UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA

DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO 2 – GA110 A ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA

Prof. Dr. Mario Ernesto Jijón Palma
Departamento de Geomática
Setor de Ciências da Terra
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Ajustamento: Método Paramétrico

$$L_a = F(X_a)$$

Método das observações indiretas

- Os parâmetros buscados não são medidas diretamente

Estão relacionados matematicamente com outras que são medidas.

- ✓ **n** observações, teremos **n** equações.
- ✓ parâmetros a estimar são **u** variáveis.

Ajustamento: Método Paramétrico

Linear

Resolução direta (uma única etapa para encontrar a solução)

Não é necessário uma aproximação inicial

Exemplo: Nivelamento, Poligonais

Não Linear

Para resolver o sistema tem que se linearizar pela fórmula de Taylor.

Resolução Iterativa (requer um processo de repetição para encontrar a solução)

Necessita de uma aproximação inicial para começar o processo iterativo.

Exemplo: Ajustamento de redes geodésicas, fotogrametria, GPS.

Ajustamento: Método Paramétrico

$$L_a = F(X_a)$$

Sejam:

L_b = Vetor dos valores observados;
V = Vetor dos resíduos;
L_a = Vetor dos valores observados ajustados.

$$L_a = L_b + V$$

X_0 = Vetor com valores aproximados dos parâmetros;
X = Vetor correção;
X_a = Vetor dos parâmetros ajustados (um dos objetivos).

$$X_a = X_0 + X$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Linear

$$L_a = F(X_a)$$

$$X = \left(A^T * P * A\right)^{-1} * \left(A^T * P * L_b\right)$$

$$N = \left(A^T * P * A\right)$$

$$U = \left(A^T * P * L_b\right)$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Não Linear

$$L_a = F(X_a)$$

$$L_a = L_b + V$$

$$X_a = X_0 + X$$

O modelo linearizado do método paramétrico

$$_nV_1 = {}_nA_u\, {}_uX_1 + {}_nL_1$$

$$X = -(A^T PA)^{-1}.(A^T PL)$$

$$N = A^T PA \qquad U = A^T PL \quad \rightarrow \quad X = -N^{-1}U$$

cujas componentes convertem os parâmetros aproximados em ajustados:

$$X_a = X_0 + X$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Método paramétrico $\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$

Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Método paramétrico $\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$

Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.

Método dos correlatos $\boldsymbol{F(L_a) = 0}$

Os valores observados ajustados devem satisfazer determinadas condições (erro de fechamento = zero).

Ajustamento: Método Correlatos

$$F(L_a) = 0$$

- Método das **equações de condição** **ou ajustamento de observações diretas condicionadas**

tais condições é traduzido pelo erro de fechamento que deverá ser eliminado no ajustamento

As equações de condição

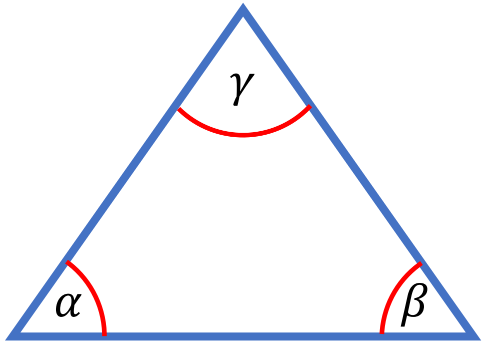
$$\mathbf{r} = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{n}$ ➔ número total de observações

$\boldsymbol{u}$ ➔ número de parâmetros

Ajustamento: Método Correlatos

$$\boldsymbol{F(L_a) = 0}$$



α e β → Não existe relacionamento

α β e δ → Sim existe relacionamento

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

Ajustamento: Método Correlatos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$ → **Condição ou dependência matemática**

O valores observados, depois de ajustados, deverão satisfazer ao modelo matemático

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma - (180° + \varepsilon) = 0} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{F(L_a) = 0}$$

$$\boldsymbol{L_a = L_b + V}$$

L_b = Vetor dos valores observados;
V = Vetor dos resíduos;
L_a = Vetor dos valores observados ajustados.

Ajustamento: Método Correlatos

Então temos que:

$$\boldsymbol{L_a = L_b + V}$$

$$\boldsymbol{F(L_a) = 0}$$

$$F(L_b + V) = 0$$

Aplicando aproximação linear da série de Taylor:

$$F(L_a) = F(L_b + V) \cong F(L_b) + \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b} (L_a - L_b) = 0$$

Erro de fechamento ➔ $W = F(L_b)$ Matriz das derivadas parciais ➔ $B = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b}$

$$\boldsymbol{B \cdot V + W = 0}$$ ⇨ **Modelo matemático linearizado dos correlatos**

Ajustamento: Método Correlatos

$$\underbrace{{}_{r}B_{n} \cdot {}_{n}V_{1} + {}_{r}W_{1} = 0}$$

$$\mathbf{r} = n - u$$

r ➔ equações de condição

n ➔ número total de observações

u ➔ número de parâmetros

Ajustamento: Método Correlatos

Equações normais:

Minimizando a forma quadrática fundamental, temos que:

Técnica Lagrangiana ➔ $\varphi = V^T PV - 2K^T(BV + W) = mínimo$

Sendo $\boldsymbol{K}$ o vetor dos multiplicadores de Lagrange (ou correlatos)

Igualando a zero e derivando em relação a V e K:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial V} = 2PV - 2B^T K = 0 \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial K} = -2(BV + W) = 0$$

$$PV - B^T K = 0 \qquad BV + W = 0$$

onde:

$$_nP_n\, {}_nV_1 - {}_nB_r^T\, {}_rK_1 = 0 \qquad {}_rB_n\, {}_nV_1 + {}_rW_1 = 0$$

Ajustamento: Método Correlatos

$${}_nP_n\,{}_nV_1 - {}_nB_r^T\,{}_rK_1 = 0 \qquad\qquad {}_rB_n\,{}_nV_1 + {}_rW_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} P & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ -K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$PV - B^TK = 0 \quad \rightarrow \quad V = P^{-1} \cdot B^T \cdot K$$

$$BV + W = 0 \quad \rightarrow \quad B(P^{-1}B^TK) + W = 0$$

$$\boldsymbol{K} = -(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^{T})^{-1} \cdot \boldsymbol{W}$$

Fazendo-se $M = B \cdot P^{-1} \cdot B^T$

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{M}^{-1} \cdot \boldsymbol{W}$$

Ajustamento: Método Correlatos

Valores observados ajustados

$$\boldsymbol{L_a = L_b + V} \qquad V = P^{-1} \cdot B^T \cdot K$$

MVC dos valores ajustados

$$\Sigma_{La} = \Sigma_{Lb}(I - B^T \cdot M^{-1} \cdot B \cdot P^{-1})$$

$$\Sigma_{Lb} = \sigma_0^2 \cdot P^{-1}$$

MVC dos Resíduos

$$\Sigma_V = -\sigma_0^2 \cdot P^{-1} \cdot B^T \cdot M^{-1} \cdot B \cdot P^{-1}$$

$$\Sigma_{La} = \Sigma_{Lb} + \Sigma_V$$

Variância da observação a posteriori

$$\boldsymbol{\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{n-u} = \frac{-K^T W}{r}}$$

