UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA

DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO 2 – GA110 A ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA

Prof. Dr. Mario Ernesto Jijón Palma
Departamento de Geomática
Setor de Ciências da Terra
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Método paramétrico $\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$

Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.

Método dos correlatos $\boldsymbol{F(L_a) = 0}$

Os valores observados ajustados devem satisfazer determinadas condições (erro de fechamento = zero).

Método combinado $\boldsymbol{F(L_a, X_a) = 0}$

Os valores observados ajustados e os parâmetros ajustados são ligados por função não explicita (não se consegue separa-los).

Ajustamento: Método Paramétrico

$$L_a = F(X_a)$$

- Método das observações indiretas, as grandezas buscadas (parâmetros) não são medidas diretamente, mas relacionadas matematicamente com outras que são medidas.

- Cada observação fornece uma equação. Se temos **n** observações, teremos **n** equações.

- Os parâmetros a estimar são representados por **u** variáveis.

Ajustamento: Método Paramétrico

Linear

Resolução direta (uma única etapa para encontrar a solução)

Não é necessário uma aproximação inicial

Exemplo: Nivelamento, Poligonais

Não Linear

Para resolver o sistema tem que se linearizar pela fórmula de Taylor.

Resolução Iterativa (requer um processo de repetição para encontrar a solução)

Necessita de uma aproximação inicial para começar o processo iterativo.

Exemplo: Ajustamento de redes geodésicas, fotogrametria, GPS.

Ajustamento: Método Paramétrico

$$L_a = F(X_a)$$

Sejam:

L_b = Vetor dos valores observados;
V = Vetor dos resíduos;
L_a = Vetor dos valores observados ajustados.

$$L_a = L_b + V$$

X_0 = Vetor com valores aproximados dos parâmetros;
X = Vetor correção;
X_a = Vetor dos parâmetros ajustados (um dos objetivos).

$$X_a = X_0 + X$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Linear

$$L_a = F(X_a)$$

$$X = \left(A^T * P * A\right)^{-1} * \left(A^T * P * L_b\right)$$

$$N = \left(A^T * P * A\right)$$

$$U = \left(A^T * P * L_b\right)$$

Ajustamento: Método Paramétrico

PASSOS PARA RESOLVER METODO PARAMÉTRICO LINEAR

a) Modelo Matemático $\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$ $\boldsymbol{L_a = L_b + V}$

b) Matriz das observações $\boldsymbol{L_b}$

c) Calcular a matriz dos pesos $\boldsymbol{P}$

d) Calcular o vetor das observações aproximadas: modelo linear

$$\boldsymbol{X_0 = 0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{L_0 = F(X_0)}$$

e) Calcular a matriz $\boldsymbol{L = L_0 + L_b}$

f) Calcular a matriz A (derivadas parciais) $\boldsymbol{A = \frac{\partial F}{\partial X_a}|_{Xa-Xo}}$

g) Calcular as equações normais $N = A^T PA$ $U = A^T PL$

$$\boldsymbol{X = N^{-1}U}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

PASSOS PARA RESOLVER METODO PARAMÉTRICO LINEAR

h) Obter a Matriz dos resíduos $\boldsymbol{V = A * X + L}$

i) Variância a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$) $\boldsymbol{\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{V^T P V}{n - u}}$

j) Calcular MVC dos parâmetros ajustados $\sum_X = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{N^{-1}}$

Ajustamento: Método Paramétrico

Não Linear

$$\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$$

$$\boldsymbol{L_a = L_b + V}$$

$$\boldsymbol{X_a = X_0 + X}$$

$$\boldsymbol{L_b + V = F(X_0 + X)}$$

Substituindo o primeiro membro e linearizando o segundo por Taylor:

$$L_b + V = F(X_0 + X) = F(X_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a = X_0} * X$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Não Linear

$$L_b + V = F(X_0 + X) = F(X_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a = X_0} * X$$

