Distribuição de probabilidade de uma v.a. contínua

Seja X uma v.a. contínua.

A probabilidade “pontual” associada à variável discreta é substituída pela densidade de probabilidade $\varphi(x)$ relativa a um **intervalo infinitésimo**.

$$\boldsymbol{\varphi(x)dx = P(x \leq X \leq x + dx)}$$

Tal que:

- $\varphi(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)\, dx$

Exercício

Uma variável aleatória contínua X, que pode assumir somente valores compreendidos entre 2 e 8, inclusive, tem uma função de densidade de probabilidade dada por $a * (X + 3)$, em que a é uma constante.

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx$$

a) Calcular o valor de a;

b) Determinar $P(3 < X < 5)$

c) Determinar $P(X \geq 4)$

d) Determinar $P(|X - 5| < 0{,}5)$

Exercício

Uma variável aleatória contínua X, que pode assumir somente valores compreendidos entre 2 e 8, inclusive, tem uma função de densidade de probabilidade dada por $a * (X + 3)$, em que a é uma constante.

$$\int a.(X+3).dx = a\int (X+3).dx = a\int (X).dx + \int 3\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{para } n \neq -1. \qquad \int a\,dx = ax.$$

$$= a\left(\frac{X^2}{2} + 3X\right)$$

Exercício

Uma variável aleatória contínua X, que pode assumir somente valores compreendidos entre 2 e 8, inclusive, tem uma função de densidade de probabilidade dada por $a * (X + 3)$, em que a é uma constante.

$$\int a.(X+3).dx = a\int (X+3).dx = a\int (X).dx + \int 3\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{para } n \neq -1. \qquad \int a\,dx = ax.$$

$$P(2 \leq X \leq 8) = \int_2^8 a.(X+3).dx = a\left(\frac{X^2}{2} + 3X\right)\Big|_8 - a\left(\frac{X^2}{2} + 3X\right)\Big|_2 = 1$$

Exercício

a) Calcular o valor de a;

$$P(2 \leq X \leq 8) = \int_{2}^{8} a.(X+3).dx = a\left(\frac{X^2}{2} + 3X\right)\Bigg|_8 - a\left(\frac{X^2}{2} + 3X\right)\Bigg|_2 = 1$$

$$a\left(\frac{8^2}{2} + 3(8)\right) - a\left(\frac{2^2}{2} + 3(2)\right) = 1$$

$$56a - 8a = 1$$

$$a = \frac{1}{48}$$

Pois entre 2 e 8 compreende 100% das probabilidades da v.a. X ocorrer.

Exercício

b) Determinar $P(3 < X < \ 5\ )$

$$P(3 < X < 5) = 1 - \int_{2}^{3} a.(X+3).dx - \int_{5}^{8} a.(X+3).dx$$

$$P(3 < X < 5) = 1 - a\left(\frac{X^2}{2} + 3X\right)\Big|_3 - a\left(\frac{X^2}{2} + 3X\right)\Big|_2 - a\left(\frac{X^2}{2} + 3X\right)\Big|_8 - a\left(\frac{X^2}{2} + 3X\right)\Big|_5$$

$$P(3 < X < 5) = 1 - \left[\frac{1}{48}\left(\frac{3^2}{2} + 3(3)\right) - \frac{1}{48}\left(\frac{2^2}{2} + 3(2)\right)\right] - \left[\frac{1}{48}\left(\frac{8^2}{2} + 3(8)\right) - \frac{1}{48}\left(\frac{5^2}{2} + 3(5)\right)\right]$$

$$P(3 < X < 5) = 1 - \ 0{,}114583 - \ 0{,}593750$$

$$P(3 < X < 5) \ = \ 0{,}291667 = 29{,}17\%$$

Exercício

c) Determinar $P(X \geq 4)$

$$P(X \geq 4) = \int_{4}^{8} a.(X+3).dx$$

$$= \frac{1}{48}\left(\frac{8^2}{2} + 3(8)\right) - \frac{1}{48}\left(\frac{4^2}{2} + 3(4)\right)$$

$$= 1{,}166667 – 0{,}416667$$

$$P(X \geq 4) = 0{,}750000 = 75\%$$

Exercício

d) Determinar $P(|X - 5| < 0{,}5)$

Reescrever por intervalo:

$$P(|X - 5| < 0{,}5) = P(4{,}5 < X < 5{,}5)$$

$$P(|X - 5| < 0{,}5) = P(4{,}5 < X < 5{,}5) = 1 - \int_{2}^{4{,}5} a.(X+3).dx - \int_{5{,}5}^{8} a.(X+3).dx$$

$$P(|X - 5| < 0{,}5) = 1 - (0{,}492188 - 0{,}166667) - (1{,}166667 - 0{,}658854)$$

$$P(|X - 5| < 0{,}5) = 0{,}166667 = 16{,}67\%$$

Exercício

d) Determinar $P(|X-5|<0{,}5)$

Reescrever por intervalo:

$$P(|X-5|<0{,}5)=P(4{,}5<X<5{,}5)$$

$$P(|X-5|<0{,}5)=P(4{,}5<X<5{,}5)=1-\int_{2}^{4{,}5} a.(X+3).dx-\int_{5{,}5}^{8} a.(X+3).dx$$

$$P(4{,}5<X<5{,}5)=1-\left[\frac{1}{48}\left(\frac{4{,}5^2}{2}+3(4{,}5)\right)-\frac{1}{48}\left(\frac{2^2}{2}+3(2)\right)\right]-\left[\frac{1}{48}\left(\frac{8^2}{2}+3(8)\right)-\frac{1}{48}\left(\frac{5{,}5^2}{2}+3(5{,}5)\right)\right]$$

$$P(|X-5|<0{,}5)=1-(0{,}492188-0{,}166667)-(1{,}166667-0{,}658854)$$

$$P(|X-5|<0{,}5)=0{,}166667=16{,}67\%$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA

DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

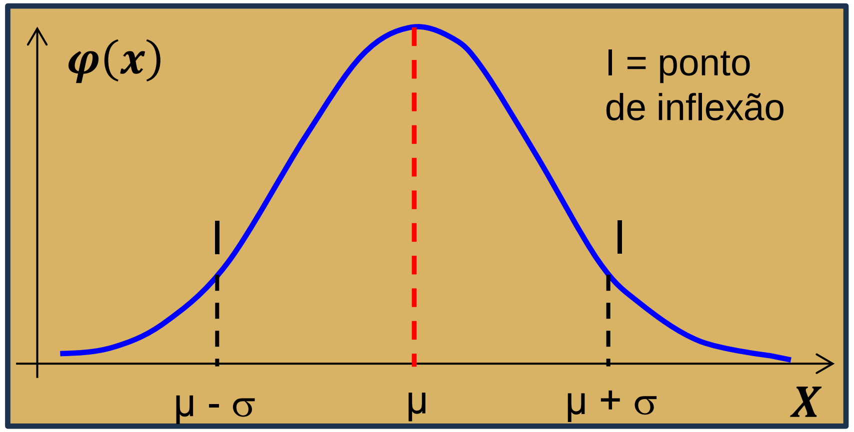
AJUSTAMENTO 1 – GA106 A ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA

Prof. Dr. Mario Ernesto Jijón Palma
Departamento de Geomática
Setor de Ciências da Terra
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Recordando...

Função de Distribuição Normal → Curva Normal de Gauss

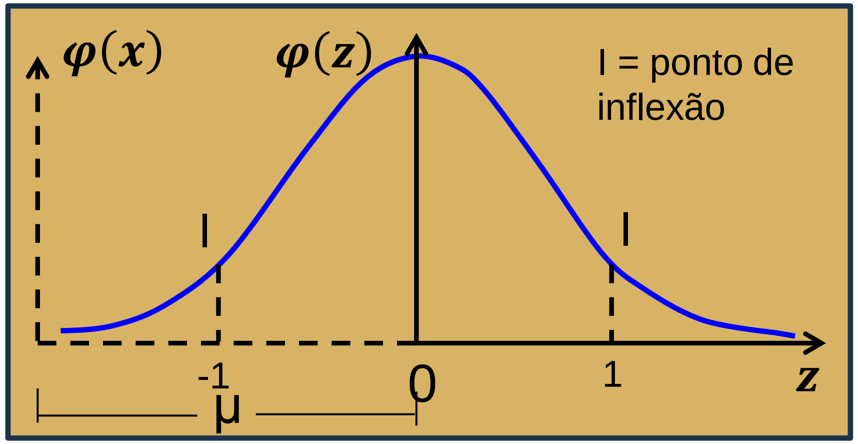
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Tabelas estatísticas, usa-se a variável x reduzida:

$N(0;1)$ → média 0 e desvio padrão 1

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



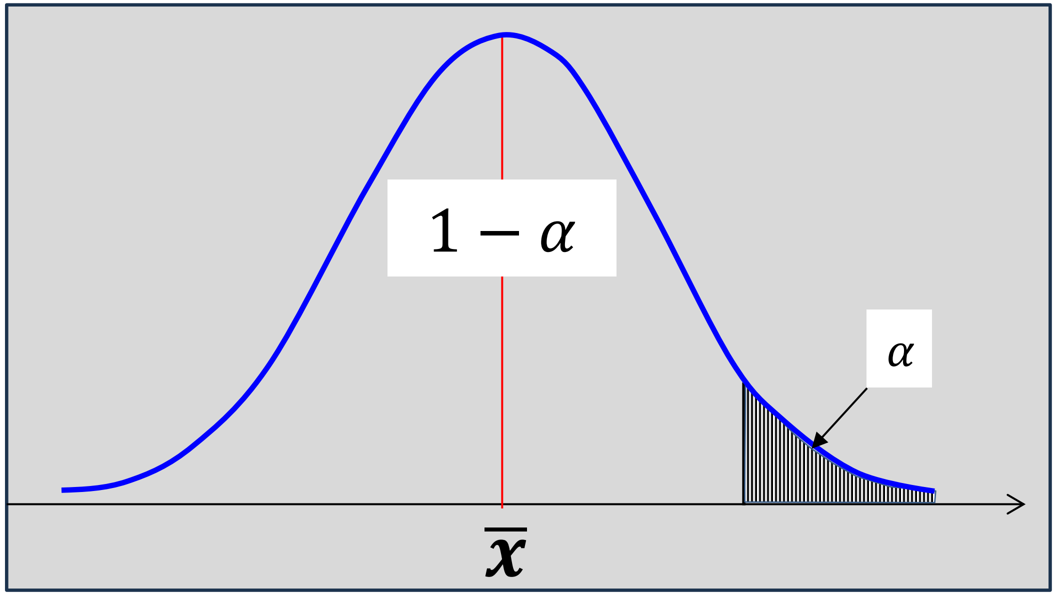
Distribuições

Tais funções de distribuição são utilizadas para avaliar estatisticamente os dados.