Ajustamento: Método Correlatos

PASSOS PARA RESOLVER METODO CORRELATOS

a) Modelo Matemático $\boldsymbol{F(L_a) = 0}$ $\boldsymbol{L_a = L_b + V}$

b) Matriz das observações $\boldsymbol{L_b}$

c) Calcular a matriz dos pesos $\boldsymbol{P}$

d) Erro de fechamento $\boldsymbol{W = F(L_b)}$

e) Calcular a matriz B (derivadas parciais) $\boldsymbol{B = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b}}$

f) Calcular as equações normais

$$M = B \cdot P^{-1} \cdot B^T$$

$$\boldsymbol{K = -M^{-1} \cdot W}$$

Ajustamento: Método Correlatos

PASSOS PARA RESOLVER METODO CORRELATOS

g) Obter a Matriz dos resíduos $V = P^{-1} \cdot B^T \cdot K$

h) Encontrar os parâmetros ajustados $\boldsymbol{L_a = L_b + V}$

i) Variância a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$)

$$\boldsymbol{\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{n-u} = \frac{-K^T W}{r}}$$

j) Calcular MVC dos valores observados ajustados

$$\textstyle\sum_{La} = \sum_{Lb} (I - B^T \cdot M^{-1} \cdot B \cdot P^{-1})$$

Ajustamento: Método Correlatos

PASSOS PARA RESOLVER METODO CORRELATOS

a) Modelo Matemático $\boldsymbol{F(L_a) = 0}$ $\boldsymbol{L_a = L_b + V}$

b) Matriz das observações $\boldsymbol{L_b}$

c) Calcular a matriz dos pesos $\boldsymbol{P}$

d) Erro de fechamento $\boldsymbol{W = F(L_b)}$

e) Calcular a matriz B (derivadas parciais) $\boldsymbol{B = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b}}$

f) Calcular as equações normais

$$M = B \cdot P^{-1} \cdot B^T$$

$$\boldsymbol{K = -M^{-1} \cdot W}$$

Com Iterações

$$\boldsymbol{L_i = L_a}$$

$$\boldsymbol{B_i = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b}}$$

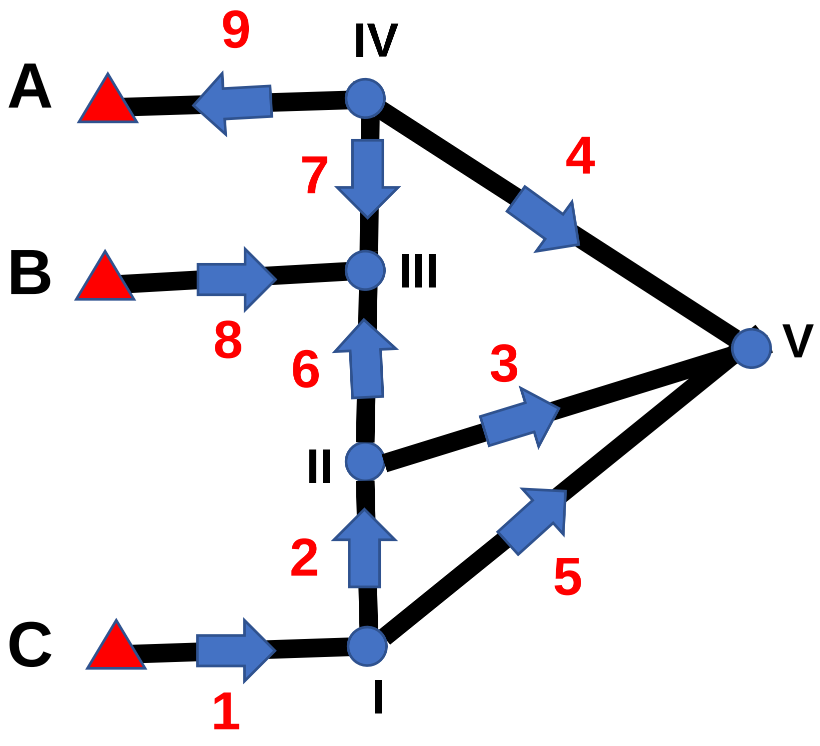
$$\boldsymbol{W_i = B_i(L_b - L_i) + F(L_i)}$$

$$\boldsymbol{M_i \quad K_i \quad V_i}$$

$$\boldsymbol{L_i^a = L_b + V_i}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Ajustamento de uma rede de nivelamento geométrico. Considerar que os pesos inversamente proporcionais ao comprimento das linhas



Linha	Desnível (m)	Distância (Km)
1	10,038	1,14
2	8,297	2,84
3	1,949	3,21
4	5,217	6,03
5	10,244	6,75
6	1,562	0,84
7	4,837	2,94
8	3,370	2,01
9	15,979	5,28

Altitudes conhecidas

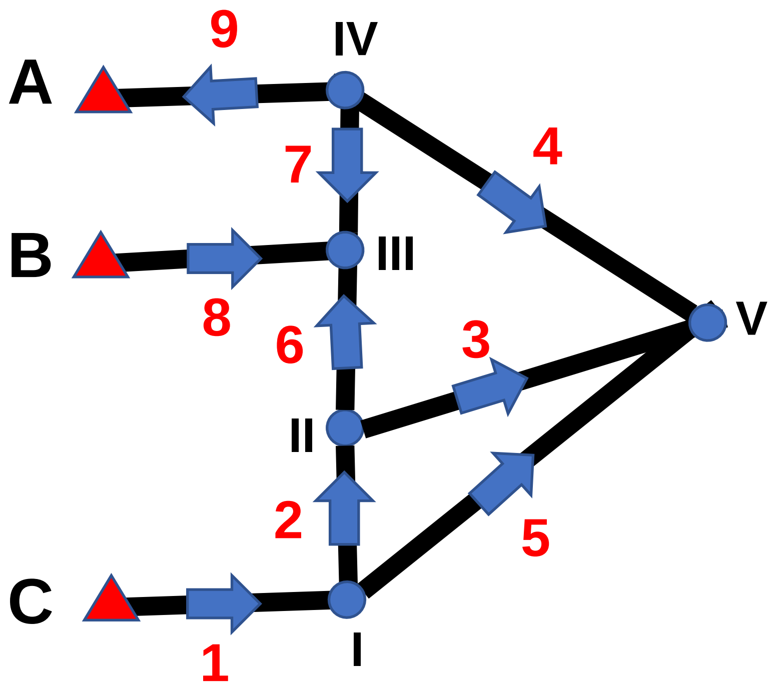
H_A = 33,831m; H_B = 19,316m; H_C = 2,791m

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Equações de condição

Observações (n) = 9 (desníveis medidos)
Parâmetros (u) = 5 (altitudes das cinco estações novas)

Equações de condição = r = 9 - 5 = 4 (graus de liberdade)

