

# **Skript zur Vorlesung Maschinendynamik**

Georg Jehle

Sommersemester 2020

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Begriffsdefinition	2
1.2	Definition von Schwingungen	2
1.3	Typische Schwingungsverläufe	4
1.3.1	Harmonische Schwingungen	4
1.3.2	Überlagerte harmonische Schwingungen	4
1.3.3	Nicht-harmonische Schwingungen	5
1.3.4	Weitere Schwingungsverläufe	6
1.4	Schwingungsformen von Mehrfreiheitsgradsystemen	7
1.5	Entstehungsmechanismen von Schwingungen	7
1.5.1	Freie Schwingungen	7
1.5.2	Erzwungene Schwingung	8
1.5.3	Selbsterregte Schwingung	8
1.5.4	Parametererregte Schwingung	8
<b>2</b>	<b>Freie Schwingungen</b>	<b>9</b>
2.1	Freie ungedämpfte Schwingungen	9
2.2	Freie gedämpfte Schwingungen	16
<b>3</b>	<b>Erzwungene Schwingungen</b>	<b>21</b>
3.1	Ungedämpfte krafterregte Schwingungen	22
3.2	Gedämpfte krafterregte Schwingungen	26
3.3	Gedämpfte fußpunkterrekte Schwingungen – Maxwell-Modell	29
3.4	Gedämpfte fußpunkterrekte Schwingungen – Voigt-Modell	29
3.5	Gedämpfte unwuchterregte Schwingungen	31
3.6	Alternative Lösungsansätze für Zwangsschwingungen	34
3.6.1	Ansatz mit Phasenverschiebung	35
3.6.2	Komplexe Erweiterung	36
<b>4</b>	<b>Anregungssignale und Fourieranalyse</b>	<b>40</b>
4.1	Anregung durch Impuls	40

4.1.1	Sprungfunktion und Dirac-Impuls . . . . .	40
4.1.2	Impulsantwort . . . . .	41
4.2	Periodische Anregung . . . . .	42
4.2.1	Darstellung von Singalen im Zeit- und im Frequenzbereich . . . .	42
4.3	Darstellung periodischer Funktionen durch Fourierreihen . . . . .	43
4.4	Erzwungene Schwingungen mit periodischer Anregung . . . . .	49
4.5	Nichtperiodische Vorgänge . . . . .	52
4.6	Berechnung der Schwingungsantwort mithilfe des komplexen Frequenz- gangs . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Schwingungen mit 2 Freiheitsgraden . . . . .</b>	<b>58</b>
5.1	Beispiele . . . . .	58
5.2	Bewegungsgleichung . . . . .	59
5.3	Ungedämpfte Schwingungen . . . . .	60
5.4	Modale Entkopplung . . . . .	67
5.5	Systeme mit modaler Dämpfung . . . . .	70
5.6	Erzwungene Koppelschwingungen und Tilgung . . . . .	72
	<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>76</b>

# Vorwort

Dieses Skript wurde als Begleitmaterial zur Vorlesung "Maschinendynamik" an der Hochschule Mannheim zusammengestellt. Es behandelt das Schwingungsverhalten von linearen 1- und 2-Freiheitsgradsystemen sowie Grundlagen der Signalanalyse. Hierzu wurden Inhalte aus den Lehrbüchern von BRONSTEIN [1], DRESIG [2], DUBBEL [3], GASCH [4], HAUGER [5], HIBBELER [6] und WITTENBURG [7] übernommen. Besonderer Dank hinsichtlich Erstellung und Überarbeitung des Skripts gilt den Herren Prof. Dr.-Ing. Jens Deppler und Dr.-Ing. Dominik Kern.

# 1 Einleitung

## 1.1 Begriffsdefinition

Die Maschinendynamik untersucht das Schwingungsverhalten mechanischer Konstruktionen unter Einwirkung zeitabhängiger Beanspruchungen. Das Ziel der Untersuchungen besteht darin, dynamische Bewegungen von Bauteilen sowie wirkende Kräfte zu berechnen. In klassischen Problemstellungen sind die technischen Hintergründe vielfältig:

- Torsionsschwingungen von Kolbenmaschinen
- Biegeschwingungen von Turbinenschaufeln
- Unwuchterregte Schwingungen von Rotoren, z.B. Autoreifen
- Bewegung von Vibrationsstampfern
- Dynamik von Rüttelplatten
- Fahrwerksdynamik eines Fahrzeugs bei transienter Anregung, z.B. Schlaglochdurchfahrt

In vielen Fällen sind Schwingungen mechanischer Komponenten die Ursache für deren Versagen. Dauerschwingungen führen bei großen Amplituden und langer Dauer zu Ermüdungsversagen von Werkstoffen. Gleichzeitig erscheinen Schwingungen für Anwender in einigen Fällen unangenehm, z.B. wegen übertragener Vibrationen oder Geräuschen. Man spricht dann von komfortrelevanten Problemstellungen (NVH: Noise-Vibration - Harshness).