Nestes testes, surgem os conceitos de:

O nível de significância é representado pela letra grega α (usualmente expresso em porcentagem $\alpha * 100\%$). Indica a **probabilidade de erro**

O **nível de confiança** é o complemento do nível de significância $(1-\alpha)$, expresso em porcentagem $(1-\alpha) * 100\%$, e indica a **probabilidade de certeza** nas inferências estatísticas



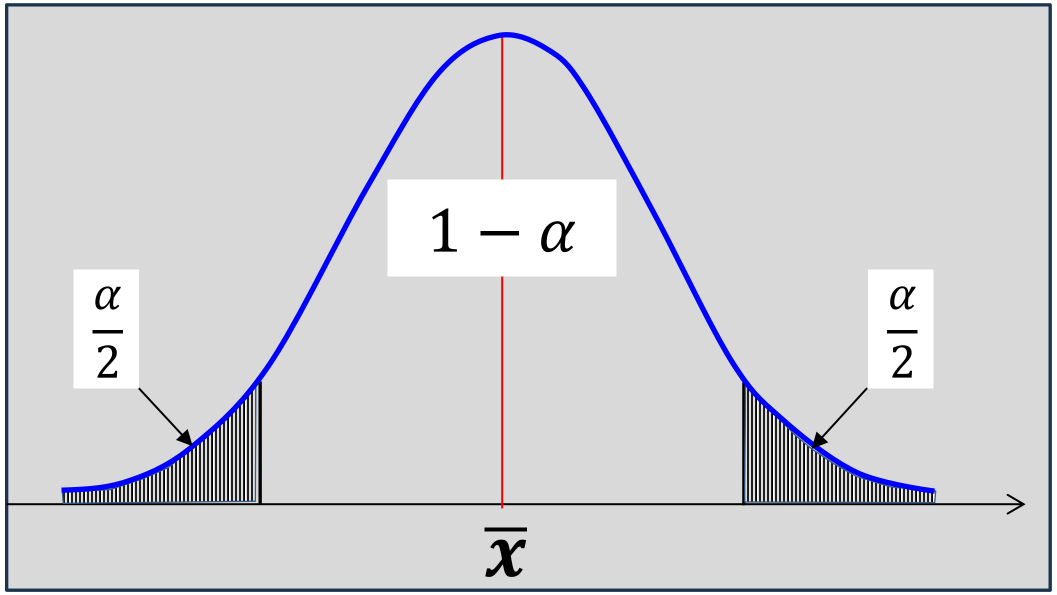
Distribuições

Tais funções de distribuição são utilizadas para avaliar estatisticamente os dados.

Nestes testes, surgem os conceitos de:

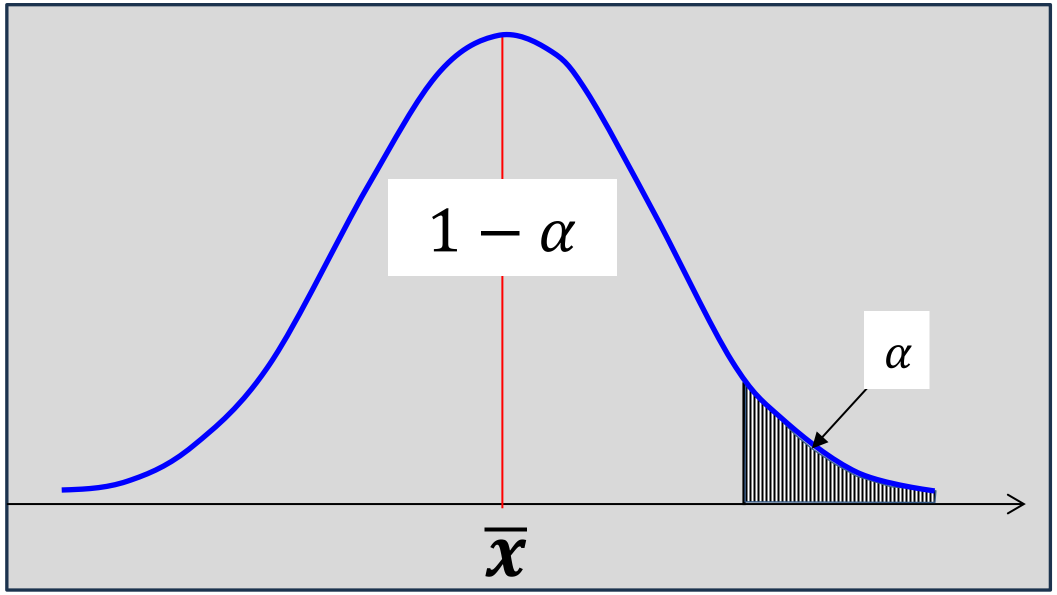
O nível de significância é representado pela letra grega α (usualmente expresso em porcentagem $\alpha * 100\%$). Indica a **probabilidade de erro**

O **nível de confiança** é o complemento do nível de significância $(1-\alpha)$, expresso em porcentagem $(1-\alpha) * 100\%$, e indica a **probabilidade de certeza** nas inferências estatísticas