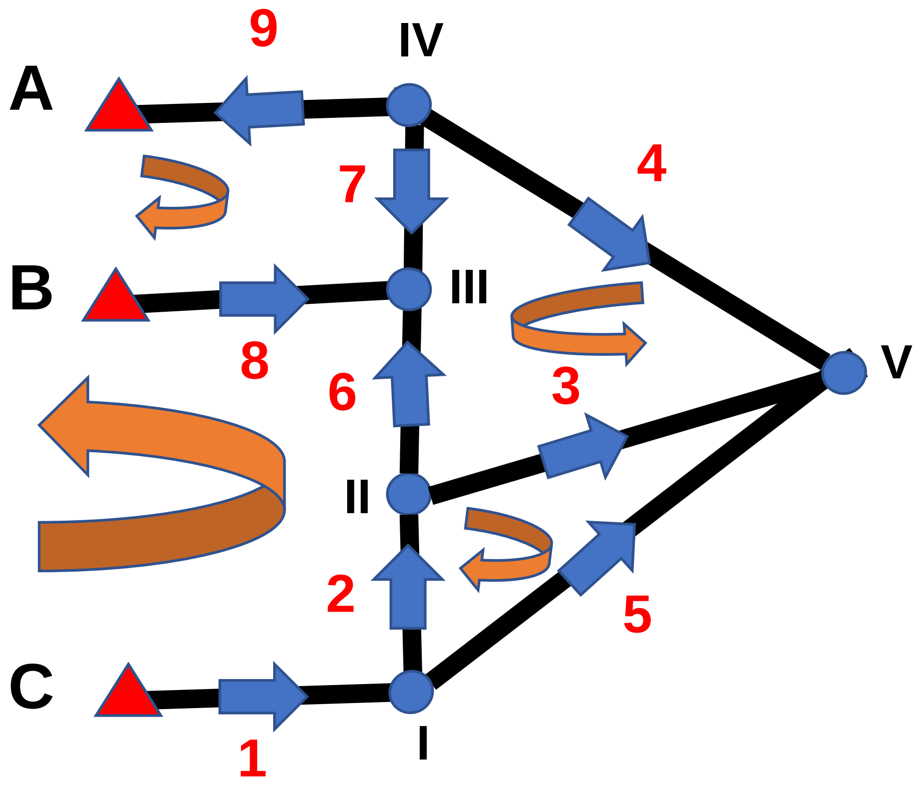


EXERCÍCIOS: Método Correlatos

a) Modelo matemático

Dentre as várias possibilidades temos:

$$\begin{cases} l_{1a} + l_{2a} + l_{6a} - l_{8a} - (h_B - h_C) = 0 \\ -l_{9a} + l_{7a} - l_{8a} - (h_B - h_A) = 0 \\ l_{2a} + l_{3a} - l_{5a} = 0 \\ l_{3a} - l_{4a} + l_{7a} - l_{6a} = 0 \end{cases}$$



EXERCÍCIOS: Método Correlatos

As equações de condição podem ser reescritas, usando-se a primeira equação como exemplo:

$$l_{1a} + l_{2a} + l_{6a} - l_{8a} - (h_B - h_C) = 0$$

$$l_{1b} + v_1 + l_{2b} + v_2 + l_{6b} + v_6 - (l_{8b} + v_8) - (h_B - h_C) = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_6 - v_8 + [l_{1b} + l_{2b} + l_{6b} - l_{8b} - (h_B - h_C)] = 0$$

Logo, fazendo o mesmo com as demais equações, resulta:

BV + W = 0 ➔ $$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_6 - v_8 + w_1 = 0 \\ -v_9 + v_7 - v_8 + w_2 = 0 \\ v_2 + v_3 - v_5 + w_3 = 0 \\ v_3 - v_4 + v_7 - v_6 + w_4 = 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

O modelo sendo linear, os coeficientes dos resíduos já representam as derivadas parciais, resultando:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_6 - v_8 + w_1 = 0 & \textbf{Equação 1} \\ -v_9 + v_7 - v_8 + w_2 = 0 & \textbf{Equação 2} \\ v_2 + v_3 - v_5 + w_3 = 0 & \textbf{Equação 3} \\ v_3 - v_4 + v_7 - v_6 + w_4 = 0 & \textbf{Equação 4} \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} \textbf{Resíduos} \rightarrow & \begin{array}{ccccccccc} \textbf{1} & \textbf{2} & \textbf{3} & \textbf{4} & \textbf{5} & \textbf{6} & \textbf{7} & \textbf{8} & \textbf{9} \end{array} \\ \mathrm{B} = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Matriz dos pesos

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1,14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,84 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,94 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,28 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Vetor Erro de Fechamento

$$W = F(L_b) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1b} + l_{2b} + l_{6b} - l_{8b} - (h_B - h_C) \\ -l_{9b} + l_{7b} - l_{8b} - (h_B - h_A) \\ l_{2b} + l_{3b} - l_{5b} \\ l_{3b} - l_{4b} + l_{7b} - l_{6b} \end{bmatrix}$$

$$W = F(L_b) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}038 + 8{,}297 + 1{,}562 - 3{,}370 - (19{,}316 - 2{,}979) \\ -15{,}979 + 4{,}837 - 3{,}379 - (19{,}316 - 33{,}831) \\ 8{,}297 + 1{,}949 - 10{,}244 \\ 1{,}949 - 5{,}217 + 4{,}837 - 1{,}562 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}002 \\ 0{,}003 \\ 0{,}002 \\ 0{,}007 \end{bmatrix} (m)$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 6,8300 & 2,0100 & 2,8400 & -0,8400 \\ 2,0100 & 10,2300 & 0 & 2,9400 \\ 2,8400 & 0 & 12,8000 & 3,2100 \\ -0,8400 & 2,9400 & 3,2100 & 13,0200 \end{bmatrix}$$

$$K = -M^{-1}W = \begin{bmatrix} -3,7414 \\ -0,5714 \\ 0,6865 \\ -5,6580 \end{bmatrix} * 10^{-4}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Vetor dos Resíduos

$$V = P^{-1}B^{T}K = \begin{bmatrix} -0{,}4265 \\ -0{,}8676 \\ -1{,}5958 \\ 3{,}4118 \\ -0{,}4634 \\ 0{,}1610 \\ -1{,}8314 \\ 0{,}8669 \\ 0{,}3017 \end{bmatrix} * 10^{-3}\ (m)$$

Desníveis ajustados

$$L_a = L_b + V = \begin{bmatrix} 10{,}0376 \\ 8{,}2961 \\ 1{,}9474 \\ 5{,}2204 \\ 10{,}2435 \\ 1{,}5622 \\ 4{,}8352 \\ 3{,}3709 \\ 15{,}9793 \end{bmatrix} (m)$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} = \frac{-K^T W}{n - u}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} = \frac{4{,}7430 * 10^{-6}}{9 - 5} = \mathbf{1{,}1857 \ * 10^{-6}}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{-K^T W}{n - u} = \frac{4{,}7430 * 10^{-6}}{9 - 5} = \mathbf{1{,}1857 \ * 10^{-6}}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

