UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA

DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO 2 – GA110 A ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA

Prof. Dr. Mario Ernesto Jijón Palma
Departamento de Geomática
Setor de Ciências da Terra
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Por que "ajustar" observações?

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

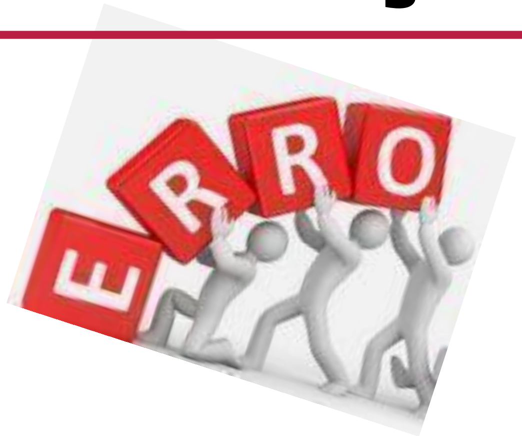
Por que "ajustar" observações?

Não existe observação exata e todas as medidas estão afetadas por erros!

Toda observação está sujeita a erros de medição

Erro = Valor Medido – Valor Verdadeiro

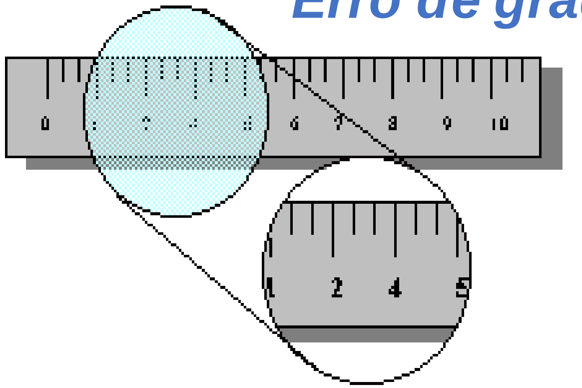
Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:



Quais são as causas?

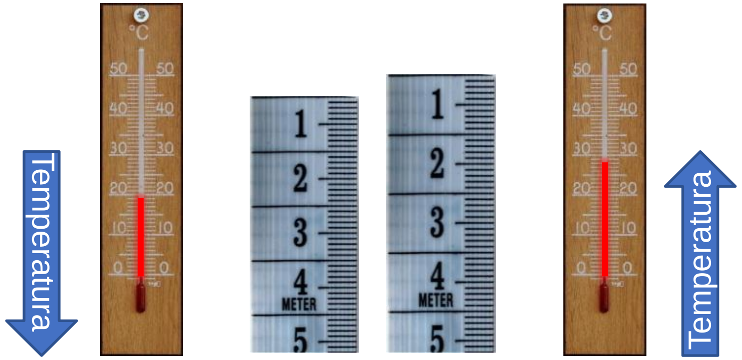
Falhas humanas	Limitações dos equipamentos	Condições ambientais variáveis

Erro de graduação



Fonte: Veiga, Zanetti & Faggion (2021)

Dilatação



Fonte: Oliveira Júnior (2021)

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Fontes de Erros

- Erros Instrumentais
- Erros Naturais / Ambientais
- Erros Pessoais / Humanos

→

Classificação dos Erros de Observação

- Erros Grosseiros
- Erros Sistemáticos
- Erros Acidentais ou Aleatórios

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Erros Grosseiros

Causados por **distrações ou falhas humanas**.
Ex: leitura incorreta de um instrumento ou anotação errada.

Erros Sistemáticos

Erros repetitivos e previsíveis, ligados ao instrumento ou medição.
Ex: equipamento mal calibrado