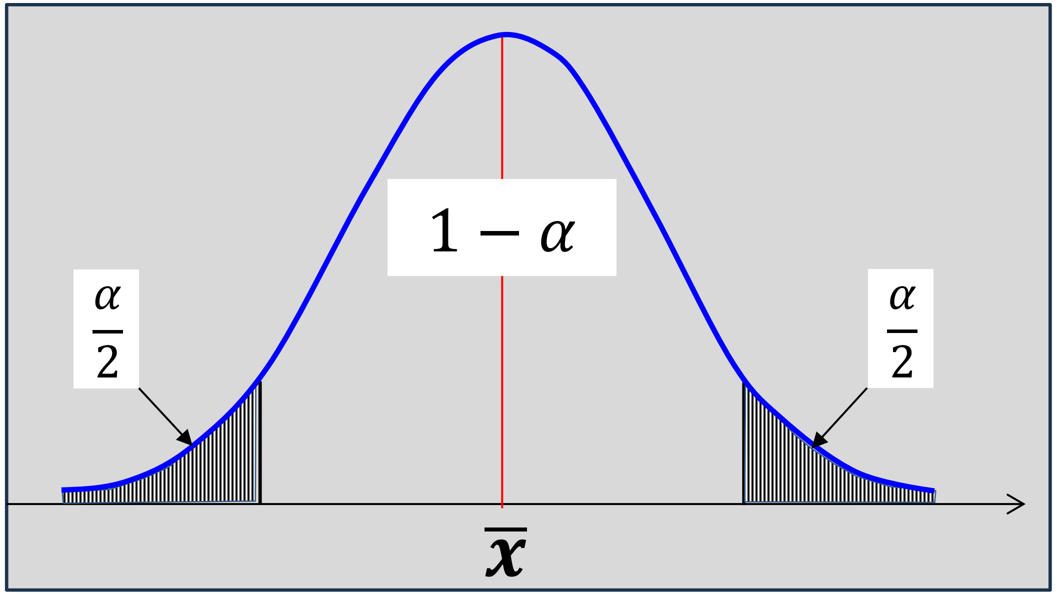


Distribuições

Teste unilateral

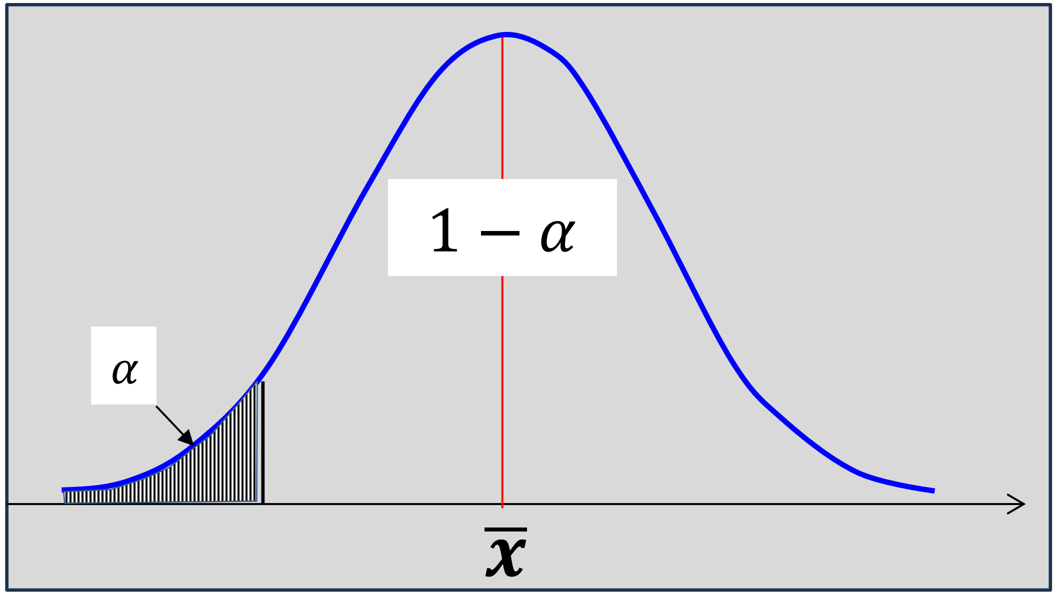


Teste bilateral

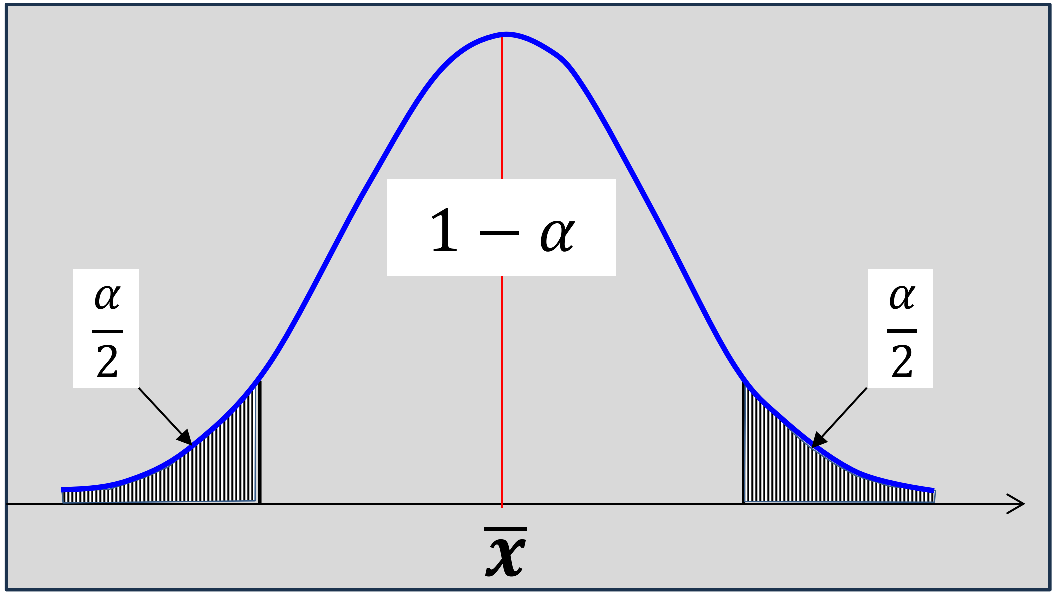


Distribuições

Teste unilateral

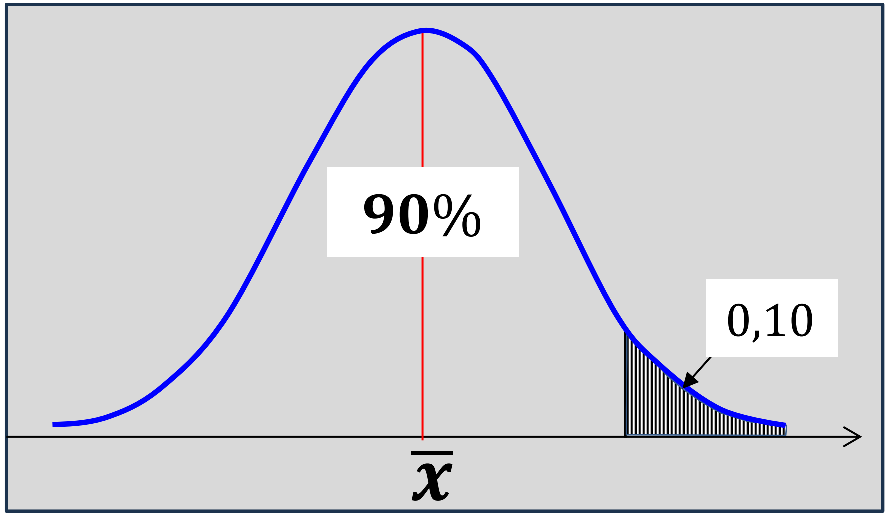


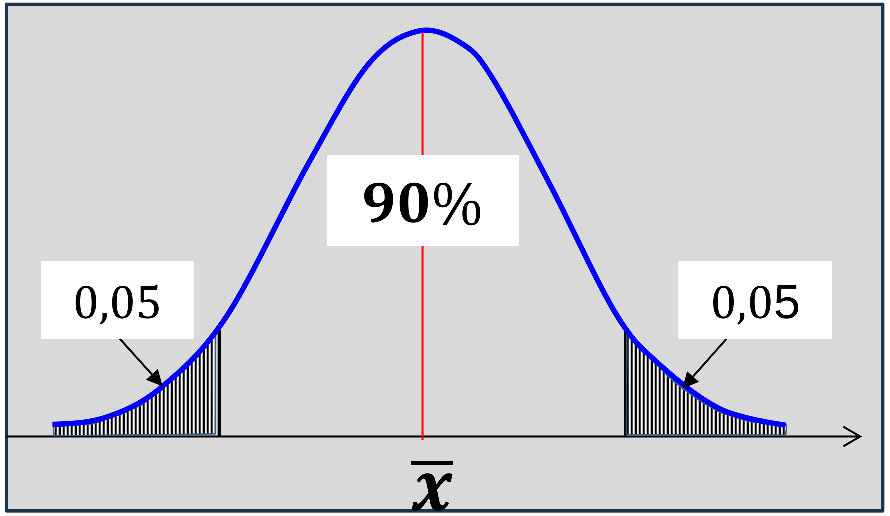
Teste bilateral



Distribuições

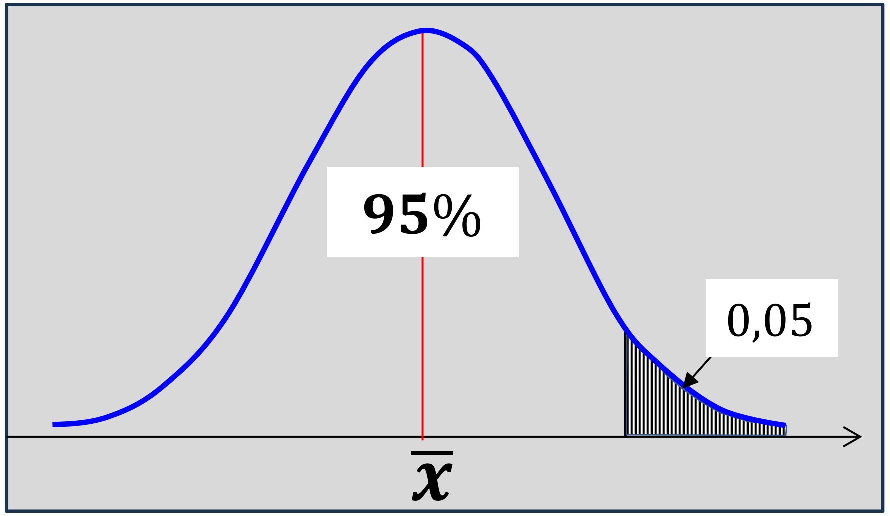
Nível de confiança $(1-\alpha)$	Nível de significância (α)	Nível de significância $(\frac{\alpha}{2})$
90%	**0,10**	**0,05**
95%	0,05	0,025
99%	0,01	0,005

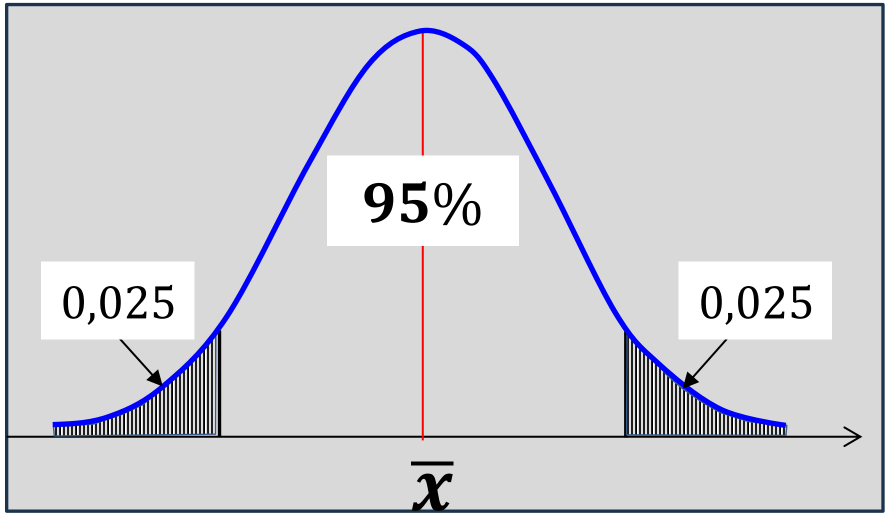




Distribuições

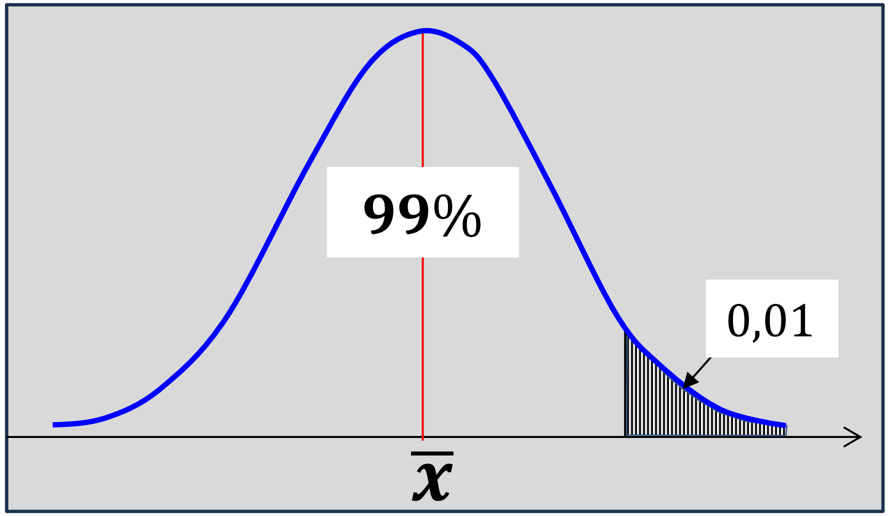
Nível de confiança $(1-\alpha)$	Nível de significância (α)	Nível de significância $(\frac{\alpha}{2})$
90%	0,10	0,05
95%	**0,05**	**0,025**
99%	0,01	0,005

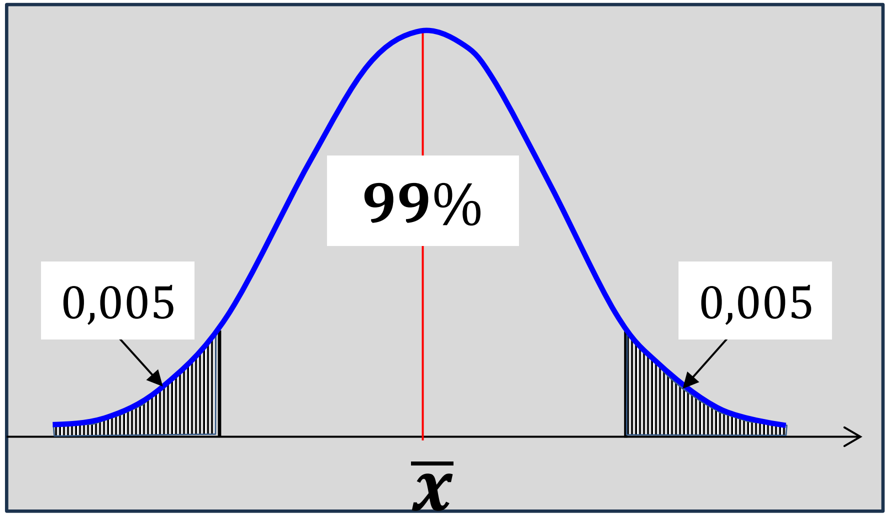




Distribuições

Nível de confiança $(1-\alpha)$	Nível de significância (α)	Nível de significância $(\frac{\alpha}{2})$
90%	0,10	0,05
95%	0,05	0,025
99%	**0,01**	**0,005**





Formulação de hipóteses

Hipóteses do Teste:

Hipótese nula (*H_0*): A média ($\boldsymbol{\mu}$) ou variância da população (σ^2) é igual a um valor específico ($\mu_0,\ \sigma_0^2$).

$$H_0 :\ \mu = \mu_0$$

$$H_0 :\ \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Hipótese alternativa (H_a): A média ($\boldsymbol{\mu}$) ou variância da população (σ^2) é diferente, maior ou menor do valor específico

$$H_a :\ \mu \neq \mu_0 \qquad H_a :\ \mu > \mu_0 \qquad H_a :\ \mu < \mu_0$$

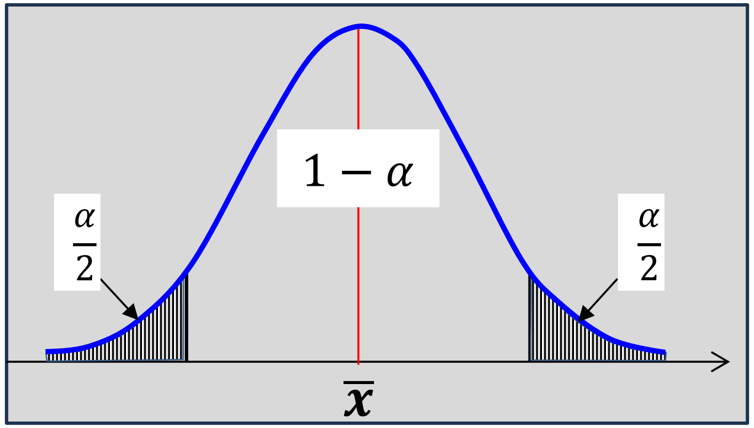
$$H_a :\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \qquad H_a :\ \sigma^2 > \sigma_0^2 \qquad H_a :\ \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Distribuições

