UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO 2 – GA110 A ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA

Prof. Dr. Mario Ernesto Jijón Palma
Departamento de Geomática
Setor de Ciências da Terra
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Ajustamento: Método Paramétrico

$$L_a = F(X_a)$$

- Método das observações indiretas, as grandezas buscadas (parâmetros) não são medidas diretamente, mas relacionadas matematicamente com outras que são medidas.

- Cada observação fornece uma equação. Se temos **n** observações, teremos **n** equações.

- Os parâmetros a estimar são representados por **u** variáveis.

Ajustamento: Método Paramétrico

Linear

Resolução direta (uma única etapa para encontrar a solução)

Não é necessário uma aproximação inicial

Exemplo: Nivelamento, Poligonais

Não Linear

Para resolver o sistema tem que se linearizar pela fórmula de Taylor.

Resolução Iterativa (requer um processo de repetição para encontrar a solução)

Necessita de uma aproximação inicial para começar o processo iterativo.

Exemplo: Ajustamento de redes geodésicas, fotogrametria, GPS.

Ajustamento: Método Paramétrico

$$\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$$

Sejam:

L_b = Vetor dos valores observados;
V = Vetor dos resíduos;
L_a = Vetor dos valores observados ajustados.

$$\boldsymbol{L_a = L_b + V}$$

X_0 = Vetor com valores aproximados dos parâmetros;
X = Vetor correção;
X_a = Vetor dos parâmetros ajustados (um dos objetivos).

$$\boldsymbol{X_a = X_0 + X}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Linear

$$L_a = F(X_a)$$

$$X = \left(A^T * P * A\right)^{-1} * \left(A^T * P * L_b\right)$$

$$N = \left(A^T * P * A\right)$$

$$U = \left(A^T * P * L_b\right)$$

Ajustamento: Método Paramétrico

PASSOS PARA RESOLVER METODO PARAMÉTRICO LINEAR

a) Modelo Matemático $\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$ $\boldsymbol{L_a = L_b + V}$

b) Matriz das observações $\boldsymbol{L_b}$

c) Calcular a matriz dos pesos $\boldsymbol{P}$

d) Calcular o vetor das observações aproximadas: modelo linear

$$\boldsymbol{X_0 = 0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{L_0 = F(X_0)}$$

e) Calcular a matriz $\boldsymbol{L = L_0 + L_b}$

f) Calcular a matriz A (derivadas parciais) $\boldsymbol{A = \frac{\partial F}{\partial X_a}|_{Xa-Xo}}$

g) Calcular as equações normais $N = A^T P A$ $U = A^T P L$

$$\boldsymbol{X = N^{-1} U}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

PASSOS PARA RESOLVER METODO PARAMÉTRICO LINEAR

h) Obter a Matriz dos resíduos $\boldsymbol{V = A * X + L}$

i) Variância a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$) $\boldsymbol{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u}}$

j) Calcular MVC dos parâmetros ajustados $\sum_X = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{N^{-1}}$

Ajustamento: Método Paramétrico

Não Linear

$$L_a = F(X_a)$$

$$L_a = L_b + V$$

$$X_a = X_0 + X$$

O modelo linearizado do método paramétrico

$$_{n}V_{1} = {}_{n}A_{u}\,{}_{u}X_{1} + {}_{n}L_{1}$$

$$X = -(A^T PA)^{-1}.(A^T PL)$$

$$N = A^T PA \qquad U = A^T PL \quad \rightarrow \quad X = -N^{-1}U$$

cujas componentes convertem os parâmetros aproximados em ajustados:

$$X_a = X_0 + X$$

Ajustamento: Método Paramétrico

PASSOS PARA RESOLVER METODO PARAMÉTRICO NÃO LINEAR

1. Modelo Matemático $\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$

2. Modelo linearizado por Taylor $\boldsymbol{A * X + L = V}$

   a) Calcular o vetor das observações aproximadas $\boldsymbol{L_0 = F(X_0)}$

   $$\boldsymbol{L = L_0 + L_b}$$

   b) Calcular a matriz A (derivadas parciais) $\boldsymbol{A = \frac{\partial F}{\partial X_a} |_{Xa - Xo}}$

   c) Calcular a matriz dos pesos

   d) Calcular as equações normais $N = A^T PA$ $U = A^T PL$

   $$\boldsymbol{X = -N^{-1} U}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