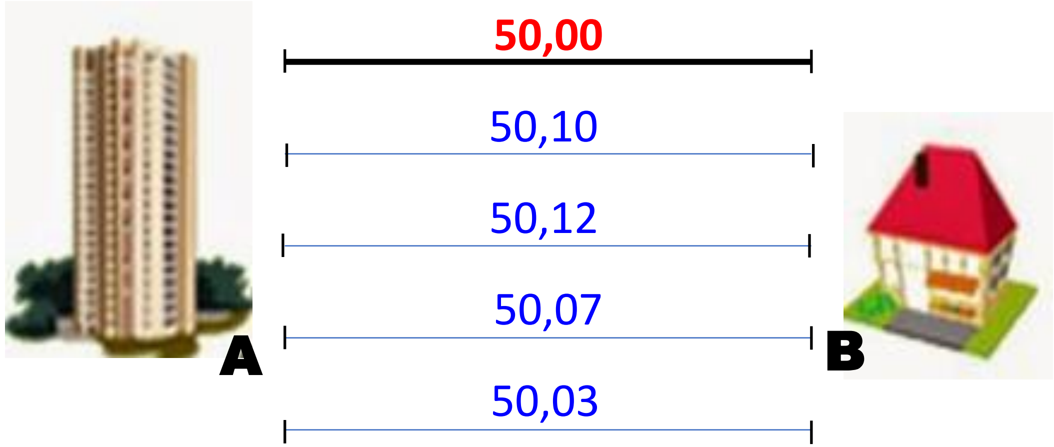
Erros Acidentais ou Aleatórios

Resultam de variações imprevisíveis no processo de medição.
Ex: pequenas oscilações ambientais, como vento ou temperatura

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Por que “ajustar” observações?

Medida única ≠ Medida confiável



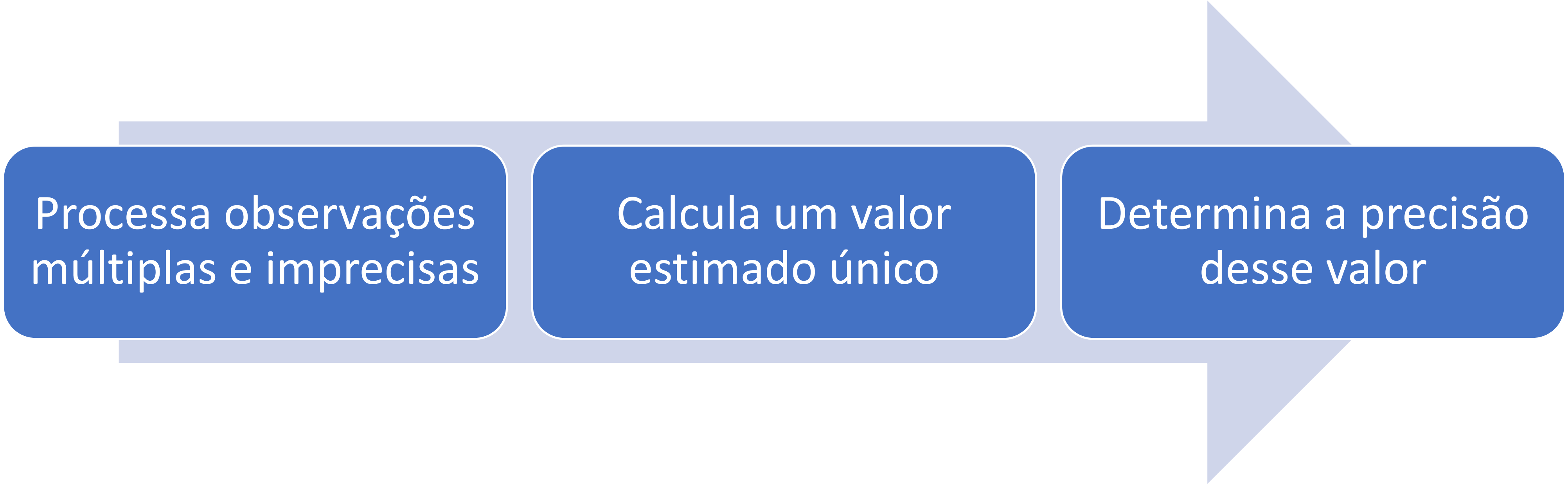
A confiança em uma única medida é baixa.

Por isso, realizamos múltiplas observações da mesma grandeza.

O **ajustamento das observações** busca determinar um **valor único e confiável para uma grandeza medida**, a partir de dados imprecisos, além de **estimar a precisão** desse resultado.