Hipóteses do Teste:

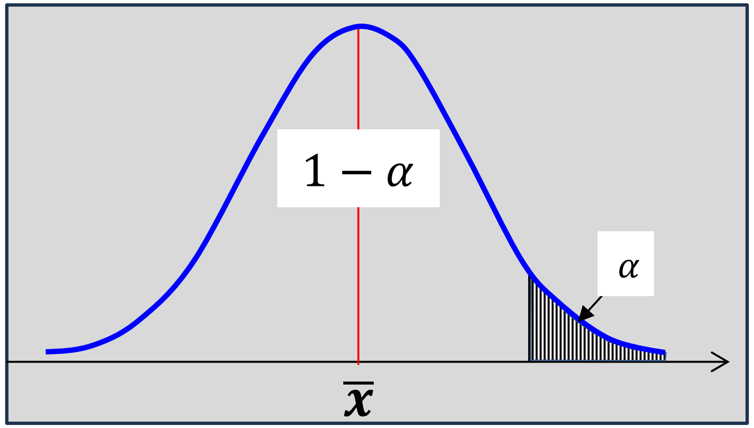
Hipótese alternativa (H_a): A média ($\boldsymbol{\mu}$) ou variância da população (σ^2) é diferente, maior ou menor do valor específico

Teste bilateral



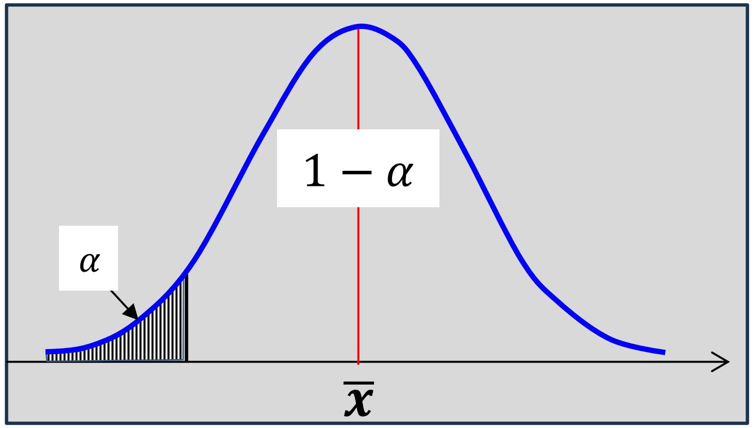
$$H_a : \mu \neq \mu_0$$
$$H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

Teste unilateral à direita



$$H_a : \mu > \mu_0$$
$$H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Teste unilateral à esquerda



$$H_a : \mu < \mu_0$$
$$H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Função de distribuição t (*Student*)

- ✓ É usada para comparar a média da população $\boldsymbol{\mu}$ com a média da amostra $\overline{\boldsymbol{x}}$ com base no número de graus de liberdade $\boldsymbol{\nu}$ da amostra.

- ✓ Esta distribuição é indicada quando a amostra é menor do que 30 (pequenas amostras).

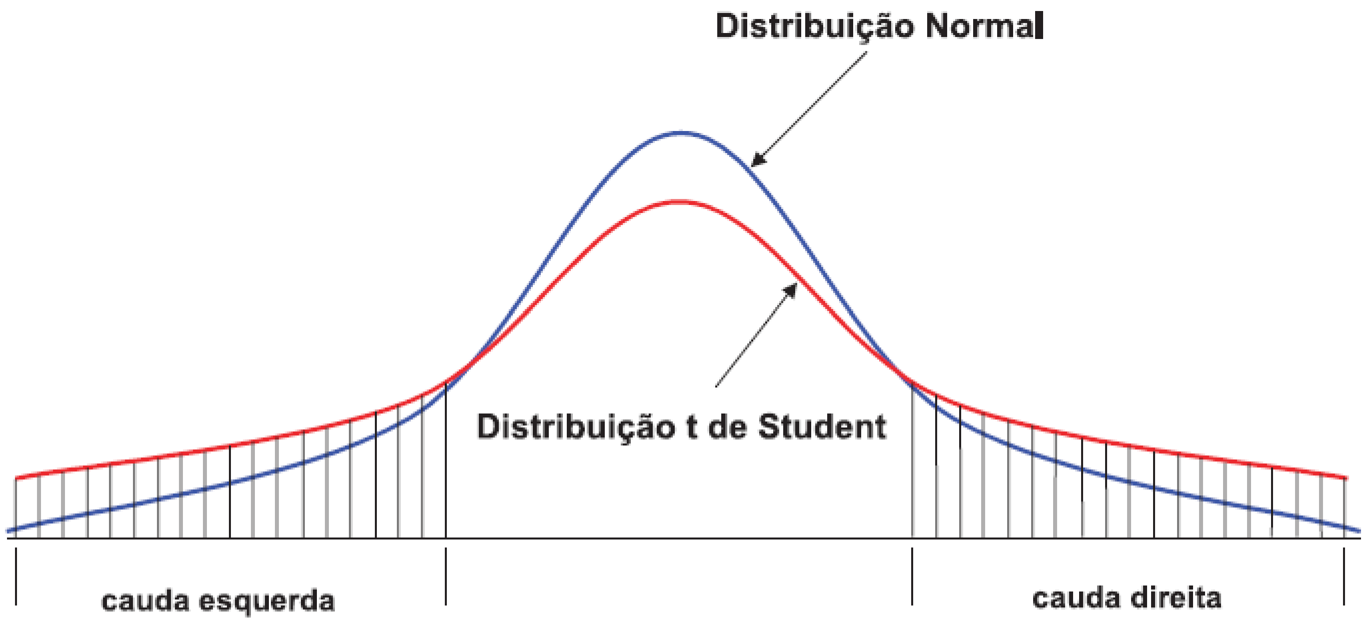
- ✓ Logo, se torna importante para analisar dados de levantamentos.

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Função de distribuição *t* (***Student***)

- ✓ Motivo: para pequenas amostras a distribuição normal apresenta valores menos precisos.

- ✓ A principal diferença entre a distribuição normal e a ***t*** de Student é que esta tem mais área nas caudas.



Função de distribuição t (*Student*)

$$t = \frac{\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Onde:

$\bar{\boldsymbol{x}} =$ média da amostra

$\boldsymbol{\mu} =$ média da população sob a hipótese nula

$\boldsymbol{s} =$ desvio padrão da amostra

$\boldsymbol{n} =$ tamanho da amostra

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Função de distribuição t (*Student*)

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Hipóteses do Teste:

Hipótese nula (H_0): A média da população é igual a um valor específico

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Hipótese alternativa (H_a): A média da população é diferente, maior ou menor do valor específico

$$H_a : \mu \neq \mu_0$$

$$H_a : \mu > \mu_0$$

$$H_a : \mu < \mu_0$$

Função de distribuição t (*Student*)

Hipótese alternativa (H_a): A média da população é diferente do valor específico

$$H_a : \mu \neq \mu_0$$ Bilateral

Determinar o valor de t-Student segundo a tabela usando um nível de significância igual 5% e GL = 9

$$t_{tabela(0{,}05)} = 2{,}262$$

Distribuição t de Student												
gl/q	Área contida nas duas caudas laterais (bicaudal) da distribuição t de Student											
	0,995	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010	0,005
1	0,008	0,016	0,031	0,039	0,079	0,158	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,321
2	0,007	0,014	0,028	0,035	0,071	0,142	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089
3	0,007	0,014	0,027	0,034	0,068	0,137	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453
4	0,007	0,013	0,027	0,033	0,067	0,134	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,598
5	0,007	0,013	0,026	0,033	0,066	0,132	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773
6	0,007	0,013	0,026	0,033	0,065	0,131	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317
7	0,006	0,013	0,026	0,032	0,065	0,130	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029
8	0,006	0,013	0,026	0,032	0,065	0,130	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833
9	0,006	0,013	0,026	0,032	0,064	0,129	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690

Função de distribuição t (*Student*)

Hipótese alternativa (H_a): A média da população é diferente do valor específico

$$H_a : \mu \neq \mu_0$$ Bilateral

Determinar o valor de t-Student segundo a tabela usando um nível de significância igual 5% e GL = 9

$$t_{tabela(0,05)} = 2{,}262$$

Tabela t Student

Unicaudal	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
Bicaudal	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
Confiança (c)	0,50	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
g.l.						
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250

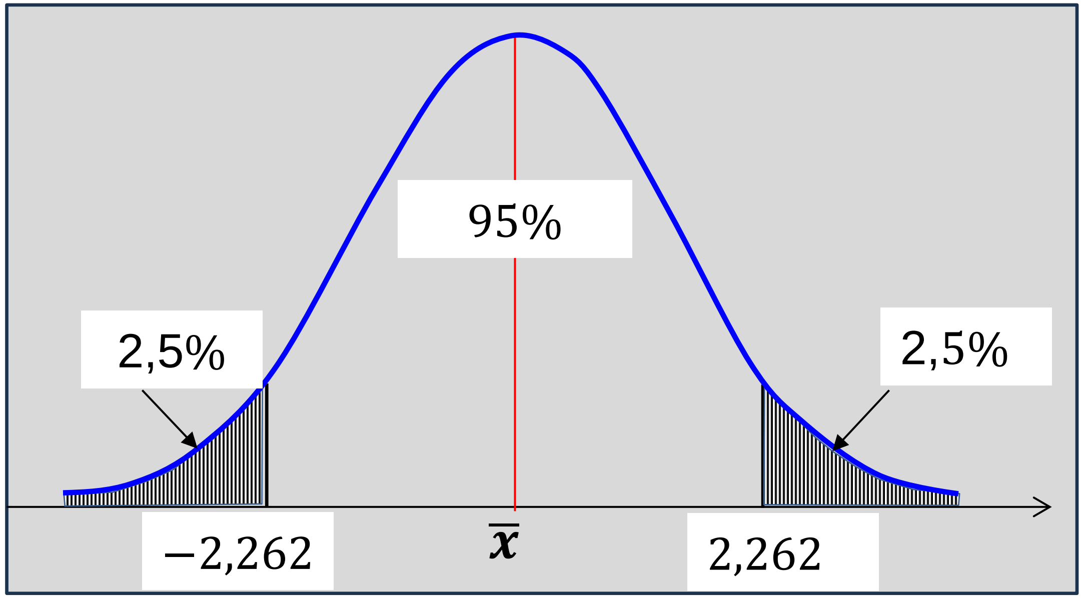
Função de distribuição t (*Student*)

Hipótese alternativa (H_a): A média da população é diferente do valor específico

$$H_a : \ \mu \neq \mu_0$$ Bilateral

Determinar o valor de t-Student segundo a tabela usando um nível de significância igual 5% e GL = 9

$$t_{tabela(0,05)} = 2{,}262$$



Função de distribuição t (*Student*)