PASSOS PARA RESOLVER METODO PARAMÉTRICO NÃO LINEAR

e) Encontrar os parâmetros ajustados $\boldsymbol{X_a = X_0 + X}$

f) Obter a Matriz dos resíduos $\boldsymbol{V = A * X + L}$

g) Variância a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$) $$\boldsymbol{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u}}$$

h) Calcular MVC dos parâmetros ajustados $\sum_{Xa} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{N^{-1}}$

i) Calcular os valores observados ajustados $\boldsymbol{L_a = L_b + V}$

j) Analisar a qualidade do ajustamento: Teste de hipótese

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

Um fenômeno tem variação $\boldsymbol{y}$ linear com respeito a $\boldsymbol{x}$, representada pelo modelo matemático funcional $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$. O valor $\boldsymbol{y_i}$ foi observado para diferentes $\boldsymbol{x_i}$, conforme dados abaixo. A abcissa $\boldsymbol{x}$ é considerada isenta de erro. Calcular os valores ajustados dos parâmetros $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ da função linear

Para x	y medido
-6	0,10
-4	0,97
-2	2,06
0	3,11

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

a) Modelo matemático $L_a = L_b + V$

$$\boldsymbol{y = ax + b} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -6a + b &= 0{,}10 + v_1 \\ -4a + b &= 0{,}97 + v_2 \\ -2a + b &= 2{,}06 + v_3 \\ -0a + b &= 3{,}11 + v_4 \end{aligned}$$

b) Vetor das observações

$$L_b = \begin{bmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}97 \\ 2{,}06 \\ 3{,}11 \end{bmatrix}$$

Para x	y medido
-6	0,10
-4	0,97
-2	2,06
0	3,11

c) Matriz dos Pesos

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

d) Não tem Solução inicial aproximada: Modelo linear

e) Cálculo de $\boldsymbol{L}$

$$L = L_b = \begin{bmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}97 \\ 2{,}06 \\ 3{,}11 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

f) Matriz A

Equações

Parâmetros

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Equação 1} \\ \text{Equação 2} \\ \text{Equação 3} \\ \text{Equação 4} \end{array}$$

$$-6a + b = 0{,}10 + v_1$$
$$-4a + b = 0{,}97 + v_2$$
$$-2a + b = 2{,}06 + v_3$$
$$-0a + b = 3{,}11 + v_4$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

g) Equações Normais

$$N = A^T P A = \begin{bmatrix} 56,00 & -12,00 \\ -12,00 & 4,00 \end{bmatrix}$$

$$N = (A^T P A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,150 \\ 0,150 & 0,7000 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T P L = \begin{bmatrix} -8,600 \\ 6,240 \end{bmatrix} \qquad X = N^{-1} U = \begin{bmatrix} 0,506 \\ 3,078 \end{bmatrix}$$

h) Vetor dos Resíduos

$$V = AX + L$$

$$V = AX + (\cancelto{0}{L_o} - L_b) \qquad V = AX - L_b = \begin{bmatrix} -0,058 \\ 0,084 \\ 0,006 \\ -0,032 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

i) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{4-2} \qquad = 0{,}00574$$

j) MVC dos parâmetros ajustados

$$\sum_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}000287 & 0{,}000861 \\ 0{,}000861 & 0{,}004018 \end{bmatrix}$$

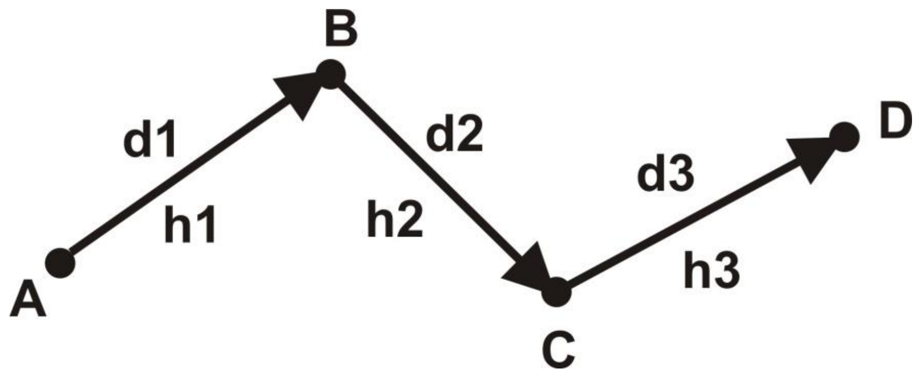
EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

Uma linha de nivelamento foi feita ligando dois pontos A e D de altitudes conhecidas H_A = 785,53m e H_D = 842,00m, conforme figura abaixo.

O sentido da seta indica a direção da estação mais elevada.

Os pesos das observações são inversamente proporcionais aos comprimentos das linhas. As observações não são correlacionadas.

Calcular as altitudes dos pontos B e C ajustadas usando ajustamento paramétrico.

