0; q.push(v);}
8         else dist[v] = -1;
9     }
10    bool exist = false;
11    while (!q.empty()) {
12        int v = q.front(); q.pop();
13        for (int u : adj[v]) {
14            if (pairs[u] < 0) {exist = true; continue;}
15            if (dist[pairs[u]] < 0) {
16                dist[pairs[u]] = dist[v] + 1;
17                q.push(pairs[u]);
18            }
19        }
20    }
21    return exist;
22}
23 bool dfs(int v) {
24    for (; ptr[v] < sz(adj[v]); ptr[v]++) {
25        int u = adj[v][ptr[v]];
26        if (pairs[u] < 0 || (dist[pairs[u]] > dist[v] && dfs(pairs[u]))) {
27            pairs[u] = v; pairs[v] = u;
28            return true;
29        }
30    }
31    return false;
32}
33 int hopcroft_karp(int l) { // l = #Knoten links
34    int ans = 0;
35    pairs.assign(sz(adj), -1);
36    dist.resize(l);
37    // Greedy Matching, optionale Beschleunigung.
38    for (int v = 0; v < l; v++) for (int u : adj[v])
39        if (pairs[u] < 0) {pairs[u] = v; pairs[v] = u; ans++; break;}
40    while (bfs(l)) {
41        ptr.assign(l, 0);
42        for (int v = 0; v < l; v++) {
43            if (pairs[v] < 0) ans += dfs(v);
44        }
45    }
46    return ans;
47}

```

## 2.17 Maximum Weight Bipartite Matching

match berechnet Matching  $O(|V|^3)$

```

1 double costs[N_LEFT][N_RIGHT];
2 // Es muss l <= r sein! (sonst Endlosschleife)
3 double match(int l, int r) {
4     vector<double> lx(l), ly(r);
5     // xy is matching from l->, yx from r->l, or -1
6     vector<int> xy(l, -1), yx(r, -1);
7     vector<pair<double, int>> slack(r);
8     for (int x = 0; x < l; x++)
9         lx[x] = *max_element(costs[x], costs[x] + r);
10    for (int root = 0; root < l; root++) {
11        vector<int> aug(r, -1);
12        vector<bool> s(l);
13        s[root] = true;
14        for (int y = 0; y < r; y++) {
15            slack[y] = {lx[root] + ly[y] - costs[root][y], root};
16        }
17        int y = -1;
18        while (true) {
19            double delta = INF;
20            int x = -1;
21            for (int yy = 0; yy < r; yy++) {
22                if (aug[yy] < 0 && slack[yy].first < delta) {
23                    tie(delta, x) = slack[yy];
24                    y = yy;
25                }
26            }
27            if (delta > 0) {
28                for (int x = 0; x < l; x++) if (s[x]) lx[x] -= delta;
29                for (int y = 0; y < r; y++) {
30                    if (aug[y] >= 0) ly[y] += delta;
31                    else slack[y].first -= delta;
32                }
33            }
34            aug[y] = x;
35            x = yx[y];
36            if (x < 0) break;
37            s[x] = true;
38            for (int y = 0; y < r; y++) {
39                if (aug[y] < 0) {
40                    double alt = lx[x] + ly[y] - costs[x][y];
41                    if (slack[y].first > alt) slack[y] = {alt, x};
42                }
43            }
44        }
45    }
46    return accumulate(all(lx), 0.0) +
47        accumulate(all(ly), 0.0); // Wert des Matchings
48}

```

## 2.18 Wert des maximalen Matchings

Fehlerwahrscheinlichkeit:  $\left(\frac{m}{M}\right)^I$

```

1 constexpr int mod=1'000'000'007, I=10;
2 vector<vector<ll>> adj, mat;
3
4 int max_matching() {
5     int ans = 0;
6     mat.assign(sz(adj), {});
7     for (int _ = 0; _ < I; _++) {
8         mat[v].assign(sz(adj), 0);
9         for (int u : adj[v]) {
10             if (u < v) {
11                 mat[v][u] = rand() % (mod - 1) + 1;
12                 mat[u][v] = mod - mat[v][u];
13             }
14         }
15         gauss(sz(mat), sz(mat[0])); //LGS Seite 17
16         int rank = 0;
17         for (auto& row : mat) {
18             if (*max_element(all(row)) != 0) rank++;
19         }
20         ans = max(ans, rank / 2);
21     }
22     return ans;
}

```

## 2.19 Allgemeines maximales Matching

match berechnet allgemeines Matching  $O(|E| \cdot |V| \cdot \log(|V|))$

```

1 struct GM {
2     vector<vector<int>> adj;
3     // pairs ist der gematchte Knoten oder n
4     vector<int> pairs, first, que;
5     vector<pair<int, int>> label;
6     int head, tail;
7     GM(int n) : adj(n), pairs(n + 1, n), first(n + 1, n),
8                 que(n), label(n + 1, {-1, -1}) {}
9     void rematch(int u, int v) {
10         int t = pairs[u]; pairs[u] = v;
11         if (pairs[t] != u) return;
12         if (label[u].second == -1) {
13             pairs[t] = label[u].first;
14             rematch(pairs[t], t);
15         } else {
16             auto [x, y] = label[u];
17             rematch(x, y);
18             rematch(y, x);
19         }
20     int findFirst(int v) {
21         return label[first[v]].first < 0 ? first[v]
22             : first[v] = findFirst(first[v]);
23     }
24     void relabel(int x, int y) {
25         int r = findFirst(x);
26         int s = findFirst(y);
27         if (r == s) return;
}

```

```

28     auto h = label[r] = label[s] = {-x, y};
29     int join;
30     while (true) {
31         if (s != sz(adj)) swap(r, s);
32         r = findFirst(label[pairs[r].first]);
33         if (label[r] == h) {
34             join = r;
35             break;
36         } else {
37             label[r] = h;
38         }
39         for (int v : {first[x], first[y]}) {
40             if (v != join; v = first[label[pairs[v].first]]) {
41                 label[v] = {x, y};
42                 first[v] = join;
43                 que[tail++] = v;
44             }
45         }
46         bool augment(int v) {
47             label[v] = {sz(adj), -1};
48             first[v] = sz(adj);
49             head = tail = 0;
50             for (que[tail++] = v; head < tail;) {
51                 int x = que[head++];
52                 for (int y : adj[x]) {
53                     if (pairs[y] == sz(adj) && y != v) {
54                         pairs[y] = x;
55                         rematch(x, y);
56                         return true;
57                     } else if (label[y].first >= 0) {
58                         relabel(x, y);
59                     } else if (label[pairs[y]].first == -1) {
60                         label[pairs[y]].first = x;
61                         first[pairs[y]] = y;
62                         que[tail++] = pairs[y];
63                     }
64                 }
65             return false;
66         }
67         int match() {
68             int matching = head = tail = 0;
69             for (int v = 0; v < sz(adj); v++) {
70                 if (pairs[v] < sz(adj) || !augment(v)) continue;
71                 matching++;
72                 for (int i = 0; i < tail; i++)
73                     label[que[i]] = label[pairs[que[i]]] = {-1, -1};
74                 label[sz(adj)] = {-1, -1};
75             }
76             return matching;
}

```

## 2.20 Global MinCut

stoer\_wagner berechnet globalen MinCut  $O(|V||E|+|V|^2 \cdot \log(|E|))$

merge(a,b) merged Knoten b in Knoten a  $O(|E|)$

Tipp: Cut Rekonstruktion mit unionFind für Partitionierung oder vector<bool> für edge id's im cut.

```

1 struct Edge {
2     int from, to;
3     ll cap;
4 };
5 vector<vector<Edge>> adj, tmp;
6 vector<bool> erased;
7 void merge(int u, int v) {
8     tmp[u].insert(tmp[u].end(), all(tmp[v]));
9     tmp[v].clear();
10    erased[v] = true;
11    for (auto& vec : tmp) {
12        for (Edge e : vec) {
13            if (e.from == v) e.from = u;
14            if (e.to == v) e.to = u;
15        }
16    }
17    ll stoer_wagner() {
18        ll res = INF;
19        tmp = adj;
20        erased.assign(sz(tmp), false);
21        for (int i = 1; i < sz(tmp); i++) {
22            int s = 0;
23            while (erased[s]) s++;
24            priority_queue<pair<ll, int>> pq;
25            pq.push({0, s});
26            vector<ll> con(sz(tmp));
27            ll cur = 0;
28            vector<pair<ll, int>> state;
29            while (!pq.empty()) {
30                int c = pq.top().second;
31                pq.pop();
32                if (con[c] < 0) continue; //already seen
33                con[c] = -1;
34                for (auto e : tmp[c]) {
35                    if (con[e.to] >= 0) {//add edge to cut
36                        con[e.to] += e.cap;
37                        pq.push({con[e.to], e.to});
38                    } else if (e.to != c) {//remove edge from cut
39                        cur -= e.cap;
40                    }
41                }
42                state.push_back({cur, c});
43            }
44            int t = state.back().second;
45            state.pop_back();
46            if (state.empty()) return 0; //graph is not connected!?
47            merge(state.back().second, t);
48            res = min(res, state.back().first);
49        }
50        return res;
}

```

## 2.21 Rerooting Template

```

1 using W = ll; // edge weight type
2 vector<vector<pair<int, W>> adj;
3
4 struct Reroot {
5     using T = ll; // dp type
6     static constexpr T E = 0; // neutral element
7     T takeChild(int v, int c, W w, T x) {} // move child along edge
8     static T comb(T x, T y) {}
9     T fin(int v, T x) {} // add v to own dp value x
10    vector<T> dp;
11
12    T dfs0(int v, int from = -1) {
13        T val = E;
14        for (auto [u, w] : adj[v]) {
15            if (u == from) continue;
16            val = comb(val, takeChild(v, u, w, dfs0(u, v)));
17        }
18        return dp[v] = fin(v, val);
19    }
20
21    void dfs1(int v, int from = -1) {
22        vector<T> pref = {E};
23        for (auto [u, w] : adj[v]) {
24            pref.push_back(takeChild(v, u, w, dp[u]));
25        }
26        auto suf = pref;
27        partial_sum(all(pref), pref.begin(), comb);
28        exclusive_scan(suf.rbegin(), suf.rend(),
29                        suf.rbegin(), E, comb);
30
31        for (int i = 0; i < sz(adj[v]); i++) {
32            auto [u, w] = adj[v][i];
33            if (u == from) continue;
34            dp[v] = fin(v, comb(pref[i], suf[i + 1]));
35            dfs1(u, v);
36        }
37        dp[v] = fin(v, suf[0]);
38    }
39
40    auto solve() {
41        dp.assign(sz(adj), E);
42        dfs0(0);
43        dfs1(0);
44        return dp;
45    }
46}

```

## 2.22 Virtual Trees

```

1 // needs dfs in- and out- time and lca function
2 vector<int> in, out;
3
4 void virtualTree(vector<int> ind) { // indices of used nodes
5     sort(all(ind), [&](int x, int y) {return in[x] < in[y];});
6     for (int i = 1, n = sz(ind); i < n; i++) {
7         ind.push_back(lca(ind[i - 1], ind[i]));
8     }
9     sort(all(ind), [&](int x, int y) {return in[x] < in[y];});
10    ind.erase(unique(all(ind)), ind.end());
11}

```

```

10    int n = sz(ind);
11    vector<vector<int>> tree(n);
12    vector<int> st = {0};
13    for (int i = 1; i < n; i++) {
14        while (in[ind[i]] >= out[ind[st.back()]]) st.pop_back();
15        tree[st.back()].push_back(i);
16        st.push_back(i);
17    }
18    // virtual directed tree with n nodes, original indices in ind
19    // weights can be calculated, e.g. with binary lifting
20}

```

## 2.23 Erdős-Gallai

Sei  $d_1 \geq \dots \geq d_n$ . Es existiert genau dann ein Graph  $G$  mit Degreesequenz

$$d \text{ falls } \sum_{i=1}^n d_i \text{ gerade ist und f\"ur } 1 \leq k \leq n: \sum_{i=1}^k d_i \leq k \cdot (k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k)$$

havelHakimi findet Graph  $O(|V|+|E|)\log(|V|))$

```

1 vector<vector<int>> havelHakimi(const vector<int>& deg) {
2     priority_queue<pair<int, int>> pq;
3     for (int i = 0; i < sz(deg); i++) {
4         if (deg[i] > 0) pq.push({deg[i], i});
5     }
6     vector<vector<int>> adj(sz(deg));
7     while (!pq.empty()) {
8         auto [degV, v] = pq.top(); pq.pop();
9         if (sz(pq) < degV) return {}; //impossible
10        vector<pair<int, int>> todo(degV);
11        for (auto& e : todo) e = pq.top(), pq.pop();
12        for (auto [degU, u] : todo) {
13            adj[v].push_back(u);
14            adj[u].push_back(v);
15            if (degU > 1) pq.push({degU - 1, u});
16        }
17        return adj;
18    }
19}

```

## 2.24 Max-Flow

## 2.25 Min-Cost-Max-Flow

mincostflow berechnet Fluss  $O(|V|^2 \cdot |E|^2)$

```

1 constexpr ll INF = 1LL << 60; // Gr\"o\fer als der maximale Fluss.
2 struct MinCostFlow {
3     struct edge {
4         int to;
5         ll f, cost;
6     };
7     vector<edge> edges;
8     vector<vector<int>> adj;
9     vector<int> pref, con;
10    vector<ll> dist;
11    const int s, t;
12    ll maxflow, mincost;
13
14    MinCostFlow(int n, int source, int target) :
15        adj(n), s(source), t(target) {};
16
17    void addEdge(int u, int v, ll c, ll cost) {
18        adj[u].push_back(sz(edges));
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
8010
8011
8012
8013
8014
8015
8016
8017
8018
8019
8020
8021
8022
8023
8024
8025
8026
8027
8028
8029
8030
8031
8032
8033
8034
8035
8036
8037
8038
8039
80310
80311
80312
80313
80314
80315
80316
80317
80318
80319
80320
80321
80322
80323
80324
80325
80326
80327
80328
80329
80330
80331
80332
80333
80334
80335
80336
80337
80338
80339
80340
80341
80342
80343
80344
80345
80346
80347
80348
80349
80350
80351
80352
80353
80354
80355
80356
80357
80358
80359
803510
803511
803512
803513
803514
803515
803516
803517
803518
803519
803520
803521
803522
803523
803524
803525
803526
803527
803528
803529
803530
803531
803532
803533
803534
803535
803536
803537
803538
803539
803540
803541
803542
803543
803544
803545
803546
803547
803548
803549
803550
803551
803552
803553
803554
803555
803556
803557
803558
803559
803560
803561
803562
803563
803564
803565
803566
803567
803568
803569
803570
803571
803572
803573
803574
803575
803576
803577
803578
803579
803580
803581
803582
803583
803584
803585
803586
803587
803588
803589
8035810
8035811
8035812
8035813
8035814
8035815
8035816
8035817
8035818
8035819
8035820
8035821
8035822
8035823
8035824
8035825
8035826
8035827
8035828
8035829
8035830
8035831
8035832
8035833
8035834
8035835
8035836
8035837
8035838
8035839
80358310
80358311
80358312
80358313
80358314
80358315
80358316
80358317
80358318
80358319
80358320
80358321
80358322
80358323
80358324
80358325
80358326
80358327
80358328
80358329
80358330
80358331
80358332
80358333
80358334
80358335
80358336
80358337
80358338
80358339
80358340
80358341
80358342
80358343
80358344
80358345
80358346
80358347
80358348
80358349
80358350
80358351
80358352
80358353
80358354
80358355
80358356
80358357
80358358
80358359
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
803583527
803583528
803583529
803583530
803583531
803583532
803583533
803583534
803583535
803583536
803583537
803583538
803583539
803583510
803583511
803583512
803583513
803583514
803583515
803583516
803583517
803583518
803583519
803583520
803583521
803583522
803583523
803583524
803583525
803583526
80
```

### 2.25.1 Dinic's Algorithm mit Capacity Scaling

maxFlow doppelt so schnell wie Ford Fulkerson  $O(|V|^2 \cdot |E|)$   
addEdge fügt eine gerichtete Kante ein  $O(1)$

```

1 struct Edge {
2     int to, rev;
3     ll f, c;
4 };
5 vector<vector<Edge>> adj;
6 int s, t;
7 vector<int> pt, dist;
8 void addEdge(int u, int v, ll c) {
9     adj[u].push_back({v, (int)sz(adj[v]), 0, c});
10    adj[v].push_back({u, (int)sz(adj[u]) - 1, 0, 0});
11 }
12 bool bfs(ll lim) {
13     dist.assign(sz(adj), -1);
14     dist[s] = 0;
15     queue<int> q({s});
16     while (!q.empty() && dist[t] < 0) {
17         int v = q.front(); q.pop();
18         for (Edge& e : adj[v]) {
19             if (dist[e.to] < 0 && e.c - e.f >= lim) {
20                 dist[e.to] = dist[v] + 1;
21                 q.push(e.to);
22             }
23         }
24     }
25     return dist[t] >= 0;
26 }
27 ll dfs(int v, ll flow) {
28     if (v == t || flow == 0) return flow;
29     for (; pt[v] < sz(adj[v]); pt[v]++) {
30         Edge& e = adj[v][pt[v]];
31         if (dist[e.to] != dist[v] + 1) continue;
32         ll cur = dfs(e.to, min(e.c - e.f, flow));
33         if (cur > 0) {
34             e.f += cur;
35             adj[e.to][e.rev].f -= cur;
36         }
37     }
38     return 0;
39 }
40 ll maxFlow(int source, int target) {
41     s = source, t = target;
42     ll flow = 0;
43     // set lim = 1 and use dfs(s, INF) to disable scaling
44     for (ll lim = (1LL << 62); lim >= 1; lim /= 2) {
45         while (bfs(lim)) {
46             pt.assign(sz(adj), 0);
47             ll cur;
48             do {
49                 cur = dfs(s, lim);
50                 flow += cur;
51             } while (cur > 0);
52         }
53     }
54 }
```

## 3 Geometrie

### 3.1 Closest Pair

shortestDist kürzester Abstand zwischen Punkten  $O(n \cdot \log(n))$