Hipótese alternativa (H_a): A média da população é maior do valor específico

$$H_a : \mu > \mu_0$$ Unilateral

Determinar o valor de t-Student segundo a tabela usando um nível de significância igual 5% e GL = 9

$$t_{tabela(0,05)} = 1.833$$

Distribuição t de Student

gl/q	Área contida nas duas caudas laterais (bicaudal) da distribuição t de Student											
	0,995	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010	0,005
1	0,008	0,016	0,031	0,039	0,079	0,158	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,321
2	0,007	0,014	0,028	0,035	0,071	0,142	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089
3	0,007	0,014	0,027	0,034	0,068	0,137	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453
4	0,007	0,013	0,027	0,033	0,067	0,134	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,598
5	0,007	0,013	0,026	0,033	0,066	0,132	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773
6	0,007	0,013	0,026	0,033	0,065	0,131	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317
7	0,006	0,013	0,026	0,032	0,065	0,130	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029
8	0,006	0,013	0,026	0,032	0,065	0,130	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833
9	0,006	0,013	0,026	0,032	0,064	0,129	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690

Função de distribuição t (*Student*)

Hipótese alternativa (H_a): A média da população é maior do valor específico

$$H_a : \mu > \mu_0$$ Unilateral

Determinar o valor de t-Student segundo a tabela usando um nível de significância igual 5% e GL = 9

$$t_{tabela(0{,}05)} = 1{,}833$$

Tabela t Student

Unicaudal	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
Bicaudal	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
Confiança (c)	0,50	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
g.l.						
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250

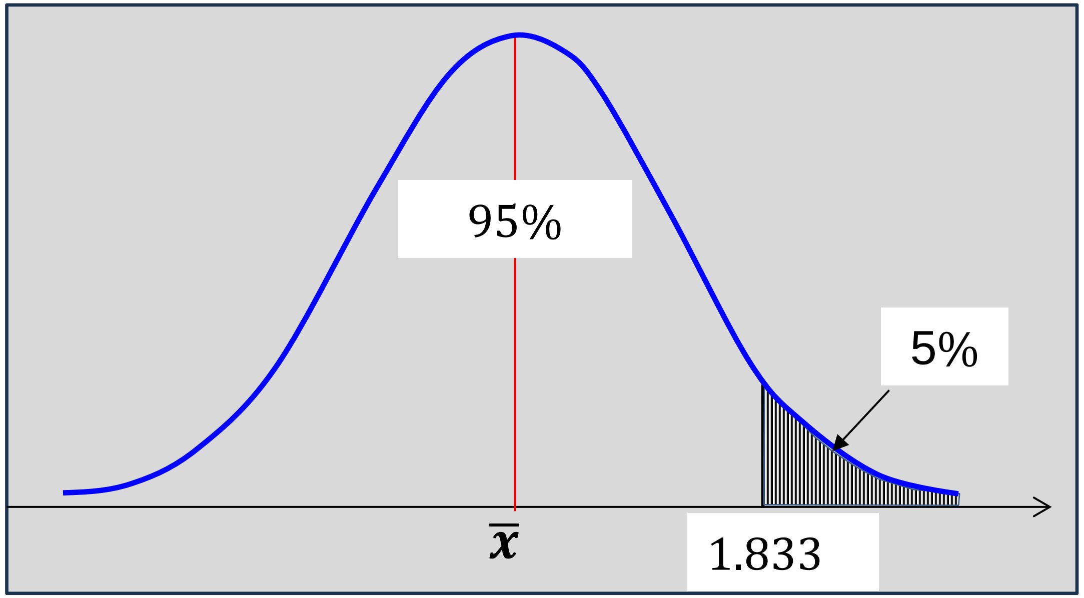
Função de distribuição t (*Student*)

Hipótese alternativa (H_a): A média da população é maior do valor específico

$$H_a : \mu > \mu_0$$ Unilateral

Determinar o valor de t-Student segundo a tabela usando um nível de significância igual 5% e GL = 9

$$t_{tabela(0,05)} = 1{,}833$$



Exercício

Uma linha de base com comprimento calibrado ($\boldsymbol{\mu}$) de 1153,00 m é medida 5 vezes. Cada medição é independente e realizada com a mesma precisão. A média amostral ($\bar{\boldsymbol{x}}$) e o desvio padrão amostral ($\boldsymbol{s}$) são calculados a partir das medições como $\bar{\boldsymbol{x}} =$ 1153,39 m e $\boldsymbol{s} = 0{,}06\ \mathrm{m}$, respectivamente. Teste, com um nível de significância de 10%, se a distância medida é significativamente diferente da distância calibrada e também se a distância medida é significativamente maior que o valor calibrado.

Dados:

$\boldsymbol{\mu}$ = 1153,00 m
$\boldsymbol{n}$ = 5
$\bar{\boldsymbol{x}}$ = 1153,39 m
$\boldsymbol{s} = 0{,}06\ \mathrm{m}$
α = 10% = 0,1

Exercício

Teste, com um nível de significância de 10%, **se a distância medida é significativamente diferente da distância calibrada** e também se a distância medida é significativamente maior que o valor calibrado.

1) Formulação das hipóteses

Hipótese nula (H_0): A média da população é 1153,00 m

$$\boldsymbol{H_0 : \mu = 1153,00\ m}$$

Hipótese alternativa (H_a): A média da população é diferente 1153,00 m

$$\boldsymbol{H_a : \mu \neq 1153,00\ m}$$

Teste bilateral

Exercício

Teste, com um nível de significância de 10%, se a distância medida é significativamente diferente da distância calibrada e também se a distância medida é significativamente maior que o valor calibrado.

μ = 1153,00 m   ***n*** = 5 $\bar{\boldsymbol{x}} = 1153{,}39$ m $\boldsymbol{s} = 0{,}06\ \mathrm{m}$ **α** = 10% = 0,1

2) Calcular o valor do teste *t-student*

$$t = \frac{\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1153{,}39 - 1153{,}00}{\frac{0{,}06}{\sqrt{5}}} = \frac{0{,}39}{0{,}268} = 14{,}53$$

Função de distribuição t (*Student*)

$$H_a : \mu \neq \mu_0$$

Bilateral

Determinar o valor de t-Student segundo a tabela usando um nível de nível de significância (0,1) com GL = 4

$$t_{tabela(0,05)} = 2{,}132$$

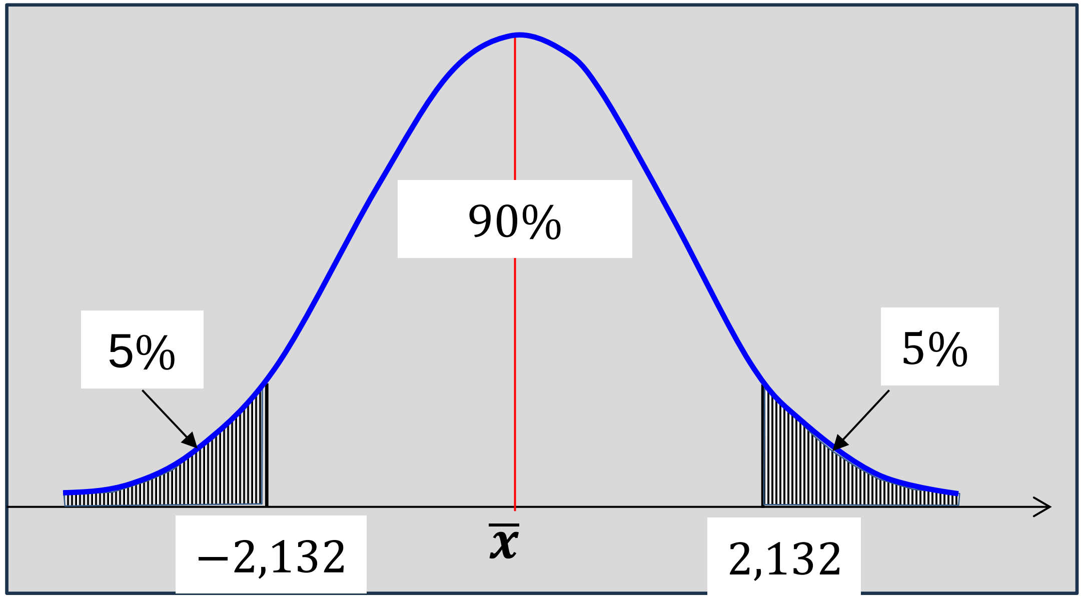
Distribuição t de Student

gl/q	Área contida nas duas caudas laterais (bicaudal) da distribuição t de Student											
	0,995	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010	0,005
1	0,008	0,016	0,031	0,039	0,079	0,158	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,321
2	0,007	0,014	0,028	0,035	0,071	0,142	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089
3	0,007	0,014	0,027	0,034	0,068	0,137	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453
4	0,007	0,013	0,027	0,033	0,067	0,134	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,598
5	0,007	0,013	0,026	0,033	0,066	0,132	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773
6	0,007	0,013	0,026	0,033	0,065	0,131	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317
7	0,006	0,013	0,026	0,032	0,065	0,130	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029
8	0,006	0,013	0,026	0,032	0,065	0,130	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833
9	0,006	0,013	0,026	0,032	0,064	0,129	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690

Exercício

Teste, com um nível de significância de 10%, **se a distância medida é significativamente diferente da distância calibrada** e também se a distância medida é significativamente maior que o valor calibrado.

Teste bilateral

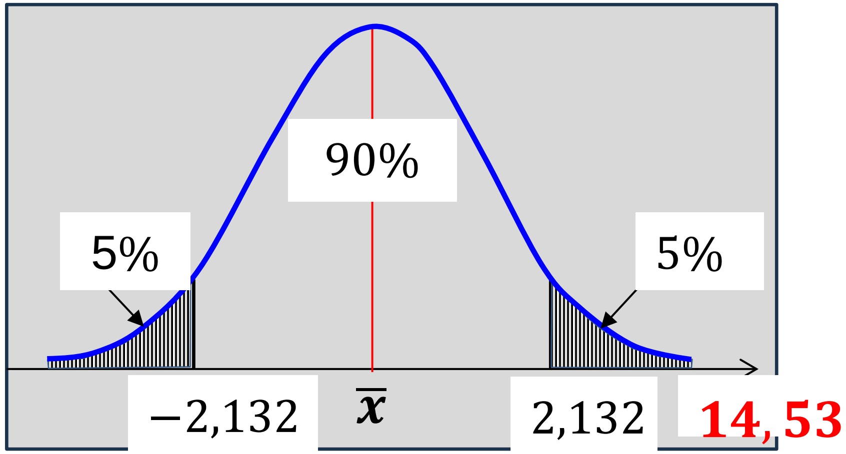


Exercício

Teste, com um nível de significância de 10%, **se a distância medida é significativamente diferente da distância calibrada** e também se a distância medida é significativamente maior que o valor calibrado.

