Dualité pour les problèmes linéaires

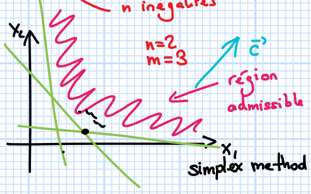
On a un problème

min $c^T x$ — coût; inconnues $\in \mathbb{R}^n$; vecteur de coût $\in \mathbb{R}^n$

avec contraintes

$Ax \geq b$ — $\in \mathbb{R}^m$; $m \times n$; m inégalités

$x \geq 0$ — n inégalités



Dual:

max $b^T y$ — inconnues $\in \mathbb{R}^m$

avec contraintes

$A^T y \leq c$ — $n \times m$; n inégalités

$y \geq 0$ — m inégalités

$$3x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Thm 1 Pour x admissible et y admissible
$c^T x \geq b^T y$

$$c^T x \geq (A^T y)^T x = y^T A x \geq y^T b$$

Thm2 Pour x^* optimal et y^* optimal

$c^T x^* = b^T y^*$

et si $(Ax^*)_i > b_i$, $y_i^* = 0$ et si $(A^T y^*)_j < c_j$, $x_j^* = 0$

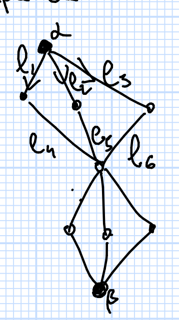
Interprétation. Exemple de problème avec un régime (nutrition) x : quantité d'aliments qu'on achète [kg], c : coût des aliments €/kg + shadow cost

min $c^T x$ — b : quantité de nutriments (vitamines) nécessaires

a_{ij} : quantité de vitamine i dans l'aliment j

Dual : Si une entreprise veut vendre des vitamines, elles essaie de fixer des prix y_i pour les vitamines. $y^T b$ représentera le revenu qu'une personne qui achète ces vitamines va générer et les contraintes de compétitivité : pour chaque aliment, le prix total des vitamines dans l'aliment doit être $\leq$ prix de l'aliment.

Exemple de + court chemin



On a des routes et on veut aller de α à β en minimisant la longueur du chemin. On peut modéliser ceci comme un problème de flot: pour chaque arête i on a une quantité de liquide $x_i \geq 0$ qui passe dedans, on a le coût $\sum_i l_i x_i$ et on a les contraintes

Pour chaque sommet $v \neq \alpha, \beta$

$$\sum_{i \to v} x_i - \sum_{v \to i} x_i \geq 0$$

$$\sum_{\alpha \to i} x_i \geq 1 \qquad \sum_{i \to \beta} x_i \geq 1$$

$$-\sum_{\alpha \to i} x_i \geq -1 \qquad x_i \geq 0$$

Dual: variables sur les sommets, contraintes sur les arêtes..

Container de marchandises. Chaque type d'objet j a une valeur c_j par unité et un poids a_j par unité. On a une contrainte de poids total $\leq b$

max $c^T x$ avec contraintes

$$a^T x \leq b$$
$$x \geq 0$$

min $b y$ — poids total, kg[ ]

$a y \geq c$ — poids unité kg/unité[ ]; coût $\in$; nombre object $\mathbb{R}$; $[€/kg]: y$

$y \geq 0$

Transport de pétrole

o o o o o puits

o o o o o o o o clients

c_{ij} : coût de transport / baril pour envoyer du puits i au client j; x_{ij} quantité qu'on envoie de i à j

$$\min \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$$

contraintes

$$\sum_j x_{ij} \leq p_i \quad \forall i \text{ production}$$

$$\sum_i x_{ij} \geq d_j \quad \forall j \text{ demande}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall ij$$

$$-\sum_j x_{ij} \geq -p_i$$

Dual

$$\max \sum_i (-p_i) \overset{€}{y_i} + \sum_j d_j \overset{€}{z_j}$$

$$z_j - y_i \leq c_{ij} \quad €$$

$€ - €$

Shadow costs (coûts cachés)

Supposons qu'on a un problème min $c^T x$, $Ax \geq b$, $x \geq 0$ avec solution optimale x^* et un problème dual max $b^T y$, $A^T y \leq c$, $y \geq 0$ avec solution optimale y^*

Si on modifie la contrainte i : $(Ax)_i \geq b_i + \epsilon_i$, la solution optimale $x^* \rightsquigarrow x^* + \epsilon_i \delta x^*$ et le coût $c^T x^* \rightsquigarrow c^T x^* + \epsilon_i \underbrace{c^T \delta x^*}_{\lambda_i}$

$\delta x^* = \tilde{x}^* - x^*$

Thm: $\lambda_i = y_i^*$

Approche générale pour la dualité

Si on a un problème min $f(x)$ avec contraintes

$$g_1(x) \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$g_k(x) \geq b_k$$
$$h_1(x) = \tilde{b}_1$$
$$h_\ell(x) = \tilde{b}_\ell$$

on peut poser le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_j) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i [g_i(x_1, \dots, x_n) - b_i] - \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j [h_j(x_1, \dots, x_n) - \tilde{b}_j]$$

$$D^* = \left\{ \lambda, \mu : \inf_{x \in D} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \neq -\infty \right\}$$

Pour $(\lambda, \mu) \in D^*$, $g(\lambda, \mu) = \inf_{x \in D} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$

Problème dual: $\max_{(\lambda,\mu) \in D^*} g(\lambda, \mu)$ avec contraints

Si la situation est bonne : max g = min f

car "max min $\mathcal{L}$ = min max $\mathcal{L}$"

seulement si $f(x)$ est convex et l'ensemble de x : $g(x)$ soit convex et D convex