```

1 ll rec(vector<pt>::iterator a, int l, int r) {
2     if (r - l < 2) return INF;
3     int m = (l + r) / 2;
4     ll midx = a[m].real();
5     ll ans = min(rec(a, l, m), rec(a, m, r));
6     inplace_merge(a+l, a+m, a+r, [](<const pt& x, <const pt& y) {
7         return x.imag() < y.imag();
8     });
9     pt tmp[8];
10    fill(all(tmp), a[l]);
11    for (int i = l + 1, next = 0; i < r; i++) {
12        if (ll x = a[i].real() - midx; x * x < ans) {
13            for (pt& p : tmp) ans = min(ans, norm(p - a[i]));
14            tmp[next++ & 7] = a[i];
15        }
16    }
17    return ans;
18 }
19 ll shortestDist(vector<pt> a) { // sz(pts) > 1
20     sort(all(a), [](<const pt& x, <const pt& y) {
21         return x.real() < y.real();
22     });
23     return rec(a.begin(), 0, sz(a));
24 }
```

### 3.2 Konvexe Hülle

convexHull berechnet konvexe Hülle  $O(n \cdot \log(n))$

- konvexe Hülle gegen den Uhrzeigersinn sortiert
- nur Eckpunkte enthalten (für alle Punkte = im CCW Test entfernen)
- erster und letzter Punkt sind identisch

```

1 vector<pt> convexHull(vector<pt> pts) {
2     sort(all(pts), [](<const pt& a, <const pt& b) {
3         return real(a) == real(b) ? imag(a) < imag(b)
4                                         : real(a) < real(b);
5     });
6     pts.erase(unique(all(pts)), pts.end());
7     int k = 0;
8     vector<pt> h(2 * sz(pts));
9     auto half = [&](auto begin, auto end, int t) {
10        for (auto it = begin; it != end; it++) {
11            while (k > t && cross(h[k-2], h[k-1], *it) <= 0) k--;
12            h[k++] = *it;
13        };
14    half(all(pts), 1); // Untere Hülle.
15    half(next(pts.rbegin()), pts.rend(), k); // Obere Hülle.
16    h.resize(k);
17    return h;
18 }
```

### 3.3 Rotating calipers

antipodalPoints berechnet antipodale Punkte  $O(n)$

WICHTIG: Punkte müssen gegen den Uhrzeigersinn sortiert sein und konvexes Polygon bilden!

```

1 vector<pair<int, int>> antipodalPoints(vector<pt>& h) {
2     if (sz(h) < 2) return {};
3     vector<pair<int, int>> result;
4     for (int i = 0, j = 1; i < j; i++) {
5         while (true) {
6             result.push_back({i, j});
7             if (cross(h[(i + 1) % sz(h)] - h[i],
8                     h[(j + 1) % sz(h)] - h[j]) <= 0) break;
9             j = (j + 1) % sz(h);
10        }
11    }
12    return result;
13 }
```

### 3.4 Formeln – std::complex

```

1 // Komplexe Zahlen als Punkte. Wenn immer möglich complex<ll>
2 // verwenden. Funktionen wie abs() geben dann aber ll zurück.
3 using pt = complex<double>;
4 constexpr double PIU = acos(-1.0l); // PIL < PI < PIU
5 constexpr double PIL = PIU-2e-19l;
6 // Winkel zwischen Punkt und x-Achse in [-PI, PI].
7 double angle(pt a) {return arg(a);}
8 // rotiert Punkt im Uhrzeigersinn um den Ursprung.
9 pt rotate(pt a, double theta) {return a * polar(1.0, theta);}
10 // Skalarprodukt.
11 auto dot(pt a, pt b) {return real(conj(a) * b);}
12 // abs()^2. (pre c++20)
13 auto norm(pt a) {return dot(a, a);}
14 // Kreuzprodukt, 0, falls kollinear.
15 auto cross(pt a, pt b) {return imag(conj(a) * b);}
16 auto cross(pt p, pt a, pt b) {return cross(a - p, b - p);}
17 // 1 => c links von a->b
18 // 0 => a, b und c kollinear
19 // -1 => c rechts von a->b
20 int ccw(pt a, pt b, pt c) {
21     auto orien = cross(b - a, c - a);
22     return (orien > EPS) - (orien < -EPS);
23 }
24 // Liegt d in der gleichen Ebene wie a, b, und c?
25 bool isCoplanar(pt a, pt b, pt c, pt d) {
26     return abs((b - a) * (c - a) * (d - a)) < EPS;
27 }
28 // charakterisiert winkel zwischen Vektoren u und v
29 pt uniqueAngle(pt u, pt v) {
30     pt tmp = v * conj(u);
31     ll g = abs(gcd(real(tmp), imag(tmp)));
32     return tmp / g;
33 }
```

```

1 // Liegt p auf der Geraden a-b? 2d und 3d
2 bool pointOnLine(pt a, pt b, pt p) {
3     return ccw(a, b, p) == 0;
4 }
5 // Test auf Linienschnitt zwischen a-b und c-d. (nicht identisch)
6 bool lineIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
7     return abs(cross(a - b, c - d)) > EPS;
8 }
9 // Berechnet den Schnittpunkt der Geraden a-b und c-d.
10 // die Geraden dürfen nicht parallel sein!
11 pt lineIntersection2(pt a, pt b, pt c, pt d) {
12     double x = cross(b - a, d - c);
13     double y = cross(c - a, d - c);
14     return a + y/x*(b - a);
15 }
16 // Entfernung von Punkt p zur Geraden durch a-b. 2d und 3d
17 double distToLine(pt a, pt b, pt p) {
18     return abs(cross(p - a, b - a)) / abs(b - a);
19 }
20 // Projiziert p auf die Gerade a-b
21 pt projectToLine(pt a, pt b, pt p) {
22     return a + (b - a) * dot(p - a, b - a) / norm(b - a);
23 }
24 // sortiert alle Punkte pts auf einer Linie entsprechend dir
25 void sortLine(pt dir, vector<pt>& pts) { // (2d und 3d)
26     sort(all(pts), [&](pt a, pt b) {
27         return dot(dir, a) < dot(dir, b);
28     });
29 }
30 // Liegt p auf der Strecke a-b? (nutze < für inberhalb)
31 bool pointOnSegment(pt a, pt b, pt p) {
32     if (ccw(a, b, p) != 0) return false;
33     auto dist = norm(a - b);
34     return norm(a - p) <= dist && norm(b - p) <= dist;
35 }
36 // Entfernung von Punkt p zur Strecke a-b.
37 double distToSegment(pt a, pt b, pt p) {
38     if (a == b) return abs(p - a);
39     if (dot(p - a, b - a) <= 0) return abs(p - a);
40     if (dot(p - b, b - a) >= 0) return abs(p - b);
41     return distToLine(a, b, p);
42 }
43 // Test auf Streckenschnitt zwischen a-b und c-d.
44 bool segmentIntersection(pt a, pt b, pt c, pt d) {
45     if (ccw(a, b, c) == 0 && ccw(a, b, d) == 0)
46         return pointOnSegment(a,b,c) ||
47             pointOnSegment(a,b,d) ||
48             pointOnSegment(c,d,a) ||
49             pointOnSegment(c,d,b);
50     return ccw(a, b, c) * ccw(a, b, d) <= 0 &&
51         ccw(c, d, a) * ccw(c, d, b) <= 0;
52 }
53 // Berechnet die Schnittpunkte der Strecken a-b und c-d.
54 // Enthält entweder keinen Punkt, den einzigen Schnittpunkt

```

```

55 // oder die Endpunkte der Schnittstrecke.
56 vector<pt> segmentIntersection2(pt a, pt b, pt c, pt d) {
57     double x = cross(b - a, d - c);
58     double y = cross(c - a, d - c);
59     double z = cross(b - a, a - c);
60     if (x < 0) {x = -x; y = -y; z = -z;}
61     if (y < -EPS || y - x > EPS || z < -EPS || z - x > EPS) return {};
62     if (x > EPS) return {a + y/x*(b - a)};
63     vector<pt> result;
64     auto insertUnique = [&](pt p) {
65         for (auto q : result) if (abs(p - q) < EPS) return;
66         result.push_back(p);
67     };
68     if (dot(c-a, d-a) < EPS) insertUnique(a);
69     if (dot(c-b, d-b) < EPS) insertUnique(b);
70     if (dot(a-c, b-c) < EPS) insertUnique(c);
71     if (dot(a-d, b-d) < EPS) insertUnique(d);
72     return result;
73 }
74 // Kürzeste Entfernung zwischen den Strecken a-b und c-d.
75 double distBetweenSegments(pt a, pt b, pt c, pt d) {
76     if (segmentIntersection(a, b, c, d)) return 0.0;
77     return min({distToSegment(a, b, c), distToSegment(a, b, d),
78                 distToSegment(c, d, a), distToSegment(c, d, b)});
79 }

```

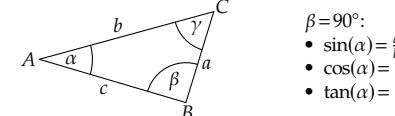
```

1 bool left(pt p) {return real(p) < 0 ||
2                         (real(p) == 0 && imag(p) < 0);}
3 // counter clockwise, starting with "11:59"
4 void sortAround(pt p, vector<pt>& ps) {
5     sort(all(ps), [&](const pt& a, const pt& b) {
6         if (left(a - p) != left(b - p))
7             return left(a - p) > left(b - p);
8         return cross(p, a, b) > 0;
9     });
10 }

```

Generell:

- $\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
- $b = \frac{a}{\sin(\alpha)} \sin(\beta)$
- $\Delta = \frac{bc}{2} \sin(\alpha)$



- $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$
- $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$
- $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$

```

1 // Mittelpunkt des Dreiecks abc.
2 pt centroid(pt a, pt b, pt c) {return (a + b + c) / 3.0;}
3 // Flächeninhalt eines Dreiecks bei bekannten Eckpunkten.
4 double area(pt a, pt b, pt c) {
5     return abs(cross(a, b, c)) / 2.0;
6 }
7 // Flächeninhalt eines Dreiecks bei bekannten Seitenlängen.
8 double area(double a, double b, double c) {
9     double s = (a + b + c) / 2.0; //unpräzise
10    return sqrt(s * (s-a) * (s-b) * (s-c));
11 }
12 // Zentrum des größten Kreises im Dreiecke
13 pt inCenter(pt a, pt b, pt c) {

```

```

14     double x = abs(a-b), y = abs(b-c), z = abs(a-c);
15     return (y*a + z*b + x*c) / (x+y+z);
16 }
17 // Zentrum des Kreises durch alle Eckpunkte
18 // a, b und c nicht kollinear
19 pt circumCenter(pt a, pt b, pt c) {
20     b -= a, c -= a;
21     pt d = b * norm(c) - c * norm(b);
22     d = {-d.imag(), d.real()};
23     return a + d / cross(b, c) / 2.0;
24 }
25 // -1 => p außerhalb Kreis durch a,b,c
26 // 0 => p auf Kreis durch a,b,c
27 // 1 => p im Kreis durch a,b,c
28 int insideOutCenter(pt a, pt b, pt c, pt p) { // braucht lll
29     return ccw(a,b,c) * sgn(imag((c-b)*conj(p-c)*(a-p)*conj(b-a)));
30 }
31 // Sind die Dreiecke a1, b1, c1, and a2, b2, c2 ähnlich?
32 // Erste Zeile testet Ähnlichkeit mit gleicher Orientierung,
33 // zweite Zeile testet Ähnlichkeit mit verschiedener Orientierung
34 bool similar(pt a1, pt b1, pt c1, pt a2, pt b2, pt c2) {
35     return (b2-a2) * (c1-a1) == (b1-a1) * (c2-a2) ||
36            (b2-a2) * conj(c1-a1) == conj(b1-a1) * (c2-a2);
37 }

```

```

1 // Flächeninhalt eines Polygons (nicht selbtschneidend).
2 // Punkte gegen den Uhrzeigersinn: positiv, sonst negativ.
3 double area(const vector<pt>& poly) { //poly[0] == poly.back()
4     ll res = 0;
5     for (int i = 0; i + 1 < sz(poly); i++)
6         res += cross(poly[i], poly[i + 1]);
7     return 0.5 * res;
8 }
9 // Anzahl ccw drehungen einer Polyline um einen Punkt
10 // p nicht auf rand und poly[0] == poly.back()
11 // res != 0 or (res & 1) != 0 um inside zu prüfen bei
12 // selbtschneidenden Polygonen (definitions Sache)
13 ll windingNumber(pt p, const vector<pt>& poly) {
14     ll res = 0;
15     for (int i = 0; i + 1 < sz(poly); i++) {
16         pt a = poly[i], b = poly[i + 1];
17         if (real(a) > real(b)) swap(a, b);
18         if (real(a) <= real(p) && real(p) < real(b) &&
19             cross(p, a, b) < 0) {
20             res += ccw(p, poly[i], poly[i + 1]);
21         }
22     }
23     return res;
24 }
25 // check if p is inside poly (any polygon poly[0] == poly.back())
26 bool inside(pt p, const vector<pt>& poly) {
27     bool in = false;
28     for (int i = 0; i + 1 < sz(poly); i++) {
29         pt a = poly[i], b = poly[i + 1];
30         if (pointOnSegment(a, b, p)) return false; // border counts?
31         if (real(a) > real(b)) swap(a, b);

```

```

31     if (real(a) <= real(p) && real(p) < real(b) &&
32         cross(p, a, b) < 0) {
33         in ^= 1;
34     }
35     return in;
36 }

37 // convex hull without duplicates, h[0] != h.back()
38 // apply comments if border counts as inside
39 bool insideConvex(pt p, const vector<pt>& hull) {
40     int l = 0, r = sz(hull) - 1;
41     if (cross(hull[0], hull[r], p) >= 0) return false; // > 0
42     while (l + 1 < r) {
43         int m = (l + r) / 2;
44         if (cross(hull[0], hull[m], p) > 0) l = m; // >= 0
45         else r = m;
46     }
47     return cross(hull[l], hull[r], p) > 0; // >= 0
48 }

49 void rotateMin(vector<pt>& hull) {
50     auto mi = min_element(all(hull), [](const pt& a, const pt& b){
51         return real(a) == real(b) ? imag(a) < imag(b)
52                               : real(a) < real(b);
53     });
54     rotate(hull.begin(), mi, hull.end());
55 }

56 // convex hulls without duplicates, h[0] != h.back()
57 vector<pt> minkowski(vector<pt> ps, vector<pt> qs) {
58     rotateMin(ps);
59     rotateMin(qs);
60     ps.push_back(ps[0]);
61     qs.push_back(qs[0]);
62     ps.push_back(ps[1]);
63     qs.push_back(qs[1]);
64     vector<pt> res;
65     for (ll i = 0, j = 0; i + 2 < sz(ps) || j + 2 < sz(qs); ) {
66         res.push_back(ps[i] + qs[j]);
67         auto c = cross(ps[i + 1] - ps[i], qs[j + 1] - qs[j]);
68         if(c >= 0) i++;
69         if(c <= 0) j++;
70     }
71     return res;
72 }

73 // convex hulls without duplicates, h[0] != h.back()
74 double dist(const vector<pt>& ps, vector<pt> qs) {
75     for (pt& q : qs) q *= -1;
76     auto p = minkowski(ps, qs);
77     p.push_back(p[0]);
78     double res = INF;
79     bool intersect = true;
80     for (ll i = 0; i + 1 < sz(p); i++) {
81         intersect &= cross(p[i], p[i+1]) >= 0;
82         res = min(res, distToSegment(p[i], p[i+1], 0));
83     }
84     return intersect ? 0 : res;
85 }

86 bool left(pt of, pt p) {return cross(p, of) < 0 ||
```

```

87             (cross(p, of) == 0 && dot(p, of) > 0);}
88 // convex hulls without duplicates, hull[0] == hull.back() and
89 // hull[0] must be a convex point (with angle < pi)
90 // returns index of corner where dot(dir, corner) is maximized
91 int extremal(const vector<pt>& hull, pt dir) {
92     dir *= pt(0, 1);
93     int l = 0, r = sz(hull) - 1;
94     while (l + 1 < r) {
95         int m = (l + r) / 2;
96         pt dm = hull[m+1]-hull[m];
97         pt dl = hull[l+1]-hull[l];
98         if (left(dl, dir) != left(dl, dm)) {
99             if (left(dl, dm)) l = m;
100            else r = m;
101        } else {
102            if (cross(dir, dm) < 0) l = m;
103            else r = m;
104        }
105     return r % (sz(hull) - 1);
106 }

