UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO 2 – GA110 A ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA

Prof. Dr. Mario Ernesto Jijón Palma
Departamento de Geomática
Setor de Ciências da Terra
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Método paramétrico ➔ $\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$

Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.

Método dos correlatos ➔ $\boldsymbol{F(L_a) = 0}$

Os valores observados ajustados devem satisfazer determinadas condições (erro de fechamento = zero).

Método combinado ➔ $\boldsymbol{F(L_a, X_a) = 0}$

Os valores observados ajustados e os parâmetros ajustados são ligados por função não explicita (não se consegue separa-los).

Ajustamento: Método Combinado

Então temos que: $\boldsymbol{F(X_a, L_a) = 0}$ ➔ **Modelo mais genérico que os dois anteriores**

onde $\boldsymbol{X_a = X_0 + X}$ $\quad$ $\boldsymbol{L_a = L_b + V}$

Aplicando aproximação linear da série de Taylor:

$$F(X_a, L_a) = F(X_0 + X, L_b + V) = 0$$

$$F(X_a, L_a) \cong F(X_0, L_b) + \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_0} (X_a - X_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b} (L_a - L_b)$$

$$W = F(X_0, L_b) \qquad A = \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_0} \qquad B = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b}$$

$\boldsymbol{F(X_a, L_a) \cong AX + BV + W = 0}$ ➡ **Modelo matemático linearizado**

Ajustamento: Método Combinado

Admitindo que existam ***n*** valores observados e ***u*** parâmetros do tipo supra ligados por ***r*** equações, resultam as seguintes dimensões para as matrizes:

Equações

$$ {}_{r}A_{u}\,{}_{u}X_{1} + {}_{r}B_{n}\,{}_{n}V_{1} + {}_{r}W_{1} = {}_{r}0_{1} $$

Parâmetros

Observações

Erros de fechamento

n ➔ valores observados

u ➔ parâmetros

r ➔ equações

Graus de liberdade = r - u

sendo necessário que n > r - u

Observações > Graus de liberdade

ou r < n + u

Ajustamento: Método Combinado

Equações normais:

Minimizando a forma quadrática fundamental, temos que:

Técnica Lagrangiana ➔ $\emptyset = V^T PV - 2K^T(AX + BV + W) = mínimo$

Sendo $\boldsymbol{K}$ o vetor dos multiplicadores de Lagrange (ou correlatos)

Igualando a zero e derivando em relação a V, K e X:

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial V} = 2PV - 2B^T K = 0 \quad ➔ \quad PV - B^T K = 0$$

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial K} = -2(AX + BV + W) = 0 \quad ➔ \quad AX + BV + W = 0$$

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial V} = -2A^T K = 0 \quad ➔ \quad A^T K = 0$$

Ajustamento: Método Combinado

Equações normais:

observações

equações

parâmetros

Dimensões

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \begin{array}{ccc} n & \quad r & \quad u \end{array} & 1 & & 1 & & 1 \\
\begin{array}{c} n \\ r \\ u \end{array} & \begin{bmatrix} P & -B^T & 0 \\ B & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V \\ K \\ X \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ 0 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Observações:

1) Método dos correlatos ➔ A = 0 (Não existem parâmetros)

2) Método paramétrico ➔ $W = F(X_0, L_b) = L_0 - L_b = L$

Cada equação ➔ uma observação ➔ B = -I e W =L degenera em ➔ AX+L = V

Ajustamento: Método Combinado

Sequência de Resolução de Ajustamento: Método Combinado:

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^{T}$$

$$X = -(A^{T}M^{-1}A)^{-1}A^{T}M^{-1}W$$

$$X_{a} = X_{0} + X$$

Após diversas iterações...

$$K = -M^{-1}(AX + W)$$ (Vetor dos Lagrangianos)

$$V = P^{-1}B^{T}K$$

$$\boldsymbol{L_a = L_b + V}$$

Ajustamento: Método Combinado

Variância a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\boldsymbol{V^T P V}}{\boldsymbol{r - u}}$$

MVC dos parâmetros

$$\Sigma_X = \Sigma_{Xa} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T \cdot M^{-1} \cdot A)^{-1}$$

MVC dos valores ajustados

$$\Sigma_{La} = \hat{\sigma}_0^2 [P^{-1} + P^{-1} \cdot B^T \cdot M^{-1} \cdot A(A^T \cdot M^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot M^{-1} \cdot B \cdot P^{-1} - P^{-1} \cdot B^T \cdot M^{-1} \cdot B \cdot P^{-1}]$$

MVC dos Resíduos

$$\Sigma_V = \hat{\sigma}_0^2 \cdot P^{-1} - \Sigma_{La}$$

MVC do Erro de Fechamento

$$\Sigma_W = \hat{\sigma}_0^2 \cdot M$$

Ajustamento: Método Combinado

EXERCÍCIO

Dadas as coordenadas observadas de quatro pontos, estimar as coordenadas do centro e o raio da circunferência que melhor se ajusta aos mesmos.

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ r_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Pontos	x	σ_x^2	y	σ_y^2
1	140,0	0,5	60,0	0,5
2	165,0	1,0	100,0	1,0
3	165,0	0,5	150,0	0,5
4	140,0	1,0	180,0	1,0

Ajustamento: Método Combinado

EXERCÍCIO

Dadas as coordenadas observadas de quatro pontos, estimar as coordenadas do centro e o raio da circunferência que melhor se ajusta aos mesmos.