Designando a função dos parâmetros aproximados: $L_0 = F(X_0)$

e a matriz das derivadas parciais $A = \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a = X_0}$

tem-se: $L_b + V = L_0 + AX$ ou $V = AX + L_0 - L_b$

Fazendo-se: $L = L_0 - L_b$

Obtem-se o modelo linearizado do método paramétrico

$$\boldsymbol{{}_nV_1 = {}_nA_u\, {}_uX_1 + {}_nL_1}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Não Linear

$$_{n}\boldsymbol{V}_{1} = \, _{n}\boldsymbol{A}_{u} \, _{u}\boldsymbol{X}_{1} + \, _{n}\boldsymbol{L}_{1}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{a2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{au}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{a2}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{au}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{a2}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{au}} \end{bmatrix}_{x_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

O índice na parte inferior direita da matriz dos coeficientes das incógnitas lembra que as derivadas parciais são calculadas numericamente com os valores aproximados das incógnitas.

Ajustamento: Método Paramétrico

Considerações sobre a Matriz dos Pesos

Quando as observações não oferecem o mesmo “grau de confiança”, podemos “homogeneizá-las” multiplicando-as por “pesos”

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum L_b$$

Se a matriz Q for não singular (inversível) admitirá uma inversa

$$Q^{-1} = \sigma_0^2 \sum L_b^{-1} = P$$

que recebe o nome de matriz dos pesos.

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Equações normais

Minimizando a forma quadrática fundamental, obtemos sucessivamente:

$$\varphi = V^T P V = \min \qquad \text{onde: } \boldsymbol{V} = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} + \boldsymbol{L}$$

$$\varphi = (AX + L)^T P (AX + L) = \min$$

$$\varphi = (X^T A^T + L^T) P (AX + L) = X^T A^T P A X + X^T A^T P L + L^T P A X + L^T P L = \min$$

onde: $X^T A^T P L = L^T P A X$

$$\varphi = X^T A^T P A X + 2 X^T A^T P L + L^T P L = \min$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Equações normais

$$\varphi = X^T A^T P A X + 2X^T A^T P L + L^T P L = \min$$

Igualando a zero a derivada primeira em relação a X:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} = 2A^T P A X + 2A^T P L = 0$$

$$2A^T P A X + 2A^T P L = 0$$

$$\boldsymbol{X = -(A^T P A)^{-1}.(A^T P L)}$$

Fazendo: $N = A^T P A$ e $U = A^T P L$ ➔ $\boldsymbol{X = -N^{-1} U}$

cujas componentes convertem os parâmetros aproximados em ajustados:

$$\boldsymbol{X_a = X_0 + X}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Matriz variância – covariância (MVC)

Antes do ajustamento necessitamos estimar a precisão das medidas efetuadas para compor a MVC dos valores observados ($\sum \boldsymbol{L_b}$) , onde

$$P = \sigma_0^2 * \sum L_b^{-1}$$

Após o ajustamento podemos estimar a variância da unidade de peso (variância a posteriori) e MVC das variáveis aleatórias envolvidas no processo

$$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X_a}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{L_a}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

MVC das correções $\sum_X$

Sabendo que:

$$X = -N^{-1}U = -N^{-1}A^TPL = -N^{-1}A^TP(L_0 - L_b) \;\; ➔ \;\; X = -N^{-1}A^TPL_0 + N^{-1}A^TPL_b$$

Aplicando a lei de propagação das covariâncias $\sum_X = G\sum L_b G^T$

com $G = N^{-1}A^TP$

(P e N^{-1} são matrizes simétricas) $G^T = P^TAN^{-1} = PAN^{-1}$

Subtituindo na equação anterior $\sum_X = (N^{-1}A^TP)\sum L_b(PAN^{-1})$

$$\sum_X = (N^{-1}A^TP)\sigma_0^2P^{-1}(PAN^{-1}) = \sigma_0^2N^{-1}A^TPAN^{-1} = \sigma_0^2N^{-1}NN^{-1}$$

$$\boldsymbol{\sum_X = \sigma_0^2N^{-1}}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

MVC dos parâmetros ajustados $\sum_{Xa}$

Temos que: $X_a = X_0 + X$ Como o vetor X_0 é constante, então $\sum_{Xa} = \sum_X = \boldsymbol{\sigma_0^2 N^{-1}}$

MVC dos valores observados ajustados $\sum_{La}$

$L_a = L_b + V = L_b + AX + L = L_b + AX + L_0 - L_b$ Temos que: $L_a = AX + L_0$