107 // convex hulls without duplicates, hull[0] == hull.back() and
108 // hull[0] must be a convex point (with angle < pi)
109 // {} if no intersection
110 // {} if corner is only intersection
111 // {x} segments (i,i+1) and (j,j+1) intersected (if only the
112 // border is intersected corners i and j are the start and end)
113 vector<int> intersectLine(const vector<pt>& hull, pt a, pt b) {
114     int endA = extremal(hull, (a-b) * pt(0, 1));
115     int endB = extremal(hull, (b-a) * pt(0, 1));
116     // cross == 0 => line only intersects border
117     if (cross(hull[endA], a, b) > 0 ||
118         cross(hull[endB], a, b) < 0) return {};
119     int n = sz(hull) - 1;
120     vector<int> res;
121     for (auto _ : {0, 1}) {
122         int l = endA, r = endB;
123         if (r < l) r += n;
124         while (l + 1 < r) {
125             int m = (l + r) / 2;
126             if (cross(hull[m % n], a, b) <= 0 &&
127                 cross(hull[m % n], a, b) != cross(hull[endB], a, b))
128                 l = m;
129             else r = m;
130         }
131         if (cross(hull[r % n], a, b) == 0) l++;
132         res.push_back(l % n);
133         swap(endA, endB);
134         swap(a, b);
135     }
136     if (res[0] == res[1]) res.pop_back();
137     return res;
138 }

1 // berechnet die Schnittpunkte von zwei Kreisen
2 // (Kreise dürfen nicht gleich sein!)
3 vector<pt> circleIntersection(pt c1, double r1,
```

```

4     pt c2, double r2) {
5     double d = abs(c1 - c2);
6     if (d < abs(r1 - r2) || d > abs(r1 + r2)) return {};
7     double a = (r1 * r1 - r2 * r2 + d * d) / (2 * d);
8     pt p = (c2 - c1) * a / d + c1;
9     if (d == abs(r1 - r2) || d == abs(r1 + r2)) return {p};
10    double h = sqrt(r1 * r1 - a * a);
11    return {p + pt{0, 1} * (c2 - c1) * h / d,
12             p - pt{0, 1} * (c2 - c1) * h / d};
13 }

14 // berechnet die Schnittpunkte zwischen
15 // einem Kreis(Kugel) und einem Strahl (2D und 3D)
16 vector<pt> circleRayIntersection(pt center, double r,
17                                   pt orig, pt dir) {
18     vector<pt> result;
19     double a = norm(dir);
20     double b = 2 * dot(dir, orig - center);
21     double c = norm(orig - center) - r * r;
22     double discr = b * b - 4 * a * c;
23     if (discr >= 0) {
24         // t in [0, 1] => schnitt mit Segment [orig, orig + dir]
25         double t1 = (b + sqrt(discr)) / (2 * a);
26         double t2 = -(b - sqrt(discr)) / (2 * a);
27         if (t1 >= 0) result.push_back(t1 * dir + orig);
28         if (t2 >= 0 && abs(t1 - t2) > EPS) {
29             result.push_back(t2 * dir + orig);
30         }
31     }
32     return result;
33 }
```

### 3.5 Formeln – 3D

```

1 // Skalarprodukt
2 auto operator|(pt3 a, pt3 b) {
3     return a.x * b.x + a.y*b.y + a.z*b.z;
4 }
5 auto dot(pt3 a, pt3 b) {return a|b;}
6 // Kreuzprodukt
7 pt3 operator*(pt3 a, pt3 b) {return {a.y*b.z - a.z*b.y,
8                                         a.z*b.x - a.x*b.z,
9                                         a.x*b.y - a.y*b.x};}
10 pt3 cross(pt3 a, pt3 b) {return a*b;}
11 // Länge von a
12 double abs(pt3 a) {return sqrt(dot(a, a));}
13 double abs(pt3 a, pt3 b) {return abs(b - a);}
14 // Mixedprodukt
15 auto mixed(pt3 a, pt3 b, pt3 c) {return a*b|c;};
16 // orientierung von p zu der Ebene durch a, b, c
17 // -1 => gegen den Uhrzeigersinn,
18 // 0 => kollinear,
19 // 1 => im Uhrzeigersinn.
20 int ccw(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 p) {
21     auto orien = mixed(b - a, c - a, p - a);
22     return (orien > EPS) - (orien < -EPS);
23 }
24 // Entfernung von Punkt p zur Ebene a, b, c.
```

```

25 double distToPlane(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 p) {
26     pt3 n = cross(b - a, c - a);
27     return abs(dot(n, a - p)) / abs(n);
28 }
29 // Liegt p in der Ebene a, b, c?
30 bool pointOnPlane(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 p) {
31     return ccw(a, b, c, p) == 0;
32 }
33 // Schnittpunkt von der Grade a-b und der Ebene c, d, e
34 // die Grade darf nicht parallel zu der Ebene sein!
35 pt3 linePlaneIntersection(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 d, pt3 e) {
36     pt3 n = cross(d - c, e - c);
37     pt3 dir = b - a;
38     return a + dir * dot(n, c - a) / dot(n, dir);
39 }
40 // Abstand zwischen den Grade a-b und c-d
41 double lineLineDist(pt3 a, pt3 b, pt3 c, pt3 d) {
42     pt3 n = cross(b - a, d - c);
43     if (abs(n) < EPS) return distToLine(a, b, c);
44     return abs(dot(a - c, n)) / abs(n);
45 }

```

### 3.6 Half-plane intersection

```

1 constexpr ll INF = 0x1FFF'FFFF'FFFF'FFFF; //THIS CODE IS WIP ↗
2 bool left(pt p) {return real(p) < 0 || (real(p) == 0 && imag(p) < 0);}
3 struct hp {
4     pt from, to;
5     hp(pt a, pt b) : from(a), to(b) {}
6     hp(pt dummy) : hp(dummy, dummy) {}
7     bool dummy() const {return from == to;}
8     pt dir() const {return dummy() ? to : to - from;}
9     bool operator<(const hp& o) const {
10         if (left(dir()) != left(o.dir()))
11             return left(dir()) > left(o.dir());
12         return cross(dir(), o.dir()) > 0;
13     }
14     using lll = __int128;
15     using ptl = complex<lll>;
16     ptl mul(lll m, ptl p) const {return m*p;}//ensure 128bit
17     bool check(const hp& a, const hp& b) const {
18         if (dummy() || b.dummy()) return false;
19         if (a.dummy()) {
20             ll ort = sgn(cross(b.dir(), dir()));
21             if (ort == 0) return cross(from, to, a.from) < 0;
22             return cross(b.dir(), a.dir()) * ort > 0;
23         }
24         ll x = cross(a.dir(), b.dir());
25         ll y = cross(b.from - a.from, b.dir());
26         ptl i = mul(x, a.from) + mul(y, a.dir()); //intersect a and b
27         // check if i is outside/right of this
28         return imag(conj(mul(sgn(x), dir()))*(i-mul(x, from))) < 0;
29     }
30 };

```

```

32 constexpr ll lim = 2e9+7;
33 deque<hp> intersect(vector<hp> hps) {
34     hps.push_back(hp(pt{lim + 1, -1}));
35     hps.push_back(hp(pt{lim + 1, 1}));
36     sort(all(hps));
37     deque<hp> dq = {hp(pt{-lim - 1, 1})};
38     for (auto x : hps) {
39         while (sz(dq) > 1 && x.check(dq.end()[-1], dq.end()[-2]))
40             dq.pop_back();
41         while (sz(dq) > 1 && x.check(dq[0], dq[1]))
42             dq.pop_front();
43         if (cross(x.dir(), dq.back().dir()) == 0) {
44             if (dot(x.dir(), dq.back().dir()) < 0) return {};
45             if (cross(x.from, x.to, dq.back().from) < 0)
46                 dq.pop_back();
47             else continue;
48         }
49         dq.push_back(x);
50     }
51     while (sz(dq) > 2 && dq[0].check(dq.end()[-1], dq.end()[-2]))
52         dq.pop_back();
53     while (sz(dq) > 2 && dq.back().check(dq[0], dq[1]))
54         dq.pop_front();
55     if (sz(dq) < 3) return {};
56     return dq;
57 }

```

## 4 Mathe

### 4.1 Longest Increasing Subsequence

- lower\_bound  $\Rightarrow$  streng monoton
- upper\_bound  $\Rightarrow$  monoton

```

1 vector<int> lis(vector<ll>& a) {
2     int n = sz(a), len = 0;
3     vector<ll> dp(n, INF), dp_id(n), prev(n);
4     for (int i = 0; i < n; i++) {
5         int pos = lower_bound(all(dp), a[i]) - dp.begin();
6         dp[pos] = a[i];
7         dp_id[pos] = i;
8         prev[i] = pos ? dp_id[pos - 1] : -1;
9         len = max(len, pos + 1);
10    }
11    // reconstruction
12    vector<int> res(len);
13    for (int x = dp_id[len-1]; len--; x = prev[x]) {
14        res[len] = x;
15    }
16    return res; // indices of one LIS
17 }

```

### 4.2 Zykel Erkennung

cycleDetection findet Zyklus von  $x_0$  und Länge in  $f$   $O(b+l)$

```

1 pair<ll, ll> cycleDetection(ll x0, function<ll(ll)> f) {
2     ll a = x0, b = f(x0), length = 1;
3     for (ll power = 1; a != b; b = f(b), length++) {
4         if (power == length) {
5             power *= 2;
6             length = 0;
7             a = b;
8         }
9     }
10    ll start = 0;
11    a = x0; b = x0;
12    for (ll i = 0; i < length; i++) b = f(b);
13    while (a != b) {
14        a = f(a);
15        b = f(b);
16        start++;
17    }
18    return {start, length};
19 }

```

### 4.3 Permutationen

kthperm findet  $k$ -te Permutation ( $k \in [0, n!]$ )  $O(n \cdot \log(n))$

```

1 vector<ll> kthperm(ll n, ll k) {
2     Tree<ll> t;
3     vector<ll> res(n);
4     for (ll i = 1; i <= n; k /= i, i++) {
5         t.insert(i - 1);
6         res[n - i] = k % i;
7     }
8     for (ll& x : res) {
9         auto it = t.find_by_order(x);
10        x = *it;
11        t.erase(it);
12    }
13    return res;
14 }

```

permIndex bestimmt Index der Permutation ( $res \in [0, n!]$ )  $O(n \cdot \log(n))$

```

1 ll permIndex(vector<ll> v) {
2     Tree<ll> t;
3     reverse(all(v));
4     for (ll& x : v) {
5         t.insert(x);
6         x = t.order_of_key(x);
7     }
8     ll res = 0;
9     for (int i = sz(v); i > 0; i--) {
10        res = res * i + v[i - 1];
11    }
12    return res;
13 }

```

#### 4.4 Mod-Exponent und Multiplikation über $\mathbb{F}_p$

`mulMod` berechnet  $a \cdot b \bmod n$   $O(\log(b))$

```
1 ll mulMod(ll a, ll b, ll n) {
2     ll res = 0;
3     while (b > 0) {
4         if (b & 1) res = (a + res) % n;
5         a = (a * 2) % n;
6         b /= 2;
7     }
8     return res;
9 }
```

`powMod` berechnet  $a^b \bmod n$   $O(\log(b))$

```
1 ll powMod(ll a, ll b, ll n) {
2     ll res = 1;
3     while (b > 0) {
4         if (b & 1) res = (a * res) % n;
5         a = (a * a) % n;
6         b /= 2;
7     }
8     return res;
9 }
```

• für  $a > 10^9$  `__int128` oder `modMul` benutzen!

#### 4.5 ggT, kgV, erweiterter euklidischer Algorithmus

$O(\log(a)+\log(b))$

```
1 // a*x + b*y = ggt(a, b)
2 array<ll, 3> extendedEuclid(ll a, ll b) {
3     if (a == 0) return {b, 0, 1};
4     auto [d, x, y] = extendedEuclid(b % a, a);
5     return {d, y - (b / a) * x, x};
6 }
```

#### 4.6 Multiplikatives Inverses von $x$ in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Falls  $m$  prim:  $x^{-1} \equiv x^{m-2} \bmod m$

Falls  $\text{ggT}(x,m)=1$ :

- Erweiterter euklidischer Algorithmus liefert  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $\alpha x + \beta m = 1$ .
- Nach Kongruenz gilt  $\alpha x + \beta m \equiv \alpha x \equiv 1 \bmod m$ .
- $x^{-1} \equiv \alpha \bmod m$

Sonst  $\text{ggT}(x,m)>1$ : Es existiert kein  $x^{-1}$ .

```
1 ll multInv(ll x, ll m) { // x^{-1} mod m
2     return 1 < x ? m - multInv(m % x, x) * m / x : 1;
3 }
```

**Lemma von Bézout** Sei  $(x, y)$  eine Lösung der diophantischen Gleichung  $ax+by=d$ . Dann lassen sich wie folgt alle Lösungen berechnen:

$$\left( x+k \frac{b}{\text{ggT}(a,b)}, y-k \frac{a}{\text{ggT}(a,b)} \right)$$

**PELL-Gleichungen** Sei  $(\bar{x}, \bar{y})$  die Lösung von  $x^2 - ny^2 = 1$ , die  $x > 1$  minimiert. Sei  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  die Lösung von  $x^2 - ny^2 = c$ , die  $x > 1$  minimiert. Dann lassen sich alle Lösungen von  $x^2 - ny^2 = c$  berechnen durch:

$$\begin{aligned} x_1 &:= \tilde{x}, & y_1 &:= \tilde{y} \\ x_{k+1} &:= \bar{x}x_k + n\bar{y}y_k, & y_{k+1} &:= \bar{x}y_k + \bar{y}x_k \end{aligned}$$

#### 4.7 Lineare Kongruenz

- Kleinste Lösung  $x$  für  $ax \equiv b \pmod{m}$ .
- Weitere Lösungen unterscheiden sich um  $\frac{m}{g}$ , es gibt also  $g$  Lösungen modulo  $m$ .

```
1 ll solveLinearCongruence(ll a, ll b, ll m) {
2     ll g = gcd(a, m);
3     if (b % g != 0) return -1;
4     return ((b / g) * multInv(a / g, m / g)) % (m / g);
5 }
```

#### 4.8 Chinesischer Restsatz

- Extrem anfällig gegen Overflows. Evtl. häufig 128-Bit Integer verwenden.
- Direkte Formel für zwei Kongruenzen  $x \equiv a \pmod{n}, x \equiv b \pmod{m}$ :

$$x \equiv a - y \cdot \frac{a-b}{d} \pmod{\frac{mn}{d}} \quad \text{mit} \quad d := \text{ggT}(n, m) = yn + zm$$

Formel kann auch für nicht teilerfremde Moduli verwendet werden. Sind die Moduli nicht teilerfremd, existiert genau dann eine Lösung, wenn  $a \equiv b \pmod{g\text{ggT}(n, m)}$ . In diesem Fall sind keine Faktoren auf der linken Seite erlaubt.

```
1 struct CRT {
2     using ll = __int128;
3     ll M = 1, sol = 0; // Solution unique modulo M
4     bool hasSol = true;
5
6     // Adds congruence x = a (mod m)
7     void add(ll a, ll m) {
8         auto [d, s, t] = extendedEuclid(M, m);
9         if((a - sol) % d != 0) hasSol = false;
10        ll z = M/d * s;
11        M *= m/d;
12        sol = (z % M * (a-sol) % M + sol + M) % M;
13    }
14 }
```

#### 4.9 Primzahltest & Faktorisierung

`isPrime` prüft ob Zahl prim ist  $O(\log(n)^2)$

```
1 constexpr ll bases32[] = {2, 7, 61};
2 constexpr ll bases64[] = {2, 325, 9375, 28178, 450775,
3                             9780504, 1795265022};
4
5 bool isPrime(ll n) {
6     if (n < 2 || n % 2 == 0) return n == 2;
7     ll d = n - 1, j = 0;
8     while (d % 2 == 0) d /= 2, j++;
9     for (ll a : bases64) {
10        if (a % n == 0) continue;
11        ll v = powMod(a, d, n); //with mulmod or int128
12        if (v == 1 || v == n - 1) continue;
13        for (ll i = 1; i <= j; i++) {
14            v = ((ll)v * v) % n;
15            if (v == n - 1 || v == 1) break;
16        }
17        if (v != n - 1) return false;
18    }
19    return true;
20 }
```

`rho` findet zufälligen Teiler  $O(\sqrt[4]{n})$

```
1 using ll = __int128;
2 ll rho(ll n) { // Findet Faktor < n, nicht unbedingt prim.
3     if (n % 2 == 0) return 2;
4     ll x = 0, y = 0, prd = 2, i = n/2 + 7;
5     auto f = [&](ll c){return (c * c + i) % n;};
6     for (ll t = 30; t % 40 || gcd(prd, n) == 1; t++) {
7         if (x == y) x = ++i, y = f(x);
8         if (ll q = (ll)prd * abs(x-y) % n; q) prd = q;
9         x = f(x); y = f(f(y));
10    }
11    return gcd(prd, n);
12 }
13
14 void factor(ll n, map<ll, int>& facts) {
15     if (n == 1) return;
16     if (isPrime(n)) {facts[n]++; return;}
17     ll f = rho(n);
18     factor(n / f, facts); factor(f, facts);
19 }
```

#### 4.10 Teiler

`countDivisors` Zählt Teiler von  $n$   $O(\sqrt[3]{n})$

```
1 ll countDivisors(ll n) {
2     ll res = 1;
3     for (ll i = 2; i * i * i <= n; i++) {
4         ll c = 0;
5         while (n % i == 0) {n /= i; c++;}
6         res *= c + 1;
7     }
8     if (isPrime(n)) res *= 2;
9     else if (n > 1) res *= isSquare(n) ? 3 : 4;
10    return res;
11 }
```

#### 4.11 Matrix-Exponent

`precalc` berechnet  $m^2$  vor  $O(\log(b) \cdot n^3)$   
`calc` berechnet  $m^b$ .  $O(\log(b) \cdot n^2)$

Tipp: wenn  $v[x]=1$  und 0 sonst, dann ist  $\text{res}[y] = m_{y,x}^b$ .