## 1.2 Definition von Schwingungen

Kennzeichen einer Schwingung ist die regelmäßige Wiederkehr bestimmter Merkmale, welche an messbaren Größen festgemacht wird: Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung.

gung, Winkel, Kraft, Moment. Schwingungen besitzen also eine Periodizität: Die gemessene Größe  $x(t)$  muss  $\forall t \in \mathbb{R}$  die Eigenschaft haben, dass

$$x(t + T) = x(t); \quad T > 0. \quad (1.1)$$

Dann gilt auch

$$x(t + nT) = x(t); \quad T > 0; \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Die Größe  $T$  ist nicht eindeutig bestimmt. Die kleinste Konstante, für die (1.1) gilt, heißt Schwingungsdauer (Periode). Die Frequenz ist ihr Kehrwert

$$f = \frac{1}{T} \quad [f] = \frac{1}{s} = \text{Hz} \quad (1.3)$$

Sie gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an.

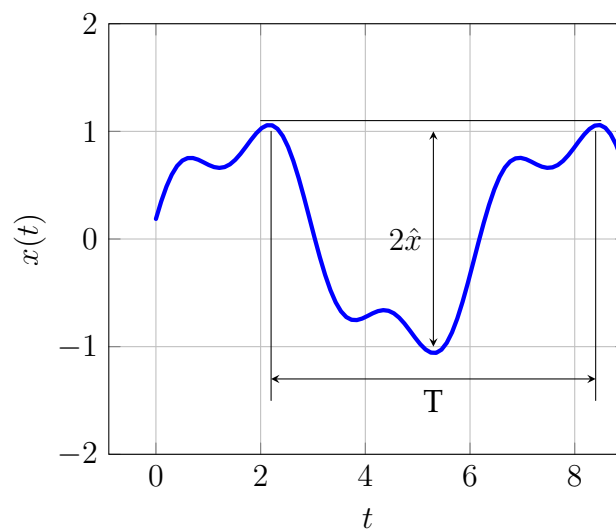


Abbildung 1.1: Schwingung, Schwingungsdauer, Amplitude

Die Schwingungsamplitude eines Signals ist gegeben durch

$$\hat{x} = \frac{\max(x) - \min(x)}{2} \quad (1.4)$$

## 1.3 Typische Schwingungsverläufe

### 1.3.1 Harmonische Schwingungen

Eine harmonische Schwingung hat die allgemeine Form

$$x(t) = C \cos(\omega t) + S \sin(\omega t) \quad (1.5)$$

Hierbei sind  $S$  und  $C$  zwei Komponenten der Amplitude, und  $\omega$  die Kreisfrequenz. Aus der Periodizität der trigonometrischen Funktionen  $\omega T = 2\pi$  folgt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (1.6)$$

die Kreisfrequenz der Schwingung. Dies ist äquivalent darstellbar mithilfe von Amplitude  $\hat{x}$  und Nullphasenwinkel  $\varphi$ :

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t - \varphi) \quad (1.7)$$

Dabei gilt der Zusammenhang

$$x(\omega t = 0) = \hat{x} \cos(\varphi) = C, \quad (1.8)$$

$$x(\omega t = \frac{\pi}{2}) = \hat{x} \sin(\varphi) = S. \quad (1.9)$$

Somit folgt der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Darstellung der Amplituden und Nullphasenwinkel:

$$C = \hat{x} \cos(\varphi) \quad S = \hat{x} \sin(\varphi) \quad (1.10)$$

oder invers

$$\hat{x} = \sqrt{C^2 + S^2}, \quad \tan(\varphi) = \frac{S}{C}. \quad (1.11)$$

### 1.3.2 Überlagerte harmonische Schwingungen

In verschiedenen Zusammenhängen überlagern sich harmonische Schwingungen. Im einfachsten Fall handelt es sich um gleichfrequente Schwingungen mit verschiedener Amplitude und Phase:

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (1.12)$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (1.13)$$

Für  $\varphi_1 = \varphi_2$  heißen die Schwingungen *in Phase*, für  $|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi$  *in Gegenphase*. Die resultierende Schwingung ist die Summe der zwei Komponenten:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= (\hat{x}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{x}_2 \cos(\varphi_2)) \cos(\omega t) - (\hat{x}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{x}_2 \sin(\varphi_2)) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Im Fall verschiedener Frequenzen folgt für die Gesamtschwingung durch kurze Rechnung

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \hat{x}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{x}_2 \cos(\omega_2 t) \quad (1.15)$$

$$= \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) + \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) \quad (1.16)$$

$$= (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \cos(\omega_D t) \cos(\omega_m t) - (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \sin(\omega_D t) \sin(\omega_m t) \quad (1.17)$$

Hierbei handelt es sich um zwei harmonische Schwingungen unterschiedlicher Frequenz mit  $\omega_D = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  und  $\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ . Für  $\omega_1 \approx \omega_2$  ist also  $\omega_m \approx \omega_1 \approx \omega_2$  (Schwingungsfrequenz wie bisher) und  $\omega_D$  sehr klein (langsame überlagerte Schwingung). Die Überlagerung lässt sich auch umschreiben zu

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_m t + \varphi) \quad (1.18)$$

wobei

$$\hat{x} = \sqrt{(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)^2 \cos^2(\omega_D t) + (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 \sin^2(\omega_D t)}, \quad (1.19)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{\hat{x}_2 + \hat{x}_1} \tan(\omega_D t). \quad (1.20)$$

Die Amplitude und die Phase der Schwingung ändern sich also mit  $\omega_D$ . Dieser Effekt wird als Schwebung bezeichnet.

### 1.3.3 Nicht-harmonische Schwingungen

Die meisten Schwingungsarten sind nicht harmonisch. An dieser Stelle seien beispielhaft die Sägezahn- und die Rechteckfunktion genannt (Abb. 1.3). Solche Funktionen können in eine harmonische Ersatzdarstellung überführt werden (siehe Kapitel 4), was im Vergleich zu den Knick- und Sprung-behafteten ursprünglichen Funktionen viele Vorteile bietet.