MVC dos valores observados ajustados

$$\sum_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1}(I - B^T M^{-1} B P^{-1})$$

$$\sum_{L_a} = \begin{bmatrix} 1.0667 & -0.5192 & 0.0654 & 0.2824 & -0.4538 & -0.1707 & 0.0463 & 0.3768 & -0.3305 \\ -0.5192 & 1.6217 & -0.5467 & 0.0666 & 1.0750 & -0.3733 & 0.2400 & 0.7292 & -0.4892 \\ 0.0654 & -0.5467 & 2.2335 & 1.4475 & 1.6868 & 0.2499 & -0.5361 & -0.2314 & -0.3047 \\ 0.2824 & 0.0666 & 1.4475 & 3.0782 & 1.5141 & -0.3591 & 1.2716 & -0.0101 & 1.2817 \\ -0.4538 & 1.0750 & 1.6868 & 1.5141 & 2.7618 & -0.1234 & -0.2961 & 0.4978 & -0.7940 \\ -0.1707 & -0.3733 & 0.2499 & -0.3591 & -0.1234 & 0.8202 & 0.2113 & 0.2762 & -0.0650 \\ 0.0463 & 0.2400 & -0.5361 & 1.2716 & -0.2961 & 0.2113 & 2.0189 & 0.4975 & 1.5214 \\ 0.3768 & 0.7292 & -0.2314 & -0.0101 & 0.4978 & 0.2762 & 0.4975 & 1.3822 & -0.8847 \\ -0.3305 & -0.4892 & -0.3047 & 1.2817 & -0.7940 & -0.0650 & 1.5214 & -0.8847 & 2.4061 \end{bmatrix} * 10^{-6}$$

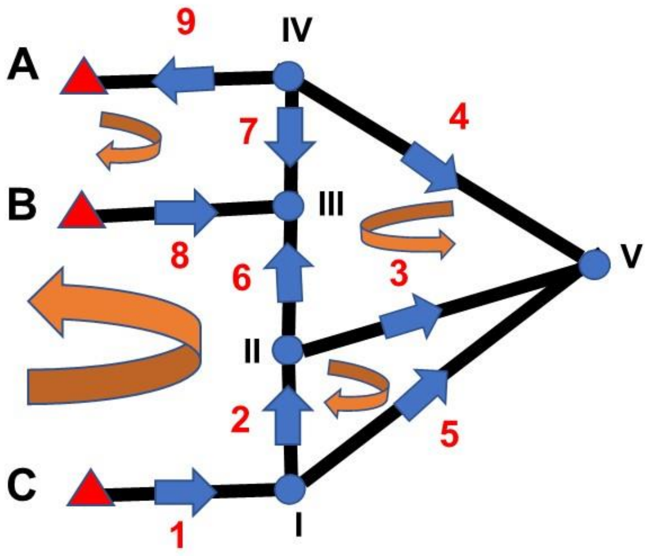
EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Altitudes

$$h_I = h_C + l_{1a} = 2{,}791 + 10{,}0376 = 12{,}8286 \pm 0{,}0010$$

$$h_{II} = h_C + l_{1a} + l_{2a} = 2{,}791 + 10{,}0376 + 8{,}2961 = 21{,}1247$$

$$\sum_{h_{II}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1{,}0667 & -0{,}5192 \\ -0{,}5192 & 1{,}6217 \end{bmatrix} * 10^{-6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1{,}6500 * 10^{-6}$$



EXERCÍCIOS: Método Correlatos

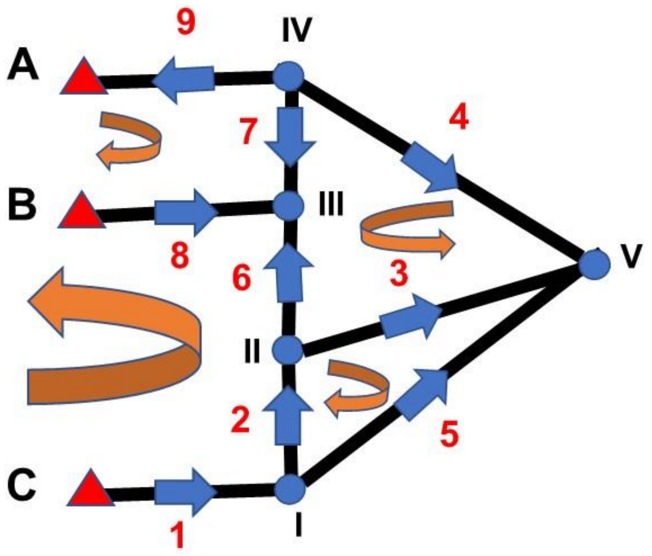
Altitudes

$$h_I = h_C + l_{1a} = \ 2{,}791 + 10{,}0376 = 12{,}8286 \pm 0{,}0010$$

$$h_{II} = h_C + l_{1a} + l_{2a} = \quad 2{,}791 + 10{,}0376 + 8{,}2961 = 21{,}1247$$

$$\sum\nolimits_{h_{II}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1{,}0667 & -0{,}5192 \\ -0{,}5192 & 1{,}6217 \end{bmatrix} * 10^{-6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1{,}6500 * 10^{-6}$$

$$h_{II} = 21{,}124 \pm 0{,}0013$$



EXERCÍCIOS: Método Correlatos

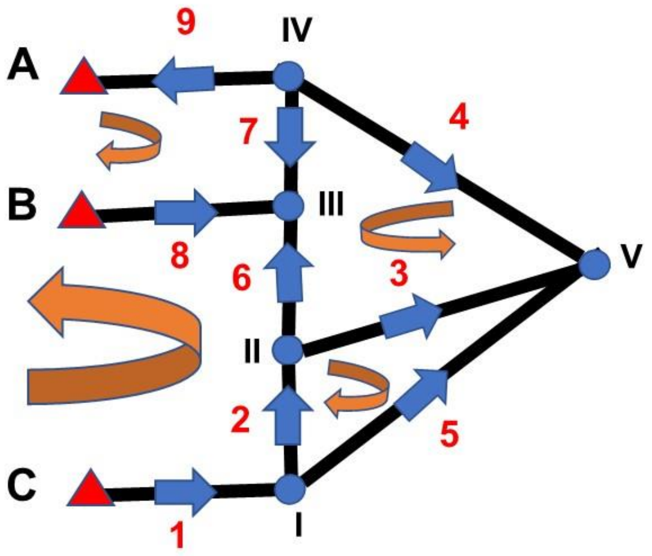
Altitudes

$$h_I = h_C + l_{1a} = \ 2{,}791 + 10{,}0376 = 12{,}8286 \pm 0{,}0010$$

$$h_{II} = h_C + l_{1a} + l_{2a} = \quad 2{,}791 + 10{,}0376 + 8{,}2961 = 21{,}1247$$