Pontos	x	σ_x^2	y	σ_y^2
1	140,0	0,5	60,0	0,5
2	165,0	1,0	100,0	1,0
3	165,0	0,5	150,0	0,5
4	140,0	1,0	180,0	1,0

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ r_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix}$$

a) Modelo matemático

Sejam

$$f_i = (x_i^{(a)} - x_a)^2 + (y_i^{(a)} - y_a)^2 - r_a^2 = 0$$

i = 1,2,3,4

x_a, y_a ➔ coordenadas do centro ajustadas

r_a ➔ raio ajustado

$x_i^{(a)}, y_i^{(a)}$ ➔ valores observados ajustados

n = 8 observações
r = 4 equações
u = 3 parâmetros

Ajustamento: Método Combinado

b) Modelo linearizado

$$\boldsymbol{AX + BV + W = 0}$$

c) Vetor Solução Inicial

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ r_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix}$$

d) Vetor dos valores observados

$$L_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140{,}0 \\ 60{,}0 \\ 165{,}0 \\ 100{,}0 \\ 165{,}0 \\ 150{,}0 \\ 140{,}0 \\ 180{,}0 \end{bmatrix}$$

e) Matriz dos pesos $P = \sigma_o^2 * \left(\sum L_b\right)^{-1}$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

f) Vetor Erro de Fechamento $W = F(X_0, L_b)$

$$w_i = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - r_0^2$$

$$W = \begin{bmatrix} (140-100)^2 + (60-120)^2 - 70^2 \\ (165-100)^2 + (100-120)^2 - 70^2 \\ (165-100)^2 + (150-120)^2 - 70^2 \\ (140-100)^2 + (180-120)^2 - 70^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ -275 \\ 225 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

g) Matriz A

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_0}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2(x_1 - x_0) & -2(y_1 - y_0) & -2r_0 \\ -2(x_2 - x_0) & -2(y_2 - y_0) & -2r_0 \\ -2(x_3 - x_0) & -2(y_3 - y_0) & -2r_0 \\ -2(x_4 - x_0) & -2(y_4 - y_0) & -2r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 & 120 & -140 \\ -130 & 40 & -140 \\ -130 & -60 & -140 \\ -80 & -120 & -140 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

h) Matriz B

$$B = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_0) & 2(x_1 - x_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_2 - x_0) & 2(y_2 - y_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x_3 - x_0) & 2(y_3 - y_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x_4 - x_0) & 2(y_4 - y_0) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 80 & -120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 130 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 130 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 120 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

i) Matriz M $M = BP^{-1}B^T$

$$M = \begin{bmatrix} 10400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20800 \end{bmatrix}$$

j) Vetor Correções X $X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$

$$X = \begin{bmatrix} -6{,}0854 \\ 0{,}7927 \\ 5{,}8467 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

i) Matriz Parâmetros Ajustados $X_a = X_0 + X$

$$X_a = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6{,}0854 \\ 0{,}7927 \\ 5{,}8467 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93{,}9146 \\ 120{,}7927 \\ 75{,}8467 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

i) Matriz Parâmetros Ajustados $X_a = X_0 + X$

$$X_a = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6,0854 \\ 0,7927 \\ 5,8467 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93,9146 \\ 120,7927 \\ 75,8467 \end{bmatrix}$$

$$X_a^{(2)} = \begin{bmatrix} 94,0557 \\ 120,7471 \\ 75,7626 \end{bmatrix}$$

$$X_a^{(3)} = \begin{bmatrix} 94,0509 \\ 120,7482 \\ 75,7664 \end{bmatrix}$$

$$X_a^{(4)} = \begin{bmatrix} 94,0510 \\ 120,7482 \\ 75,7663 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

i) Vetor Lagragianos $K = -M^{-1}(AX + W)$

$$K = \begin{bmatrix} -0{,}005267 \\ 0{,}012641 \\ -0{,}012641 \\ 0{,}005267 \end{bmatrix}$$

j) Vetor Resíduos $V = P^{-1}B^{T}K$

$$V = \begin{bmatrix} -0{,}2420 \\ 0{,}3200 \\ 1{,}7937 \\ -0{,}5245 \\ -0{,}8968 \\ -0{,}3698 \\ 0{,}4840 \\ 0{,}6242 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

i) Matriz Observações Ajustadas $\boldsymbol{L_a = L_b + V}$

$$L_a = \begin{bmatrix} 139{,}7580 \\ 60{,}3200 \\ 166{,}7937 \\ 99{,}4755 \\ 164{,}1032 \\ 149{,}6302 \\ 140{,}4840 \\ 180{,}6242 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r - u} = \mathbf{6,3204}$$

MVC dos parâmetros $\sum_{Xa} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T \cdot M^{-1} \cdot A)^{-1}$

$$\sum_{Xa} = \begin{bmatrix} 43,7990 & -4,0270 & -34,0052 \\ -4,0270 & 3,1811 & 3,2779 \\ -34,0052 & 3,2779 & 27,4629 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

i) Matriz Parâmetros Ajustados

$$X_a = \begin{bmatrix} -94{,}0510 \pm 6{,}6181 \\ 120{,}7482 \pm 1{,}7836 \\ 75{,}7663 \pm 5{,}2405 \end{bmatrix}$$