```
1 vector<mat> pows;
2 void precalc(mat m) {
3     pows = {mat(sz(m.m), 1), m};
4     for (int i = 1; i < 60; i++) pows.push_back(pows[i] * pows[i]);
5 }
6
7 auto calc(ll b, vector<ll> v) {
8     for (ll i = 1; i < b; i++) {
9         if (b & 1) v = pows[i] * v;
10        b /= 2;
11    }
12    return v;
13 }
```

## 4.12 Lineare Rekurrenz

BerlekampMassey Berechnet eine lineare Rekurrenz  $n$ -ter Ordnung  $O(n^2)$  aus den ersten  $2n$  Werte

```

1 constexpr ll mod = 1'000'000'007;
2 vector<ll> BerlekampMassey(const vector<ll>& s) {
3     int n = sz(s), L = 0, m = 0;
4     vector<ll> C(n), B(n), T;
5     C[0] = B[0] = 1;
6     ll b = 1;
7     for (int i = 0; i < n; i++) {
8         m++;
9         ll d = s[i] % mod;
10        for (int j = 1; j <= L; j++) {
11            d = (d + C[j] * s[i - j]) % mod;
12        }
13        if (!d) continue;
14        T = C;
15        ll coef = d * powMod(b, mod-2, mod) % mod;
16        for (int j = m; j < n; j++) {
17            C[j] = (C[j] - coef * B[j - m]) % mod;
18        }
19        if (2 * L > i) continue;
20        L = i + 1 - L;
21        swap(B, T);
22        b = d;
23        m = 0;
24    }
25    C.resize(L + 1);
26    C.erase(C.begin());
27    for (auto& x : C) x = (mod - x) % mod;
28    return C;
29 }
```

Sei  $f(n) = c_0 f(n-1) + c_1 f(n-2) + \dots + c_{n-1} f(0)$  eine lineare Rekurrenz.

kthTerm Berechnet  $k$ -ten Term einer Rekurrenz  $n$ -ter Ordnung  $O(\log(k) \cdot \text{mul}(n))$   
Die Polynom-Multiplikation kann auch mit NTT gemacht werden!

```

1 constexpr ll mod = 998244353;
2 // oder ntt mul Seite 18
3 vector<ll> mul(const vector<ll>& a, const vector<ll>& b) {
4     vector<ll> c(sz(a) + sz(b) - 1);
5     for (int i = 0; i < sz(a); i++) {
6         for (int j = 0; j < sz(b); j++) {
7             c[i+j] += a[i]*b[j] % mod;
8         }
9     }
10    for (ll& x : c) x %= mod;
11    return c;
12 }
13 ll kthTerm(const vector<ll>& f, const vector<ll>& c, ll k) {
14     int n = sz(c);
15     vector<ll> q(n + 1, 1);
16     for (int i = 0; i < n; i++) q[i + 1] = (mod - c[i]) % mod;
17     vector<ll> p = mul(f, q);
18     p.resize(n);
19     p.push_back(0);
20     do {
21         vector<ll> q2 = q;
```

```

21     for (int i = 1; i <= n; i += 2) q2[i] = (mod - q2[i]) % mod;
22     vector<ll> x = mul(p, q2), y = mul(q, q2);
23     for (int i = 0; i <= n; i++) {
24         p[i] = i == n ? 0 : x[2*i + (k&1)];
25         q[i] = y[2*i];
26     }
27 } while (k /= 2);
28 return p[0];
29 }
```

Alternativ kann der  $k$ -te Term in  $O(n^3 \log(k))$  berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & \dots & c_{n-1} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^k \times \begin{pmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \\ \vdots \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(n-1+k) \\ f(n-2+k) \\ \vdots \\ f(k) \end{pmatrix}$$

## 4.13 Diskreter Logarithmus

solve bestimmt Lösung  $x$  für  $a^x = b \pmod{m}$   $O(\sqrt{m} \cdot \log(m))$

```

1 ll dlog(ll a, ll b, ll m) { //a > 0!
2     ll bound = sqrtl(m) + 1; //memory usage bound < p
3     vector<pair<ll, ll>> vals(bound);
4     for (ll i = 0, e = 1; i < bound; i++, e = (e * a) % m) {
5         vals[i] = {e, i};
6     }
7     vals.emplace_back(m, 0);
8     sort(all(vals));
9     ll fact = powMod(a, m - bound - 1, m);
10    for (ll i = 0; i < m; i += bound, b = (b * fact) % m) {
11        auto it = lower_bound(all(vals), pair<ll, ll>{b, 0});
12        if (it->first == b) {
13            return (i + it->second) % m;
14        }
15    }
16    return -1;
17 }
```

## 4.14 Diskrete Quadratwurzel

sqrtMod bestimmt Lösung  $x$  für  $x^2 = a \pmod{p}$   $O(\log(p))$

Wichtig:  $p$  muss prim sein!

```

1 ll sqrtMod(ll a, ll p) { // teste mit legendre ob lösung existiert
2     if (a < 2) return a;
3     ll t = 0;
4     while (legendre((t*t-4*a) % p, p) >= 0) t = rng() % p;
5     ll b = -t, c = -t, d = 1, m = p;
6     for (m++; m /= 2; b = (a+a-b*b) % p, a = (a*a) % p) {
7         if (m % 2) {
8             d = (c-d*b) % p;
9             c = (c*a) % p;
10        } else {
11            c = (d*a - c*b) % p;
12        }
13    }
14    return (d + p) % p;
15 }
```

## 4.15 Primitivwurzeln

- Primitivwurzel modulo  $n$  existiert  $\Leftrightarrow n \in \{2, 4, p^\alpha, 2 \cdot p^\alpha \mid 2 < p \in \mathbb{P}, \alpha \in \mathbb{N}\}$
- es existiert entweder keine oder  $\phi(\phi(n))$  inkongruente Primitivwurzeln
- Sei  $g$  Primitivwurzel modulo  $n$ . Dann gilt:  
Das kleinste  $k$ , sodass  $g^k \equiv 1 \pmod{n}$ , ist  $k = \phi(n)$ .

isPrimitive prüft ob  $g$  eine Primitivwurzel ist  $O(\log(\phi(n)) \cdot \log(n))$   
findPrimitive findet Primitivwurzel (oder -1)  $O(|ans| \cdot \log(\phi(n)) \cdot \log(n))$

```

1 bool isPrimitive(ll g, ll n, ll phi, map<ll, int>& phiFacts) {
2     if (g == 1) return n == 2;
3     if (gcd(g, n) > 1) return false;
4     for (auto [f, _] : phiFacts)
5         if (powMod(g, phi / f, n) == 1) return false;
6     return true;
7 }
8 bool isPrimitive(ll g, ll n) {
9     ll phin = phi(n); //isPrime(n) => phi(n) = n - 1
10    map<ll, int> phiFacts;
11    factor(phin, phiFacts);
12    return isPrimitive(g, n, phin, phiFacts);
13 }
14 ll findPrimitive(ll n) { //test auf existens geht schneller
15     ll phin = phi(n); //isPrime(n) => phi(n) = n - 1
16     map<ll, int> phiFacts;
17     factor(phin, phiFacts);
18     for (ll res = 1; res < n; res++) // oder zufällige Reihenfolge
19         if (isPrimitive(res, n, phin, phiFacts)) return res;
20     return -1;
21 }
```

## 4.16 Diskrete $n$ -te Wurzel

root bestimmt Lösung  $x$  für  $x^a = b \pmod{m}$   $O(\sqrt{m} \cdot \log(m))$

Alle Lösungen haben die Form  $g^{\frac{c+i\phi(n)}{\gcd(a,\phi(n))}}$

```

1 ll root(ll a, ll b, ll m) { // a > 0!
2     ll g = findPrimitive(m);
3     ll c = dlog(powMod(g, a, m), b, m);
4     return c < 0 ? -1 : powMod(g, c, m);
5 }
```

## 4.17 LEGENDRE-Symbol

Sei  $p \geq 3$  eine Primzahl,  $a \in \mathbb{Z}$ :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p \mid a \\ 1 & \text{falls } \exists x \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}: a \equiv x^2 \pmod{p} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{falls } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -1 & \text{falls } p \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \quad \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

```

1 ll legendre(ll a, ll p) { // p prim >= 2
2     ll s = powMod(a, p / 2, p);
3     return s < 2 ? s : -1ll;
4 }
```

## 4.18 Lineares Sieb und Multiplikative Funktionen

Eine (zahlentheoretische) Funktion  $f$  heißt multiplikativ wenn  $f(1) = 1$  und  $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ , falls  $\text{ggT}(a, b) = 1$ .  
 ⇒ Es ist ausreichend  $f(p^k)$  für alle primen  $p$  und alle  $k$  zu kennen.  
 sieve berechnet Primzahlen und co.  $O(N)$   
 sieved Wert der entsprechenden multiplikativen Funktion  $O(1)$   
 naive Wert der entsprechenden multiplikativen Funktion  $O(\sqrt{n})$   
 Wichtig: Sieb rechts ist schneller für isPrime oder primes!

```

1 constexpr ll N = 10'000'000;
2 ll small[N], power[N], sieved[N];
3 vector<ll> primes;
4 //wird aufgerufen mit (p^k, p, k) für prime p und k > 0
5 ll mu(ll pk, ll p, ll k) {return -(k == 1);}
6 ll phi(ll pk, ll p, ll k) {return pk - pk / p;}
7 ll div(ll pk, ll p, ll k) {return k+1;}
8 ll divSum(ll pk, ll p, ll k) {return (pk*p-1) / (p - 1);}
9 ll square(ll pk, ll p, ll k) {return k % 2 ? pk / p : pk;}
10 ll squareFree(ll pk, ll p, ll k) {return p;}
11 void sieve() { // O(N)
12     small[1] = power[1] = sieved[1] = 1;
13     for (ll i = 2; i < N; i++) {
14         if (small[i] == 0) {
15             primes.push_back(i);
16             for (ll pk = i, k = 1; pk < N; pk *= i, k++) {
17                 small[pk] = i;
18                 power[pk] = pk;
19                 sieved[pk] = mu(pk, i, k); // Aufruf ändern!
20             }
21             for (ll j=0; i*primes[j] < N && primes[j] < small[i]; j++) {
22                 ll k = i * primes[j];
23                 small[k] = power[k] = primes[j];
24                 sieved[k] = sieved[i] * sieved[primes[j]];
25             }
26             if (i * small[i] < N && power[i] != i) {
27                 ll k = i * small[i];
28                 small[k] = small[i];
29                 power[k] = power[i] * small[i];
30                 sieved[k] = sieved[power[k]] * sieved[k / power[k]];
31             }
32     }
33     ll naive(ll n) { // O(sqrt(n))
34         ll res = 1;
35         for (ll p = 2; p * p <= n; p++) {
36             if (n % p == 0) {
37                 ll pk = 1;
38                 ll k = 0;
39                 do {
40                     n /= p;
41                     pk *= p;
42                     k++;
43                 } while (n % p == 0);
44                 res *= mu(pk, p, k); // Aufruf ändern!
45             }
46             if (n > 1) res *= mu(n, n, 1);
47             return res;
        }
```

## MÖBIUS-Funktion:

- $\mu(n) = +1$ , falls  $n$  quadratfrei ist und gerade viele Primteiler hat
- $\mu(n) = -1$ , falls  $n$  quadratfrei ist und ungerade viele Primteiler hat
- $\mu(n) = 0$ , falls  $n$  nicht quadratfrei ist

## EULERSche φ-Funktion:

- Zählt die relativ primen Zahlen  $\leq n$ .
- $p$  prim,  $k \in \mathbb{N}$ :  $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$
- Euler's Theorem: Für  $b \geq \phi(c)$  gilt:  $a^b \equiv a^b \bmod \phi(c) + \phi(c)$  (mod  $c$ ). Darüber hinaus gilt:  $\text{gcd}(a,c)=1 \Leftrightarrow a^b \equiv a^b \bmod \phi(c)$  (mod  $c$ ). Falls  $m$  prim ist, liefert das den kleinen Satz von FERMAT:  $a^m \equiv a \pmod{m}$

## 4.19 Primzahlsieb von ERATOSTHENES

- Bis  $10^8$  in unter 64MB Speicher (lange Berechnung)
- primeSieve berechnet Primzahlen und Anzahl  $O(N \cdot \log(\log(N)))$
- isPrime prüft ob Zahl prim ist  $O(1)$

```

1 constexpr ll N = 100'000'000;
2 bitset<N / 2> isNotPrime;
3 vector<ll> primes = {2};
4 bool isPrime(ll x) {
5     if (x < 2 || x % 2 == 0) return x == 2;
6     else return !isNotPrime[x / 2];
7 }
8 void primeSieve() {
9     for (ll i = 3; i < N; i += 2) { // i * i < N reicht für isPrime
10         if (!isNotPrime[i / 2]) {
11             primes.push_back(i); // optional
12             for (ll j = i * i; j < N; j+= 2 * i) {
13                 isNotPrime[j / 2] = 1;
14             }
        }}
```

## 4.20 Möbius-Inversion

- Seien  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und  $g(n) := \sum_{d|n} f(d)$ . Dann ist  $f(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$ .
- $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel Inklusion/Exklusion: Gegeben seien eine Sequenz  $A = a_1, \dots, a_n$  von Zahlen,  $1 \leq a_i \leq N$ . Zähle die Anzahl der coprime subsequences.

Lösung: Für jedes  $x$ , sei  $\text{cnt}[x]$  die Anzahl der Vielfachen von  $x$  in  $A$ . Es gibt  $2^{|\mathcal{X}|} - 1$  nicht leere Subsequenzen in  $A$ , die nur Vielfache von  $x$  enthalten. Die Anzahl der Subsequenzen mit  $\text{ggT} = 1$  ist gegeben durch  $\sum_{i=1}^N \mu(i) \cdot (2^{\text{cnt}[i]} - 1)$ .

## 4.21 LGS über $\mathbb{F}_p$

gauss löst LGS  $O(n^3)$

```

1 vector<int> pivots; // ith pivot is in ith row
2 void gauss(int n, int m) {
3     for (int r = 0, c = 0; c < m; c++) {
4         for (int i = r; i < n; i++) {
5             if (mat[i][c] != 0){
6                 swap(mat[r], mat[i]);
7                 break;
8             }
9             if (mat[r][c] == 0) continue;
10            ll f = multInv(mat[r][c], mod);
11            for (ll& x : mat[r]) x = x * f % mod;
12            for (int i = 0; i < n; i++) {
13                if (i == r) continue;
14                f = mat[i][c];
        }}
```

```

15         for (int j = c; j < m; j++) {
16             mat[i][j] = (mat[i][j] - f*mat[r][j] % mod + mod) % mod;
17         }
18         pivots.push_back(c);
19         if (++r == n) break;
20     } // no solution if pivots.back() == m-1
    }
```

## 4.22 LGS über $\mathbb{R}$

gauss löst LGS  $O(n^3)$

```

1 void normalLine(int line) {
2     double factor = mat[line][line];
3     for (double& x : mat[line]) x /= factor;
4 }
5 void takeAll(int n, int line) {
6     for (int i = 0; i < n; i++) {
7         if (i == line) continue;
8         double diff = mat[i][line];
9         for (int j = 0; j < sz(mat[i]); j++) {
10             mat[i][j] -= diff * mat[line][j];
11         }
        }}
```

```

12 int gauss(int n) {
13     vector<bool> done(n, false);
14     for (int i = 0; i < n; i++) {
15         int j = i; // Sucht Pivotzeile für bessere Stabilität.
16         for (int k = 0; k < n; k++) {
17             if (!done[k] && abs(mat[k][i]) > abs(mat[i][i])) j = k;
18         }
19         swap(mat[i], mat[j]);
20         if (abs(mat[i][i]) > EPS) {
21             normalLine(i);
22             takeAll(n, i);
23             done[i] = true;
24         }
25         for (int i = 0; i < n; i++) { // gauss fertig, prüfe Lösung
26             bool allZero = true;
27             for (int j = i; j < n; j++) allZero && abs(mat[i][j]) <= EPS;
28             if (allZero && abs(mat[i][i]) > EPS) return INCONSISTENT;
29             if (allZero && abs(mat[i][i]) <= EPS) return MULTIPLE;
30         }
31         return UNIQUE;
32     }
    }
```

## 4.23 Inversionszahl

```

1 ll inversions(const vector<ll>& v) {
2     Tree<pair<ll, ll>> t; // ordered statistics tree Seite 4
3     ll res = 0;
4     for (ll i = 0; i < sz(v); i++) {
5         res += i - t.order_of_key({v[i], i});
6         t.insert({v[i], i});
7     }
8     return res;
9 }
```

#### 4.24 Numerisch Extremstelle bestimmen

```

1 template<typename F>
2 ld gss(ld l, ld r, F& f) {
3     ld inv = (sqrt(5.0l) - 1) / 2;
4     ld x1 = r - inv*(r-l), x2 = l + inv*(r-l);
5     ld f1 = f(x1), f2 = f(x2);
6     for (int i = 0; i < 200; i++) {
7         if (f1 < f2) { //change to > to find maximum
8             r = x2; x2 = x1; f2 = f1;
9             x1 = r - inv*(r-l); f1 = f(x1);
10        } else {
11            l = x1; x1 = x2; f1 = f2;
12            x2 = l + inv*(r-l); f2 = f(x2);
13        }
14    }
15    return l;
}

```

#### 4.25 Numerisch Integrieren, Simpsonregel