$$h_{II} = 21{,}124 \pm 0{,}0013$$

$$h_{III} = h_B + l_{8a} =$$



EXERCÍCIOS: Método Correlatos

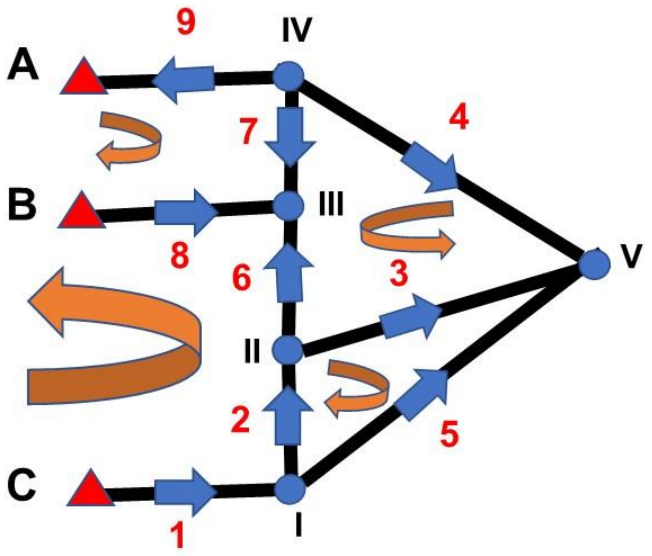
Altitudes

$$h_I = h_C + l_{1a} = 2{,}791 + 10{,}0376 = 12{,}8286 \pm 0{,}0010$$

$$h_{II} = h_C + l_{1a} + l_{2a} = 2{,}791 + 10{,}0376 + 8{,}2961 = 21{,}1247$$

$$h_{II} = 21{,}124 \pm 0{,}0013$$

$$h_{III} = h_B + l_{8a} = 19{,}316 + 3{,}3709 = 22{,}6869 \pm 0{,}0012$$



EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Altitudes

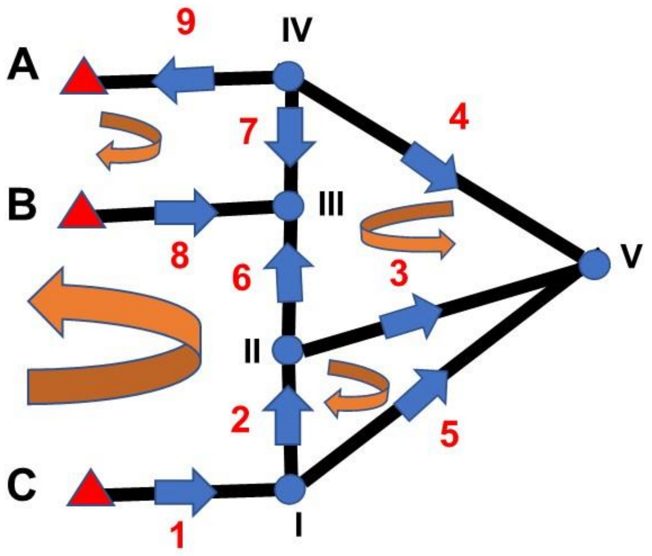
$$h_I = h_C + l_{1a} = 2{,}791 + 10{,}0376 = 12{,}8286 \pm 0{,}0010$$

$$h_{II} = h_C + l_{1a} + l_{2a} = 2{,}791 + 10{,}0376 + 8{,}2961 = 21{,}1247$$

$$h_{II} = 21{,}124 \pm 0{,}0013$$

$$h_{III} = h_B + l_{8a} = 19{,}316 + 3{,}3709 = 22{,}6869 \pm 0{,}0012$$

$$h_{IV} = h_A - l_{9a} =$$



EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Altitudes

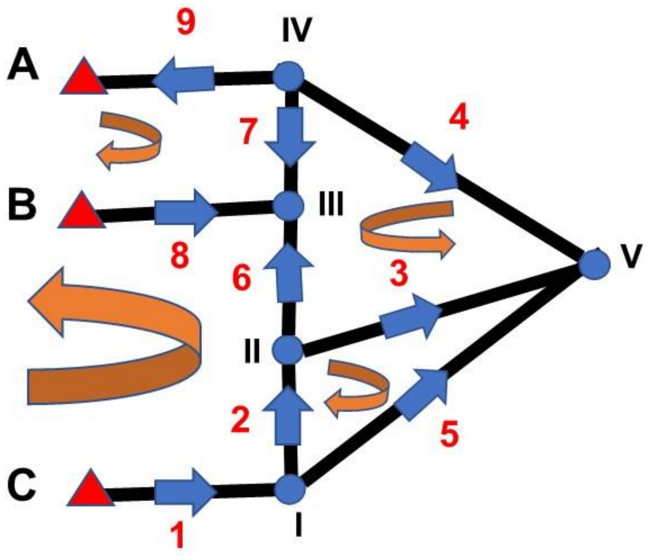
$$h_I = h_C + l_{1a} = \; 2{,}791 + 10{,}0376 = 12{,}8286 \pm 0{,}0010$$

$$h_{II} = h_C + l_{1a} + l_{2a} = \quad 2{,}791 + 10{,}0376 + 8{,}2961 = 21{,}1247$$

$$h_{II} = 21{,}124 \pm 0{,}0013$$

$$h_{III} = h_B + l_{8a} = 19{,}316 + 3{,}3709 = 22{,}6869 \pm 0{,}0012$$

$$h_{IV} = h_A - l_{9a} = \quad 33{,}831 - 15{,}9793 = 17{,}8517 \pm 0{,}0016$$



EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Altitudes

$$h_I = h_C + l_{1a} = \ 2,791 + 10,0376 = 12,8286 \pm 0,0010$$

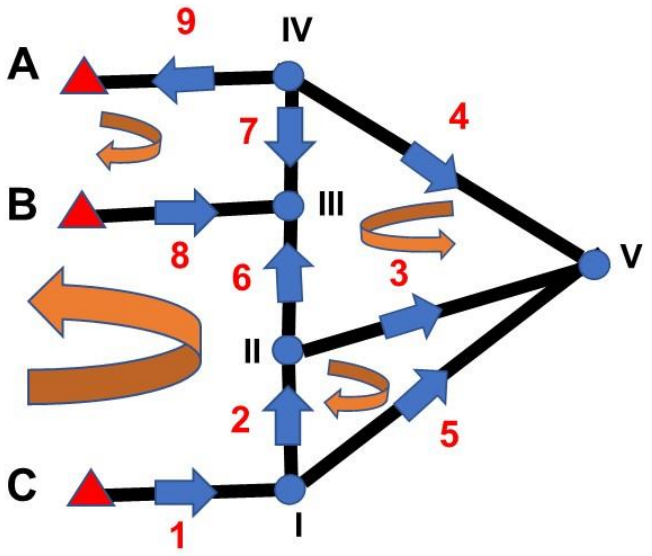
$$h_{II} = h_C + l_{1a} + l_{2a} = \quad 2,791 + 10,0376 + 8,2961 = 21,1247$$