3) Determinar o valor *t-student* em tabela

Graus de liberdade = 4
α = 0,1 (bilateral) ⟹ $\mathbf{t = 2,132}$ **(tabela)**



4) Tomar decisão: Se $t_{calculada} > t_{tabela}$ ⟹ Rejeitar $\boldsymbol{H_0}$

$$t_{calculada} > t_{tabela}$$

$$14{,}53 > 2{,}132$$

Rejeitamos $\boldsymbol{H_0 : \mu = 1153,00\ m}$ no nível de significância de 10%, ou seja, a distância medida **é significativamente diferente** da distância calibrada. Pelo que, aceitamos a $\boldsymbol{H_a : \mu \neq 1153,00\ m}$

Exercício

Teste, com um nível de significância de 10%, se a distância medida é significativamente diferente da distância calibrada e também **se a distância medida é significativamente maior que o valor calibrado.**

1) Formulação das hipóteses

Hipótese nula (H_0): A média da população é 1153,00 m

$$\boldsymbol{H_0 : \mu = 1153,00\, m}$$

Hipótese alternativa (H_a): A média da população é maior 1153,00 m

$$\boldsymbol{H_a : \mu > 1153,00\, m}$$

Teste unilateral à direita

Exercício

Teste, com um nível de significância de 10%, se a distância medida é significativamente diferente da distância calibrada e também **se a distância medida é significativamente maior que o valor calibrado.**

$\boldsymbol{\mu}$ = 1153,00 m $\boldsymbol{n}$ = 5 $\bar{\boldsymbol{x}}$ = 1153,39 m $\mathbf{s} = 0{,}06\ \mathrm{m}$ **α** = 10% = 0,1

2) Calcular o valor do teste *t-student*

$$t = \frac{\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1153{,}39 - 1153{,}00}{\frac{0{,}06}{\sqrt{5}}} = \frac{0{,}39}{0{,}268} = 14{,}53$$

Função de distribuição t (*Student*)

$H_a:\ \mu > \mu_0$ Unilateral

Determinar o valor de t-Student segundo a tabela usando um nível de significância (0,1) com GL = 4

$t_{tabela(0{,}05)} = 1{,}533$

Tabela t Student

Unicaudal	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
Bicaudal	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
Confiança (c)	0,50	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
g.l.						
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250

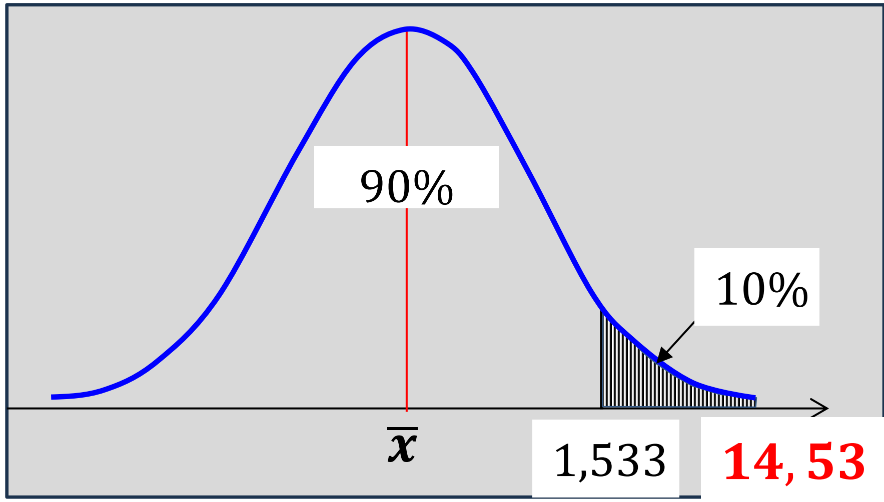
Exercício

Teste, com um nível de significância de 10%, se a distância medida é significativamente diferente da distância calibrada e também **se a distância medida é significativamente maior que o valor calibrado.**

3) Determinar o valor *t-student* em tabela

Graus de liberdade = 4
α = 0,1 (unilateral)

$\mathbf{t = 1,533}$ **(tabela)**



4) Tomar decisão **Se** $t_{calculada} > t_{tabela}$ Rejeitar $\boldsymbol{H_0}$

$$t_{calculada} > t_{tabela}$$

$$14{,}53 > 1{,}533$$

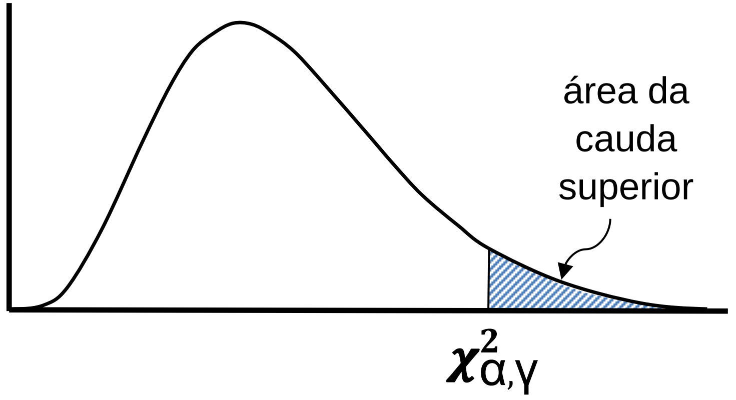
Rejeitamos $\boldsymbol{H_0 : \mu = 1153,00\ m}$ no nível de significância de 10%, ou seja, a distância medida **é significativamente diferente** da distância calibrada. Pelo que, aceitamos a $\boldsymbol{H_a : \mu > 1153,00\ m}$

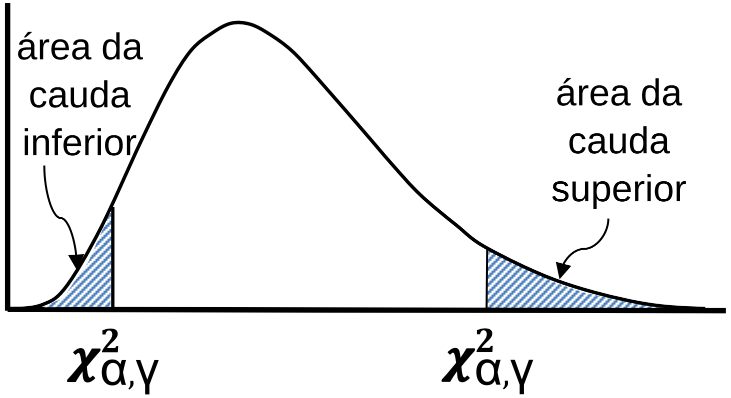
Função de distribuição *Qui-Quadrado* χ^2

- ✓ Compara a relação entre a variância da amostra $\boldsymbol{s^2}$ e a variância da população σ^2 com base no número de redundâncias ou graus de liberdade $\boldsymbol{\nu}$ da amostra.

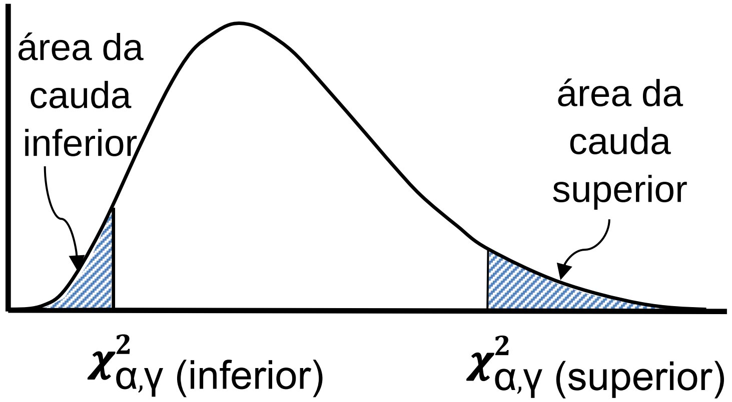
- ✓ A distribuição Qui-Quadrado (χ^2) é usada nas amostragens estatísticas para determinar o limite (superior e/ou inferior) no qual a variância da população pode ser esperada a ocorrer com base em: 90%, 95%, 99%...

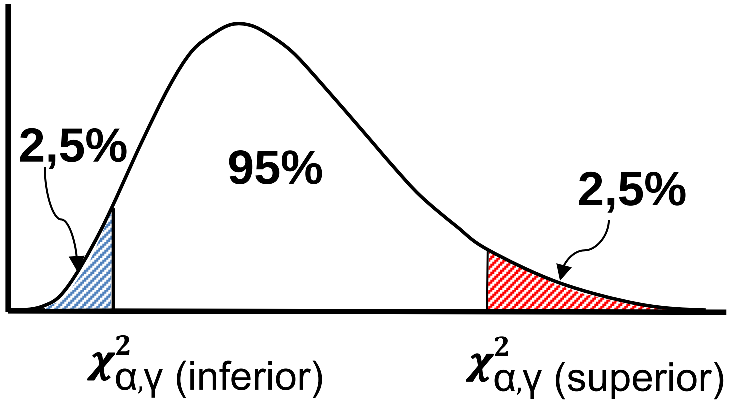
$$\chi^2 = \frac{\nu . s^2}{\sigma^2}$$

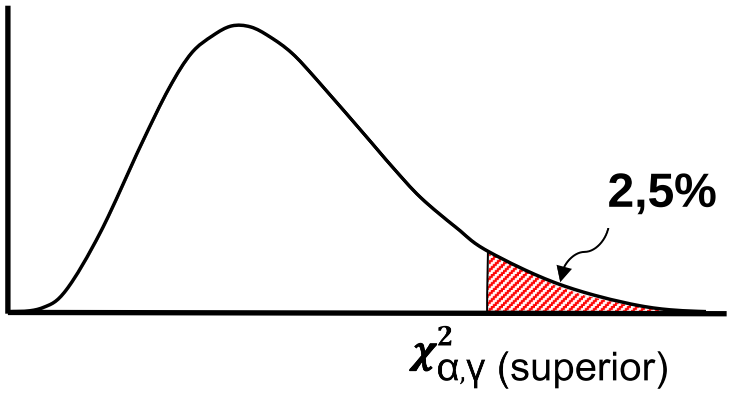


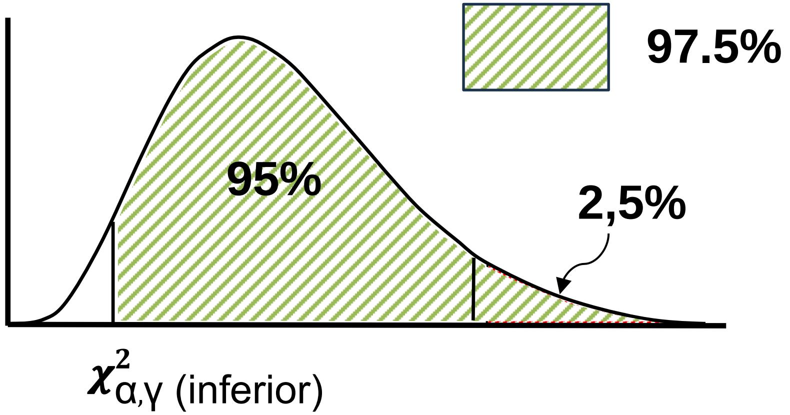


Função de distribuição *Qui-Quadrado* χ^2

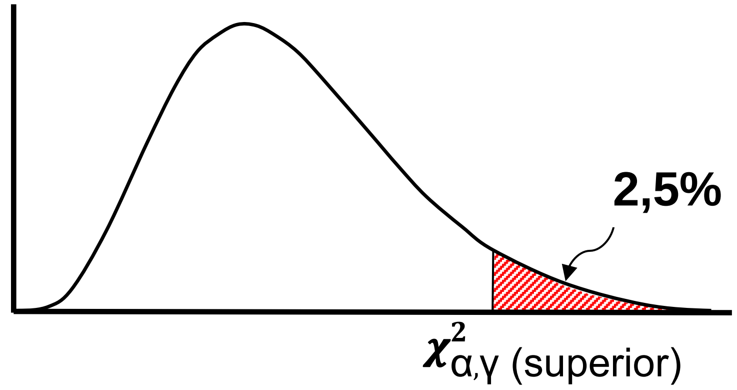




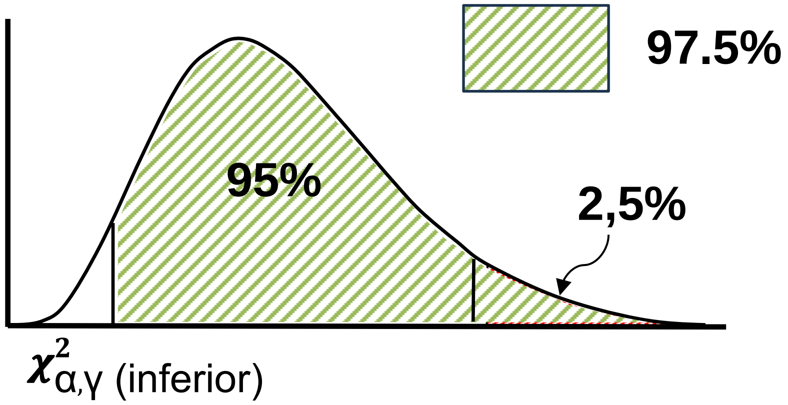




Função de distribuição *Qui-Quadrado* χ^2



19,023



2,700

Vamos encontrar os valores críticos (superior e inferior) para um IC = 95%, quando o tamanho da amostra é 10.

