

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA



AJUSTAMENTO 2 – GA110 A ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA

Prof. Dr. Mario Ernesto Jijón Palma

Departamento de Geomática Setor de Ciências da Terra Universidade Federal do Paraná - UFPR

Ajustamento - Método dos Mínimos Quadrados

Método paramétrico \rightarrow $L_a = F(X_a)$

Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.

Método dos correlatos \rightarrow $F(L_a) = 0$

Os valores observados ajustados devem satisfazer determinadas condições (erro de fechamento = zero).

Método combinado
$$\rightarrow$$
 $F(L_a, X_a) = 0$

Os valores observados ajustados e os parâmetros ajustados são ligados por função não explicita (não se consegue separa-los).



Então temos que:
$$F(X_a,L_a)=0$$

Modelo mais genérico que os dois anteriores

onde

$$X_a = X_0 + X$$
 $L_a = L_b + V$

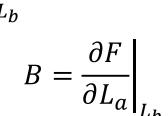
$$L_a = L_b + V$$

Aplicando aproximação linear da série de Taylor:

$$F(X_a, L_a) = F(X_0 + X, L_b + V) = 0$$

$$F(X_a, L_a) \cong F(X_0, L_b) + \frac{\partial F}{\partial X_a} \bigg|_{X_0} (X_a - X_0) + \frac{\partial F}{\partial L_a} \bigg|_{L_b} (L_a - L_b)$$

$$W = F(X_0, L_b) A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \bigg|_{X_0} B = \frac{\partial F}{\partial L_a} \bigg|_{L_b}$$

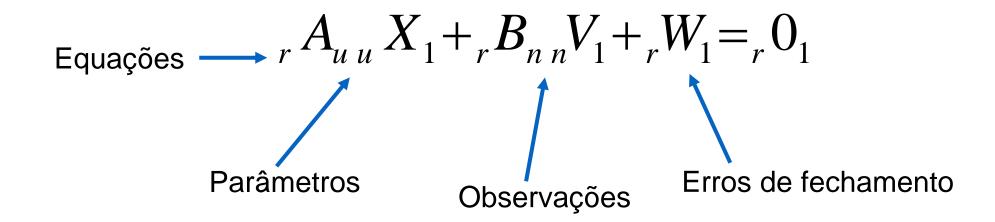


$$F(X_a, L_a) \cong AX + BV + W = 0$$





Admitindo que existam n valores observados e u parâmetros do tipo supra ligados por r equações, resultam as seguintes dimensões para as matrizes:



n → valores observados

u → parâmetros

r → equações

Graus de liberdade = r - u

sendo necessário que n > r - u

Observações > Graus de liberdade

ou r < n + u



Equações normais:

Minimizando a forma quadrática fundamental, temos que:

Técnica Lagrangiana
$$\Rightarrow \emptyset = V^T P V - 2K^T (AX + BV + W) = m \text{i} n i m o$$

Sendo *K* o vetor dos multiplicadores de Lagrange (ou correlatos)

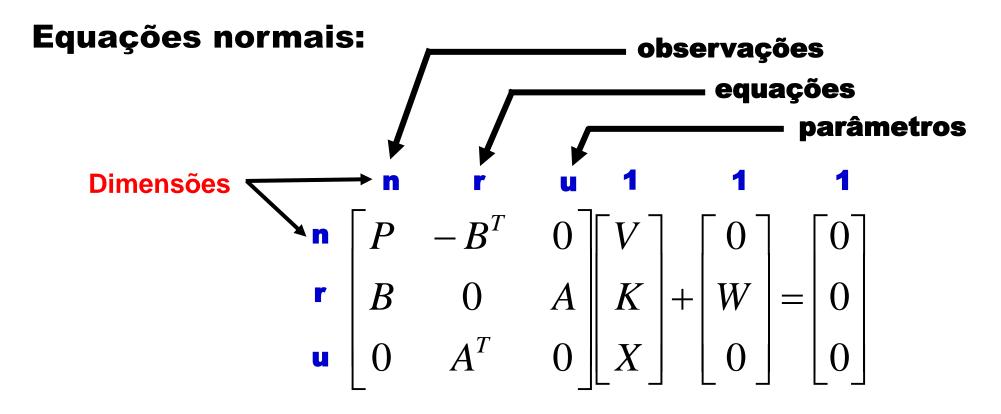
Igualando a zero e derivando em relação a V, K e X:

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial V} = 2PV - 2B^T K = 0 \qquad \Rightarrow \qquad PV - B^T K = 0$$

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial K} = -2(AX + BV + W) = 0 \quad \Rightarrow \quad AX + BV + W = 0$$

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial V} = -2A^T K = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A^T K = 0$$





Observações:

- Método dos correlatos → A = 0 (Não existem parâmetros)
- 2) Método paramétrico → W = F(X₀,L_b) = L₀ L_b = L
 Cada equação → uma observação → B = -I e W = L degenera em → AX+L = V

Sequência de Resolução de Ajustamento: Método Combinado:

- 1) Matrizes/vetores conhecidos → Lb, Xo, P
- 2) Cálculos preliminares de matrizes \rightarrow W, A, B
- 3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^{T}$$

$$X = -(A^{T}M^{-1}A)^{-1}A^{T}M^{-1}W$$

$$X_{a} = X_{0} + X$$

Após diversas iterações...

$$K = -M^{-1}(AX + W)$$
 (Vetor dos Lagrangianos) $V = P^{-1}B^TK$ $L_a = L_b + V$



Variância a posteriori (
$$\hat{\sigma}_0^2$$
)
$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r - u}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{\mathbf{r} - \mathbf{u}}$$

MVC dos parâmetros

$$\sum_{X} = \sum_{Xa} = \hat{\sigma}_{0}^{2} (A^{T} \cdot M^{-1} \cdot A)^{-1}$$

MVC dos valores ajustados

$$\sum_{La} = \hat{\sigma}_0^2 [P^{-1} + P^{-1} \cdot B^T \cdot M^{-1} \cdot A(A^T \cdot M^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot M^{-1} \cdot B \cdot P^{-1} - P^{-1} \cdot B^T \cdot M^{-1} \cdot B \cdot P^{-1}]$$

MVC dos Resíduos
$$\sum_V = \hat{\sigma}_0^2 \cdot P^{-1} - \sum_{La}$$

MVC do Erro de Fechamento
$$\sum_{W} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot M$$

$$\sum_{W} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot M$$



EXERCÍCIO

Dadas as coordenadas observadas de quatro pontos, estimar as coordenadas do centro e o raio da circunferência que melhor se ajusta aos mesmos.

 $X_0 = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ r_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix}$

Pontos	Х	σ_x^2	у	σ_{v}^{2}
1	140,0	0,5	60,0	0,5
2	165,0	1,0	100,0	1,0
3	165,0	0,5	150,0	0,5
4	140,0	1,0	180,0	1,0



EXERCÍCIO

Dadas as coordenadas observadas de quatro pontos, estimar as coordenadas do centro e o raio da circunferência que melhor se ajusta aos mesmos.

a) Modelo matemático
$$X_0 = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ r_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Pontos	X	σ_x^2	у	σ_y^2
1	140,0	0,5	60,0	0,5
2	165,0	1,0	100,0	1,0
3	165,0	0,5	150,0	0,5
4	140,0	1,0	180,0	1,0

Sejam

$$f_i = (x_i^{(a)} - x_a)^2 + (y_i^{(a)} - y_a)^2 - r_a^2 = 0$$

$$i = 1,2,3,4$$

 x_a, y_a \rightarrow coordenadas do centro ajustadas

 r_a \rightarrow raio ajustado

 $x_i^{(a)}, y_i^{(a)}$ \rightarrow valores observados ajustados

n = 8 observações

r = 4 equações

u = 3 parâmetros



b) Modelo linearizado

$$AX + BV + W = 0$$

d) Vetor dos valores observados

$$L_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140,0 \\ 60,0 \\ 165,0 \\ 100,0 \\ 165,0 \\ 150,0 \\ 140,0 \\ 180,0 \end{bmatrix}$$

c) Vetor Solução Inicial

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ r_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix}$$

e) Matriz dos pesos
$$P = \sigma_o^2 * \left(\sum L_b\right)^{-1}$$



f) Vetor Erro de Fechamento $W = F(X_0, L_h)$

$$W = F(X_0, L_b)$$

$$w_i = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - r_0^2$$

$$W = \begin{bmatrix} (140 - 100)^2 + (60 - 120)^2 - 70^2 \\ (165 - 100)^2 + (100 - 120)^2 - 70^2 \\ (165 - 100)^2 + (150 - 120)^2 - 70^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ -275 \\ 225 \\ 300 \end{bmatrix}$$