$$h_{II} = 21,124 \pm 0,0013$$

$$h_{III} = h_B + l_{8a} = 19,316 + 3,3709 = 22,6869 \pm 0,0012$$

$$h_{IV} = h_A - l_{9a} = \quad 33,831 - 15,9793 = 17,8517 \pm 0,0016$$

$$h_V = h_A - l_{9a} + l_{4a} =$$



EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Altitudes

$$h_I = h_C + l_{1a} = 2{,}791 + 10{,}0376 = 12{,}8286 \pm 0{,}0010$$

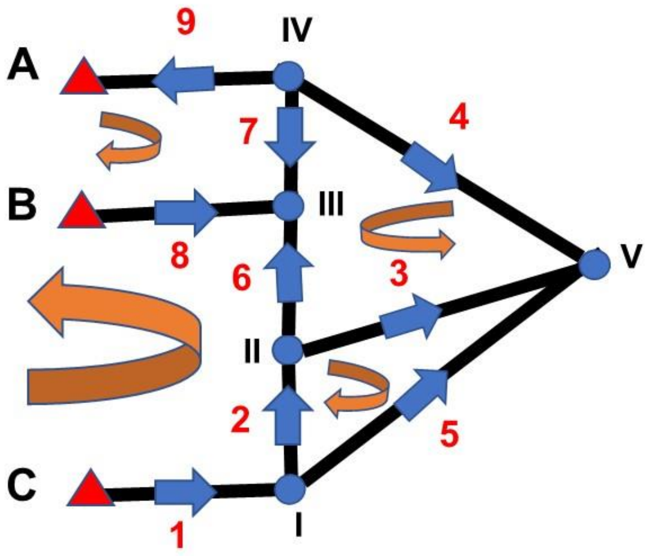
$$h_{II} = h_C + l_{1a} + l_{2a} = 2{,}791 + 10{,}0376 + 8{,}2961 = 21{,}1247$$

$$h_{II} = 21{,}124 \pm 0{,}0013$$

$$h_{III} = h_B + l_{8a} = 19{,}316 + 3{,}3709 = 22{,}6869 \pm 0{,}0012$$

$$h_{IV} = h_A - l_{9a} = 33{,}831 - 15{,}9793 = 17{,}8517 \pm 0{,}0016$$

$$h_V = h_A - l_{9a} + l_{4a} = 33{,}831 - 15{,}9793 + 5{,}2204 = 23{,}0721$$



EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Altitudes

$$h_I = h_C + l_{1a} = \ 2{,}791 + 10{,}0376 = 12{,}8286 \pm 0{,}0010$$

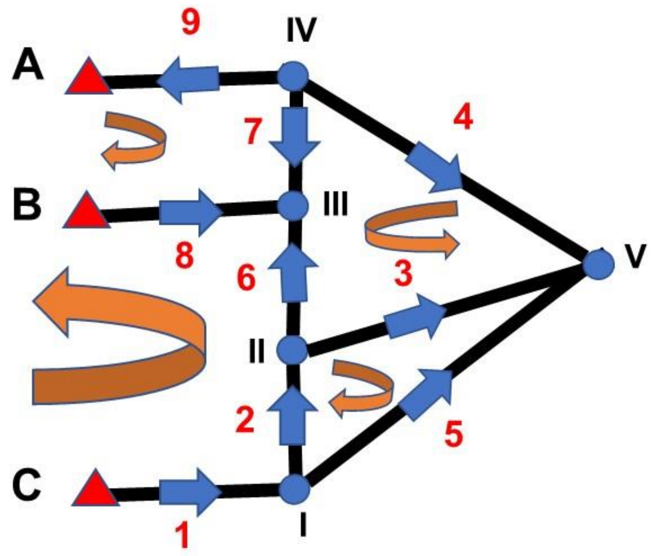
$$h_{II} = h_C + l_{1a} + l_{2a} = \quad 2{,}791 + 10{,}0376 + 8{,}2961 = 21{,}1247$$

$$h_{II} = 21{,}124 \pm 0{,}0013$$

$$h_{III} = h_B + l_{8a} = 19{,}316 + 3{,}3709 = 22{,}6869 \pm 0{,}0012$$

$$h_{IV} = h_A - l_{9a} = \quad 33{,}831 - 15{,}9793 = 17{,}8517 \pm 0{,}0016$$

$$h_V = h_A - l_{9a} + l_{4a} = \ 33{,}831 - 15{,}9793 + 5{,}2204 = 23{,}0721$$



$$\sum_{h_V} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3{,}0782 & 1{,}2817 \\ 1{,}2817 & 2{,}4061 \end{bmatrix} * 10^{-6} * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2{,}9210 * 10^{-6}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Altitudes

$$\boldsymbol{h_I} = h_C + l_{1a} = 2{,}791 + 10{,}0376 = \mathbf{12{,}8286 \pm 0{,}0010}$$

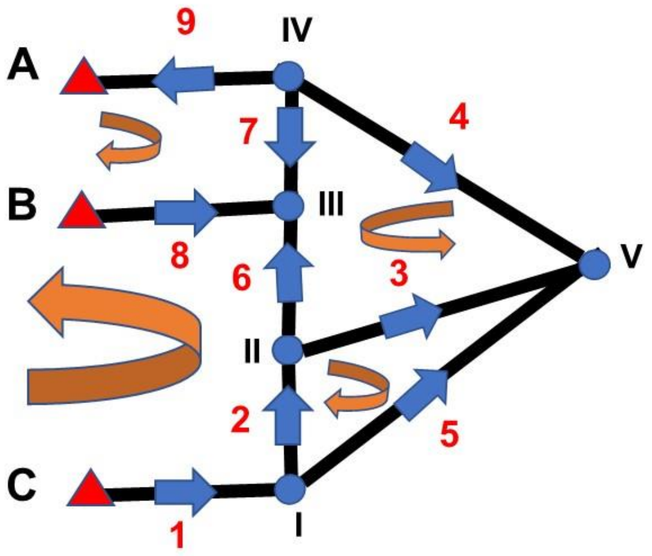
$$\boldsymbol{h_{II}} = h_C + l_{1a} + l_{2a} = 2{,}791 + 10{,}0376 + 8{,}2961 = 21{,}1247$$

$$\boldsymbol{h_{II}} = \mathbf{21{,}124 \pm 0{,}0013}$$

$$\boldsymbol{h_{III}} = h_B + l_{8a} = 19{,}316 + 3{,}3709 = \mathbf{22{,}6869 \pm 0{,}0012}$$

$$\boldsymbol{h_{IV}} = h_A - l_{9a} = 33{,}831 - 15{,}9793 = \mathbf{17{,}8517 \pm 0{,}0016}$$

$$\boldsymbol{h_V} = h_A - l_{9a} + l_{4a} = 33{,}831 - 15{,}9793 + 5{,}2204 = \mathbf{23{,}0721 \pm 0{,}0017}$$