```

1 //double f(double x) {return x;}
2 double simps(double a, double b) {
3     return (f(a) + 4.0 * f((a + b) / 2.0) + f(b)) * (b - a) / 6.0;
4 }
5 double integrate(double a, double b) {
6     double m = (a + b) / 2.0;
7     double l = simps(a, m), r = simps(m, b), tot = simps(a, b);
8     if (abs(l + r - tot) < EPS) return tot;
9     return integrate(a, m) + integrate(m, b);
10}

```

#### 4.26 Polynome, FFT, NTT & andere Transformationen

Multipliziert Polynome A und B.

- $\deg(A \cdot B) = \deg(A) + \deg(B)$
- Vektoren a und b müssen mindestens Größe  $\deg(A \cdot B) + 1$  haben. Größe muss eine Zweierpotenz sein.
- Für ganzzahlige Koeffizienten: (`ll`)`round(real(a[i]))`
- `xor`, `or` und `and` Transform funktioniert auch mit `double` oder modulo einer Primzahl  $p$  falls  $p \geq 2^{\text{bits}}$

```

1 using cplx = complex<double>;
2 void fft(vector<cplx>& a, bool inv = false) {
3     int n = sz(a);
4     for (int i = 0, j = 1; j < n - 1; ++j) {
5         for (int k = n >> 1; k > (i ^= k); k >>= 1);
6         if (j < i) swap(a[i], a[j]);
7     }
8     static vector<cplx> ws(2, 1);
9     for (static int k = 2; k < n; k *= 2) {
10        ws.resize(n);
11        cplx w = polar(1.0, acos(-1.0) / k);
12        for (int i=k; i<2*k; i++) ws[i] = ws[i/2] * (i % 2 ? w : 1);
13    }
14    for (int s = 1; s < n; s *= 2) {
15        for (int j = 0; j < n; j += 2 * s) {
16            for (int k = 0; k < s; k++) {
17                cplx u = a[j + k], t = a[j + s + k];
18                t *= (inv ? conj(ws[s + k]) : ws[s + k]);
19            }
20        }
21    }
22 }

```

```

19     a[j + k] = u + t;
20     a[j + s + k] = u - t;
21     if (inv) a[j + k] /= 2, a[j + s + k] /= 2;
22 }

```

```

1 constexpr ll mod = 998244353, root = 3;
2 void ntt(vector<ll>& a, bool inv = false) {
3     int n = sz(a);
4     auto b = a;
5     ll r = inv ? powMod(root, mod - 2, mod) : root;
6     for (int s = n / 2; s > 0; s /= 2) {
7         ll ws = powMod(r, (mod - 1) / (n / s), mod), w = 1;
8         for (int j = 0; j < n / 2; j += s) {
9             for (int k = j; k < j + s; k++) {
10                 ll u = a[j + k], t = a[j + s + k] * w % mod;
11                 b[k] = (u + t) % mod;
12                 b[n/2 + k] = (u - t + mod) % mod;
13             }
14             w = w * ws % mod;
15         }
16         swap(a, b);
17     }
18     if (inv) {
19         ll div = powMod(n, mod - 2, mod);
20         for (auto& x : a) x = x * div % mod;
21     }
}

```

```

1 void bitwiseConv(vector<ll>& a, bool inv = false) {
2     int n = sz(a);
3     for (int s = 1; s < n; s *= 2) {
4         for (int i = 0; i < n; i += 2 * s) {
5             for (int j = i; j < i + s; j++) {
6                 ll& u = a[j], &v = a[j + s];
7                 tie(u, v) = inv ? pair(v - u, u) : pair(v, u + v); // AND
8                 //tie(u, v) = inv ? pair(v, u - v) : pair(u + v, u); // OR
9                 //tie(u, v) = pair(u + v, u - v); // XOR
10            }
11        }
12    }
13    //if (inv) for (ll& x : a) x /= n; // XOR (careful with MOD)
}

```

Multiplikation mit 2 transforms statt 3: (nur benutzten wenn nötig!)

```

1 vector<cplx> mul(vector<ll>& a, vector<ll>& b) {
2     int n = 1 << (__lg(sz(a) + sz(b) - 1) + 1);
3     vector<cplx> c(all(a)), d(n);
4     c.resize(n);
5     for (int i = 0; i < sz(b); i++) c[i] = {real(c[i]), b[i]};
6     fft(c);
7     for (int i = 0; i < n; i++) {
8         int j = (n - i) & (n - 1);
9         cplx x = (c[i] + conj(c[j])) / cplx{2, 0}; //fft(a)[i];
10        cplx y = (c[i] - conj(c[j])) / cplx{0, 2}; //fft(b)[i];
11        d[i] = x * y;
12    }
13    fft(d, true);
14    return d;
}

```

#### 4.27 Operations on Formal Power Series

```

1 vector<ll> poly_inv(const vector<ll>& a, int n) {
2     vector<ll> q = {powMod(a[0], mod-2, mod)};
3     for (int len = 1; len < n; len *= 2) {
4         vector<ll> a2 = a, q2 = q;
5         a2.resize(2*len), q2.resize(2*len);
6         ntt(q2);
7         for (int _ : {0, 1}) {
8             ntt(a2);
9             for (int i = 0; i < 2*len; i++) a2[i] = a2[i]*q2[i] % mod;
10            ntt(a2, true);
11            for (int i = 0; i < len; i++) a2[i] = 0;
12        }
13        for (int i = len; i < min(n, 2*len); i++) {
14            q.push_back((mod - a2[i]) % mod);
15        }
16    }
17    return q;
}
18 vector<ll> poly_deriv(vector<ll> a) {
19     for (int i = 1; i < sz(a); i++)
20         a[i-1] = a[i] * i % mod;
21     a.pop_back();
22     return a;
}
23 vector<ll> poly_integr(vector<ll> a) {
24     static vector<ll> inv = {0, 1};
25     for (static int i = 2; i <= sz(a); i++)
26         inv.push_back(mod - mod / i * inv[mod % i] % mod);
27     a.push_back(0);
28     for (int i = sz(a) - 1; i > 0; i--)
29         a[i] = a[i-1] * inv[i] % mod;
30     a[0] = 0;
31     return a;
}
32 vector<ll> poly_log(vector<ll> a, int n) {
33     a = mul(poly_deriv(a), poly_inv(a, n));
34     a.resize(n-1);
35     return poly_integr(a);
}
36 vector<ll> poly_exp(vector<ll> a, int n) {
37     vector<ll> q = {1};
38     for (int len = 1; len < n; len *= 2) {
39         vector<ll> p = poly_log(q, 2*len);
40         for (int i = 0; i < 2*len; i++)
41             p[i] = (mod - p[i] + (i < sz(a) ? a[i] : 0)) % mod;
42         vector<ll> q2 = q;
43         q2.resize(2*len);
44         ntt(p), ntt(q2);
45         for (int i = 0; i < 2*len; i++) p[i] = p[i] * q2[i] % mod;
46         ntt(p, true);
47         for (int i = len; i < min(n, 2*len); i++) q.push_back(p[i]);
48     }
49     return q;
}

```

## 4.28 Kombinatorik

**Wilsons Theorem** A number  $n$  is prime if and only if  $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ .  
 $(n$  is prime if and only if  $(m-1) \cdot (n-m) \equiv (-1)^m \pmod{n}$  for all  $m \in \{1, \dots, n\}$ )

$$(n-1)! \equiv \begin{cases} -1 \pmod{n}, & \text{falls } n \in \mathbb{P} \\ 2 \pmod{n}, & \text{falls } n=4 \\ 0 \pmod{n}, & \text{sonst} \end{cases}$$

**ZECKENDORFS Theorem** Jede positive natürliche Zahl kann eindeutig als Summe einer oder mehrerer verschiedener FIBONACCI-Zahlen geschrieben werden, sodass keine zwei aufeinanderfolgenden FIBONACCI-Zahlen in der Summe vorkommen.  
Lösung: Greedy, nimm immer die größte FIBONACCI-Zahl, die noch hineinpasst.

**LUCAS-Theorem** Ist  $p$  prim,  $m = \sum_{i=0}^k m_i p^i$ ,  $n = \sum_{i=0}^k n_i p^i$  ( $p$ -adische Darstellung), so gilt

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^k \binom{m_i}{n_i} \pmod{p}.$$

**Binomialkoeffizienten** Die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge.

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{k+1}{n-k} \binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k} \approx 2^n \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \cdot \exp\left(-\frac{2(x-\frac{n}{2})^2}{n}\right)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \quad \sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} \quad \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n} \quad \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} Fib_i = Fib_{2n}$$

precalc berechnet  $n!$  und  $n!^{-1}$  vor  $O(\text{lim})$   
calc\_binom berechnet Binomialkoeffizient  $O(1)$

```
1 constexpr ll lim = 10'000'000;
2 ll fac[lim], inv[lim];
3 void precalc() {
4     fac[0] = inv[0] = 1;
5     for (int i = 1; i < lim; i++) fac[i] = fac[i-1] * i % mod;
6     inv[lim - 1] = multInv(fac[lim - 1], mod);
7     for (int i = lim - 1; i > 0; i--) inv[i-1] = inv[i] * i % mod;
8 }
9 ll calc_binom(ll n, ll k) {
10     if (n < 0 || n < k || k < 0) return 0;
11     return (inv[k] * inv[n-k] % mod) * fac[n] % mod;
12 }
```

Falls  $n \geq p$  für  $\text{mod} = p^k$  berechne  $\text{fac}$  und  $\text{inv}$  aber teile  $p$  aus  $i$  und berechne die Häufigkeit von  $p$  in  $n!$  als  $\sum_{i=1}^n \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$

calc\_binom berechnet Binomialkoeffizient ( $n \leq 61$ )  $O(k)$

```
1 ll calc_binom(ll n, ll k) {
2     if (k > n) return 0;
3     ll r = 1;
4     for (ll d = 1; d <= k; d++) { // Reihenfolge => Teilbarkeit
5         r *= n--;
6         r /= d;
7     }
8     return r;
```

calc\_binom berechnet Binomialkoeffizient modulo Primzahl  $p$   $O(p \cdot n)$

```
1 ll calc_binom(ll n, ll k, ll p) {
2     assert(n < p); // wichtig: sonst falsch!
3     if (k > n) return 0;
4     ll x = k % 2 != 0 ? p-1 : 1;
5     for (ll c = p-1; c > n; c--) {
6         x *= c - k; x %= p;
7         x *= multInv(c, p); x %= p;
8     }
9     return x;
10 }
```

**CATALAN-Zahlen:** 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900

• Die CATALAN-Zahl  $C_n$  gibt an:

- Anzahl der Binäräbäume mit  $n$  nicht unterscheidbaren Knoten.
- Anzahl der validen Klammerausdrücke mit  $n$  Klammerpaaren.
- Anzahl der korrekten Klammerungen von  $n+1$  Faktoren.
- Anzahl Möglichkeiten ein konvexes Polygon mit  $n+2$  Ecken zu triangulieren.
- Anzahl der monotonen Pfade (zwischen gegenüberliegenden Ecken) in einem  $n \times n$ -Gitter, die nicht die Diagonale kreuzen.

$$C_0 = 1 \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in  $O(n^2)$
- Formel 2 und 3 erlauben Berechnung in  $O(n)$

**CATALAN-Convolution**

- Anzahl an Klammerausdrücken mit  $n+k$  Klammerpaaren, die mit  $^k$  beginnen.
- $C_0^k = 1 \quad C_n^k = \sum_{a_0+a_1+\dots+a_k=n} C_{a_0} C_{a_1} \dots C_{a_k} = \frac{k+1}{n+k+1} \binom{2n+k}{n} = \frac{(2n+k-1) \cdot (2n+k)}{n(n+k+1)} \cdot C_{n-1}$

**EULER-Zahlen 1. Ordnung:** | 1 | 1 | 1, 1 | 1, 4, 1 | 1, 11, 11, 1 | 1, 26, 66, 26, 1 |

Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  mit genau  $k$  Anstiegen. Für die  $n$ -te Zahl gibt es  $n$  mögliche Positionen zum Einfügen. Dabei wird entweder ein Anstieg in zwei gesplittet oder ein Anstieg um  $n$  ergänzt.

$$\langle\langle n \rangle\rangle = \binom{n}{n-1} = 1 \quad \langle\langle n \rangle\rangle = \binom{n}{k} = (k+1) \binom{n-1}{k} + (n-k) \binom{n-1}{k-1} - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n+1}{i} (k+1-i)^n$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in  $O(n^2)$
- Formel 2 erlaubt Berechnung in  $O(n \log(n))$

**EULER-Zahlen 2. Ordnung:** | 1 | 1, 0 | 1, 2, 0 | 1, 8, 6, 0 | 1, 22, 58, 24, 0 |

Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, \dots, n, n\}$  mit genau  $k$  Anstiegen.

$$\langle\langle\langle n \rangle\rangle\rangle = 1 \quad \langle\langle\langle n \rangle\rangle\rangle = 0 \quad \langle\langle\langle n \rangle\rangle\rangle = (k+1) \binom{n-1}{k} + (2n-k-1) \binom{n-1}{k-1}$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in  $O(n^2)$

**STIRLING-Zahlen 1. Ordnung:** | 1 | 0, 1 | 0, 1, 1 | 0, 2, 3, 1 | 0, 6, 11, 6, 1 |

Die Anzahl der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  mit genau  $k$  Zyklen. Es gibt zwei Möglichkeiten für die  $n$ -te Zahl. Entweder sie bildet einen eigenen Zyklus, oder sie kann an jeder Position in jedem Zyklus eingesortet werden.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in  $O(n^2)$

$$\sum_{k=0}^n \pm \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$

- Berechne Polynom mit FFT und benutzte Betrag der Koeffizienten  $O(n \log(n)^2)$  (nur ca. gleich große Polynome zusammen multiplizieren beginnend mit  $x-k$ )

**STIRLING-Zahlen 2. Ordnung:** | 1 | 0, 1 | 0, 1, 1 | 0, 1, 3, 1 | 0, 1, 7, 6, 1 |

Die Anzahl der Möglichkeiten  $n$  Elemente in  $k$  nichtleere Teilmengen zu zerlegen. Es gibt  $k$  Möglichkeiten die  $n$  in eine  $n-1$ -Partition einzuteilen. Dazu kommt der Fall, dass die  $n$  in ihrer eigenen Teilmenge (alleine) steht.

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

- Formel 1 erlaubt Berechnung ohne Division in  $O(n^2)$
- Formel 2 erlaubt Berechnung in  $O(n \log(n))$

**BELL-Zahlen:** 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597  
Anzahl der Partitionen von  $\{1, \dots, n\}$ . Wie STIRLING-Zahlen 2. Ordnung ohne Limit durch  $k$ .

$$B_0 = 1 \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \quad B_{p^m+n} \equiv m \cdot B_n + B_{n+1} \pmod{p}$$

**Partitions:** | 1 | 0, 1 | 0, 1, 1 | 0, 1, 2, 1, 1 | 0, 1, 2, 2, 1, 1 | 0, 1, 3, 3, 2, 1, 1 |  
Die Anzahl der Partitionen von  $n$  in genau  $k$  positive Summanden. Die Anzahl der Partitionen von  $n$  mit Elementen aus  $1, \dots, k$ .

$$p_0(0) = 1 \quad p_k(n) = 0 \text{ für } k > n \text{ oder } n \leq 0 \text{ oder } k \leq 0$$

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1)$$

$$p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n) = p_n(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[ p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right]$$

- $p(n): 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627, 792$
- in Formel 3 kann abgebrochen werden wenn  $\frac{k(3k-1)}{2} > n$ .
- Die Anzahl der Partitionen von  $n$  in bis zu  $k$  positive Summanden ist  $\sum_{i=0}^k p_i(n) = p_k(n+k)$ .

**4.29 The Twelvefold Way** (verteile  $n$  Bälle auf  $k$  Boxen)

Bälle Boxen	identisch identisch	verschieden identisch	identisch verschieden	verschieden verschieden
-	$p_k(n+k)$	$\sum_{i=0}^k \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$k^n$
Bälle pro Box $\geq 1$	$p_k(n)$	$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	$\binom{n-1}{k-1}$	$k! \binom{n}{k}$
Bälle pro Box $\leq 1$	$[n \leq k]$	$[n \leq k]$	$\binom{k}{n}$	$n! \binom{k}{n}$

[Bedingung]: **return** Bedingung ? 1 : 0;

**4.30 Platonische Körper**

Übersicht	F	V	E	dual zu
Tetraeder	4	4	6	Tetraeder
Würfel	6	8	12	Oktaeder
Oktaeder	8	6	12	Würfel
Dodekaeder	12	20	30	Ikosaeeder
Ikosaeeder	20	12	30	Dodekaeder

Färbungen mit maximal $n$ Farben (bis auf Isomorphie)				
V	vom Oktaeder	F  vom Würfel	$(n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2)/24$	
V	vom Würfel	F  vom Oktaeder	$(n^8 + 17n^6 + 6n^4)/24$	
E	vom Würfel/Oktaeder		$(n^{12} + 6n^7 + 3n^6 + 8n^4 + 6n^3)/24$	
V  /  F	vom Tetraeder		$(n^4 + 11n^2)/12$	
E	vom Tetraeder		$(n^6 + 3n^4 + 8n^2)/12$	
V	vom Icosaeeder	F  vom Dodekaeder	$(n^{12} + 15n^6 + 44n^4)/60$	
V	vom Dodekaeder	F  vom Icosaeeder	$(n^{20} + 15n^{10} + 20n^8 + 24n^4)/60$	
E	vom Dodekaeder	Icosaeeder	$(n^{30} + 15n^{16} + 20n^{10} + 24n^6)/60$	

Wahrscheinlichkeitstheorie ( $A, B$ Ereignisse und $X, Y$ Variablen)	
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$	$\Pr[A B] = \frac{\Pr[A \wedge B]}{\Pr[B]}$
$E(\alpha X) = \alpha E(X)$	$\Pr[A \vee B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \wedge B]$
$X, Y$ unabh. $\Leftrightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$	$A, B$ disj. $\Leftrightarrow \Pr[A \wedge B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
BERTRAND'S Ballot Theorem (Kandidaten $A$ und $B$ , $k \in \mathbb{N}$ )	
# $A > k \#B$	$\Pr = \frac{a-kb}{a+b}$
# $A \geq k \#B$	$\Pr = \frac{a+1-kb}{a+1}$
	$\#A \geq \#B+k$ Num = $\frac{a-k+1-b}{a-k+1} \binom{a+b-k}{b}$

### 4.31 Satz von SPRAGUE-GRUNDY

Weise jedem Zustand  $X$  wie folgt eine GRUNDY-Zahl  $g(X)$  zu:  
 $g(X) := \min\{\mathbb{Z}_0^+ \setminus \{g(Y) \mid Y \text{ von } X \text{ aus direkt erreichbar}\}\}$

$X$  ist genau dann gewonnen, wenn  $g(X) > 0$  ist.

Wenn man  $k$  Spiele in den Zuständen  $X_1, \dots, X_k$  hat, dann ist die GRUNDY-Zahl des Gesamtzustandes  $g(X_1) \oplus \dots \oplus g(X_k)$ .

### 4.32 Nim-Spiele

❶ letzter gewinnt (normal)

❷ letzter verliert

Beschreibung	Strategie
$M = [pile_i]$	$SG = \oplus_{i=1}^n pile_i$
$[x] := \{1, \dots, x\}$	<p>❶ Nimm von einem Stapel, sodass <math>SG \equiv 0</math> wird.  ❷ Genauso. Außer: Bleiben nur noch Stapel der Größe 1, erzeuge ungerade Anzahl solcher Stapel.</p>
$M = \{a^m \mid m \geq 0\}$	<p><math>a</math> ungerade: <math>SG_n = n\%2</math>  <math>a</math> gerade:  <math>SG_n = 2</math>, falls <math>n \equiv a \pmod{a+1}</math>  <math>SG_n = n\%(a+1)\%2</math>, sonst.</p>
$M_{\oplus} = \left\lfloor \frac{pile_i}{2} \right\rfloor$	<p>❶ <math>SG_{2n} = n</math>, <math>SG_{2n+1} = SG_n</math>  ❷ <math>SG_0 = 0</math>, <math>SG_n = [\log_2 n] + 1</math></p>
$M_{\oplus}$ = Teiler von $pile_i$	<p>❶ <math>SG_0 = 0</math>, <math>SG_n = SG_{\oplus, n} + 1</math>  ❷ ST<sub>1</sub> = 0, <math>SG_n = \#</math>Nullen am Ende von <math>n_{bin}</math></p>
$M_{\ominus} = [k]$	$SG_{\ominus, n} = n \pmod{(k+1)}$
$M_{\ominus} = S$ , ( $S$ endlich)	❶ Niederlage bei $SG=0$ ❷ Niederlage bei $SG=1$
$M_{\ominus} = S \cup [pile_i]$	$SG_{\ominus, n} = SG_{\ominus, n} + 1$
Für jedes endliche $M$ ist $SG$ eines Stapels irgendwann periodisch.	
Moore's Nim:	❶ Schreibe $pile_i$ binär. Addiere ohne Übertrag zur Basis $k+1$ . Niederlage, falls Ergebnis gleich 0. Beliebige Zahl von maximal $k$ Stapeln.
Zwei mögliche Züge:	❶ Wenn alle Stapel 1 sind: Niederlage, wenn $n \equiv 1 \pmod{(k+1)}$ . Sonst wie in ❶.
Staircase Nim:	Niederlage, wenn Nim der ungeraden Spiele verloren ist: $\oplus_{i=0}^{(n-1)/2} pile_{2i+1} = 0$
LASKER's Nim:	$SG_n = n$ , falls $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$
Zwei mögliche Züge:	$SG_n = n+1$ , falls $n \equiv 3 \pmod{4}$
1) Nehme beliebige Zahl.	$SG_n = n-1$ , falls $n \equiv 0 \pmod{4}$
2) Teile Stapel in zwei Stapel (ohne Entnahme).	
KAYLES' Nim:	Berechne $SG_n$ für kleine $n$ rekursiv.
Zwei mögliche Züge:	$n \in [72, 83]: 4, 1, 2, 8, 1, 4, 7, 2, 1, 8, 2, 7$
1) Nehme beliebige Zahl.	Periode ab $n=72$ der Länge 12.
2) Teile Stapel in zwei Stapel (mit Entnahme).	

### 4.33 Verschiedenes

Verschiedenes
Türme von Hanoi, minimale Schrittzahl: $T_h = 2^n - 1$
#Regionen zwischen $n$ Geraden
#abgeschlossene Regionen zwischen $n$ Geraden
#markierte, gewurzelte Bäume
#markierte, nicht gewurzelte Bäume
#Wälder mit $k$ gewurzelten Bäumen
#Wälder mit $k$ gewurzelten Bäumen mit vorgegebenen Wurzelknoten
Derangements

$$!n = (n-1)!!(n-1)!!(n-2) = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{n!} = \frac{1}{e}$$

### 4.34 Div Sum

divSum berechnet  $\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a \cdot i + b}{m} \right\rfloor$   $O(\log(n))$

Wichtig:  $b$  darf nicht negativ sein!