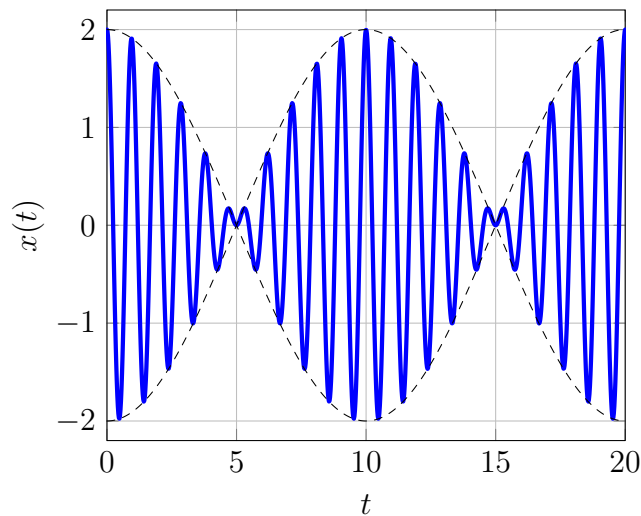


Abbildung 1.2: Schwebung, entstanden aus der Addition  $\cos(2\pi t) + \cos(2.2\pi t)$ .

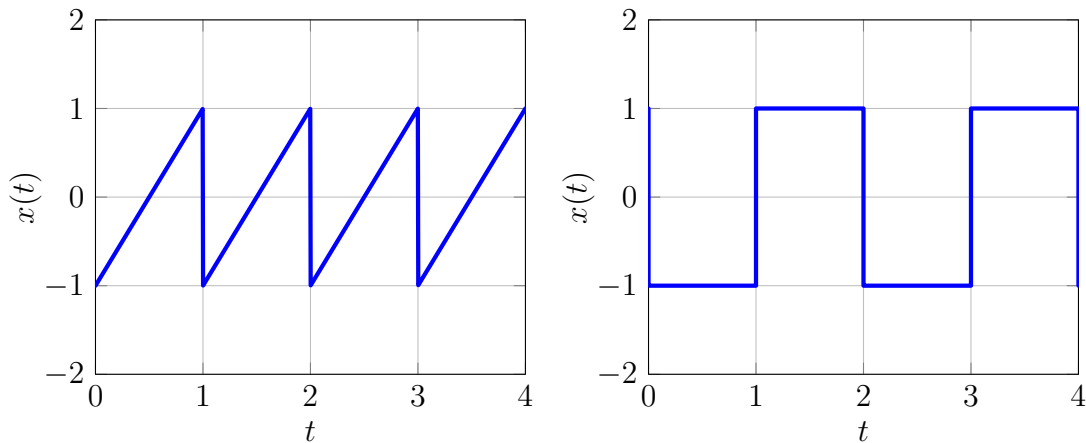


Abbildung 1.3: Beispiele für periodische nicht-harmonische Funktionen: Sägezahnfunktion, Rechteckfunktion.

### 1.3.4 Weitere Schwingungsverläufe

Es gibt außer den genannten noch weitere Schwingungsverläufe, die die Anforderung der Periodizität im eigentlichen Sinne verletzen. Sie laufen unter  $T \rightarrow \infty$  (unendlich große Periodendauer):

- Impulsförmige Schwingung: einmaliges Event  
Bsp.: Hammerschlag, Impulshammer, Kollision, mechanischer Stoß, ...
- Zufallsschwingung: Grundschwingungen werden von Rauschen überlagert  
Bsp.: Seitenwind bewegt Fahrzeug, die Fahrbahnunebenheit regt ein Fahrzeug zu zufälligen horizontalen Schwingungen an, reale Messungen mit Messrauschen, ...

## 1.4 Schwingungsformen von Mehrfreiheitsgradsystemen

Ein schwingungsfähiger Körper kann je nach Anregung auch innere Deformationen ausführen, weshalb in einigen Fällen die Betrachtung der Problemstellung als Mehrfreiheitsgradsystem notwendig wird. Man unterscheidet also

- 1-Freiheitsgrad-Systeme
- $n$ -Freiheitsgrad-Systeme, mit  $n$  einer natürlichen Zahl
- System mit  $\infty$  vielen Freiheitsgraden (elastisches Kontinuum)

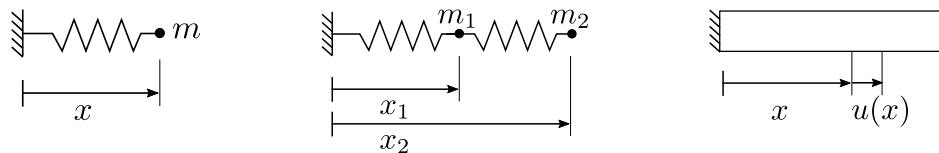


Abbildung 1.4: Schwingungen eines 1-, 2- und  $\infty$ -Freiheitsgrad-Systems

Die Schwingungsformen des betrachteten Körpers treten in Abhängigkeit von der Frequenz der Anregung auf. Am Beispiel eines 4-Freiheitsgradschwingers können vier verschiedene Schwingungsformen dargestellt werden (Abb. 1.5), bei denen sich die einzelnen Freiheitsgrade wechselweise in Gleich- oder Gegenphase bewegen.