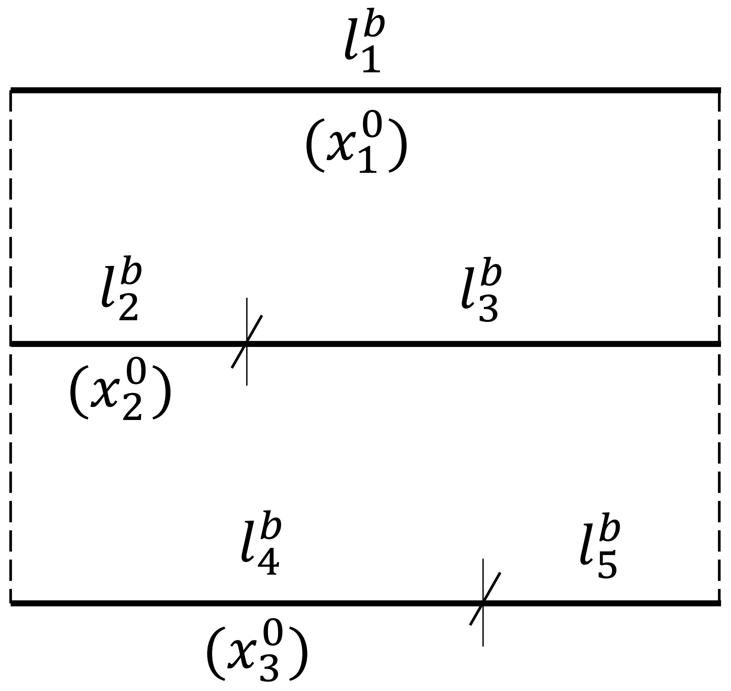


EXERCÍCIOS: Método Correlatos

A medida de uma pequena base conduziu ao valor: $l_{1b} = 201{,}71m$

Numa segunda experiência, a base foi decomposta em duas e ambas medidas com o seguinte resultado: $l_2^b = 75{,}81m$; $l_3^b = 125{,}22m$

Na terceira experiência, idêntica à segunda, obteve-se: $l_4^b = 100{,}03m$; $l_5^b = 100{,}76m$

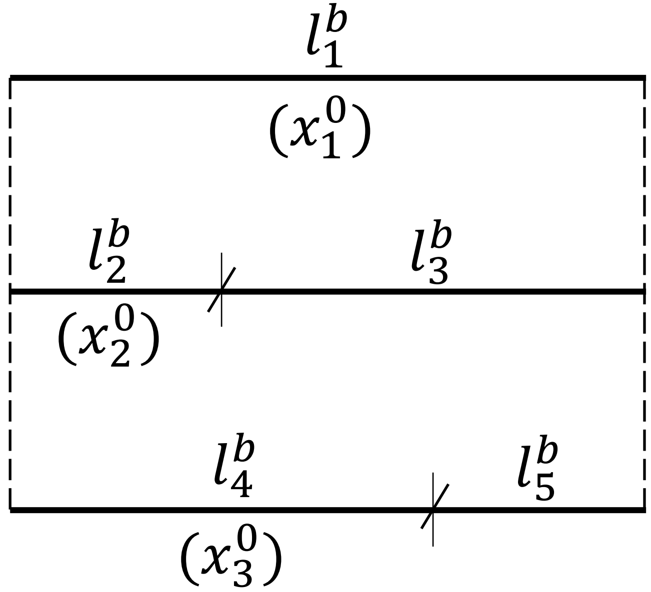


Calcular: $\boldsymbol{x_1^a}$, $\boldsymbol{x_2^a}$ e $\boldsymbol{x_3^a}$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Equações de condição

Observações (n) = 5 (distâncias medidas)
Parâmetros (u) = 3 (comprimentos total)



Equações de condição = r = 5 - 3 = 2 (graus de liberdade)

$$\left.\begin{aligned} l_1^a &= l_2^a + l_3^a \\ l_1^a &= l_4^a + l_5^a \end{aligned}\right\} F(L_a) = 0$$

As equações de condição podem ser reescritas, usando-se a primeira equação como exemplo:

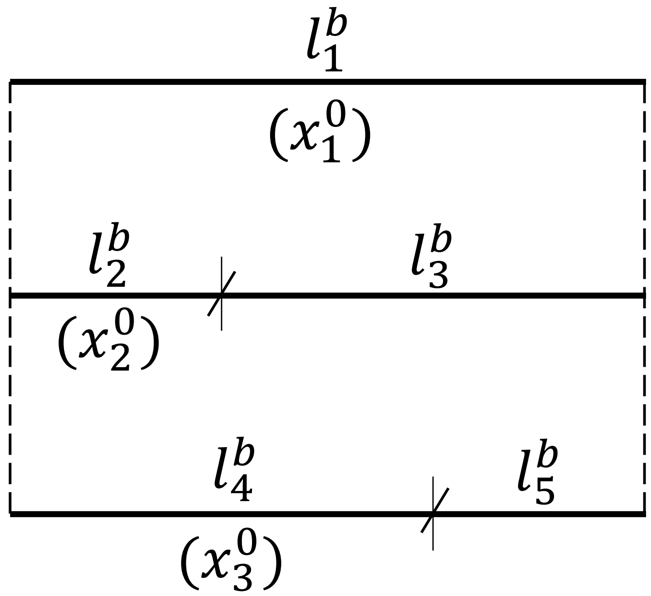
$$l_1^b + v_1 - l_2^b - v_2 - l_3^b - v_3 = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 - v_3 + [l_1^b - l_2^b - l_3^b] = 0$$

$$l_1^b + v_1 - l_4^b - v_4 - l_5^b - v_5 = 0 \Rightarrow v_1 - v_4 - v_5 + [l_1^b - l_4^b - l_5^b] = 0$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

$v_1 - v_2 - v_3 + w_1 = 0$ → **Equação 1**

$v_1 - v_4 - v_5 + w_2 = 0$ → **Equação 2**



$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^b - l_2^b - l_3^b \\ l_1^b - l_4^b - l_5^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}68 \\ 0{,}92 \end{bmatrix}$$

O modelo sendo linear, os coeficientes dos resíduos já representam as derivadas parciais, resultando:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Matriz dos pesos

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^{T} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K = -M^{-1}W = \begin{bmatrix} -0{,}14 \\ -0{,}26 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Vetor dos Resíduos

$$V = P^{-1}B^{T}K = \begin{bmatrix} -0{,}40 \\ 0{,}14 \\ 0{,}14 \\ 0{,}26 \\ 0{,}26 \end{bmatrix}$$

Observações ajustadas

$$L_a = L_b + V = \begin{bmatrix} 201{,}31 \\ 75{,}95 \\ 125{,}36 \\ 100{,}29 \\ 101{,}02 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n-u} = \frac{-K^T W}{n-u}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n-u} = \frac{4{,}7430 * 10^{-6}}{9-5} = \mathbf{0{,}1672}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{-K^T W}{n-u} = \frac{4{,}7430 * 10^{-6}}{9-5} = \mathbf{0{,}1672}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

