UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA

DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO 2 – GA110 A ENGENHARIA CARTOGRÁFICA E DE AGRIMENSURA

Prof. Dr. Mario Ernesto Jijón Palma
Departamento de Geomática
Setor de Ciências da Terra
Universidade Federal do Paraná - UFPR

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

A partir de **observações redundantes** sujeitas a flutuações probabilísticas e de uma estimativa de sua precisão o **AJUSTAMENTO** tem por objetivo:

a) **Estimar mediante aplicação de modelos matemáticos** adequados e do **MMQ**, **um valor único** para cada uma das incógnitas do problema;

b) **Estimar a precisão** de tais incógnitas e a eventual correlação entre elas.

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Condição do Método de Mínimos Quadrados

Torna mínimo a soma dos quadrados dos resíduos.

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = mínimo$$

Quando as observações não oferecem o mesmo grau de confiança são homogeneizadas através de pesos p_i

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = mínimo$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Condição do Método de Mínimos Quadrados

Expressa de forma matricial

$$V^T V = mínimo$$

$$V^T P\, V = mínimo$$

Onde: $\boldsymbol{V}$ é o vetor coluna de resíduos

$$V = [v_1, v_2, v_3, \dots\ v_n]^T$$

$\boldsymbol{P}$ é a matriz simétrica dos pesos

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$$

$\boldsymbol{A}$ **:** Matriz dos coeficientes ou matriz das derivadas parciais

$\boldsymbol{X}$ **:** Matriz das incógnitas

$\boldsymbol{L}$ **:** Matriz dos termos independentes

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

Quando temos o mesmo número de equações que as incógnitas

$$\boldsymbol{X = A^{-1} * L}$$

Quando o número de equações é maior do que as incógnitas

$$\boldsymbol{X = \left(A^{T} * A\right)^{-1} * \left(A^{T} * L\right)}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

dados redundantes e imperfeitos → resultados **coerentes e confiáveis**

O Ajustamento é uma técnica da matemática aplicada que tem por objetivo a solução única para problemas onde o número de observações é superabundante e o sistema de equações é inconsistente.

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ resolver o sistemas de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \\ x + 2y + z = 12 \\ 4x + 3y + 4z = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 20 \\ -y - z = -7 \end{cases}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ resolver o sistemas de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \\ x + 2y + z = 12 \\ 4x + 3y + 4z = 33 \end{cases}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ resolver o sistemas de equações

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ 2x+y+z=11 \\ x+2y+z=12 \\ 4x+3y+4z=33 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L=\begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 12 \\ 33 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ resolver o sistemas de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \\ x + 2y + z = 12 \\ 4x + 3y + 4z = 33 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 12 \\ 33 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{A * X = L}$$

$$\boldsymbol{X = \left(A^T * A\right)^{-1} * \left(A^T * L\right)}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{A}\right)^{-\boldsymbol{1}} * \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{L}\right)$$

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{T} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{T} * \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 12 \\ 33 \end{bmatrix}\right)$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{A}\right)^{-\mathbf{1}} * \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{L}\right)$$

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 12 \\ 33 \end{bmatrix}\right)$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{2,000} \\ \mathbf{3,000} \\ \mathbf{4,000} \end{bmatrix}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ resolver o sistemas de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 20 \\ -y - z = -7 \end{cases}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ resolver o sistemas de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 20 \\ -y - z = -7 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; L = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 20 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\boldsymbol{A * X = L}$$

$$\boldsymbol{X = \left(A^T * A\right)^{-1} * \left(A^T * L\right)}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ para a resolução de sistemas de equações

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{A^T} * \boldsymbol{A}\right)^{-1} * \left(\boldsymbol{A^T} * \boldsymbol{L}\right)$$

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} * \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 20 \\ -7 \end{bmatrix}\right)$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Sistema de equações

Consistente	Quando **existe pelo menos uma solução** que satisfaz todas as equações do modelo
Inconsistente	Quando **não possui nenhuma solução**
Determinado	Quando **possui uma única solução**
Indeterminado	Quando **possui infinitas soluções**

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Resumindo ...