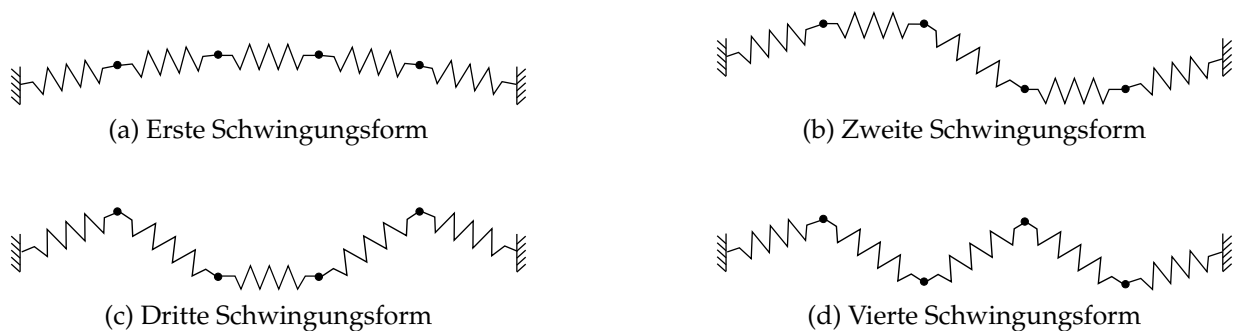


Abbildung 1.5: Schwingungsformen eines 4-Freiheitsgrad-Systems

## 1.5 Entstehungsmechanismen von Schwingungen

### 1.5.1 Freie Schwingungen

Gitarrensaiten, Stimmgabeln oder Beispiele aus der Technik werden durch Mechanismen einmalig angestoßen oder angezupft und dann sich selbst überlassen. Die Bewe-

gung, die sich dann einstellt, nennt sich freie Schwingung, da die Ursache nur einmalig am Anfang der Beobachtung steht und dann instantan verschwindet. Die Schwingungsfrequenzen sind Eigenfrequenzen des Schwingungssystems.

### **1.5.2 Erzwungene Schwingung**

Ein Fahrzeug, welches sich über eine unebene Fahrbahn bewegt, wird durch äußere Kräfte und/oder Momente permanent zu Schwingungen angeregt. Die Frequenz dieser Bewegung und vergleichbarer Beispiele ist im stationären Schwingungszustand die Frequenz  $\Omega$ , die durch die äußere Anregung gegeben ist.

### **1.5.3 Selbsterregte Schwingung**

Schwingungen wie beim Bremsenquietschen, Streichinstrumenten oder in einer mechanischen Uhr sind selbsterregt, da sich im Gesamtsystem eine Energiequelle und -Senke findet. Die Schwingungsfrequenz entspricht in vielen Fällen einer Eigenfrequenz, wobei sich hier aufgrund der komplexen Schwingungsursache und möglicherweise dominanter Nichtlinearitäten Abweichungen ergeben können.

### **1.5.4 Parametererregte Schwingung**

Bei Schwingungen, die durch periodisch zeitveränderliche Parameter im System (Steifigkeiten, Abstände, ...) entstehen, spricht man von parametererregten Schwingungen. Ein Beispiel aus der Technik ist im Wälzkontakt von Getrieben zu finden, wo die wechselnde Anzahl von Verzahnungseingriffen zu einer zeitveränderlichen Steifigkeit führt; ein weiteres Beispiel ist die periodische Schwerpunktverlagerung eines Kindes auf einer Schaukel, was die gewünschte Bewegung erzeugt. Daher handelt es sich bei den Schwingungsfrequenzen auch um Teile oder Vielfache der Parameterfrequenz.

## 2 Freie Schwingungen

In diesem Abschnitt werden freie Schwingungen von mechanischen 1-Freiheitsgrad-Systemen untersucht, die nach einer Anfangsauslenkung sich selbst überlassen werden. Es sollen nur statische Kräfte auf die betrachteten Systeme wirken.

### 2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

Ausgangspunkt für die freien ungedämpften Schwingungen ist ein 1-Massen-Schwinger mit nichtlinearer Federkraft  $f(x)$ .



Abbildung 2.1: Einmassenschwinger mit nichtlinearer Kennlinie sowie dessen Kräftefreischnitt nach d'Alembert, wobei  $m\ddot{x}$  die d'Alembert'sche Trägheitskraft ist und  $f(x)$  die Federkraft.

Die Bilanz der Kräfte liefert:

$$m\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (2.1)$$

Eine solche Differentialgleichung (DGL) ist aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs  $f(x)$  im Allgemeinen nicht analytisch lösbar. Wenn dennoch eine Analyse durchgeführt werden soll, dann kann die Gleichung (2.1) als nächstes linearisiert werden (Mechanik 2.1). Nach dieser Vereinfachung beschreibt die Gleichung nur noch die Dynamik kleiner Störungen  $\Delta x$  um eine Ruhelage  $x_0$ , was aber in vielen Fällen in der Praxis ausreichend ist. Die Linearisierung wird nach dem Satz von Taylor (Mathematik 2.1) durchgeführt.