IC = 95%

GL = 9

Distribuição Qui-quadrado

gl/q	Área da cauda superior											
	0,995	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010	0,005
1	0,000	0,000	0,001	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	13,388	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589

Função de distribuição *Qui-Quadrado* χ^2

$$\boxed{\chi^2 = \frac{\nu . s^2}{\sigma^2}}$$

$\boldsymbol{\nu}$ = graus de liberdade (n − 1), onde tamanho da amostra)

$\boldsymbol{s^2}$ = variância da amostra

$\boldsymbol{\sigma^2}$ = variância da população hipotética

$$\boldsymbol{s^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - u)^2}{n}$$

Função de distribuição *Qui-Quadrado* χ^2

$$\chi^2 = \frac{\nu . s^2}{\sigma^2}$$

Hipóteses do Teste:

Hipótese nula (*H_0*): A variância da população σ^2 é igual a um valor específico σ_0^2.

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Hipótese alternativa (*H_a*):

$\boldsymbol{teste\ bilateral}$: $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $(A\ variância\ da\ população$ é $diferente\ do\ valor\ específico)$

$\boldsymbol{teste\ unilateral}$ à $\boldsymbol{direita}$: $\boldsymbol{H_a} : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $(A\ variância\ da\ população$ é $maior\ do\ valor\ específico)$

$\boldsymbol{teste\ unilateral}$ à $\boldsymbol{esquerda}$: $\boldsymbol{H_a}$: $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $(A\ variância\ da\ população$ é $menor\ do\ valor\ específico)$

Função de distribuição *Qui-Quadrado* χ^2

Se o desvio padrão de uma medição de direção horizontal com uma estação total é fornecido pelo fabricante como σ = 2", verifique se o desvio padrão experimental (observado em ambas as posições da luneta: direta e inversa) s = 2.3" é consistente com valor maior ao valor do fabricante a um nível de confiança de 95%. Assuma que o número de graus de liberdade para a determinação de s é 32.

Dados:

Graus de liberdade = 32
σ = 2“ (desvio padrão população)
$\boldsymbol{s} = 2,3$“(desvio padrão amostra)
1 - α = 95%

Exercício

Se o desvio padrão de uma medição de direção horizontal com uma estação total é fornecido pelo fabricante como σ = 2'', verifique se o desvio padrão experimental (observado em ambas as posições da luneta: direta e inversa) s = 2.3'' é consistente com valor maior ao valor do fabricante a um nível de confiança de 95%. Assuma que o número de graus de liberdade para a determinação de s é 32.

1) Formulação das hipóteses

Hipótese nula (H_0): O desvio padrão da população é 2,0

$$\boldsymbol{H_0 : \sigma^2 = 2,0}$$

Hipótese alternativa (H_a): O desvio padrão da população é maior que 2,0

$$\boldsymbol{H_0 : \sigma^2 > 2,0}$$

Teste unilateral

Exercício

Se o desvio padrão de uma medição de direção horizontal com uma estação total é fornecido pelo fabricante como σ = 2", verifique se o desvio padrão experimental (observado em ambas as posições da luneta: direta e inversa) s = 2.3" é consistente com valor maior ao valor do fabricante a um nível de confiança de 95%. Assuma que o número de graus de liberdade para a determinação de s é 32.

2) Calcular o valor do teste *qui-quadrado*

$$X^2 = \frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) * \boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}}{\sigma^{\mathbf{2}}} = \frac{(32) * (2{,}3)^2}{(2{,}0)^2} = \frac{169{,}28}{4} = 42{,}32$$

Exercício

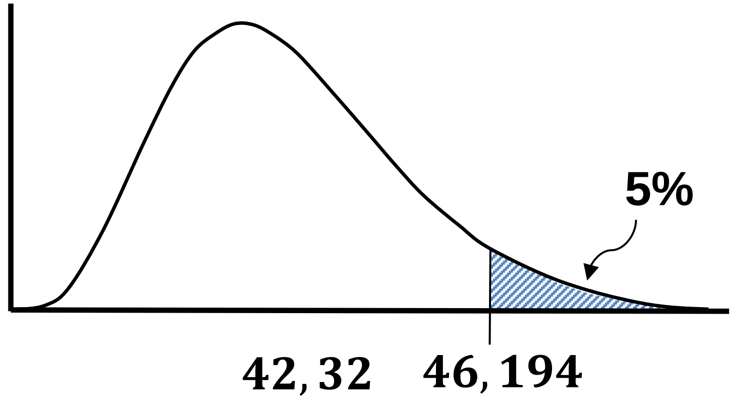
Se o desvio padrão de uma medição de direção horizontal com uma estação total é fornecido pelo fabricante como σ = 2'', verifique se o desvio padrão experimental (observado em ambas as posições da luneta: direta e inversa) s = 2.3'' é consistente com valor maior ao valor do fabricante a um nível de confiança de 95%. Assuma que o número de graus de liberdade para a determinação de s é 32.

3) Determinar o valor *qui-quadrado* em tabela

Graus de liberdade = 32

1 - α = 95% (unilateral – limite superior)

$$X^2_{0,05} = \mathbf{46,194\ (tabela)}$$



Exercício

Se o desvio padrão de uma medição de direção horizontal com uma estação total é fornecido pelo fabricante como σ = 2", verifique se o desvio padrão experimental (observado em ambas as posições da luneta: direta e inversa) s = 2.3" é consistente com valor maior ao valor do fabricante a um nível de confiança de 95%. Assuma que o número de graus de liberdade para a determinação de s é 32.

4) Tomar decisão **Se** $X^2{}_{calculada} > X^2{}_{tabela}$ → Rejeitar $\boldsymbol{H_0}$

$$\boldsymbol{X^2}{}_{calculada} < \boldsymbol{X^2}{}_{tabela}$$

$$42{,}32 < 46{,}194$$

Aceitamos $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{\sigma^2} = \boldsymbol{2{,}0}$ no nível de confiança de 95%, ou seja, afirma que o desvio padrão determinado empiricamente, s = 2.3", é igual ao valor do fabricante, σ = 2“.

Estimativa de Parâmetros: pontual e por intervalo

Estimativa por pontos

- ✓A estimativa de um parâmetro populacional, dada por um número único

Estimativa por intervalos

- ✓A estimativa de um parâmetro populacional, dada por dois números, entre os quais pode-se considerar que ele esteja situado

As estimativas por intervalos indicam sua precisão e são, portanto, preferíveis às estimativas por pontos.

Exercício

Um ângulo foi medido dez vezes, conforme a tabela.

I. Calcule as estimativas pontuais para média, desvio padrão e desvio padrão da média.

II. Na sequência, estime intervalos de confiança de 95% para média e variância

Observação	Ângulo (a_i)
1	120° 31' 40,1"
2	120° 31' 41,2"
3	120° 31' 40,8"
4	120° 31' 42,1"
5	120° 31' 42,9"
6	120° 31' 42,4"
7	120° 31' 43,0"
8	120° 31' 40,7"
9	120° 31' 41,9"
10	120° 31' 41,5"

Estimativas pontuais

Média

$$\bar{x} = 120°31'41{,}66"$$

Desvio padrão

$$s = \sqrt{\frac{\sum(a_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \pm 0{,}9698"$$

Desvio padrão da média

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \pm 0{,}3067"$$

Observação	Ângulo (ai)
1	120° 31' 40,1"
2	120° 31' 41,2"
3	120° 31' 40,8"
4	120° 31' 42,1"
5	120° 31' 42,9"
6	120° 31' 42,4"
7	120° 31' 43,0"
8	120° 31' 40,7"
9	120° 31' 41,9"
10	120° 31' 41,5"

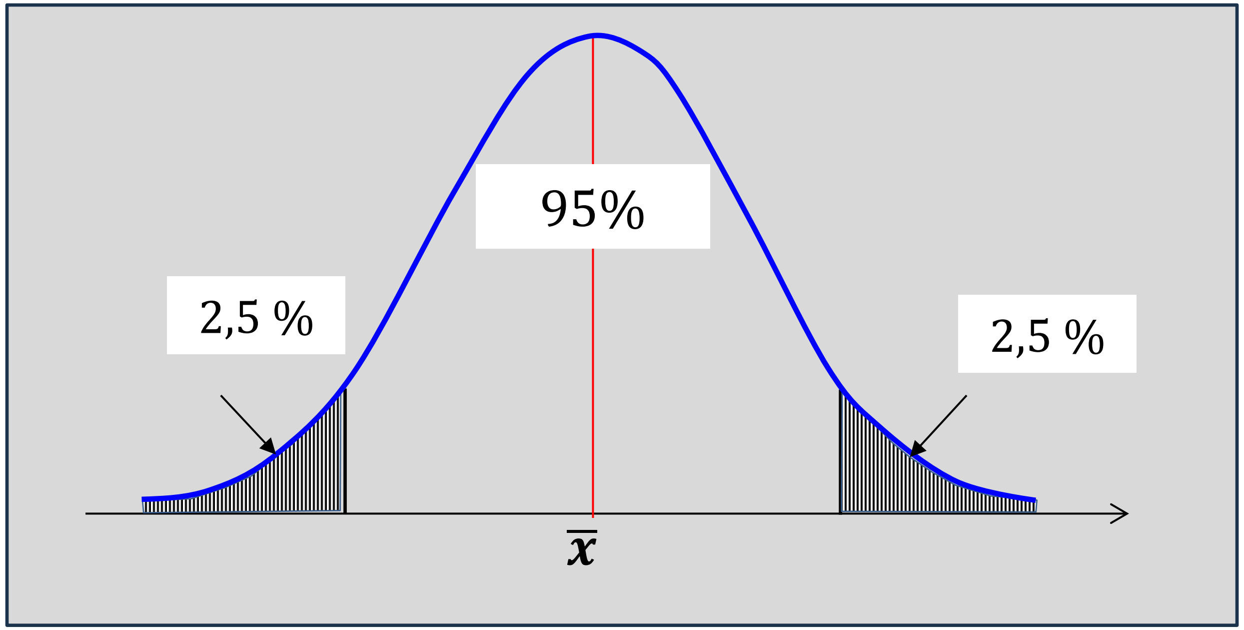
Estimativa por intervalo

Intervalo de confiança para a média (em função do desvio padrão)