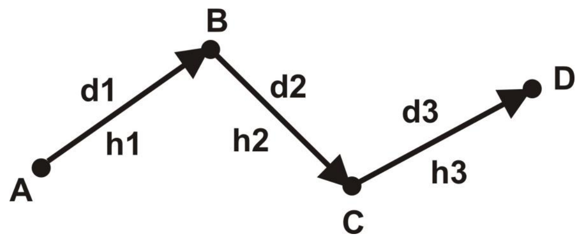


Seção	Desnível (m)	Distância (km)
AB = h_1	32,54	2,0
BC = h_2	5,93	1,0
CD = h_3	17,97	2,5

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

a) Modelo matemático

$$L_a = L_b + V \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} h_B^a - h_A &= 32{,}54 + v_1 \\ h_C^a - h_B^a &= 5{,}93 + v_2 \\ h_D - h_C^a &= 17{,}97 + v_3 \end{aligned}$$



b) Vetor das observações

$$L_b = \begin{bmatrix} 32{,}54 \\ 5{,}93 \\ 17{,}97 \end{bmatrix}$$

Seção	Desnível (m)	Distância (km)
AB = h_1	32,54	2,0
BC = h_2	5,93	1,0
CD = h_3	17,97	2,5

c) Matriz dos Pesos

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2{,}5 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

d) Solução inicial aproximada: Modelo linear

$$X_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_0 = F(X_0) = \begin{bmatrix} -785{,}53 \\ 0 \\ 842{,}00 \end{bmatrix}$$

e) Cálculo de $\boldsymbol{L}$

$$L = L_0 - L_b = \begin{bmatrix} -785{,}53 - 32{,}54 \\ -5{,}93 \\ 842{,}00 - 17{,}97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -818{,}07 \\ -5{,}93 \\ 824{,}03 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

f) Matriz A

Equações

Parâmetros

$$
A = \begin{array}{cc} h_B & h_C \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right] \end{array}
$$

Equação 1 $\quad h_B^a - h_A = 32{,}54 + v_1$

Equação 2 $\quad h_C^a - h_B^a = 5{,}93 + v_2$

Equação 3 $\quad h_D - h_C^a = 17{,}97 + v_3$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

g) Equações Normais

$$N = (A^T P A) = \begin{bmatrix} 1,5000 & -1,0000 \\ -1,0000 & 1,4000 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T P L = \begin{bmatrix} -403,1050 \\ -335,5420 \end{bmatrix} \qquad X = -N^{-1} U = \begin{bmatrix} 818,0809 \\ 824,0164 \end{bmatrix} m$$

h) Vetor dos Resíduos

$$V = AX + L \qquad = \begin{bmatrix} 1,0909 \\ 0,5455 \\ 1,3636 \end{bmatrix} * 10^{-2}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

i) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{3-2} = 1{,}6364 * 10^{-4}$$

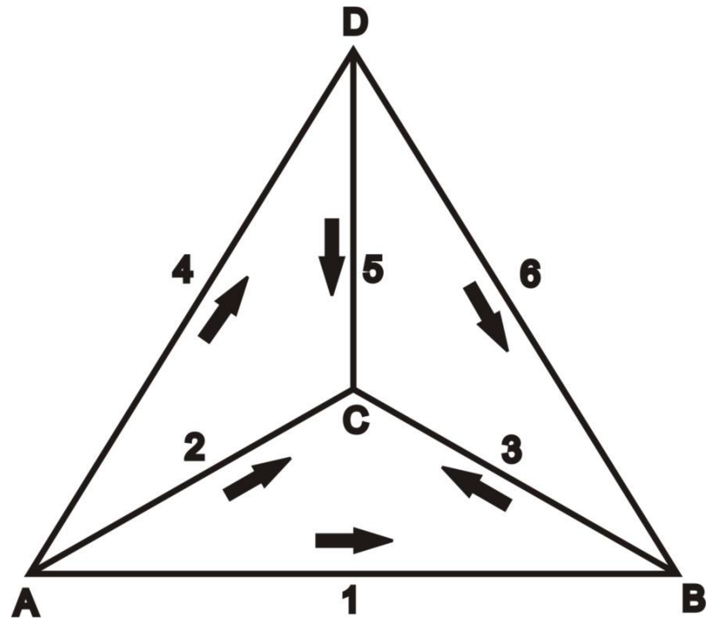
j) MVC dos parâmetros ajustados

$$\Sigma_X = \Sigma_{Xa} = \sigma_0^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}0826 & 1{,}4876 \\ 1{,}4876 & 2{,}2314 \end{bmatrix} * 10^{-4}$$

$$X_a = \begin{bmatrix} h_B^a \\ h_C^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 818{,}0809 \pm 0{,}0144 \\ 824{,}0164 \pm 0{,}0149 \end{bmatrix} m$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

O quadro e o esquema que se seguem resumem um nivelamento geométrico que partiu da referência de nível A, de altitude nula; as setas indicam o sentido em que o terreno se eleva.