```
1 ll divSum(ll n, ll m, ll a, ll b) {
2     if (m == 0) return 0;
3     ll ans = a/m * n*(n-1)/2 + b/m * n;
4     a %= m;
5     b %= m;
6     ll y = (a*(n-1)+b) / m;
7     return ans + y * (n-1) - divSum(y, a, m, m-b-1);
8 }
```

### 4.35 Min Mod

firstVal berechnet den ersten Wert von  $0, a, \dots, a \cdot i \pmod{m}$ , der in  $[l, r]$  liegt. Gibt -1 zurück, falls er nicht existiert.

minMod berechnet das Minimum von  $(a \cdot i + b) \pmod{m}$  für  $i \in [0, n)$   $O(\log(m))$

Wichtig:  $0 \leq a, b, l, r < m$

```
1 ll firstVal(ll a, ll m, ll l, ll r) {
2     if (l == 0) return 0;
3     if (a == 0) return -1;
4     if ((l-1)/a < r/a) return (l+a-1) / a*a;
5     ll s = (r+a-1) / a*a;
6     ll v = firstVal(m % a, a, s-r, s-l);
7     return v < 0 ? -1 : s - v;
8 }
9 ll minMod(ll n, ll m, ll a, ll b) {
10    if (a == 0) return b;
11    ll g = gcd(m, a);
12    ll c = b % g;
13    m /= g;
14    a /= g;
15    b /= g;
16    ll ai = multInv(a, m);
17    ll l = ai*b % m;
18    ll r = (n-1 + ai*b) % m;
19    if (n >= m || l > r) return c;
20    return a * firstVal(ai, m, l, r) % m * g + c;
21 }
```

### 4.36 Reihen

$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{i=0}^n c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$	$c \neq 1$	$\sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1-c}$
$\sum_{i=0}^n i c^i = \frac{nc^{n+2}-(n+1)c^{n+1}+c}{(c-1)^2}$	$c \neq 1$	$ c  < 1$
$\sum_{i=1}^n i H_i = \frac{n(n+1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}$		$\sum_{i=1}^{\infty} i c^i = \frac{c}{(1-c)^2}$
$\sum_{i=1}^n \binom{i}{m} H_i = \binom{n+1}{m+1} (H_{n+1} - \frac{1}{m+1})$		$ c  < 1$
		$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$
		$\sum_{i=1}^n H_i = (n+1)H_n - n$

### 4.37 Wichtige Zahlen

$10^x$	Highly Composite	# Divs	# prime Divs	# Primes
1	6	4	2	4
2	60	12	3	25
3	840	32	4	168
4	7560	64	5	1229
5	83160	128	6	9592
6	720720	240	7	78498
7	8648640	448	8	664579
8	73513440	768	8	5761455
9	735134400	1344	9	50847534
10	6983776800	2304	10	455052511
11	97772875200	4032	10	4118054813
12	963761198400	6720	11	37607912018
13	9316358251200	10752	12	346065536839
14	97821761637600	17280	12	3204941750802
15	866421317361600	26880	13	2984457042269
16	8086598962041600	41472	13	279238341033925
17	7480104039884800	64512	14	2623557157654233
18	897612484786617600	103680	16	24739954287740860

### 4.38 Recover x and y from y from $x \cdot y^{-1}$

recover findet  $x$  und  $y$  für  $x = x \cdot y^{-1} \pmod{m}$   $O(\log(m))$

WICHTIG:  $x$  und  $y$  müssen kleiner als  $\sqrt{m}/2$  sein!

```
1 ll sq(ll x) {return x*x;};
2 array<ll, 2> recover(ll c, ll m) {
3     array<ll, 2> u = {m, 0}, v = {c, 1};
4     while (m <= 2 * sq(v[0])) {
5         ll q = u[0] / v[0];
6         u[0] -= q * v[0];
7         u[1] -= q * v[1];
8         swap(u, v);
9     }
10    if (v[1] <= 0 || 2 * sq(v[1]) >= m) return {-1, -1};
11    return v;
12 }
```

## 5 Strings

### 5.1 KNUTH-MORRIS-PRATT-Algorithmus

kmpSearch sucht sub in s  $O(|s|+|sub|)$

```

1 vector<int> kmpPreprocessing(const string& sub) {
2     vector<int> b(sz(sub) + 1);
3     b[0] = -1;
4     for (int i = 0, j = -1; i < sz(sub);) {
5         while (j >= 0 && sub[i] != sub[j]) j = b[j];
6         b[++i] = ++j;
7     }
8     return b;
9 }
10 vector<int> kmpSearch(const string& s, const string& sub) {
11     vector<int> result, pre = kmpPreprocessing(sub);
12     for (int i = 0, j = 0; i < sz(s);) {
13         while (j >= 0 && s[i] != sub[j]) j = pre[j];
14         i++; j++;
15         if (j == sz(sub)) {
16             result.push_back(i - j);
17             j = pre[j];
18         }
19     }
20 }
```

### 5.2 Z-Algorithmus

$z_i :=$  Längstes gemeinsames Präfix von  $s_0 \dots s_{n-1}$  und  $s_i \dots s_{n-1}$   $O(n)$

Suchen: Z-Algorithmus auf P\$S ausführen, Positionen mit  $z_i = |P|$  zurückgeben

```

1 vector<int> Z(const string& s) {
2     int n = sz(s);
3     vector<int> z(n);
4     for (int i = 1, x = 0; i < n; i++) {
5         z[i] = max(0, min(z[i - x], x + z[x] - i));
6         while (i + z[i] < n && s[z[i]] == s[i + z[i]]) {
7             x = i, z[i]++;
8         }
9     }
10    return z;
11 }
```

### 5.3 Rolling Hash

```

1 // M = 1.7e9 + 9, 1e18L + 9, 2.2e18L + 7
2 struct Hash {
3     static constexpr ll M = 3e18L + 37;
4     static constexpr ll Q = 318LL << 53; // Random in [SIGMA+1, M)
5     vector<ll> pref = {0}, power = {1};
6     Hash(const string& s) {
7         for (auto c : s) { // c > 0
8             pref.push_back((mul(pref.back(), Q) + c + M) % M);
9             power.push_back(mul(power.back(), Q));
10        }
11    ll operator()(int l, int r) {
12        return (pref[r] - mul(power[r-l], pref[l]) + M) % M;
13    }
14    static ll mul(__int128 a, ll b) {return a * b % M;}
15 }
```

### 5.4 Pattern Matching mit Wildcards

Gegeben zwei strings A und B, B enthält k wildcards enthält. Sei:

$$a_i = \cos(\alpha_i) + i \sin(\alpha_i) \quad \text{mit } \alpha_i = \frac{2\pi A[i]}{\Sigma}$$

$$b_i = \cos(\beta_i) + i \sin(\beta_i) \quad \text{mit } \beta_i = \begin{cases} \frac{2\pi B[|B|-i-1]}{\Sigma} & \text{falls } B[|B|-i-1] \in \Sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

B matcht A an stelle i wenn  $(b \cdot a)[|B|-1+i] = |B| - k$ . Benutze FFT um  $(b \cdot a)$  zu berechnen.

### 5.5 MANACHER's Algorithm, Longest Palindrome

init transformiert string a  $O(n)$   
manacher berechnet Längen der Palindrome in longest  $O(n)$

```

1 vector<int> manacher(const string& t) {
2     //transforms "aa" to ".a.a." to find even length palindromes
3     string s(sz(t) * 2 + 1, '.');
4     for (int i = 0; i < sz(t); i++) s[2 * i + 1] = t[i];
5     int mid = 0, r = 0, n = sz(s);
6     vector<int> pal(n);
7     for (int i = 1; i < n - 1; i++) {
8         if (r > i) pal[i] = min(r - i, pal[2 * mid - i]);
9         while (pal[i] < min(i, n - i - 1) &&
10            s[i + pal[i] + 1] == s[i - pal[i] - 1]) {
11             pal[i]++;
12         }
13         if (i + pal[i] > r) mid = i, r = i + pal[i];
14     }
15     //convert lengths to constructed string s (optional)
16     //for (int i = 0; i < n; i++) pal[i] = 2 * pal[i] + 1;
17     return pal;
18 }
```

### 5.6 Longest Common Subsequence

lcss findet längste gemeinsame Sequenz  $O(|a| \cdot |b|)$

```

1 string lcss(const string& a, const string& b) {
2     vector<vector<int>> m(sz(a) + 1, vector<int>(sz(b) + 1));
3     for (int i = sz(a) - 1; i >= 0; i--) {
4         for (int j = sz(b) - 1; j >= 0; j--) {
5             if (a[i] == b[j]) m[i][j] = 1 + m[i+1][j+1];
6             else m[i][j] = max(m[i+1][j], m[i][j+1]);
7         } // Für die Länge: return m[0][0];
8         string res;
9         for (int j = 0, i = 0; j < sz(b) && i < sz(a);) {
10            if (a[i] == b[j]) res += a[i++], j++;
11            else if (m[i][j+1] > m[i+1][j]) j++;
12            else i++;
13        }
14        return res;
15 }
```

### 5.7 AHO-CORASICK-Automat

sucht patterns im Text  $O(|Text| + |\Sigma| |pattern|)$

1. mit addString(pattern, idx) Patterns hinzufügen.
2. rufe buildGraph() auf
3. mit state = go(state, idx) in nächsten Zustand wechseln.
4. erhöhe dabei dp[state]++
5. rufe dfs() auf. In dp[pattern state] stehen die Anzahl der Matches

```

1 constexpr ll ALPHABET_SIZE = 26, OFFSET = 'a';
2 struct AhoCorasick {
3     struct vert {
4         int suffix = 0, ch, cnt = 0;
5         array<int, ALPHABET_SIZE> nxt = {};
6     };
7     vector<vert> aho = {{0, -1}};
8     int addString(string &s) {
9         int v = 0;
10        for (auto c : s) {
11            int idx = c - OFFSET;
12            if (aho[v].nxt[idx] == -1) {
13                aho[v].nxt[idx] = sz(aho);
14                aho.emplace_back(v, idx);
15            }
16            v = aho[v].nxt[idx];
17        }
18        aho[v].cnt++;
19        return v; // trie node index of pattern (pattern state)
20    }
21    int getSuffix(int v) {
22        if (aho[v].suffix < 0) {
23            aho[v].suffix = go(getSuffix(-aho[v].suffix), aho[v].ch);
24        }
25        return aho[v].suffix;
26    }
27    int go(int v, int idx) { // Root is v=0, idx is char - OFFSET
28        if (aho[v].nxt[idx] != -1) return aho[v].nxt[idx];
29        return v == 0 ? 0 : aho[v].nxt[idx] = go(getSuffix(v), idx);
30    }
31    vector<vector<int>> adj;
32    vector<ll> dp;
33    void buildGraph() {
34        adj.resize(sz(aho));
35        dp.assign(sz(aho), 0);
36        for (int i = 1; i < sz(aho); i++) {
37            adj[getSuffix(i)].push_back(i);
38        }
39    }
40    void dfs(int v = 0) { // dp on tree
41        for (int u : adj[v]) {
42            // dp[u] = dp[v] + aho[u].cnt; // pattern count
43            dfs(u);
44            dp[v] += dp[u]; // no of matches
45        }
46    };
}
```

## 5.8 Lyndon und De-Bruijn

- Lyndon-Wort: Ein Wort das lexicographisch kleiner ist als jede seiner Rotationen.
  - Jedes Wort kann eindeutig in eine nicht ansteigende Folge von Lyndon-Worten zerlegt werden.
  - Für Lyndon-Worte  $u, v$  mit  $u < v$  gilt, dass  $uv$  auch ein Lyndon-Wort ist.
- next lexikographisch nächstes Lyndon-Wort  $O(n)$ , Durchschnitt  $\Theta(1)$   
duval zerlegt s in Lyndon-Worte  $O(n)$   
minrotation berechnet kleinste Rotation von s  $O(n)$

```

1 bool next(string& s, int maxlen, char mi = '0', char ma = '1') {
2     for (int i = sz(s), j = sz(s); i < maxlen; i++)
3         s.push_back(s[i % j]);
4     while (!s.empty() && s.back() == ma) s.pop_back();
5     if (s.empty()) {
6         s = mi;
7         return false;
8     } else {
9         s.back()++;
10    }
11 }