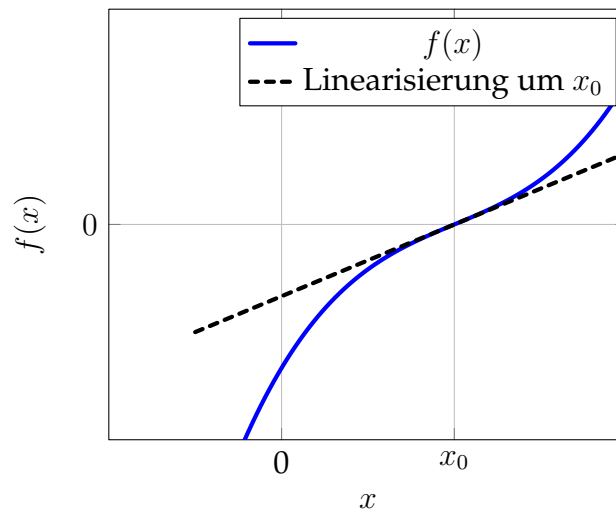


Abbildung 2.2: Nichtlineare Federkennlinie

### Mathematik 2.1: Taylorreihen-Entwicklung

Sei  $f(x)$  eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Funktion und  $x_0$  ein Entwicklungspunkt. Dann ist die Taylorreihenentwicklung definiert als

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k f(x_0)}{dx^k} \frac{(x - x_0)^k}{k!} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots$$

Die Reihendarstellung konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  mit  $f(x)$ , falls  $f(x)$   $\infty$ -mal stetig differenzierbar ist.

### Mechanik 2.1: Linearisierung um eine Ruhelage

Zur Linearisierung einer DGL um eine Ruhelage werden folgende Schritte befolgt:

- **Berechnung der Ruhelage:** setze  $x = x_0 = \text{konst.}$ , dann ist  $\dot{x} = 0$ ,  $\ddot{x} = 0$ . Einsetzen in die DGL liefert eine algebraische Gleichung zur Bestimmung der Ruhelage(n):

$$f(x_0) = 0$$

- **Definition der Störung  $\Delta x$  um die Ruhelage  $x_0$ :**  $x = x_0 + \Delta x$ . Einsetzen in die DGL ergibt

$$m\Delta\ddot{x} + f(x_0 + \Delta x) = 0$$

- **Linearisierung:** Taylorreihen-Entwicklung der nichtlinearen Funktion  $f(x_0 + \Delta x)$  in der Störung  $\Delta x$  bis zur 1. Ordnung:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

- **Einsetzen und vereinfachen:**

$$m\Delta\ddot{x} + f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 0$$

Der Term  $f(x_0)$  verschwindet, da aus ihm die Ruhelage berechnet wurde. Es bleibt die homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten für die Beschreibung der kleinen Störung um die Ruhelage

$$m\Delta\ddot{x} + f'(x_0) \cdot \Delta x = 0$$

### Beispiel 2.1: Nichtlineare Federkennlinie

Eine Federkennlinie kann beschrieben werden durch den Kraft-Weg-Zusammenhang  $f(x) = \sin(x) + a_1x + a_3x^3$ . Die DGL des 1-Massen-Schwingers lautet somit:

$$m\ddot{x} + \sin(x) + a_1x + a_3x^3 = 0$$

Die Ruhelage berechnet sich aus der Gleichung

$$\sin(x_0) + a_1x_0 + a_3x_0^3 = 0$$

zu  $x_0 = 0$ . Die DGL in der Störung um  $x_0$  ist also

$$\begin{aligned} 0 &= m(\ddot{x}_0 + \Delta\ddot{x}) + \sin(x_0) + a_1(x_0 + x) + a_3(x_0 + x)^3 \\ &= m\Delta\ddot{x} + \sin(x_0 + x) + a_1(x_0 + x) + a_3(x_0 + x)^3 \\ &= m\Delta\ddot{x} + \sin(x_0) + a_1x_0 + a_3(x_0)^3 + (\cos(x_0) + a_1 + 3x_0^2) \Delta x \\ &\approx m\Delta\ddot{x} + (1 + a_1) \Delta x \end{aligned}$$

Hier ist  $f'(x_0) = 1 + a_1 = c$  die lokale Steifigkeit in der Nähe der Ruhelage. Alternativ wird die DGL

$$\Delta\ddot{x} + \omega_0^2 \Delta x = 0,$$

wobei  $\omega_0^2 = \frac{f'(x_0)}{m} = \frac{c}{m}$  das Quadrat der ungedämpften Eigenkreisfrequenz ist.

Die Koeffizienten der DGL (2.1) sind konstant, weshalb als Lösungsansatz für die homogene Lösung der Exponentialansatz verwendet werden kann:

### Mathematik 2.2: Lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0$$

wird mithilfe des Exponentialansatzes

$$x(t) = C e^{\lambda t}$$

gelöst. Der Ansatz eingesetzt in die DGL liefert das Eigenwertproblem

$$\sum_{k=0}^n a_k C \lambda^k e^{\lambda t} = \left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) C e^{\lambda t} = 0.$$

Wegen  $C \neq 0$  folgt das charakteristische Polynom

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

woraus die Eigenwerte  $\lambda_{1,2,\dots,n}$  bestimmt werden. Die Lösungsanteile

$$x_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}$$

werden *Fundamentallösungen* genannt; die Gesamtlösung setzt sich aus ihnen zusammen:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n C_k x_k(t) = C_n e^{\lambda_n t} + \dots + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Die Integrationskonstanten  $C_k$  müssen durch geeignete Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Nach dem beschriebenen Vorgehen in (Mathematik 2.2) und  $f'(x_0) =: c$  lautet die DGL der Störung zur Gl. (2.1)