Linha	Desnível (m)	Comprimento (km)
1	6,16	4
2	12,57	2
3	6,41	2
4	1,09	4
5	11,58	2
6	5,07	4

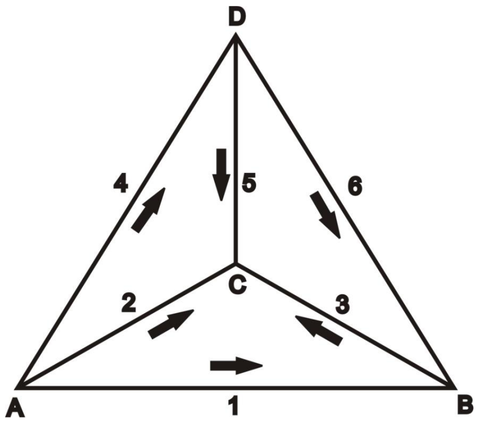
Estimar as altitudes das estações B, C e D pelo método dos parâmetros.

Obs.: Tomar pesos inversamente proporcionais ao comprimento das linhas

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

a) Modelo matemático

$$L_a = L_b + V \rightarrow \begin{aligned} h_B^a - \cancelto{0}{h_A} &= 6{,}16 + v_1 \\ h_C^a - \cancelto{0}{h_A} &= 12{,}57 + v_2 \\ h_C - h_B^a &= 6{,}41 + v_3 \\ h_D - \cancelto{0}{h_A^a} &= 1{,}09 + v_4 \\ h_C - h_D^a &= 11{,}58 + v_5 \\ h_B - h_D^a &= 5{,}07 + v_6 \end{aligned}$$



b) Vetor das observações

$$L_b = \begin{bmatrix} 6{,}16 \\ 12{,}57 \\ 6{,}41 \\ 1{,}09 \\ 11{,}58 \\ 5{,}07 \end{bmatrix}$$

Linha	Desnível (m)	Comprimento (km)
1	6,16	4
2	12,57	2
3	6,41	2
4	1,09	4
5	11,58	2
6	5,07	4

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

c) Matriz dos Pesos

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

d) Solução inicial aproximada: Modelo linear

$$X_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_0 = F(X_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Cálculo de $\boldsymbol{L}$

$$L = L_0 - L_b = \begin{bmatrix} 0 - 6,16 \\ 0 - 12,57 \\ 0 - 6,41 \\ 0 - 1,09 \\ 0 - 11,58 \\ 0 - 5,07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,16 \\ -12,57 \\ -6,41 \\ -1,09 \\ -11,58 \\ -5,07 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

f) Matriz A

$$
A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h_B & h_C & h_D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
h_B^a = 6{,}16 + v_1 \\
h_C^a = 12{,}57 + v_2 \\
h_C - h_B^a = 6{,}41 + v_3 \\
h_D = 1{,}09 + v_4 \\
h_C - h_D^a = 11{,}58 + v_5 \\
h_B - h_D^a = 5{,}07 + v_6
\end{array}
$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

g) Equações Normais

$$N = A^T P A \quad = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.25 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T P L = \begin{bmatrix} 0,3975 \\ -15,2800 \\ 6,7850 \end{bmatrix} \qquad X = -N^{-1} U = \begin{bmatrix} 6,16 \\ 12,59 \\ 1,05 \end{bmatrix} m$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

h) Vetor dos Resíduos

$$V = AX + L = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 2,0000 \\ 2,0000 \\ -4,0000 \\ -4,0000 \\ 4,0000 \end{bmatrix} * 10^{-2}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

i) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{6-3} \quad = 6{,}6667 * 10^{-4}$$

j) MVC dos parâmetros

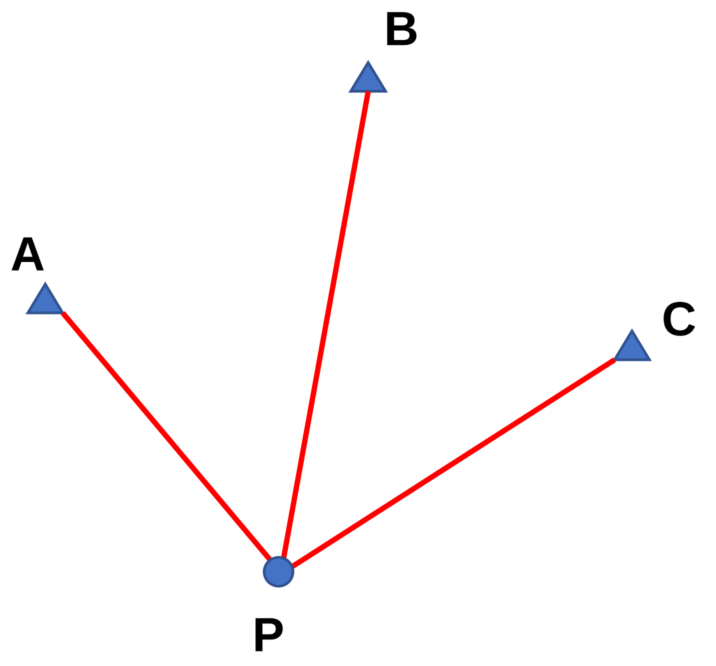
$$\sum_X = \sigma_0^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}0667 & 0{,}5333 & 0{,}5333 \\ 0{,}5333 & 0{,}8000 & 0{,}5333 \\ 0{,}5333 & 0{,}5333 & 1{,}0667 \end{bmatrix} * 10^{-3}$$