Sistema	Solução	Característica Principal
Consistente – Determinado	Única	Equações independentes
Consistente – Indeterminado	Infinita	Equações dependentes
Inconsistente	Nenhuma	Contradição entre as equações

Indeterminado → **Quando o determinante (A^T * A) é zero**

↓

Quando (A^T * A) é singular → **As colunas da matriz A são linearmente dependentes**

não possui inversa

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ resolver o sistemas de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \\ x + 2y + z = 12 \\ 4x + 3y + 4z = 33 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema consistente e determinado

Temos que:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Aplicando o principio de MMQ resolver o sistemas de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 2x + y + z = 11 \\ 3x + 2y + 2z = 20 \\ -y - z = -7 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema consistente e indeterminado

Temos que:

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}$$

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

Dado o sistema de equações de observação:

$$\begin{cases} x + y = 3{,}1 \\ x - y = 0{,}9 \\ 2z + w = 4{,}9 \\ z - w = 4{,}1 \\ x + z - w = 3{,}9 \\ x - y + z - w = 3{,}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3{,}1 \\ x + z = 3{,}9 \\ 2z = 4{,}9 \\ x - y + z = 3{,}1 \\ x - y = 0{,}9 \\ z = 4{,}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + c + d = 15{,}25 \\ -a - b - c = 7{,}35 \\ 3a + 3c + d = 4{,}27 \\ 3a - 4b + 8c - d = 8{,}75 \\ b - c - d = 3{,}17 \end{cases}$$

a) **Identificar se os sistemas de equações são consistentes e determinados.**

b) **Se os sistemas são identificados por consistentes e determinados, encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados.**

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

Dado o sistema de equações de observação:

$$\begin{cases} x + y = 3{,}1 \\ x - y = 0{,}9 \\ 2z + w = 4{,}9 \\ z - w = 4{,}1 \\ x + z - w = 3{,}9 \\ x - y + z - w = 3{,}1 \end{cases} \qquad A = \,? \qquad X = \,? \qquad L = \,?$$

a) **Identificar se os sistemas de equações são consistentes e determinados.**

b) **Se os sistemas são identificados por consistentes e determinados, encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados.**

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

Dado o sistema de equações de observação:

$$\begin{cases} x + y = 3{,}1 \\ x - y = 0{,}9 \\ 2z + w = 4{,}9 \\ z - w = 4{,}1 \\ x + z - w = 3{,}9 \\ x - y + z - w = 3{,}1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 3.1 \\ 0.9 \\ 4.9 \\ 4.1 \\ 3.9 \\ 3.1 \end{bmatrix}$$

a) Identificar se os sistemas de equações são consistentes e determinados.

b) Se os sistemas são identificados por consistentes e determinados, encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados.

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

a) Identificar se o sistema de equações é consistente e determinado

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$det(A^T * A) = [189{,}000\,]$$

$$(\,A^T * A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3809 & 0.0476 & -0{,}0794 & 0{,}1587 \\ 0.0476 & 0.3809 & 0{,}03175 & -0{,}0635 \\ -0{,}0794 & 0{,}03175 & 0{,}1693 & -0{,}0053 \\ 0{,}1587 & -0{,}0635 & -0{,}0053 & 0{,}3439 \end{bmatrix}$$

Como se pode calcular a matriz inversa e o determinante é diferente de zero, Pode ser afirmar que o sistema é **CONSISTENTE E DETERMINADO**

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

b) Encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados

$$\boldsymbol{X = \left(A^T * A\right)^{-1} * \left(A^T * L\right)}$$

$$(A^T * A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3809 & 0.0476 & -0{,}0794 & 0{,}1587 \\ 0.0476 & 0.3809 & 0{,}03175 & -0{,}0635 \\ -0{,}0794 & 0{,}03175 & 0{,}1693 & -0{,}0053 \\ 0{,}1587 & -0{,}0635 & -0{,}0053 & 0{,}3439 \end{bmatrix} \qquad A^T * L = \begin{bmatrix} 11.000 \\ -0.900 \\ 20.900 \\ -6.200 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1{,}5048} \\ \mathbf{1{,}2381} \\ \mathbf{2{,}6698} \\ \mathbf{-0{,}4397} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

Dado o sistema de equações de observação:

$$\begin{cases} x + y = 3{,}1 \\ x + z = 3{,}9 \\ 2z = 4{,}9 \\ x - y + z = 3{,}1 \\ x - y = 0{,}9 \\ z = 4{,}1 \end{cases}$$

a) **Identificar se os sistemas de equações são consistentes e determinados.**

b) **Se os sistemas são identificados por consistentes e determinados, encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados.**