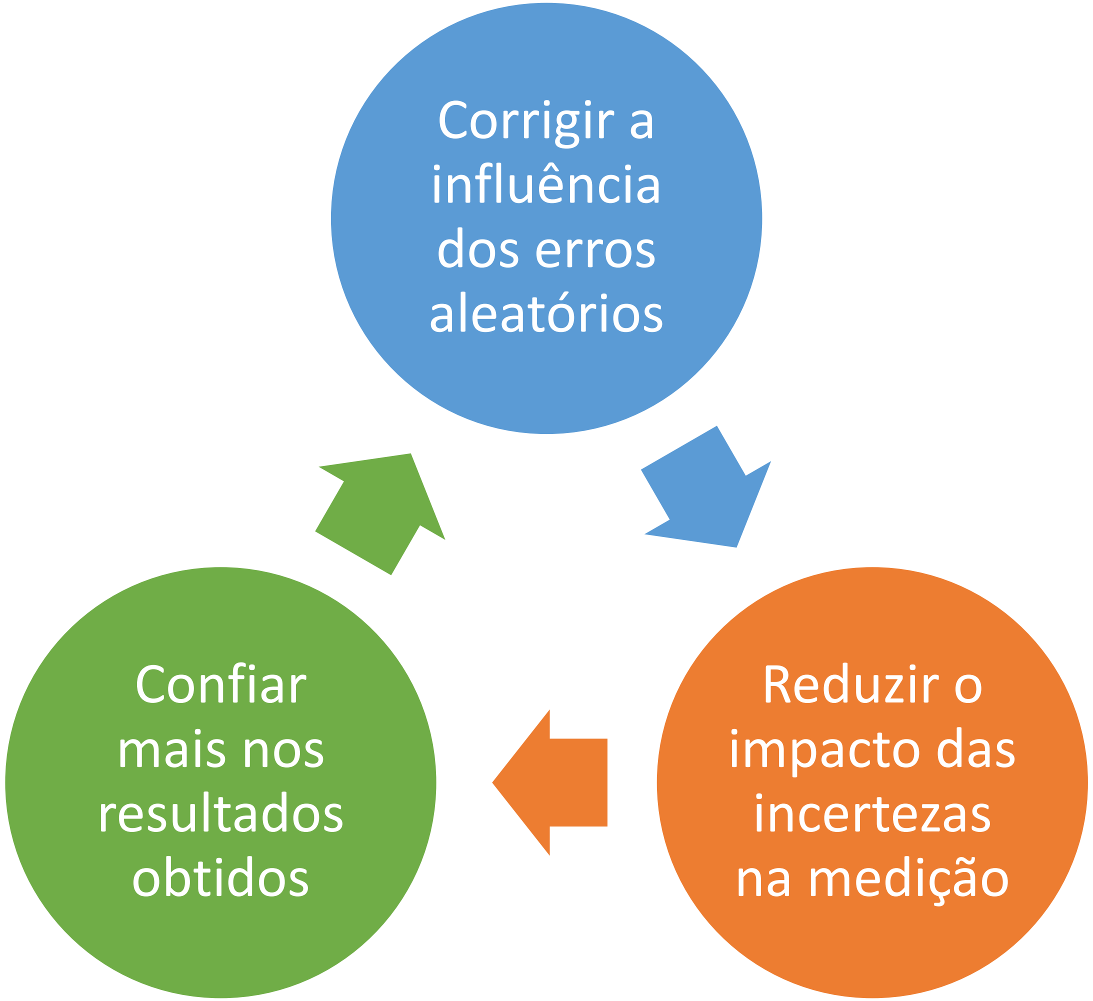
Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

O que o Ajustamento faz?



Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

O que o Ajustamento permite?



Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

O Ajustamento é uma técnica da matemática aplicada que tem por objetivo a solução única para problemas onde o número de observações é superabundante e o sistema de equações é inconsistente.

dados redundantes e imperfeitos → resultados coerentes e confiáveis

Exemplos:

Ajustamento em Redes de Nivelamento

Situação:

A altitude do ponto A pode ser transportada até o ponto L.