$$X_a = \begin{bmatrix} h_B^a \\ h_C^a \\ h_D^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}16 \pm 0{,}0327 \\ 12{,}59 \pm 0{,}0283 \\ 1{,}05 \pm 0{,}0327 \end{bmatrix} m$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

Determinar as coordenadas planas (x,y) do ponto P, a partir da medida de três distâncias de pontos conhecidos A, B e C, a P.

Ponto	X (m)	Y (m)
A	200,00	400,00
B	600,00	700,00
C	1100,00	300,00



Coordenadas aproximadas de
P = (585,00; 112,00) m

Distâncias medidas com $\sigma = 0{,}05$m

AP = 499,92 m

BP = 600,02 m

CP = 538,48 m

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

a) Modelo matemático

$$L_a = L_b + V \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} l_1^a &= l_1^b + v_1 = \sqrt{(X_A - X_P^a)^2 + (Y_A - Y_P^a)^2} \\ l_2^a &= l_2^b + v_2 = \sqrt{(X_B - X_P^a)^2 + (Y_B - Y_P^a)^2} \\ l_3^a &= l_2^b + v_3 = \sqrt{(X_c - X_P^a)^2 + (Y_C - Y_P^a)^2} \end{aligned}$$

b) Vetor das observações

$$L_b = \begin{bmatrix} 499{,}92 \\ 600{,}02 \\ 538{,}48 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

c) Matriz dos Pesos

$$P = \begin{bmatrix} 0.05^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0.05^{-2} \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

d) Solução inicial aproximada: Modelo linear

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_P^0 \\ y_P^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 585{,}00 \\ 112{,}00 \end{bmatrix}$$

$$L_0 = F(X_0)$$

e) Cálculo de $\boldsymbol{L}$

$$L_0 = \begin{array}{l} l_1^0 = \sqrt{(X_A - X_P^0)^2 + (Y_A - Y_P^0)^2} = 480{,}80 \\ l_2^0 = \sqrt{(X_B - X_P^0)^2 + (Y_B - Y_P^0)^2} = 588{,}19 \\ l_3^0 = \sqrt{(X_c - X_P^0)^2 + (Y_C - Y_P^0)^2} = 548{,}24 \end{array}$$

$$L = L_0 - L_b = \begin{bmatrix} -19{,}1126 \\ -11{,}8287 \\ 9{,}7617 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

f) Matriz A

$$\frac{\partial f_1}{\partial_{x_P}} = \frac{X_P^0 - X_A}{\sqrt{(X_A - X_P^0)^2 + (Y_A - Y_P^0)^2}} = \frac{585{,}00 - 200{,}00}{\sqrt{(200{,}00 - 585{,}00)^2 + (400{,}00 - 112{,}00)^2}} = 0{,}8007$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial_{x_P}} = \frac{Y_P^0 - Y_A}{\sqrt{(X_A - X_P^0)^2 + (Y_A - Y_P^0)^2}} = \frac{112{,}00 - 400{,}00}{\sqrt{(200{,}00 - 585{,}00)^2 + (400{,}00 - 112{,}00)^2}} = -0{,}5990$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{x_P} & \boldsymbol{y_P} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial_{x_P}} & \frac{\partial f_1}{\partial_{y_P}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial_{x_P}} & \frac{\partial f_2}{\partial_{y_P}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial_{x_P}} & \frac{\partial f_3}{\partial_{y_P}} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0{,}8007 & -0{,}5990 \\ -0{,}0255 & -0{,}9997 \\ -0{,}9394 & -0{,}3429 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

g) Equações Normais

$$N = A^T PA = \begin{bmatrix} 609{,}7030 & -52{,}8132 \\ -52{,}8132 & 590{,}2970 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T PL = \begin{bmatrix} -9671{,}2793 \\ 7972{,}0386 \end{bmatrix} \qquad X = -N^{-1}U = \begin{bmatrix} 14{,}8072 \\ -12{,}1803 \end{bmatrix}$$

h) Parâmetros ajustados

$$X_a = X_0 + X = \begin{bmatrix} 599{,}8072 \\ 99{,}8197 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

h) Vetor dos Resíduos

$$V = AX + L \quad = \begin{bmatrix} 0{,}0333 \\ -0{,}0299 \\ 0{,}0292 \end{bmatrix}$$

g) Observações ajustadas

$$L_a = L_b + V \quad = \begin{bmatrix} 499{,}9533 \\ 599{,}9901 \\ 538{,}5092 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

i) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{3-2} \quad = 1{,}1409$$

j) MVC dos parâmetros ajustados

$$\sum_{Xa} = \sigma_0^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}00189 & 0{,}00017 \\ 0{,}00017 & 0{,}00194 \end{bmatrix}$$

$$X_a = \begin{bmatrix} x_P^a \\ Y_P^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 599{,}8072 \pm 0{,}0434 \\ 99{,}8197 \pm 0{,}0441 \end{bmatrix}$$