1 vector<pair<int, int>> duval(const string& s) {
2     vector<pair<int, int>> res;
3     for (int i = 0; i < sz(s)); {
4         int j = i + 1, k = i;
5         for (; j < sz(s) && s[k] <= s[j]; j++) {
6             if (s[k] < s[j]) k = i;
7             else k++;
8         }
9         for (i <= k; i += j - k) {
10            res.push_back({i, i + j - k});
11        }
12    }
13    return res;
14 }

15 int minrotation(const string& s) {
16     auto parts = duval(s+s);
17     for (auto [l, r] : parts) {
18         if (r >= sz(s)) return l;
19     }
20 }
```

- De-Bruijn-Sequenz  $B(\Sigma, n)$ : ein Wort das jedes Wort der Länge  $n$  genau einmal als substring enthält (und minimal ist). Wobei  $B(\Sigma, n)$  zyklisch betrachtet wird.
  - es gibt  $\frac{|\Sigma|^n}{k^n}$  verschiedene  $B(\Sigma, n)$
  - $B(\Sigma, n)$  hat Länge  $|\Sigma|^n$
- deBruijn berechnet ein festes  $B(\Sigma, n)$   $O(|\Sigma|^n)$

```

1 string deBruijn(int n, char mi = '0', char ma = '1') {
2     string res, c(1, mi);
3     do {
4         if (n % sz(c) == 0) res += c;
5     } while(next(c, n, mi, ma));
6     return res;
7 }
```

## 5.9 Suffix-Array

SuffixArray berechnet ein Suffix Array  $O(|s| \cdot \log^2(|s|))$   
lcp berechnet Länge des longest common prefix  $O(\log(|s|))$   
von  $s[x]$  und  $s[y]$

```

1 constexpr int MAX_CHAR = 256;
2 struct SuffixArray {
3     int n;
4     vector<int> SA, LCP;
5     vector<vector<int>> P;
6
7     SuffixArray(const string& s) : n(sz(s)), SA(n), LCP(n),
8         P(_lg(2 * n - 1) + 1, vector<int>(n)) {
9         iota(all(P[0]), 0);
10        sort(all(SA), [&](int a, int b) {return s[a] < s[b];});
11        vector<int> x(n);
12        for (int k = 1, c = 1; c < n; k++, c *= 2) {
13            iota(all(x), n - c);
14            for (int ptr = c; int i : SA) if (i >= c) x[ptr++] = i - c;
15            vector<int> cnt(k == 1 ? MAX_CHAR : n);
16            for (int i : P[k-1]) cnt[i]++;
17            partial_sum(all(cnt), begin(cnt));
18            for (int i : x | views::reverse) SA[--cnt[P[k-1][i]]] = i;
19            auto p = [&](int i) {return i < n ? P[k-1][i] : -1;};
20            for (int i = 1; i < n; i++) {
21                int a = SA[i-1], b = SA[i];
22                P[k][b] = P[k][a] + (p(a) != p(b) || p(a+c) != p(b+c));
23            }
24            for (int i = 1; i < n; i++) LCP[i] = lcp(SA[i-1], SA[i]);
25        }
26        int lcp(int x, int y) { // x & y are text-indices, not SA-indices
27            if (x == y) return n - x;
28            int res = 0;
29            for (int i = sz(P) - 1; i >= 0 && max(x, y) + res < n; i--) {
30                if (P[i][x + res] == P[i][y + res]) res |= 1 << i;
31            }
32            return res;
33        }
34    }
35 }
```

## 5.10 Suffix-Baum

SuffixTree berechnet einen Suffixbaum  $O(|s|)$   
extend fügt den nächsten Buchstaben aus s ein  $O(1)$

```

1 struct SuffixTree {
2     struct Vert {
3         int start, end, suf; // s[start...end) along parent edge
4         map<char, int> nxt;
5     };
6     string s;
7     int needsSuffix, pos, remainder, curVert, curEdge, curLen;
8     // Each Vertex gives its children range as [start, end)
9     vector<Vert> tree = {Vert{-1, -1, 0, {}}};
10    SuffixTree(const string& s_) : s(s_) {
11        needsSuffix = remainder = curVert = curEdge = curLen = 0;
12        pos = -1;
13        for (int i = 0; i < sz(s); i++) extend();
14    }
15 }
```

```

14    }
15    int newVert(int start, int end) {
16        tree.push_back({start, end, 0, {}});
17        return sz(tree) - 1;
18    }
19
20    void addSuffixLink(int vert) {
21        if (needsSuffix) tree[needsSuffix].suf = vert;
22        needsSuffix = vert;
23    }
24
25    bool fullImplicitEdge(int vert) {
26        int len = min(tree[vert].end, pos + 1) - tree[vert].start;
27        if (curLen >= len) {
28            curEdge += len;
29            curLen -= len;
30            curVert = vert;
31            return true;
32        } else {
33            return false;
34        }
35    }
36
37    void extend() {
38        pos++;
39        needsSuffix = 0;
40        remainder++;
41        while (remainder) {
42            if (curLen == 0) curEdge = pos;
43            if (!tree[curVert].nxt.count(s[curEdge])) {
44                int leaf = newVert(pos, sz(s));
45                tree[curVert].nxt[s[curEdge]] = leaf;
46                addSuffixLink(curVert);
47            } else {
48                int nxt = tree[curVert].nxt[s[curEdge]];
49                if (fullImplicitEdge(nxt)) continue;
50                if (s[tree[nxt].start + curLen] == s[pos]) {
51                    curLen++;
52                    addSuffixLink(curVert);
53                    break;
54                }
55                int split = newVert(tree[nxt].start,
56                                    tree[nxt].start + curLen);
57                tree[curVert].nxt[s[curEdge]] = split;
58                int leaf = newVert(pos, sz(s));
59                tree[split].nxt[s[pos]] = leaf;
60                tree[nxt].start += curLen;
61                tree[split].nxt[s[tree[nxt].start]] = nxt;
62                addSuffixLink(split);
63            }
64            remainder--;
65            if (curVert == 0 && curLen) {
66                curLen--;
67                curEdge = pos - remainder + 1;
68            } else {
69                curVert = tree[curVert].suf ? tree[curVert].suf : 0;
70            }
71        }
72    }
73 }
```

## 5.11 Suffix-Automaton

- Ist  $w$  Substring von  $s$ ? Baue Automaten für  $s$  und wende ihn auf  $w$  an. Wenn alle Übergänge vorhanden sind, ist  $w$  Substring von  $s$ .
- Ist  $w$  Suffix von  $s$ ? Wie oben und prüfe, ob Endzustand ein Terminal ist.
- Anzahl verschiedener Substrings. Jeder Pfad im Automaten entspricht einem Substring. Für einen Knoten ist die Anzahl der ausgehenden Pfade gleich der Summe über die Anzahlen der Kindknoten plus 1. Der letzte Summand ist der Pfad, der in diesem Knoten endet.
- Wie oft taucht  $w$  in  $s$  auf? Sei  $p$  der Zustand nach Abarbeitung von  $w$ . Lösung ist Anzahl der Pfade, die in  $p$  starten und in einem Terminal enden. Diese Zahl lässt sich wie oben rekursiv berechnen. Bei jedem Knoten darf nur dann plus 1 gerechnet werden, wenn es ein Terminal ist.

```

1 constexpr int ALPHABET_SIZE = 26;
2 constexpr char OFFSET = 'a';
3 struct SuffixAutomaton {
4     struct State {
5         int len, link = -1;
6         array<int, ALPHABET_SIZE> nxt; // map if large Alphabet
7         State(int l) : len(l) {fill(all(nxt), -1);}
8     };
9     vector<State> st = {State(0)};
10    int cur = 0;
11    SuffixAutomaton(const string& s) {
12        st.reserve(2 * sz(s));
13        for (auto c : s) extend(c - OFFSET);
14    }
15    void extend(int c) {
16        int p = cur;
17        cur = sz(st);
18        st.emplace_back(st[p].len + 1);
19        for (; p != -1 && st[p].nxt[c] < 0; p = st[p].link) {
20            st[p].nxt[c] = cur;
21        }
22        if (p == -1) {
23            st[cur].link = 0;
24        } else {
25            int q = st[p].nxt[c];
26            if (st[p].len + 1 == st[q].len) {
27                st[cur].link = q;
28            } else {
29                st.emplace_back(st[p].len + 1);
30                st.back().link = st[q].link;
31                st.back().nxt = st[q].nxt;
32                for (; p != -1 && st[p].nxt[c] == q; p = st[p].link) {
33                    st[p].nxt[c] = sz(st) - 1;
34                }
35                st[q].link = st[cur].link = sz(st) - 1;
36            }
37        }
38        vector<int> calculateTerminals() {
39            vector<int> terminals;
40            for (int p = cur; p != -1; p = st[p].link) {
41                terminals.push_back(p);
42            }
43        }
44    }

```

```

// Pair with start index (in t) and length of LCS.
pair<int, int> longestCommonSubstring(const string& t) {
    int v = 0, l = 0, best = 0, bestp = -1;
    for (int i = 0; i < sz(t); i++) {
        int c = t[i] - OFFSET;
        while (v > 0 && st[v].nxt[c] < 0) {
            v = st[v].link;
            l = st[v].len;
        }
        if (st[v].nxt[c] >= 0) v = st[v].nxt[c], l++;
        if (l > best) best = l, bestp = i;
    }
    return {bestp - best + 1, best};
}

```

## 5.12 Trie

```

// Zahlenwerte müssen bei 0 beginnen und zusammenhängend sein.
1 constexpr int ALPHABET_SIZE = 2;
2 struct node {
3     int words, ends;
4     array<int, ALPHABET_SIZE> nxt;
5     node() : words(0), ends(0) {fill(all(nxt), -1);}
6 };
7 vector<node> trie = {node()};
8 int traverse(const vector<int>& word, int x) {
9     int id = 0;
10    for (int c : word) {
11        if (trie[id].words == 0 && x <= 0) return -1;
12        trie[id].words += x;
13        if (trie[id].nxt[c] < 0 && x > 0) {
14            trie[id].nxt[c] = sz(trie);
15            trie.emplace_back();
16        }
17        id = trie[id].nxt[c];
18        if (id < 0) return -1;
19    }
20    trie[id].words += x;
21    trie[id].ends += x;
22    return id;
23 }
24 int insert(const vector<int>& word) {
25     return traverse(word, 1);
26 }
27 bool erase(const vector<int>& word) {
28     int id = traverse(word, 0);
29     if (id < 0 || trie[id].ends <= 0) return false;
30     traverse(word, -1);
31     return true;
32 }
33

```

## 6 Python

### 6.1 Recursion

```

1 import sys
2 sys.setrecursionlimit(1000_007)

```

## 6.2 IO

```

1 n, m = map(int, input().split())
2 A = list(map(int, input().split()))
3 print(n, m, *A)

```

## 7 Sonstiges

### 7.1 Comptime

- überprüfen ob Comptimezeit Berechnungen erlaubt sind!
- braucht C++14 oder höher!

```

1 template<int N>
2 struct Table {
3     int data[N];
4     constexpr Table() : data {} {
5         for (int i = 0; i < N; i++) data[i] = i;
6     }
7     constexpr Table<100'000> precalculated;

```

### 7.2 Timed

Kann benutzt werden um randomisierte Algorithmen so lange wie möglich laufen zu lassen.

```

1 int times = clock();
2 //run for 900ms
3 while (1000*(clock()-times)/CLOCKS_PER_SEC < 900) {...}

```

### 7.3 Overflow-sichere arithmetische Operationen

Gibt zurück, ob es einen Overflow gab. Wenn nicht, enthält c das Ergebnis.

Addition	<code>__builtin_saddll_overflow(a, b, &amp;c)</code>
Subtraktion	<code>__builtin_ssabll_overflow(a, b, &amp;c)</code>
Multiplikation	<code>__builtin_smulll_overflow(a, b, &amp;c)</code>

### 7.4 Bit Operations

Bit an Position j lesen	$(x \& (1 \ll j)) \neq 0$
Bit an Position j setzen	$x  = (1 \ll j)$
Bit an Position j löschen	$x \&= ~(1 \ll j)$
Bit an Position j flippen	$x ^= (1 \ll j)$
Anzahl an führenden nullen ( $x \neq 0$ )	<code>__builtin_clzll(x)</code>
Anzahl an schließenden nullen ( $x \neq 0$ )	<code>__builtin_ctzll(x)</code>
Anzahl an 1 bits	<code>__builtin_popcountll(x)</code>
i-te Zahl eines Graycodes	$i \wedge (i \gg 1)$

```

1 // Iteriert über alle Teilmengen einer Bitmaske
2 // (außer der leeren Menge).
3 for (int subset = bitmask; subset > 0;
4      subset = (subset - 1) & bitmask)
5     // Nächste Permutation in Bitmaske
6     // (z.B. 00111 => 01011 => 01101 => ...)
7     ll nextPerm(ll v) {
8         ll t = v | (v - 1);
9         return (t+1) | (((~t & --t) - 1) >> (__builtin_ctzll(v) + 1));
10    }

```

## 7.5 Pragmas

```
1 #pragma GCC optimize("Ofast")
2 #pragma GCC optimize ("unroll-loops")
3 #pragma GCC target("sse,sse2,sse3,sse3,sse4,"
4     "popcnt,abm,mmx,avx,tune=native")
5 #pragma GCC target("fpmath=sse,sse2") // no excess precision
6 #pragma GCC target("fpmath=387") // force excess precision
```

## 7.6 DP Optimizations

Aufgabe: Partitioniere Array in genau  $m$  zusammenhängende Teile mit minimalen Kosten:  $dp[i][j] = \min_{k < j} \{dp[i-1][k-1] + C[k][j]\}$ . Es sei  $A[i][j]$  das minimale optimale  $k$  bei der Berechnung von  $dp[i][j]$ .

**KNUTH-Optimization** Vorbedingung:  $A[i-1][j] \leq A[i][j] \leq A[i][j+1]$   
calc berechnet das DP  $O(n^2)$

```
1 ll calc(int n, int m, const vector<vector<ll>>& C) {
2     vector<vector<ll>> dp(m, vector<ll>(n, INF));
3     vector<vector<int>> opt(m, vector<int>(n + 1, n - 1));
4     for (int i = 0; i < n; i++) dp[0][i] = C[0][i];
5     for (int i = 1; i < m; i++) {
6         for (int j = n - 1; j >= 0; --j) {
7             opt[i][j] = i == 1 ? 0 : opt[i - 1][j];
8             for (int k = opt[i][j]; k <= min(opt[i][j + 1], j - 1); k++) {
9                 if (dp[i][j] <= dp[i - 1][k] + C[k + 1][j]) continue;
10                dp[i][j] = dp[i - 1][k] + C[k + 1][j];
11                opt[i][j] = k;
12            }
13        }
14    }
15    return dp[m - 1][n - 1];
16 }
```

**Divide and Conquer** Vorbedingung:  $A[i][j-1] \leq A[i][j]$ .  
calc berechnet das DP  $O(m \cdot n \cdot \log(n))$

```
1 vector<vector<ll>> dp;
2 vector<vector<ll>> C;
3 void rec(int i, int j0, int j1, int m0, int m1) {
4     if (j1 < j0) return;
5     int jmid = (j0 + j1) / 2;
6     dp[i][jmid] = INF;
7     int bestk = m0;
8     for (int k = m0; k < min(jmid, m1 + 1); ++k) {
9         if (dp[i - 1][k] + C[k + 1][jmid] < dp[i][jmid]) {
10            dp[i][jmid] = dp[i - 1][k] + C[k + 1][jmid];
11            bestk = k;
12        }
13    }
14    rec(i, j0, jmid - 1, m0, bestk);
15    rec(i, jmid + 1, j1, bestk, m1);
16 }
17 ll calc(int n, int m) {
18     dp = vector<vector<ll>>(m, vector<ll>(n, INF));
19     for (int i = 0; i < n; i++) dp[0][i] = C[0][i];
20     for (int i = 1; i < m; i++) {
21         rec(i, 0, n - 1, 0, n - 1);
22     }
23 }
```

**Quadrangle inequality** Die Bedingung  $\forall a \leq b \leq c \leq d : C[a][d] + C[b][c] \geq C[a][c] + C[b][d]$  ist hinreichend für beide Optimierungen.

**Sum over Subsets DP**  $res[mask] = \sum_{i \in mask} in[i]$ . Für Summe über Supersets res einmal vorher und einmal nachher reversieren.

```
1 vector<ll> res(in);
2 for (int i = 1; i < sz(res); i *= 2) {
3     for (int mask = 0; mask < sz(res); mask++) {
4         if (mask & i) {
5             res[mask] += res[mask ^ i];
6         }
6 }}
```

## 7.7 Fast Subset Sum

fastSubsetSum findet maximale subset  $sum \leq t$   $O(n \cdot A)$   
Die Laufzeit hängt vom maximalen Wert  $A$  in der Menge ab.