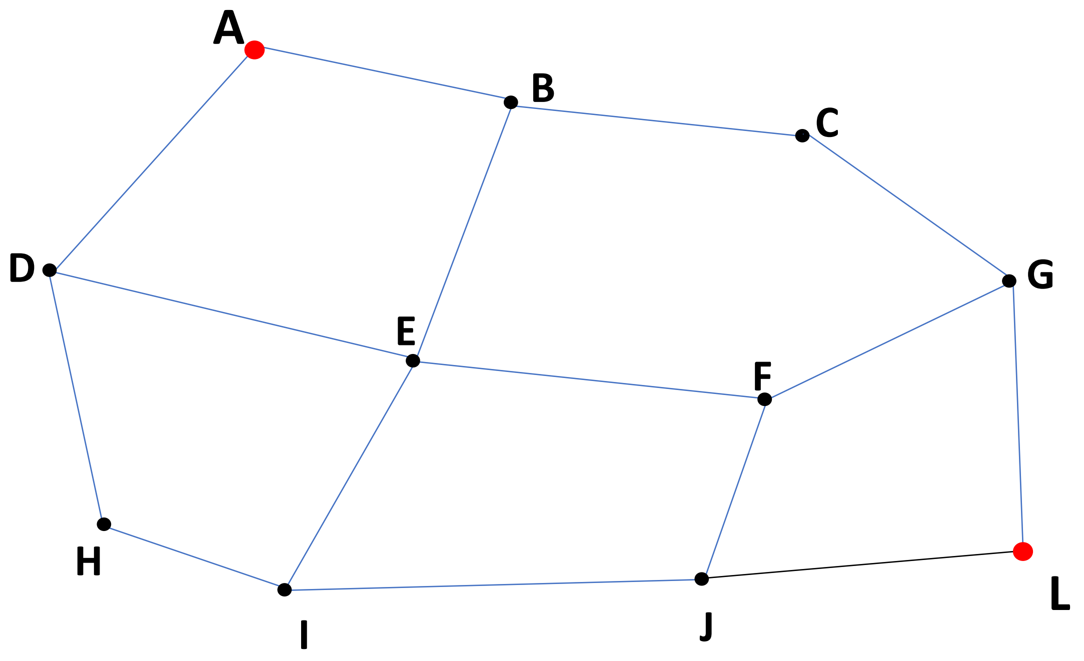
O problema:

Como há múltiplos caminhos, surgem várias soluções diferentes para a altitude de L.

A solução:

Unificar os resultados em uma solução única e coerente. Tornar os desníveis medidos compatíveis com um modelo matemático.

Ajustamento das observações

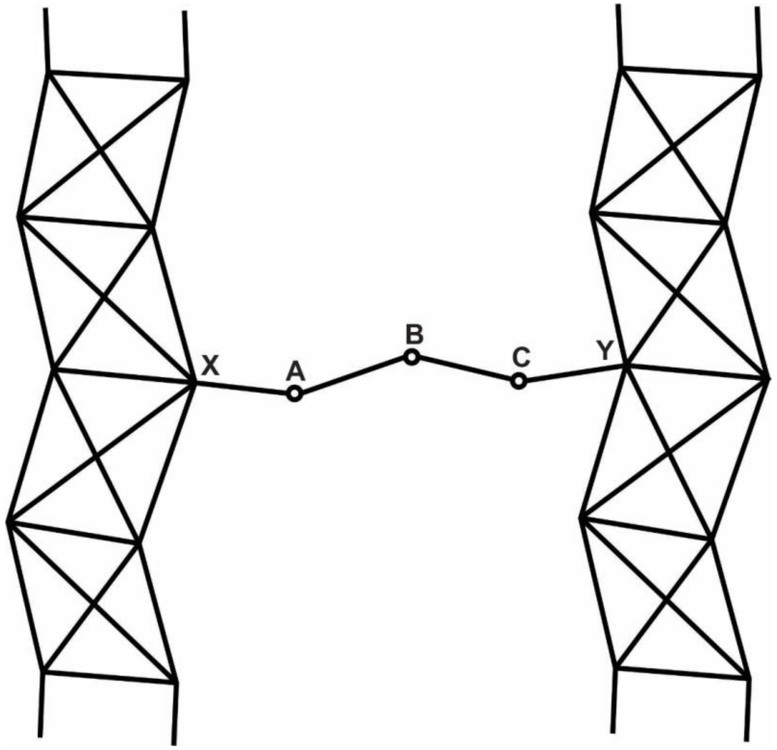


Exemplos:

Ajustamento em Poligonais com Pontos Fixos

Situação:

- Pontos X e Y pertencem a uma cadeia de triangulação já ajustada → suas coordenadas são consideradas fixas.
- Na poligonal XABCY, são medidos os lados e as direções (ângulos).