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

Dado o sistema de equações de observação:

$$\begin{cases} x + y = 3{,}1 \\ x + z = 3{,}9 \\ 2z = 4{,}9 \\ x - y + z = 3{,}1 \\ x - y = 0{,}9 \\ z = 4{,}1 \end{cases} \qquad A = ? \qquad X = ? \qquad L = ?$$

a) **Identificar se os sistemas de equações são consistentes e determinados.**

b) **Se os sistemas são identificados por consistentes e determinados, encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados.**

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

Dado o sistema de equações de observação:

$$\begin{cases} x + y = 3{,}1 \\ x + z = 3{,}9 \\ 2z = 4{,}9 \\ x - y + z = 3{,}1 \\ x - y = 0{,}9 \\ z = 4{,}1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 3.1 \\ 3.9 \\ 4.9 \\ 3.1 \\ 0.9 \\ 4.1 \end{bmatrix}$$

a) **Identificar se os sistemas de equações são consistentes e determinados.**

b) **Se os sistemas são identificados por consistentes e determinados, encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados.**

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

a) Identificar se o sistema de equações é consistente e determinado

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$det(A^T * A) = [0{,}000\,]$$

$$(\,A^T * A)^{-1} = \text{singular}$$

Como se pode calcular a matriz inversa e o determinante é zero, Pode ser afirmar que o sistema é **CONSISTENTE E INDETERMINADO**

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

Dado o sistema de equações de observação:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 15{,}25 \\ -a - b - c = 7{,}35 \\ 3a + 3c + d = 4{,}27 \\ 3a - 4b + 8c - d = 8{,}75 \\ b - c - d = 3{,}17 \end{cases}$$

a) **Identificar se os sistemas de equações são consistentes e determinados.**

b) **Se os sistemas são identificados por consistentes e determinados, encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados.**

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

Dado o sistema de equações de observação:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 15{,}25 \\ -a - b - c = 7{,}35 \\ 3a + 3c + d = 4{,}27 \\ 3a - 4b + 8c - d = 8{,}75 \\ b - c - d = 3{,}17 \end{cases}$$

$A =$? $\quad X =$? $\quad L =$?

a) **Identificar se os sistemas de equações são consistentes e determinados.**

b) **Se os sistemas são identificados por consistentes e determinados, encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados.**

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

Dado o sistema de equações de observação:

$$\begin{cases} a+b+c+d = 15{,}25 \\ -a-b-c = 7{,}35 \\ 3a+3c+d = 4{,}27 \\ 3a-4b+8c-d = 8{,}75 \\ b-c-d = 3{,}17 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 15{,}25 \\ 7{,}35 \\ 4{,}27 \\ 8{,}75 \\ 3{,}17 \end{bmatrix}$$

a) Identificar se os sistemas de equações são consistentes e determinados.

b) Se os sistemas são identificados por consistentes e determinados, encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados.

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

a) Identificar se o sistema de equações é consistente e determinado

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$det(A^T * A) = [746{,}999\,]$$

$$(\,A^T * A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}024 & 0{,}052 & -0{,}510 & -1{,}108 \\ 0{,}052 & 0{,}280 & 0{,}062 & -0{,}402 \\ -0{,}510 & 0{,}062 & 0{,}296 & 0{,}4623 \\ -1{,}108 & -0{,}402 & 0{,}462 & 1{,}988 \end{bmatrix}$$

Como se pode calcular a matriz inversa e o determinante é diferente de zero, Pode ser afirmar que o sistema é **CONSISTENTE E DETERMINADO**

Método dos Mínimos Quadrados – Exercício

b) Encontrar a solução que melhor representa o sistema utilizando o principio de mínimos quadrados

$$\boldsymbol{X = \left(A^T * A\right)^{-1} * \left(A^T * L\right)}$$

$$(A^T * A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}024 & 0{,}052 & -0{,}510 & -1{,}108 \\ 0{,}052 & 0{,}280 & 0{,}062 & -0{,}402 \\ -0{,}510 & 0{,}062 & 0{,}296 & 0{,}4623 \\ -1{,}108 & -0{,}402 & 0{,}462 & 1{,}988 \end{bmatrix}$$

$$A^T * L = \begin{bmatrix} 46{,}96 \\ -30{,}27 \\ 87{,}54 \\ 10{,}77 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{-10,076} \\ \mathbf{-4,952} \\ \mathbf{5,057} \\ \mathbf{21,945} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Ajustamento – Método dos Mínimos Quadrados

Método paramétrico $\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$

Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.