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{:=\omega_0^2} \Delta x = 0 \quad (2.2)$$

Der Lösungsansatz und dessen Ableitungen sind

$$\Delta x = Ae^{\lambda t}, \quad \Delta \dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}, \quad \Delta \ddot{x} = \lambda^2 Ae^{\lambda t} \quad (2.3)$$

Dies eingesetzt in Gl. (2.1) liefert

$$(\lambda^2 + \omega_0^2)Ae^{\lambda t} = 0, \quad \text{woraus folgt} \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0. \quad (2.4)$$

Somit gibt es zwei komplexe Fundamentallösungen

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega_0 t}, \quad x_2(t) = A_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (2.5)$$

Die Gesamtlösung ergibt sich unter Beschränkung auf rein reelle Lösungen zu

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}\{x_1(t) + x_2(t)\} \\ &= \operatorname{Re}\{A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{A_1 + A_2\} \cos(\omega_0 t) + \operatorname{Re}\{iA_1 - iA_2\} \sin(\omega_0 t) \\ &= C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Hierbei wurde zur Transformation die Euler-Formel verwendet:

### Mathematik 2.3: Euler-Formel

Es gilt der Zusammenhang

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Die Kreisfrequenz  $\omega_0$  wurde bereits durch Masse und Steifigkeit festgelegt und hängt somit nur von Systemparametern ab. Sie ist dem System *eigen* und heißt deshalb *Eigenkreisfrequenz*.



Als Parameter bleiben die Integrationskonstanten  $C$  und  $S$ , die durch die Anfangsbedingungen (Anfangslage und, Anfangsgeschwindigkeit) festgelegt werden:

$$x(t=0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 \stackrel{!}{=} x_0 \quad (2.7)$$

$$\dot{x}(t=0) = -C_1 \omega_0 \sin(0) + C_2 \omega_0 \cos(0) = C_2 \omega_0 \stackrel{!}{=} v_0 \quad (2.8)$$

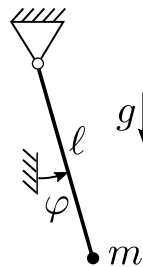
Als Gesamtlösung ergibt sich so

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (2.9)$$

Die Schwingungsdauer der Bewegung ist  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

### Beispiel 2.2: Mathematisches Pendel

Ein mathematisches Pendel besteht aus einem masselosen Stab der Länge  $\ell$ , der einseitig an einem Gelenk befestigt ist. An seinem freien Ende befindet sich ein Gewicht mit Punktmasse  $m$ . Das System ist der Schwerkraft unterworfen (Gravitationskonstante  $g$ ). Die Auslenkung wird durch den Verdrehwinkel  $\varphi$  beschrieben.



Die Bewegungsgleichung folgt aus der Momentenbilanz um das Gelenk und lautet

$$m\ell^2 \ddot{\varphi} + mg\ell \sin(\varphi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin(\varphi) = 0$$

Diese DGL ist zunächst nichtlinear. Bei der Bestimmung der Ruhelagen finden sich zwei Lösungen:

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{g}{\ell} \sin(\varphi) = 0$$

also

$$\begin{array}{ll} \varphi_{0,1} = 0, & \varphi_{0,2} = \pi. \\ \text{(Hängelage)} & \text{(Überkopflage)} \end{array}$$

**Linearisierung um die Hängelage:** Die Linearisierung der Nichtlinearität um die Ruhelage  $\varphi_{0,1} = 0$  lautet

$$\frac{g}{\ell} \sin(\varphi) \approx \frac{g}{\ell} \sin(\varphi_{0,1}) + \frac{g}{\ell} \cos(\varphi_{0,1}) \cdot (\varphi - \varphi_{0,1}) = \frac{g}{\ell} (\varphi - \varphi_{0,1}) = \frac{g}{\ell} \Delta\varphi$$

wobei  $\Delta\varphi$  die Störung um die Ruhelage ist. Außerdem ist

$$\Delta\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi} - 0 = \ddot{\varphi}$$

Somit lautet die linearisierte DGL

$$\Delta\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \Delta\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \Delta\varphi = 0$$

mit  $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$ . Die DGL hat nun exakt die Form der Gl. (2.2), weshalb die Lösung direkt angegeben werden kann:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Interpretation: Für kleine Anfangswinkel  $\varphi_0$  und kleine Anfangsgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi}_0$  bleibt die Lösung  $\varphi(t)$  für alle Zeiten klein. Die Linearisierung beschreibt das Systemverhalten gut.

**Linearisierung um die Überkopflage:** Die Linearisierung der Nichtlinearität um die Ruhelage  $\varphi_{0,2} = \pi$  lautet

$$\frac{g}{\ell} \sin(\varphi) \approx \frac{g}{\ell} \sin(\varphi_{0,2}) + \frac{g}{\ell} \cos(\varphi_{0,2}) \cdot (\varphi - \varphi_{0,2}) = -\frac{g}{\ell} (\varphi - \varphi_{0,2}) = -\frac{g}{\ell} \Delta\varphi$$