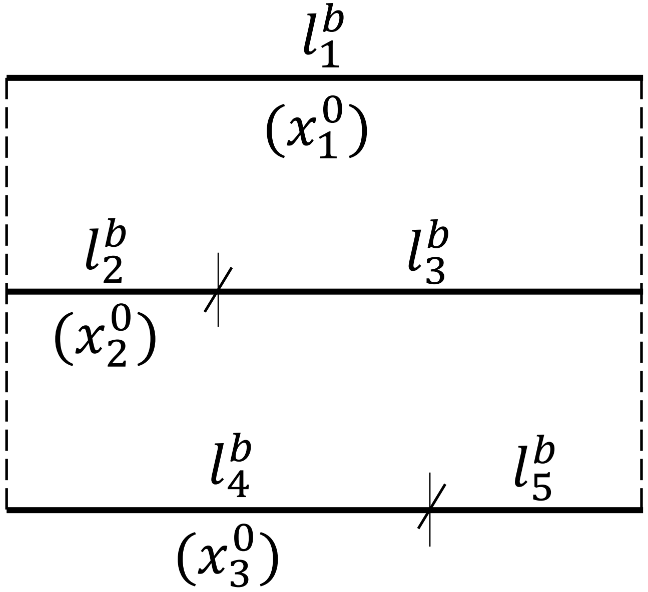
MVC dos valores observados ajustados

$$\sum_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1}(I - B^T M^{-1} B P^{-1})$$

$$\sum_{L_a} = \begin{bmatrix} 0{,}0836 & 0{,}0418 & 0{,}0418 & 0{,}0418 & 0{,}0418 \\ 0{,}0418 & 0{,}1045 & -0{,}0627 & 0{,}0209 & 0{,}0209 \\ 0{,}0418 & -0{,}0627 & 0{,}1045 & 0{,}0209 & 0{,}0209 \\ 0{,}0418 & 0{,}0209 & 0{,}0209 & 0{,}1045 & -0{,}0627 \\ 0{,}0418 & 0{,}0209 & 0{,}0209 & -0{,}0627 & 0{,}1045 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Valores de $\boldsymbol{x_1^a},\ \boldsymbol{x_2^a}\ e\ \boldsymbol{x_3^a}$



$$\boldsymbol{x_1^a = l_1^a}$$

$$\boldsymbol{x_1^a = 201,31}$$

$$\boldsymbol{x_2^a = l_1^a - l_1^a}$$

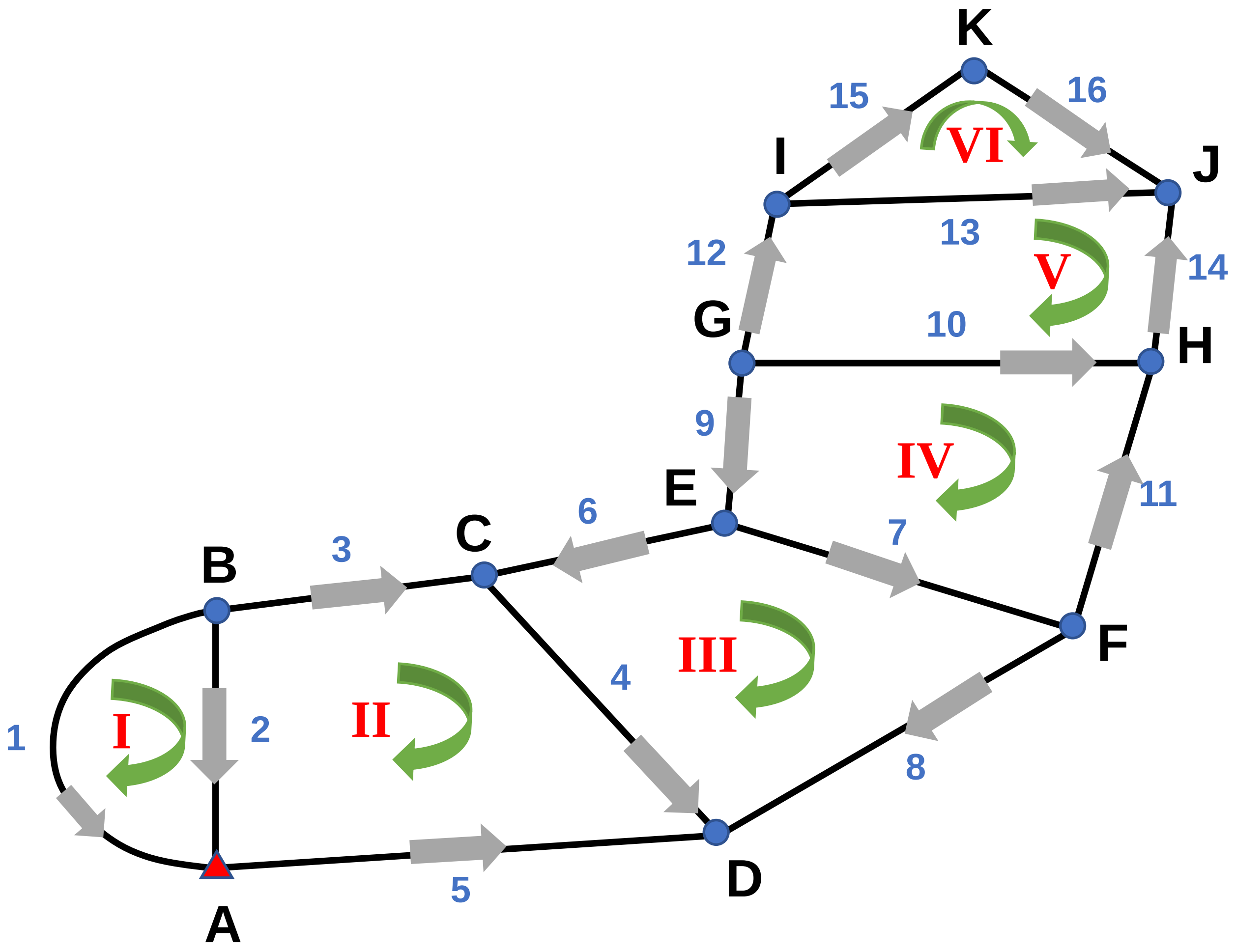
$$\boldsymbol{x_2^a = 75,95}$$

$$\boldsymbol{x_3^a = l_1^a - l_5^a}$$

$$\boldsymbol{x_3^a = 100,29}$$

EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Ajustar a rede vertical (nivelamento geométrico) mostrada no esquema e no quadro que se seguem.
Obs.: Usar pesos inversamente proporcionais ao comprimento das linhas. Sabendo H_A é nula



EXERCÍCIOS: Método Correlatos

Tabela com os dados levantados

LINHA		DESNÍVEL (m)	COMP. (km)
N°	PONTOS		
01	B-A	106,2625	72
02	B-A	106,2602	40
03	B-C	175,9286	44
04	C-D	4,0472	20
05	A-D	73,6905	61
06	E-C	36,3277	26
07	E-F	29,9320	59
08	F-D	10,4241	60

LINHA		DESNÍVEL (m)	COMP. (km)
N°	PONTOS		
09	G-E	138,6889	83
10	G-H	181,0665	26
11	F-H	12,4700	74
12	G-I	162,2300	248
13	I-J	23,8215	111
14	H-J	5,0135	67
15	I-K	22,8896	108
16	K-J	0,9243	147