Método Paramétrico – Iterações

Os **modelos matemáticos** que ocorrem com **maior frequência** em Geodesia, Topografia e Fotogrametria **são não lineares**

Linearização pelas series de Taylor

Matrizes de derivadas parciais são obtidas a partir das equações do modelo, calculadas em função dos **valores iniciais dos parâmetros** e dos valores observados

Introduzem erros

Refinamento

Método Paramétrico – Iterações

Os primeiros resultados funcionam com aproximações **“melhoradas”** → **1era iteração**

Processo que se repete até atingir um **ponto de convergência**

- ✓ rápida ou lenta
- ✓ oscilação em torno de um ponto
- ✓ divergência

Em aplicações geodésicas → **convergência é frequente com poucas iterações**.

Método Paramétrico – Iterações

Em aplicações **não lineares** de ajustamento por mínimos quadrados é necessário **introduzir iterações**

convergência

Critérios de convergência:

- ✓ Valores de Tolerância
- ✓ Número máximo de iterações

Método Paramétrico – Iterações

Explicação:

$$\boldsymbol{X_0}$$

$$L_0 = F(X_0)$$

$$A = F(X_0)$$

$$X_1 = -\,N^{-1}\,U$$

$$X_a^1 = X_0 + X_1$$

1eira iteração

Método Paramétrico – Iterações

Explicação:

$$\underbrace{\begin{array}{l} \boldsymbol{X_0} \\ L_0 = F(X_0) \\ A = F(X_0) \\ X_1 = -N^{-1}U \\ X_a^1 = X_0 + X_1 \end{array}}_{\text{1eira iteração}} \qquad \underbrace{\begin{array}{l} \boldsymbol{X_a^1} \\ L_0^1 = F(X_a^1) \\ A_1 = F(X_a^1) \\ X_2 = -N_2^{-1}U_2 \\ X_a^2 = X_a^1 + X_2 \end{array}}_{\text{2da iteração}}$$

Método Paramétrico – Iterações

Explicação:

$\boldsymbol{X_0}$	$\boldsymbol{X_a^1}$	$\boldsymbol{X_a^2}$
$L_0 = F(X_0)$	$L_0^1 = F(X_a^1)$	$L_0^2 = F(X_a^2)$
$A = F(X_0)$	$A_1 = F(X_a^1)$	$A_2 = F(X_a^2)$
$X_1 = -\,N^{-1}\,U$	$X_2 = -\,N_2^{-1}U_2$	$X_3 = -\,N_3^{-1}U_3$
$X_a^1 = X_0 + X_1$	$X_a^2 = X_a^1 + X_2$	$X_a^3 = X_a^2 + X_3$
1eira iteração	**2da iteração**	**3eira iteração**

Método Paramétrico – Iterações

Explicação:

$$\boldsymbol{X_a^n}$$

$$L_0^n = F(X_a^n)$$

$$A_{n+1} = F(X_a^2)$$

$$X_{n+1} = -\,N_{n+1}^{-1}U_{n+1}$$

$$X_a^{n+1} = X_a^n + X_{n+1}$$

n iterações

Método Paramétrico – Iterações

Como fazer um loop?

X $\rightarrow$ **vetor correção** | **n** $\rightarrow$ **número de iterações**

X $\rightarrow$ **0,000001** | **n** $\rightarrow$ **100**

X $\rightarrow$ abs(**±0,000001)** | **n** $\rightarrow$ **> 100**

X $\rightarrow$ max(abs(**±0,000001))** | **n** $\rightarrow$ **> = 100**

Método Paramétrico – Iterações

Como fazer um loop?

X → vetor correção ou n → número de iterações

Método Paramétrico – Iterações

Como fazer um loop?

X → vetor correção **ou** **n → número de iterações**

X → max**(**abs**(**±**0,000001)) ou n → > 100**

Método Paramétrico – Iterações

Como fazer um loop?

1

```
# dados

# matriz das observações
Lb =

# matriz dos pesos
P =

# matriz dos parâmetros iniciais
Xo =
```

Método Paramétrico – Iterações

Como fazer um loop?