Desvio padrão da média

$$P\left[\bar{x} - \boxed{\frac{s}{\sqrt{n}}}\, t_{\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \bar{x} + \boxed{\frac{s}{\sqrt{n}}}\, t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Graus de liberdade = 10 – 1 = 9



Estimativa por intervalo

Intervalo de confiança para a média (em função do desvio padrão)

Desvio padrão da média

$$P\left[\bar{x} - \boxed{\frac{s}{\sqrt{n}}}\, t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \boxed{\frac{s}{\sqrt{n}}}\, t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Graus de liberdade = 10 – 1 = 9

$$t_{(0{,}05)} = 2{,}262$$

Distribuição t de Student

gl/q	Área contida nas duas caudas laterais (bicaudal) da distribuição t de Student										
	0,995	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010	0,005
1	0,008	0,016	0,031	0,039	0,079	0,158	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,32
2	0,007	0,014	0,028	0,035	0,071	0,142	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,08
3	0,007	0,014	0,027	0,034	0,068	0,137	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453
4	0,007	0,013	0,027	0,033	0,067	0,134	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,598
5	0,007	0,013	0,026	0,033	0,066	0,132	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773
6	0,007	0,013	0,026	0,033	0,065	0,131	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317
7	0,006	0,013	0,026	0,032	0,065	0,130	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029
8	0,006	0,013	0,026	0,032	0,065	0,130	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833
9	0,006	0,013	0,026	0,032	0,064	0,129	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690

Estimativa por intervalo

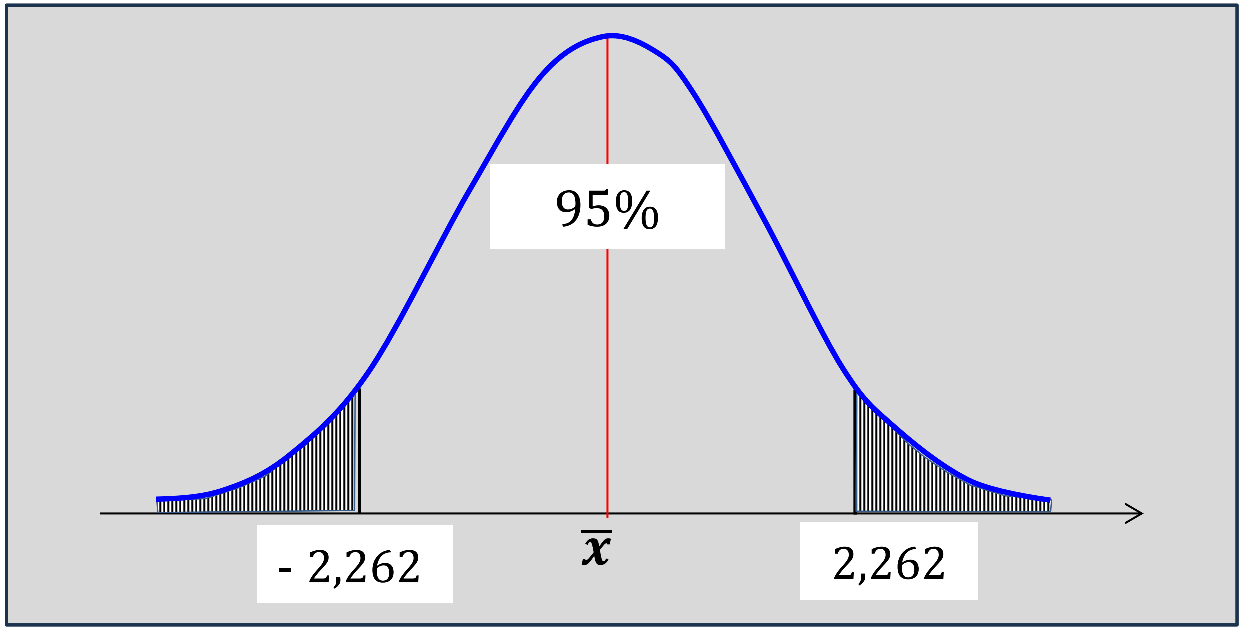
Intervalo de confiança para a média (em função do desvio padrão)

Desvio padrão da média

$$P\left[\bar{x} - \boxed{\frac{s}{\sqrt{n}}}\, t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \boxed{\frac{s}{\sqrt{n}}}\, t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$t_{tabela(0,05)} = 2{,}262$$

Graus de liberdade = 10 – 1 = 9



Estimativa por intervalo

Intervalo de confiança para a média (em função do desvio padrão)

$$P\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$\boldsymbol{t_{0,05} = 2,262}$$

Calcular os limites inferior e superior:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,05} = 0{,}31''.\,2{,}262 = 0{,}70''$$

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,05} = 120°31'41{,}66'' - 0{,}70'' = 120°31'40{,}96''$$

$$\bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0,05} = 120°31'41{,}66'' + 0{,}70'' = 120°31'42{,}36''$$

Estimativa por intervalo

Intervalo de confiança para a média (em função do desvio padrão)

$$P\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

$$P[120°31'40{,}96" \leq \mu \leq 120°31'42{,}36"] = 95\%$$

Significado:

Se fizermos várias amostragens desta população, a probabilidade de 95% das amostras resultarem em média dentro do intervalo acima.

Estimativa por intervalo

Intervalo de confiança para a variância

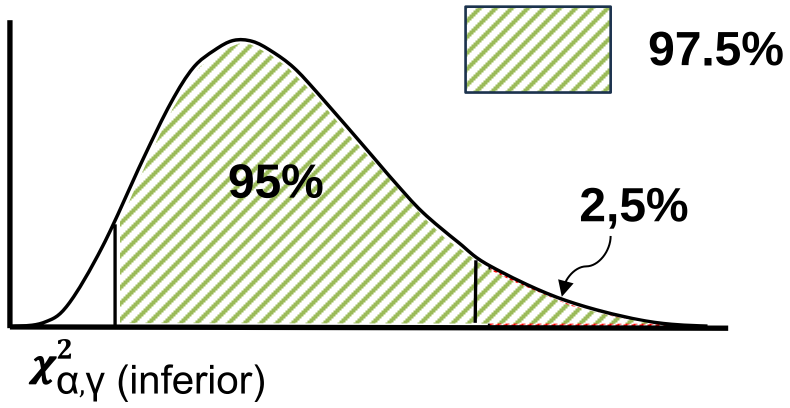
graus de liberdade

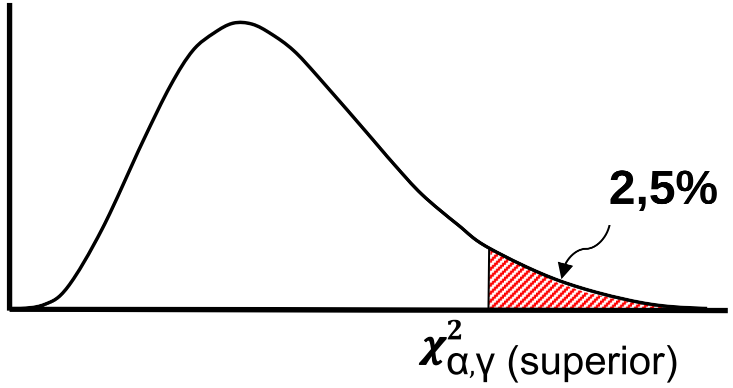
$$P\left[\frac{s^2\boxed{(n-1)}}{\boxed{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}} \le \sigma^2 \le \frac{s^2\boxed{(n-1)}}{\boxed{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\right]$$

Cauda superior

Cauda inferior

Graus de liberdade = 10 – 1 = 9





Função de distribuição *Qui-Quadrado* χ^2

Vamos encontrar os valores críticos (superior e inferior)

IC = 95%

GL = 9

Distribuição Qui-quadrado

gl/q	Área da cauda superior											
	0,995	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010	0,005
1	0,000	0,000	0,001	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	13,388	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589

Da tabela, que é bilateral temos que:

$$\boldsymbol{\chi}^2_{\alpha,\gamma} \text{ (inferior)} \quad = \quad \chi^2_{(0.975)} = 2.700$$

$$\boldsymbol{\chi}^2_{\alpha,\gamma} \text{ (superior)} \quad = \quad \chi^2_{(0.025)} = 19{,}023$$

Estimativa por intervalo

Intervalo de confiança para a variância

$$P\left[\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

$$\chi^2_{0,025} = 19{,}023 \qquad \chi^2_{0,975} = 2{,}700$$

$$P\left[\frac{0.9698^2 * (9)}{19.023} \le \sigma^2 \le \frac{0.9698^2 * (9)}{2.70}\right]$$

$$P[0{,}4449'' \le \sigma^2 \le 3{,}1344''] = 0{,}95 = 95\%$$

Variância

$$P[0{,}67'' \le \sigma \le 1{,}77''] = 95\%$$

Desvio padrão

Exercício

- ✓ Agora, estime os intervalos de confiança de 90% e 99% para a média e a variância.
- ✓ Em seguida, compare os resultados obtidos para os três intervalos (90%, 95% e 99%) em relação à média e à variância.
- ✓ Por fim, elabore uma conclusão com base na comparação dos intervalos.

Exercício

Um ângulo foi medido **15 vezes**. Cada medição foi realizada de forma independente, com a mesma precisão.

a) Teste, com um nível de significância de 5%, a hipótese de que a média populacional das medições é 42° 12’ 16,0", contra a alternativa de que não é 42° 12’ 16,0".

b) Teste, com um nível de significância de 5%, a hipótese de que o desvio padrão populacional σ das medições é 2.0, contra a hipótese alternativa de que $\sigma \neq 2{,}0$

Observação	Ângulo (a_i)
1	42° 12’ 23,53"
2	42° 12’ 11,07"
3	42° 12’ 11,33"
4	42° 12’ 15,93"
5	42° 12’ 21,11"
6	42° 12’ 11,21"
7	42° 12’ 17,77"
8	42° 12’ 14,73"
9	42° 12’ 13,37"
10	42° 12’ 15,37"
11	42° 12’ 14,67"
12	42° 12’ 17,33"
13	42° 12’ 13,15"
14	42° 12’ 17,45"
15	42° 12’ 11,33"

Exercício

Um ângulo foi medido em quatro etapas. Tomando pesos proporcionais ao número de observações, estimar o valor do ângulo e sua precisão.

Ângulo	Observações	Peso
80° 50’ 12"	6	2
80° 50’ 14"	3	1
80° 50’ 12"	9	3
80° 50’ 18"	6	2