Somit lautet die linearisierte DGL

$$\Delta\ddot{\varphi} - \frac{g}{\ell} \Delta\varphi = 0$$

Dies entspricht wegen des negativen Vorzeichens nicht der Form der Gl. (2.2), kann aber trotzdem mithilfe eines Exponentialansatzes  $\Delta\varphi = C e^{\lambda t}$  gelöst werden. Dieser ergibt nach Einsetzen die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \pm \delta$$

also zwei reelle Eigenwerte. Die zwei Fundamentallösungen

$$\Delta\varphi_1 = C_1 e^{\delta t} \qquad \Delta\varphi_2 = C_2 e^{-\delta t}$$

ergeben die Gesamtlösung

$$\Delta\varphi = C_1 e^{\delta t} + C_2 e^{-\delta t}$$

Anpassen an die Anfangslage  $\varphi(t = 0)$  und Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}(t = 0)$  liefert schließlich die Gesamtlösung

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_0 + \frac{\dot{\varphi}_0}{\delta}}{2} e^{\delta t} + \frac{\varphi_0 - \frac{\dot{\varphi}_0}{\delta}}{2} e^{-\delta t}$$

Interpretation: Nach einer Störung in der Auslenkung und/oder Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$  klingt die Lösung in der Nähe der Überkopflage exponentiell auf. Sie ist im Gegensatz zur Hängelage nicht schwingungsfähig. Die linearisierte Lösung beschreibt das qualitative Verhalten korrekt, ist aber quantitativ höchstens für eine sehr kurze Zeitdauer richtig.

**Fazit.** Eine Linearisierung um unterschiedliche Ruhelagen liefert im Allgemeinen verschiedene Bewegungsgleichungen, die verschiedene Eigenschaften haben können.

## 2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

Im gedämpften Einmassenschwinger wird zusätzlich parallel zur Federkraft ein Dämpfer geschaltet, sodass sich das System um die Dämpferkraft erweitert:

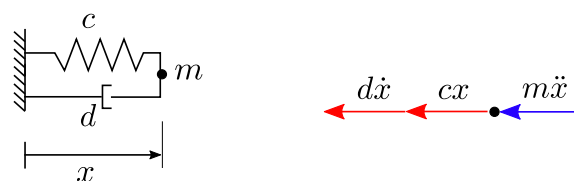


Abbildung 2.3: Linearer gedämpfter Einmassenschwinger sowie dessen Kräftefreischnitt nach d'Alembert, wobei  $m\ddot{x}$  die d'Alembert'sche Trägheitskraft ist,  $cx$  die Federkraft und  $d\dot{x}$  die Dämpferkraft.

Der ungedämpfte Einmassenschwinger (Kapitel 2.1) stellt somit den Sonderfall  $d = 0$  dar. Die Kräftebilanz liefert

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + d\dot{x} + cx &= 0 & \text{bzw.} & \\ \ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x &= 0 & (2.10) & \end{aligned}$$

### Mechanik 2.2: Parameter des gedämpften Einmassenschwingers

Zur einheitlichen Beschreibung werden die folgenden Parameter eingeführt:

- Ungedämpfte Eigenkreisfrequenz:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$
- Exponentielle Abklingrate:  $\delta = \frac{d}{2m}$
- Lehr'sches Dämpfungsmaß:  $D = \frac{d}{2m\omega_0}$
- Gedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$
- Schwingungsdauer  $T = 2\pi/\omega_d$

Die vereinfachte Gleichung des homogenen gedämpften Einmassenschwingers lautet nach (Mechanik 2.2):

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (2.11)$$

### Beispiel 2.3: Nichtlinearer Einmassenschwinger mit Dämpfung

Die DGL lautet in diesem Beispiel

$$(J + mR^2)\ddot{x} + d\dot{x}\cos(x) + c_0x + c_3x^3 = 0$$

wobei alle Koeffizienten positive Werte haben sollen. Das Ziel ist, auf die Form (2.11) zu kommen. Dazu werden zunächst die Ruhelagen bestimmt. Mit  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\ddot{x} = 0$  folgt

$$c_0x_0 + c_3x_0^3 = 0, \quad \text{weshalb} \quad x_{0,1} = 0, \quad x_{0,2/3} = \pm\sqrt{-c_0/c_3}$$

Mit  $c_0 > 0$ ,  $c_3 > 0$  ist nur die Ruhelage  $x_{0,1}$  physikalisch sinnvoll. Also wird um diese Ruhelage linearisiert. Es ist

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}) &= d\dot{x} \cos(x) + c_0 x + c_3 x^3 \\ f(x_{0,1} + \Delta x, \Delta \dot{x}) &= d\Delta \dot{x} \cos(x_{0,1} + \Delta x) + c_0(x_{0,1} + \Delta x) + c_3(x_{0,1} + \Delta x)^3 \\ &= d\Delta \dot{x} \cos(\Delta x) + c_0 \Delta x + c_3 \Delta x^3 \\ &\approx d\Delta \dot{x} \cdot (\cos(0) - \sin(0) \cdot \Delta x) + c_0 \Delta x + c_3 \Delta x^3 \\ &= d\Delta \dot{x} + c_0 \Delta x \end{aligned}$$

Also folgt die linearisierte DGL

$$(J + mR^2)\Delta \ddot{x} + d\Delta \dot{x} + c_0 \Delta x$$

Sie lässt sich auf die Form der Gl. (2.11) bringen, wenn die Koeffizienten

$$\omega_0^2 = \frac{c_0}{J + mR^2} \quad D = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{1}{c_0(J + mR^2)}}$$

gewählt werden.