O problema:

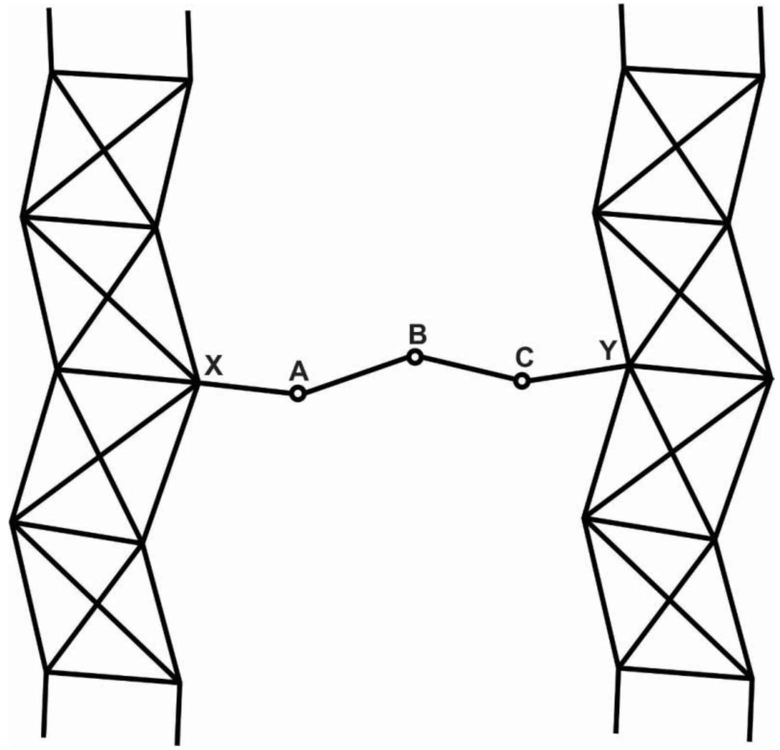
Mesmo que as observações sejam ideais e isentas de erros, as coordenadas transportadas de X até Y podem não fechar corretamente.

Exemplos:

Ajustamento em Poligonais com Pontos Fixos

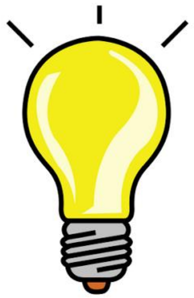
A solução:

- O ajustamento modifica os valores observados, mesmo que estejam corretos individualmente.
- O objetivo é garantir o fechamento geométrico em Y, respeitando um modelo matemático coerente.



Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

É importante, lembrar que o **Ajustamento de Observações** só faz sentido quando se dispõe de **observações redundantes.**



$$\begin{cases} 5x + y - 2z = -1 \\ x - y + 5z = 3 \\ 7x - y + z = -8 \\ 3x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

Estimar os valores mais prováveis e **compatíveis com um modelo matemático**, reduzindo os efeitos dos erros aleatórios.

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Método de Mínimos Quadrados (M.M.Q)

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Método de Mínimos Quadrados (M.M.Q)

Estimar variáveis estocásticas X e seus parâmetros de distribuição Σ_X, a partir de amostras L observadas com precisão Σ_L.