```
1 int fastSubsetSum(vector<int> w, int t){
2     int a = 0, b = 0;
3     while(b < sz(w) && a + w[b] <= t) a += w[b++];
4     if(b == sz(w)) return a;
5     int m = *max_element(all(w));
6     vector<int> dp(2*m, -1), old;
7     dp[m+a-t] = b;
8     for(int i = b; i < sz(w); i++){
9         old = dp;
10        for(int j = 0; j < m; j++){
11            dp[j+w[i]] = max(dp[j+w[i]], old[j]);
12        }
13        for(int j = 2*m-1; j > m; j--){
14            for(int k = max(old[j], 0); k < dp[j]; k++){
15                dp[j-w[k]] = max(dp[j-w[k]], k);
16            }
17        }
18    }
19    for(a = t; dp[m+a-t] < 0; a--);
20    return a;
21 }
```

## 7.8 Parallel Binary Search

```
1 // Q = # of queries, bucket sort is sometimes faster
2 vector<int> low(Q, -1), high(Q, MAX_OPERATIONS);
3 while (true) {
4     vector<pair<int, int>> focus;
5     for (int i = 0; i < Q; i++) {
6         if (low[i] + 1 < high[i]) {
7             focus.emplace_back((low[i] + high[i]) / 2, i);
8         }
9     }
10    if (focus.empty()) break;
11    sort(all(focus));
12    // reset simulation
13    for (int step = 0; auto [mid, i] : focus) {
14        for (; step <= mid; step++) {
15            // simulation step
16        }
17        if /* requirement already fulfilled */ high[i] = mid;
18        else low[i] = mid;
19    } // answer in low (MAX_OPERATIONS if never ok)
20 }
```

## 7.9 Josephus-Problem

$n$  Personen im Kreis, jeder  $k$ -te wird erschossen.

**Spezialfall  $k=2$ :** Betrachte  $n$  Binär. Für  $n = 1b_1b_2b_3..b_n$  ist  $b_1b_2b_3..b_n1$  die Position des letzten Überlebenden. (Rotiere  $n$  um eine Stelle nach links)

```
1 int rotateLeft(int n) { // Der letzte Überlebende, 1-basiert.
2     int bits = __lg(n);
3     n ^= 1 << bits;
4     return 2 * n + 1;
5 }
```

**Allgemein:** Sei  $F(n,k)$  die Position des letzten Überlebenden. Nummeriere die Personen mit  $0, 1, \dots, n-1$ . Nach Erschießen der  $k$ -ten Person, hat der Kreis noch Größe  $n-1$  und die Position des Überlebenden ist jetzt  $F(n-1,k)$ . Also:  $F(n,k) = (F(n-1,k) + k) \% n$ . Basisfall:  $F(1,k) = 0$ .

```
1 // Der letzte Überlebende, 0-basiert.
2 int josephus(int n, int k) {
3     if (n == 1) return 0;
4     return (josephus(n - 1, k) + k) % n;
5 }
```

Beachte bei der Ausgabe, dass die Personen im ersten Fall von  $1, \dots, n$  nummeriert sind, im zweiten Fall von  $0, \dots, n-1$ !

## 7.10 Sonstiges

```
1 // Setzt deutsche Tastaturlayout / toggle mit alt + space
2 setxkbmap de
3 setxkbmap de,us -option grp:alt_space_toggle
4 // Set mit eigener Sortierfunktion.
5 set<point2, decltype(comp)> set1(comp);
6 // STL-Debugging, Compiler flags.
7 -D_GLIBCXX_DEBUG
8 #define _GLIBCXX_DEBUG
9 // 128-Bit Integer/Float. Muss zum Einlesen/Ausgeben
10 // in einen int oder long long gecastet werden.
11 __int128, __float128
12 // float mit Decimaldarstellung
13 #include <decimal/decimal>
14 std::decimal::decimal128
15 // 1e18 < INF < Max_Value / 2
16 constexpr ll INF = 0x3FFF'FFFF'FFFF'FFFFLL;
17 // 1e9 < INF < Max_Value / 2
18 constexpr int INF = 0x3FFF'FFFF;
```

## 7.11 Stress Test

```
1 for i in {1..1000}; do
2     printf "\r\$i"
3     python3 gen.py > input      # generate test with gen.py
4     ./a.out < input > out       # execute ./a.out
5     ./b.out < input > out2      # execute ./b.out
6     diff out out2 || break
7 done
```

## 7.12 Gemischtes

- **(Minimum) Flow mit Demand  $d$ :** Erstelle neue Quelle  $s'$  und Senke  $t'$  und setze die folgenden Kapazitäten:

$$\begin{aligned} c'(s', v) &= \sum_{u \in V} d(u, v) & c'(v, t') &= \sum_{u \in V} d(v, u) \\ c'(u, v) &= c(u, v) - d(u, v) & c'(t, s) &= x \end{aligned}$$

Löse Fluss auf  $G'$  mit DINIC's ALGORITHMUS, wenn alle Kanten von  $s'$  saturiert sind ist der Fluss in  $G$  gültig.  $x$  beschränkt den Fluss in  $G$  (Binary-Search für minflow,  $\infty$  sonst).

- **JOHNSON's Reweighting Algorithmus:** Initialisiere alle Entfernungen mit  $d[i] = 0$ . Berechne mit BELLMAN-FORD kürzeste Entfernungen. Falls es einen negativen Zyklus gibt abrechnen. Sonst ändere die Gewichte von allen Kanten  $(u, v)$  im ursprünglichen Graphen zu  $d[u] + w[u, v] - d[v]$ . Dann sind alle Kantengewichte nichtnegativ, DIJKSTRA kann angewendet werden.
- **System von Differenzbeschränkungen:** Ändere alle Bedingungen in die Form  $a - b \leq c$ . Für jede Bedingung füge eine Kante  $(b, a)$  mit Gewicht  $c$  ein. Füge Quelle  $s$  hinzu, mit Kanten zu allen Knoten mit Gewicht 0. Nutze BELLMAN-FORD, um die kürzesten Pfade von  $s$  aus zu finden.  $d[v]$  ist mögliche Lösung für  $v$ .
- **Min-Weight-Vertex-Cover im Bipartiten Graph:** Partitioniere in  $A$ ,  $B$  und füge Kanten  $s \rightarrow A$  mit Gewicht  $w(A)$  und Kanten  $B \rightarrow t$  mit Gewicht  $w(B)$  hinzu. Füge Kanten mit Kapazität  $\infty$  von  $A$  nach  $B$  hinzu, wo im originalen Graphen Kanten waren. Max-Flow ist die Lösung.

Im Residualgraphen:

- Das Vertex-Cover sind die Knoten inzident zu den Brücken. *oder*
- Die Knoten in  $A$ , die *nicht* von  $s$  erreichbar sind und die Knoten in  $B$ , die von  $s$  erreichbar sind.
- **Allgemeiner Graph:** Das Komplement eines Vertex-Cover ist ein Independent Set.  $\Rightarrow$  Max Weight Independent Set ist Komplement von Min Weight Vertex Cover.
- **Bipartiter Graph:** Min Vertex Cover (kleinste Menge Knoten, die alle Kanten berühren) = Max Matching. Richtige Knoten im Matching von  $B$  nach  $A$  und sonst von  $A$  nach  $B$ , markiere alle Knoten die von einem ungematchten Knoten in  $A$  erreichbar sind, das Vertex Cover sind die markierten Knoten aus  $B$  und die unmarkierten Knoten aus  $A$ .
- **Bipartites Matching mit Gewichten auf linken Knoten:** Minimiere Matchingsgewicht. Lösung: Sortiere Knoten links aufsteigend nach Gewicht, danach nutze normalen Algorithmus (KUHN, Seite 8)
- **Satz von PICK:** Sei  $A$  der Flächeninhalt eines einfachen Gitterpolygons,  $I$  die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und  $R$  die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand. Es gilt:  $A = I + \frac{R}{2}$

- **Lemma von BURNSIDE:** Sei  $G$  eine endliche Gruppe, die auf der Menge  $X$  operiert. Für jedes  $g \in G$  sei  $X^g$  die Menge der Fixpunkte bei Operation durch  $g$ , also  $X^g = \{x \in X \mid g \bullet x = x\}$ . Dann gilt für die Anzahl der Bahnen  $[X/G]$  der Operation:

$$[X/G] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

- **POLY Counting:** Sei  $\pi$  eine Permutation der Menge  $X$ . Die Elemente von  $X$  können mit einer von  $m$  Farben gefärbt werden. Die Anzahl der Färbungen, die Fixpunkte von  $\pi$  sind, ist  $m^{\#(\pi)}$ , wobei  $\#(\pi)$  die Anzahl der Zyklen von  $\pi$  ist. Die Anzahl der Färbungen von Objekten einer Menge  $X$  mit  $m$  Farben unter einer Symmetriegruppe  $G$  ist gegeben durch:

$$[X/G] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m^{\#(g)}$$

- **Verteilung von Primzahlen:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: Es existiert eine Primzahl  $p$  mit  $n \leq p \leq 2n$ .
- **Satz von KIRCHHOFF:** Sei  $G$  ein zusammenhängender, ungerichteter Graph evtl.

mit Mehrfachkanten. Sei  $A$  die Adjazenzmatrix von  $G$ . Dabei ist  $a_{ij}$  die Anzahl der Kanten zwischen Knoten  $i$  und  $j$ . Sei  $B$  eine Diagonalmatrix,  $b_{ii}$  sei der Grad von Knoten  $i$ . Definiere  $R = B - A$ . Alle Kofaktoren von  $R$  sind gleich und die Anzahl der Spannbäume von  $G$ .

Entferne letzte Zeile und Spalte und berechne Betrag der Determinante.

- **DILWORTHS-Theorem:** Sei  $S$  eine Menge und  $\leq$  eine partielle Ordnung ( $S$  ist ein Poset). Eine **Kette** ist eine Teilmenge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  mit  $x_1 \leq \dots \leq x_n$ . Eine **Partition** ist eine Menge von Ketten, sodass jedes  $s \in S$  in genau einer Kette ist. Eine **Antikette** ist eine Menge von Elementen, die paarweise nicht vergleichbar sind. Es gilt: Die Größe der längsten Antikette gleicht der Größe der kleinsten Partition.  $\Rightarrow$  Weite des Poset.

Berechnung: Maximales Matching in bipartitem Graphen. Dupliziere jedes  $s \in S$  in  $u_s$  und  $v_s$ . Falls  $x \leq y$ , füge Kante  $u_x \rightarrow v_y$  hinzu. Wenn Matching zu langsam ist, versuche Struktur des Posets auszunutzen und evtl. anders eine maximale Antikette zu finden.

- **TURAN's-Theorem:** Die Anzahl an Kanten in einem Graphen mit  $n$  Knoten der keine clique der größe  $x+1$  enthält ist:

$$\text{ext}(n, K_{x+1}) = \binom{n}{2} - \left( (x - (n \bmod x)) \cdot \binom{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{2} + (n \bmod x) \cdot \binom{\lceil \frac{n}{x} \rceil}{2} \right)$$

- **EULER's-Polyedersatz:** In planaren Graphen gilt  $n - m + f - c = 1$ .
- **Pythagoreische Tripel:** Sei  $m > n > 0$ ,  $k > 0$  und  $m \not\equiv n \pmod{2}$  dann beschreibt diese Formel alle Pythagoreischen Tripel eindeutig:

$$k \cdot (a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2)$$

- **Centroids of a Tree:** Ein **Centroid** ist ein Knoten, der einen Baum in Komponenten der maximalen Größe  $\frac{|V|}{2}$  splittet. Es kann 2 Centroids geben!
- **Centroid Decomposition:** Wähle zufälligen Knoten und mache DFS. Verschiebe ausgewählten Knoten in Richtung des tiefsten Teilbaums, bis Centroid gefunden. Entferne Knoten, mache rekursiv in Teilbäumen weiter. Laufzeit:  $O(|V| \cdot \log(|V|))$ .
- **Gregorian Calendar:** Der Anfangstag des Jahres ist alle 400 Jahre gleich.
- **Pivotsuche und Rekursion auf linkem und rechtem Teilarray:** Suche gleichzeitig von links und rechts nach Pivot, um Worst Case von  $O(n^2)$  zu  $O(n \log n)$  zu verbessern.
- **Mo's Algorithm:** SQRT-Decomposition auf  $n$  Intervall Queries  $[l, r]$ . Gruppiere Queries in  $\sqrt{n}$  Blöcke nach linker Grenze  $l$ . Sortiere nach Block und bei gleichem Block nach rechter Grenze  $r$ . Beantworte Queries offline durch schrittweise Vergrößern/Verkleinern des aktuellen Intervalls. Laufzeit:  $O(n \cdot \sqrt{n})$ . (Anzahl der Blöcke als Konstante in Code schreiben.)

- **SQRT Techniques:**
  - Aufteilen in *leichte* (wert  $\leq \sqrt{x}$ ) und *schwere* (höchsten  $\sqrt{x}$  viele) Objekte.
  - Datenstruktur in Blöcke fester Größe (z.B. 256 oder 512) aufteilen.
  - Datenstruktur nach fester Anzahl Updates komplett neu bauen.
  - Wenn die Summe über  $x_i$  durch  $X$  beschränkt ist, dann gibt es nur  $\sqrt{2X}$  verschiedene Werte von  $x_i$  (z.B. Längen von Strings).
  - Wenn  $w \cdot h$  durch  $X$  beschränkt ist, dann ist  $\min(w, h) \leq \sqrt{X}$ .
- **Partition:** Gegeben Gewichte  $w_0 + w_1 + \dots + w_k = W$ , existiert eine Teilmenge mit Gewicht  $x$ ? Drei gleiche Gewichte  $w$  können zu  $w$  und  $2w$  kombiniert werden ohne die Lösung zu ändern  $\Rightarrow$  nur  $2\sqrt{W}$  unterschiedliche Gewichte. Mit bitsets daher selbst für  $10^5$  lösbar.

## 7.13 Tipps & Tricks

- **Run Time Error:**
  - Stack Overflow? Evtl. rekursive Tiefensuche auf langem Pfad?
  - Array-Grenzen überprüfen. Indizierung bei 0 oder bei 1 beginnen?
  - Abbruchbedingung bei Rekursion?
  - Evtl. Memory Limit Exceeded? Mit `/usr/bin/time -v` erhält man den maximalen Speicherverbrauch bei der Ausführung (Maximum resident set size).

## • Strings:

- Soll "aa" kleiner als "z" sein oder nicht?
- bit 0x20 beeinflusst Groß-/Kleinschreibung.

## • Zeilenbasierte Eingabe:

- `getline(cin, str)` liest Zeile ein.
- Wenn vorher `cin >> ...` benutzt, lese letztes `\n` mit `getline(cin, x)`.

## • Gleitkommazahlen:

- `NaN?` Evtl. ungültige Werte für mathematische Funktionen, z.B. `acos(1.0000000000000001)?`
- Falsches Runden bei negativen Zahlen? Abschneiden  $\neq$  Abrunden!
- genügend Präzision oder Output in wissenschaftlicher Notation (1e-25)?
- Kann `-0.000` ausgegeben werden?

## • Wrong Answer:

- Lies Aufgabe erneut. Sorgfältig!
- Mehrere Testfälle in einer Datei? Probiere gleichen Testcase mehrfach hintereinander.
- Integer Overflow? Teste maximale Eingabegrößen und mache Überschlagsrechnung.
- Ausgabeformat im 'unmöglich'-Fall überprüfen.
- Ist das Ergebnis modulo einem Wert?
- Integer Division rundet zur 0  $\neq$  abrunden.
- Eingabegrößen überprüfen. Sonderfälle ausprobieren.
- $n = 0, n = -1, n = 1, n = 2^{31} - 1, n = -2^{31}$
- $n$  gerade/ungerade
- Graph ist leer/enthält nur einen Knoten.
- Liste ist leer/enthält nur ein Element.
- Graph ist Multigraph (enthält Schleifen/Mehrfachkanten).
- Sind Knoten gerichtet/ungerichtet?
- Kolineare Punkte existieren.
- Polygon ist konkav/selbstschneidend.
- Bei DP/Rekursion: Stimmt Basisfall?
- Unsicher bei benutzten STL-Funktionen?

## 8 Template

### 8.1 C++

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 #define tsolve int t; cin >> t; while(t--) solve
5 #define all(x) ::begin(x), ::end(x)
6 #define sz(x) (ll)::size(x)
7
8 using ll = long long;
9 using ld = long double;
10
11 void solve() {}
12
13 int main() {
14     cin.tie(0)->sync_with_stdio(false);
15     cout << setprecision(16);
16     solve();
17 }
```

### 8.2 Console

```

1 alias comp=
  "g++ -std=g++17 -O2 -Wall -Wextra -Wconversion -Wshadow"
2 alias dbg="comp -g -fsanitize=address,undefined"
```



## 9 Tests

Dieser Abschnitt enthält lediglich Dinge die während der Practicesession getestet werden sollten!

### 9.1 GCC

- sind c++14 Feature vorhanden?
- sind c++17 Feature vorhanden?
- kompiliert dieser Code:

```
1 //https://gcc.gnu.org/bugzilla/show_bug.cgi?id=68203
2 struct A {
3     pair<int, int> values[1000000];
4 };
```

- funktioniert `_int128`?
- funktionieren Pragmas?
- funktionieren `constexpr` zur Compilezeit (+Zeitlimit)?
- wie groß ist `sizeof(char*)`?
- wie groß ist `RAND_MAX`?
- funktioniert `random_device`? (und gib es unterschiedliche Ergebnisse?)
- funktioniert `clock()`?

### 9.2 Python

- Rekursionslimit?

### 9.3 Judge

- ist der Checker casesensitive?
- wie werden zusätzliche Whitespacecharacter bei sonst korrektem Output behandelt?
- vergleiche ausführungszeit auf dem judge und lokal (z.b. mit Primzahl Sieb)

```
1 "\r\r\r\n\t    \r\n\r"
```

### 9.4 Precision

- Mode 0 means no excess precision
- Mode 2 means excess precision (all operations in 80 bit floats)
- Result 0 without excess precision (expected floating point error)
- $\sim 8e^{-17}$  with excess precision (real value)

```
1 #include <cfloat>
2 int main() {
3     cout << "Mode: " << FLT_EVAL_METHOD << endl;
4     double a = atof("1.2345678");
5     double b = a*a;
6     cout << b - 1.52415765279683990130 << '\n';
7 }
```