Aplicando a lei de propagação de covariância (LPC):

$$\sum_{La} = A\sum_X A^T = \boldsymbol{\sigma_0^2(AN^{-1}A^T)}$$

MVC dos resíduos $\sum_V$

Temos que: $V = L_a - L_b$ Aplicando LPC: $\sum_V = \sum_{L_a} - \sum_{L_b} = \sigma_0^2(AN^{-1}A^T) - \sigma_0^2 P^{-1}$

$$\sum_V = \boldsymbol{\sigma_0^2(AN^{-1}A^T - p^{-1})}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Variância a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^2 = \frac{\boldsymbol{V^T P V}}{\boldsymbol{S}}$$

Sabendo que:

$$\boldsymbol{S = n - u}$$

$\boldsymbol{n}$ = equações de observação

$\boldsymbol{u}$ = parâmetros

$\boldsymbol{S}$ = graus de liberdade

Resultando em:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^2 = \frac{\boldsymbol{V^T P V}}{\boldsymbol{n - u}}$$

$$V^T P V = X^T U + L^T P L$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Análise da Variância a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^2 = \frac{\boldsymbol{V^T P V}}{\boldsymbol{S}}$$

Comparação entre σ_0^2 e $\hat{\sigma}_0^2$

Se $\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$ ➔ **A qualidade das observações é pior do que a suposta. Observações foram superestimadas!**

Se $\hat{\sigma}_0^2 < \sigma_0^2$ ➔ **A qualidade das observações é melhor do que a suposta. Observações foram subestimadas!**

Ajustamento: Método Paramétrico

Análise da Variância a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^2 = \frac{\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{V}}{\boldsymbol{S}}$$

No início de um ajustamento arbitramos, por exemplo, $\sigma_0^2 = 1$ após o ajustamento obtemos, digamos, $\hat{\sigma}_0^2 = 1{,}9$

Comparação entre $\sigma_0^2 = 1$ e $\hat{\sigma}_0^2 = 1{,}9$

A qualidade das observações foi superestimada.

Ajustamento: Método Paramétrico

Se houver discrepância, aplica-se um teste de hipótese baseado na distribuição de χ^2 para constatar se a discrepância é significativa a um certo nível de confiança.

Qualidade do ajustamento: Teste de hipótese

Hipótese nula $\quad H_0: \quad \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

Hipótese alternativa $\quad H_a: \quad \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$

Cálculo ➔ $$\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}(n-u) = \frac{\mathrm{V}^{\mathrm{T}}PV}{\sigma_0^2}$$

Da tabela, exemplificando com α = 5% ➔ $\chi^2_{\nu;2,5\%} < \chi^2 < \chi^2_{\nu;97,5\%}$

Nestas condições, a hipótese básica é aceita , ao nível de confiança 5%, e a qualidade do ajustamento é aceita

Ajustamento: Método Paramétrico

PASSOS PARA RESOLVER METODO PARAMÉTRICO NÃO LINEAR

1. Modelo Matemático $\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$

2. Modelo linearizado por Taylor $\boldsymbol{A * X + L = V}$

a) Calcular o vetor das observações aproximadas $\boldsymbol{L_0 = F(X_0)}$

$$\boldsymbol{L = L_0 + L_b}$$

b) Calcular a matriz A (derivadas parciais) $\boldsymbol{A = \frac{\partial F}{\partial X_a}|_{Xa-Xo}}$

c) Calcular a matriz dos pesos

d) Calcular as equações normais $N = A^T P A$ $U = A^T P L$

$$\boldsymbol{X = -N^{-1} U}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

PASSOS PARA RESOLVER METODO PARAMÉTRICO NÃO LINEAR

e) Encontrar os parâmetros ajustados $\boldsymbol{X_a = X_0 + X}$

f) Obter a Matriz dos resíduos $\boldsymbol{V = A * X + L}$

g) Variância a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$) $\boldsymbol{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u}}$

h) Calcular MVC dos parâmetros ajustados $\sum_{\boldsymbol{Xa}} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{N^{-1}}$

i) Calcular os valores observados ajustados $\boldsymbol{L_a = L_b + V}$

j) Analisar a qualidade do ajustamento: Teste de hipótese