X : Variáveis estocásticas a serem estimadas (ex: coordenadas, altitudes)

Σ_X : Precisão ou incerteza (variância) associada às estimativas de X

L : Observações realizadas (ex: ângulos, distâncias, desníveis medidos)

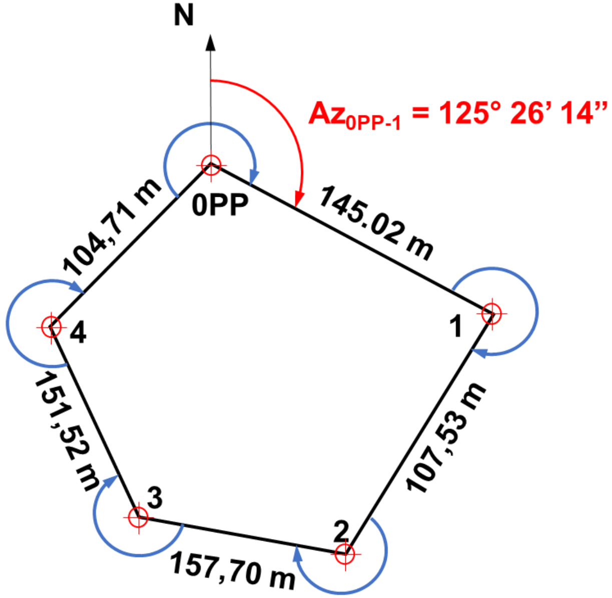
Σ_L : Precisão das observações (ex: erro dos instrumentos)

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Método de Mínimos Quadrados (M.M.Q)

Na topografia:

- Queremos encontrar a **coordenada de um ponto** X.
- Medimos distâncias e ângulos (L), com instrumentos que têm precisão conhecida (Σ_L).



Com base nessas observações, estimamos:

- A **posição mais provável** do ponto X.
- E a **precisão dessa posição** (Σ_X)

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Considerando que a medida de uma grandeza $\boldsymbol{X}$, sejam:

$$\boldsymbol{l_1, l_2, l_3, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . l_n}$$ $\Rightarrow$ os valores obtidos em $\boldsymbol{n}$ observações.

Na impossibilidade de obtermos o valor verdadeiro de $\boldsymbol{X}$, nos contentamos com uma estimativa na qual possamos confiar.

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Adotamos com base num certo critério, para o valor de $\boldsymbol{X}$ e calculamos as diferenças:

$$\left.\begin{array}{l} x - l_1 = v_1 \\ x - l_2 = v_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x - l_n = v_n \end{array}\right\} x - l_i = \boldsymbol{v_i} \qquad \boldsymbol{i} = 1,2,3,\dots n$$

os $\boldsymbol{v_i}$ são os resíduos, isto é, os valores a priori desconhecidos que somados às observações reproduzem o valor escolhido $\boldsymbol{X}$

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Mudando o critério para a escolha de $\boldsymbol{X}$, escolhemos um valor $\boldsymbol{X'}$, o que resultará em um novo conjunto de observações.

$$\boldsymbol{x' - l_i = v_i}$$

Se mudamos de critério outra vez, teríamos outro novo conjunto de observações

$$\boldsymbol{x'' - l_i = v''_i}$$

Assim por diante

$$\boldsymbol{x''' - l_i = v'''_i}$$

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

A questão é qual dos valores $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}'', \boldsymbol{X}''',\dots$ adotar?

Como escolher um critério que permita, das observações $\boldsymbol{l_i}$ discrepantes entre si, extrair um valor único para representar a incógnita $\boldsymbol{X}$

O caminho indicado por GAUSS e LEGENDRE é:

Aceitar como melhor estimativa de $\boldsymbol{X}$ o valor que torna mínimo a soma dos quadrados dos resíduos.

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Condição do Método de Mínimos Quadrados

Torna mínimo a soma dos quadrados dos resíduos.

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = mínimo$$

Quando as observações não oferecem o mesmo grau de confiança são homogeneizadas através de pesos $\boldsymbol{p_i}$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = mínimo$$

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Condição do Método de Mínimos Quadrados

Expressa de forma matricial

$$V^T V = mínimo$$

$$V^T P\,V = mínimo$$

Onde: $\boldsymbol{V}$ é o vetor coluna de resíduos

$$V = [v_1, v_2, v_3, \ldots\ v_n]^T$$

$\boldsymbol{P}$ é a matriz simétrica dos pesos

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$$

$\boldsymbol{A}$: Matriz dos coeficientes ou matriz das derivadas parciais

$\boldsymbol{X}$: Matriz das incógnitas

$\boldsymbol{L}$: Matriz dos termos independentes

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

Quando temos o mesmo número de equações que as incógnitas

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} * \boldsymbol{L}$$

Método dos Mínimos Quadrados (MMQ):