Método dos correlatos $\boldsymbol{F(L_a) = 0}$

Os valores observados ajustados devem satisfazer determinadas condições (erro de fechamento = zero).

Método combinado $\boldsymbol{F(L_a, X_a) = 0}$

Os valores observados ajustados e os parâmetros ajustados são ligados por função não explicita (não se consegue separa-los).

Ajustamento: Método Paramétrico

$$L_a = F(X_a)$$

- Método das observações indiretas, as grandezas buscadas não são medidas diretamente, mas relacionadas matematicamente com outras que são medidas.
- As grandezas a serem estimadas são chamadas parâmetros.
- Cada observação fornece uma equação. Se temos **n** observações, teremos **n** equações.
- Os parâmetros a estimar são representados por **u** variáveis.

Ajustamento: Método Paramétrico

Linear

Modelo matemático que relaciona as observações com os parâmetros é uma função linear considerando variáveis com exponentes = 1).

Resolução direta (uma única etapa para encontrar a solução)

Não é necessário uma aproximação inicial

Exemplo: Nivelamento, Poligonais

Ajustamento: Método Paramétrico

Não Linear

Modelo matemático que relaciona as observações com os parâmetros é uma função não linear (produtos de variáveis, potencias, funções trigonométricas, etc.) .

Para resolver o sistema tem que se linearizar pela fórmula de Taylor.

Resolução Iterativa (requer um processo de repetição para encontrar a solução)

Necessita de uma aproximação inicial para começar o processo iterativo.

Exemplo: Ajustamento de redes geodésicas, fotogrametria, GPS.

Ajustamento: Método Paramétrico

Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.

Sejam:

L_b = Vetor dos valores observados;
V = Vetor dos resíduos;
L_a = Vetor dos valores observados ajustados.

$$L_a = L_b + V$$

X_0 = Vetor com valores aproximados dos parâmetros;
X = Vetor correção;
X_a = Vetor dos parâmetros ajustados (um dos objetivos).

$$X_a = X_0 + X$$

$$L_a = F(X_a)$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Linear

$$L_a = F(X_a)$$

$$A * X = L$$

$$\Downarrow$$

$$A * X = L_b$$

$$X = \left(A^T * A\right)^{-1} * \left(A^T * L_b\right)$$

$$X = \left(A^T * P * A\right)^{-1} * \left(A^T * P * L_b\right)$$

$$N = \left(A^T * P * A\right)$$

$$U = \left(A^T * P * L_b\right)$$

Ajustamento: Método Paramétrico

PASSOS PARA RESOLVER METODO PARAMÉTRICO LINEAR

a) Modelo Matemático $\boldsymbol{L_a = F(X_a)}$ $\boldsymbol{L_a = L_b + V}$

b) Matriz das observações $\boldsymbol{L_b}$

c) Calcular a matriz dos pesos $\boldsymbol{P}$

d) Calcular o vetor das observações aproximadas: modelo linear

$$\boldsymbol{X_0 = 0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{L_0 = F(X_0)}$$

e) Calcular a matriz $\boldsymbol{L = L_0 + L_b}$

f) Calcular a matriz A (derivadas parciais) $\boldsymbol{A = \frac{\partial F}{\partial X_a}|_{Xa-Xo}}$

g) Calcular as equações normais $N = A^T P A$ $U = A^T P L$

$$\boldsymbol{X = N^{-1} U}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

PASSOS PARA RESOLVER METODO PARAMÉTRICO LINEAR

h) Obter a Matriz dos resíduos $\boldsymbol{V = A * X + L}$

i) Variância a posteriori ($\hat{\sigma}_0^2$) $\boldsymbol{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u}}$

j) Calcular MVC dos parâmetros ajustados $\sum_{\boldsymbol{X}} = \hat{\sigma}_0^2 \boldsymbol{N^{-1}}$