1

```
# dados

# matriz das observações
Lb =

# matriz dos pesos
P =

# matriz dos parâmetros iniciais
Xo =
```

2

```
# ITERAÇÕES

nitera = 0
while True:
    print(f"\nIteração {nitera}")
    #vetor Lo
    Lo =
    # vetor L
    L =
    # Matriz Jacobiana
    A =
    # equações normais
    N =
    U =
    # vetor correção dos parametros
    X =
    # parâmetros ajustados
    Xo = Xo + X

    nitera += 1

    #Criterio de convergencia
    if nitera > 5:
        break
```

Método Paramétrico – Iterações

Calcule as coordenadas cartesianas de um receptor GPS, no WGS-84, relativas a um único instante de observação T, sendo dadas as coordenadas cartesianas de 4 satélites, no sistema WGS-84, no mesmo instante T, e as pseudo-distâncias (código C/A) observadas para os satélites. Calcule também os resíduos, o desvio padrão, a variância a posteriori, e o fator GDOP. Para efeito deste cálculo negligenciar os demais termos da equação da pseudo-distância.

Coordenadas XYZ aproximadas inicias da estação

X (m)	Y (m)	Z (m)
3764078	-4507379	-2483874

$$\text{Fator GDOP} = \sqrt{traço(N^{-1})}$$

Efemérides transmitidas dos satélites | **Pseudo-distâncias observadas**

ISV#	GPS time(s)	X (m)	Y (m)	Z (m)	(m)
3	21600,00	14205954,236	-4194834,743	-22400539,043	**22490085,705840**
17	21600,00	9056691,070	-16873854,251	-18641462,109	**21024011,346767**
20	21600,00	19430645,714	-17416883,593	4840946,756	**21581232,110490**
23	21600,00	17393573,455	-19867331,192	1287494,324	**20878563,742011**

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

a) Modelo matemático

$$L_a = L_b + V \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} l_1^a &= l_1^b + v_1 = \sqrt{(X_1 - X_P^a)^2 + (Y_1 - Y_P^a)^2 + (Z_1 - Z_P^a)^2} \\ l_2^a &= l_2^b + v_2 = \sqrt{(X_2 - X_P^a)^2 + (Y_2 - Y_P^a)^2 + (Z_2 - Z_P^a)^2} \\ l_3^a &= l_3^b + v_3 = \sqrt{(X_3 - X_P^a)^2 + (Y_3 - Y_P^a)^2 + (Z_3 - Z_P^a)^2} \\ l_4^a &= l_4^b + v_4 = \sqrt{(X_4 - X_P^a)^2 + (Y_4 - Y_P^a)^2 + +(Z_4 - Z_P^a)^2} \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

b) Vetor das observações

$$L_b = \begin{bmatrix} 22490085{,}705840 \\ 21024011{,}346767 \\ 21581232{,}110490 \\ 20878563{,}742011 \end{bmatrix}$$

c) Matriz dos Pesos

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

d) Solução inicial aproximada: Modelo linear

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_P^0 \\ y_P^0 \\ z_P^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3764078 \\ -4507379 \\ -2483874 \end{bmatrix}$$

$$L_0 = F(X_0)$$

e) Cálculo de $\boldsymbol{L}$

$$L_0 = \begin{array}{l} l_1^0 = \sqrt{(X_1 - X_P^a)^2 + (Y_1 - Y_P^a)^2 + (Z_1 - Z_P^a)^2} = 2{,}2490 * 10^7 \\ l_2^0 = \sqrt{(X_2 - X_P^a)^2 + (Y_2 - Y_P^a)^2 + (Z_2 - Z_P^a)^2} = 2{,}1024 * 10^7 \\ l_3^0 = \sqrt{(X_3 - X_P^a)^2 + (Y_3 - Y_P^a)^2 + (Z_3 - Z_P^a)^2} = 2{,}1581 * 10^7 \\ l_3^0 = \sqrt{(X_4 - X_P^a)^2 + (Y_4 - Y_P^a)^2 + +(Z_4 - Z_P^a)^2} = 2{,}0879 * 10^7 \end{array}$$

$$L = L_0 - L_b = \begin{bmatrix} 1{,}2143 \\ 1{,}5134 \\ 1{,}6791 \\ 1{,}7435 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

f) Matriz A

$$\frac{\partial f_1}{\partial_{x_P}} = \frac{X_P^0 - X_1}{\sqrt{(X_1 - X_P^a)^2 + (Y_1 - Y_P^a)^2 + (Z_1 - Z_P^a)^2}} = -0{,}4643$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial_{y_P}} = \frac{Y_P^0 - Y_1}{\sqrt{(X_1 - X_P^a)^2 + (Y_1 - Y_P^a)^2 + (Z_1 - Z_P^a)^2}} = -0{,}0139$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial_{Z_P}} = \frac{Z_P^0 - Z_1}{\sqrt{(X_1 - X_P^a)^2 + (Y_1 - Y_P^a)^2 + (Z_1 - Z_P^a)^2}} = 0{,}8856$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