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

Quando o número de equações é maior do que as incógnitas

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}} * \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{L}\right)$$

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

A partir de observações redundantes sujeitas a flutuações probabilísticas e de uma estimativa de sua precisão o **AJUSTAMENTO** tem por objetivo:

a) Estimar mediante aplicação de modelos matemáticos adequados e do MMQ, um valor único para cada uma das incógnitas do problema;

b) Estimar a precisão de tais incógnitas e a eventual correlação entre elas.

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dado o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X = A^{-1} * L}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

a) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 3

b) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 4

c) Sistema composto pelas equações 1, 3 e 4

d) Sistema composto pelas equações 2, 3 e 4

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

a) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 3

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X} = \;?$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

a) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 3

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X = A^{-1} * L}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

a) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 3

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = A^{-1} * L}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

a) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = A^{-1} * L}$$

```
# bibliotecas
import numpy as np

#SISTEMA EQUAÇÕES 1,2 E 3
# matriz A
A = np.array([
[1, 2, -2],
[3, -2, 1],
[2, -3, 2]
])
```

```
# matriz das observações L
L = np.array([
[-1],
[2],
[2]
])
```

```
# Calculando a matriz inversa
A_inv = np.linalg.inv(A)

# matriz das incógnitas
X = np.dot(A_inv, L)

X = A_inv @ L
```

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

a) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 3

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1{,}000 \\ 2{,}000 \\ 3{,}000 \end{bmatrix}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

b) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 4

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X} =$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

b) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 4

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X = A^{-1} * L}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

b) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 4

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0,8667 \\ 1,5333 \\ 2,4667 \end{bmatrix}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

c) Sistema composto pelas equações 1, 3 e 4

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X} = ?$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

c) Sistema composto pelas equações 1, 3 e 4

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X = A^{-1} * L}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

c) Sistema composto pelas equações 1, 3 e 4

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0{,}8571 \\ 2{,}5714 \\ 2{,}5000 \end{bmatrix}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

d) Sistema composto pelas equações 2, 3 e 4

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X} = ?$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

d) Sistema composto pelas equações 2, 3 e 4

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X = A^{-1} * L}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Aplicando MMQ para resolver o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos ➔

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0{,}8889 \\ 1{,}5556 \\ 2{,}4444 \end{bmatrix}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

A questão é qual dos valores $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}'', \boldsymbol{X}''',....$ adotar?

a) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 3 $\quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 2,000 \\ 3,000 \end{bmatrix}$

b) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 4 $\quad \boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} 0,8667 \\ 1,5333 \\ 2,4667 \end{bmatrix}$

c) Sistema composto pelas equações 1, 3 e 4 $\quad \boldsymbol{X}'' = \begin{bmatrix} 0,8571 \\ 1,5714 \\ 2,5000 \end{bmatrix}$

d) Sistema composto pelas equações 2, 3 e 4 $\quad \boldsymbol{X}''' = \begin{bmatrix} 0,8889 \\ 1,5556 \\ 2,4444 \end{bmatrix}$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{A * X = L}$$

$$\boldsymbol{X = \left(A^T * A\right)^{-1} * \left(A^T * L\right)}$$

O Método dos Mínimos Quadrados: Exemplo

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{A}\right)^{-\mathbf{1}} * \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{L}\right)$$

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{0,8668} \\ \mathbf{1,5527} \\ \mathbf{2,4771} \end{bmatrix}$$

Introdução ao Ajustamento pelo MMQ:

Resumindo ...

A partir de observações redundantes sujeitas a flutuações probabilísticas e de uma estimativa de sua precisão o **AJUSTAMENTO pelo MMQ** tem por objetivo:

a) Estimar mediante aplicação de modelos matemáticos adequados e do MMQ, um valor único para cada uma das incógnitas do problema;

b) Estimar a precisão de tais incógnitas e a eventual correlação entre elas.