$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \bigg|_{X_0}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2(x_1 - x_0) & -2(y_1 - y_0) & -2r_0 \\ -2(x_2 - x_0) & -2(y_2 - y_0) & -2r_0 \\ -2(x_3 - x_0) & -2(y_3 - y_0) & -2r_0 \\ -2(x_4 - x_0) & -2(y_4 - y_0) & -2r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 & 120 & -140 \\ -130 & 40 & -140 \\ -130 & -60 & -140 \\ -80 & -120 & -140 \end{bmatrix}$$



h) Matriz B

$$B = \frac{\partial F}{\partial L_a} \bigg|_{L_h}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_0) & 2(x_1 - x_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_2 - x_0) & 2(y_2 - y_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x_3 - x_0) & 2(y_3 - y_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x_4 - x_0) & 2(y_4 - y_0) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 80 & -120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 130 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 130 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 120 \end{bmatrix}$$



i) Matriz M
$$M = BP^{-1}B^T$$

$$M = \begin{bmatrix} 10400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20800 \end{bmatrix}$$

j) Vetor Correções X
$$X = -(A^{T}M^{-1}A)^{-1}A^{T}M^{-1}W$$

$$X = \begin{bmatrix} -6,0854 \\ 0,7927 \\ 5,8467 \end{bmatrix}$$



i) Matriz Parâmetros Ajustados $X_a = X_0 + X$

$$X_a = X_0 + X$$

$$X_a = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6,0854 \\ 0,7927 \\ 5,8467 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93,9146 \\ 120,7927 \\ 75,8467 \end{bmatrix}$$



i) Matriz Parâmetros Ajustados $X_a = X_0 + X$

$$X_a = X_0 + X$$

$$X_a = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6,0854 \\ 0,7927 \\ 5,8467 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93,9146 \\ 120,7927 \\ 75,8467 \end{bmatrix}$$

$$X_a^{(2)} = \begin{bmatrix} 94,0557\\120,7471\\75,7626 \end{bmatrix}$$

$$X_a^{(3)} = \begin{bmatrix} 94,0509 \\ 120,7482 \\ 75,7664 \end{bmatrix}$$

$$X_a^{(4)} = \begin{bmatrix} 94,0510 \\ 120,7482 \\ 75,7663 \end{bmatrix}$$



i) Vetor Lagragianos
$$K = -M^{-1}(AX + W)$$

$$K = \begin{bmatrix} -0,005267\\0,012641\\-0,012641\\0,005267 \end{bmatrix}$$

j) Vetor Resíduos $V = P^{-1}B^TK$

$$V = P^{-1}B^T K$$

$$V = \begin{bmatrix} -0,2420 \\ 0,3200 \\ 1,7937 \\ -0,5245 \\ -0,8968 \\ -0,3698 \\ 0,4840 \\ 0,6242 \end{bmatrix}$$



i) Matriz Observações Ajustadas

$$L_a = L_b + V$$

$$L_a = \begin{bmatrix} 139,7580 \\ 60,3200 \\ 166,7937 \\ 99,4755 \\ 164,1032 \\ 149,6302 \\ 140,4840 \\ 180,6242 \end{bmatrix}$$



Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{r - u} = 6,3204$$

MVC dos parâmetros
$$\sum_{Xa} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T \cdot M^{-1} \cdot A)^{-1}$$

$$\sum_{Xa} = \begin{bmatrix} 43,7990 & -4,0270 & -34,0052 \\ -4,0270 & 3,1811 & 3,2779 \\ -34,0052 & 3,2779 & 27,4629 \end{bmatrix}$$



i) Matriz Parâmetros Ajustados

$$X_a = \begin{bmatrix} -94,0510 \pm 6,6181 \\ 120,7482 \pm 1,7836 \\ 75,7663 \pm 5,2405 \end{bmatrix}$$