f) Matriz A

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad\boldsymbol{x_P} & \qquad\boldsymbol{y_P} & \qquad\boldsymbol{z_P} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial_{x_P}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial_{y_P}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial_{Z_P}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial_{x_P}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial_{y_P}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial_{Z}} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial_{x_P}} & \dfrac{\partial f_3}{\partial_{y_P}} & \dfrac{\partial f_3}{\partial_{Z_P}} \\ \dfrac{\partial f_4}{\partial_{x_P}} & \dfrac{\partial f_4}{\partial_{y_P}} & \dfrac{\partial f_4}{\partial_{Z_P}} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} -0{,}4643 & -0{,}0139 & 0{,}8856 \\ -0{,}2517 & 0{,}5882 & 0{,}7685 \\ -0{,}7259 & 0{,}5982 & -0{,}3394 \\ -0{,}6528 & 0{,}7357 & -0{,}1806 \end{bmatrix}$$

2da iteração

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

g) Equações Normais

$$N = A^T PA = \begin{bmatrix} 1,2321 & -1,0561 & -0,2403 \\ -1,0561 & 1,2452 & 0,1038 \\ -0,2103 & 0,1038 & 1,5227 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T PL = \begin{bmatrix} -7,8833 \\ 6,3369 \\ 7,2935 \end{bmatrix} * 10^{-8} \qquad X = -N^{-1}U = \begin{bmatrix} 5,6956 * 10^{-8} \\ 6,6507 * 10^{-10} \\ -3,8955 * 10^{-8} \end{bmatrix}$$

h) Parâmetros ajustados

$$X_a = X_0 + X = \begin{bmatrix} 3764079,5943 \\ -4507380,1391 \\ -2483874,5596 \end{bmatrix}$$

2da iteração

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

i) Vetor dos Resíduos

$$V = AX + L = \begin{bmatrix} -0{,}00567 \\ 0{,}01186 \\ 0{,}03027 \\ -0{,}0342 \end{bmatrix}$$

j) Observações ajustadas

$$L_a = L_b + V = \begin{bmatrix} 22490085{,}70017 \\ 21024011{,}3586 \\ 21581232{,}1407 \\ 20878563{,}7078 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

k) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{3-2} \quad = 0{,}002259$$

l) MVC dos parâmetros ajustados

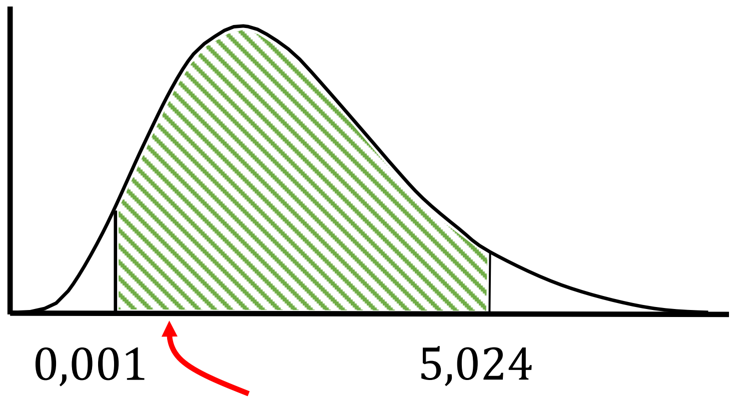
$$\sum_{Xa} = \sigma_0^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}00704 & 0{,}00591 & 0{,}00071 \\ 0{,}00591 & 0{,}00679 & 0{,}00047 \\ 0{,}00071 & 0{,}00047 & 0{,}00156 \end{bmatrix}$$

$$X_a = \begin{bmatrix} x_P^a \\ Y_P^a \\ Z_P^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3764079{,}5943 \pm 0{,}0839 \\ -4507380{,}1391 \pm 0{,}0824 \\ -2483874{,}5596 \pm 0{,}0395 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS: Método Paramétrico

m) Teste de hipótese: comparação entre σ_0^2 e $\hat{\sigma}_0^2$

Qualidade do ajustamento: Teste de hipótese



Hipótese básica H_0: $\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

Hipótese alternativa H_a: $\sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$

Cálculo ➔ $\chi^2 = \dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}(n-u) = \dfrac{V^T PV}{\sigma_0^2} = 0{,}002259$

Da tabela, exemplificando com α = 5% ➔ $\chi^2_{\nu;2,5\%} < \chi^2 < \chi^2_{\nu;97,5\%}$

$0{,}001 < \chi^2 < 5{,}024$

Nestas condições, a hipótese básica é aceita , ao nível de confiança 5%, e a qualidade do ajustamento é aceita