Die Fundamentallösung der Gl. (2.11) ist mit  $\lambda_{1,2} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2 - 1}$

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.12)$$

Welchen qualitativen Verlauf die Lösung annimmt, hängt maßgeblich mit der Größe des Lehr'schen Dämpfungsmaßes  $D$  zusammen:

**Fall 1: starke Dämpfung.** Bei  $D > 1$  gilt

$$\lambda_1 = -D\omega_0 + \omega_0\sqrt{D^2 - 1} < 0 \quad \lambda_2 = -D\omega_0 - \omega_0\sqrt{D^2 - 1} < 0 \quad (2.13)$$

Die Lösung  $x = C_1 x_1 + C_2 x_2$  setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen, deren Verlauf wegen der  $\lambda_i < 0$  immer exponentiell abklingt. Da hiermit Schwingungen ausgeschlossen sind, wird die Bewegung auch *Kriechbewegung* genannt.

**Fall 2: aperiodischer Grenzfall.** Bei  $D = 1$  fallen die zwei Eigenwerte zusammen:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -D\omega_0 = -\delta \quad (2.14)$$

Aufgrund des doppelten Eigenwerts ist die Lösung  $x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$ .

**Fall 3: schwache Dämpfung.** Bei  $0 < D < 1$  ist

$$D^2 - 1 < 0, \quad \text{also} \quad \omega_0 \sqrt{D^2 - 1} = i\omega_0 \sqrt{1 - D^2} = i\omega_d \quad (2.15)$$

mit  $i$  der komplexen Zahl. Die (komplexe) Fundamentallösung kann hier transformiert werden in reellwertige Funktionen:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{C}_1 e^{-\delta t + i\omega_d t} + \tilde{C}_2 e^{-\delta t - i\omega_d t} \\ &= e^{-\delta t} \left( \tilde{C}_1 e^{i\omega_d t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega_d t} \right) \\ &= e^{-\delta t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Es handelt sich bei der Bewegung um eine gedämpfte Schwingung mit Kreisfrequenz  $\omega_d < \omega_0$ , deren Amplitude mit zunehmender Zeit exponentiell abklingt.

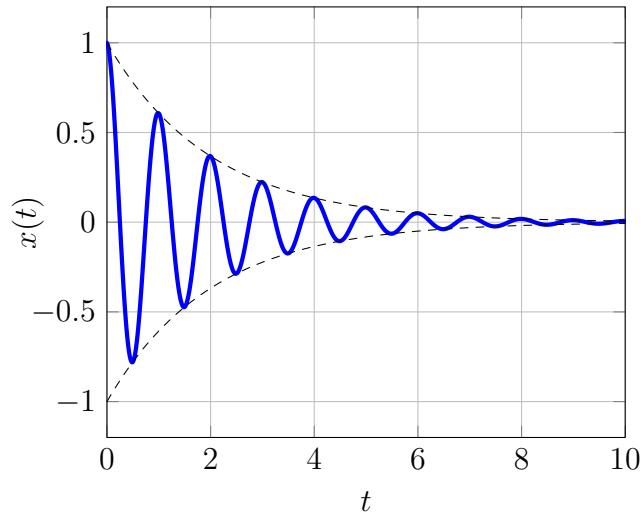


Abbildung 2.4: Verlauf einer gedämpften Schwingung.

Es lässt sich zeigen, dass das Maß der Amplitudenreduktion gegeben ist durch

$$\frac{x(t)}{x(t + T_d)} = e^{\delta T_d} \quad (2.17)$$

Daraus folgt direkt das *logarithmische Dekrement*:

$$\Lambda := \ln \left( \frac{x(t)}{x(t + T_d)} \right) = \delta T_d = D\omega_0 T_d \quad (2.18)$$

Mit bekanntem  $\omega_0$ , gemessenen  $T_d$  und  $\Lambda$  lässt sich so aus einer Messung das Lehr'sche Dämpfungsmaß bestimmen.

## Aufgaben zu Kapitel 2

**2.1** Welche Unterschiede gibt es zwischen ungedämpften und gedämpften Schwingungen?

**2.2** Mit welchen standardisierten Parametern (Konstanten) lässt sich ein lineares mechanisches Schwingungssystem mit einem Freiheitsgrad beschreiben? Welche Bedeutung haben sie?

**2.3** Welche Eigenschaften muss eine DGL haben, damit sie mit einem Exponentialansatz gelöst werden kann?

**2.4** Linearisieren Sie die folgenden Ausdrücke in der Variable  $x$  um den Entwicklungspunkt  $x = 0$ :

$$y = x^2 + \sin(x) + \frac{e^x}{1+x} \qquad y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (2.19)$$

**2.5** Bestimmen Sie die Ruhelage(n) der folgenden DGLn:

$$\ddot{x} + c_1 x - c_3 x^3 = 0 \qquad \ddot{x} + d\dot{x} + c_1 \sin(kx) = 0 \qquad (2.20)$$

$$\ddot{x} + (d_1 + d_2)\dot{x} + c_1 x + c_2 x^2 = 0 \qquad (2.21)$$

Linearisieren Sie die DGL anschließend für kleine Störungen  $\Delta x = x - x_0$  um jede berechnete Ruhelage  $x_0$ !

**2.6** Bestimmen Sie für die DGL

$$(m + R^2 J)\ddot{x} + me\Omega^2 \dot{x} + c_0 x = 0 \qquad (2.22)$$

die Ersatzparameter  $\omega_0$ ,  $\omega_d$ ,  $D$ ,  $\delta$ , und geben Sie die Lösung der DGL in allgemeiner Form an! Passen Sie die Integrationskonstanten an die Anfangsbedingungen  $x(t=0) = 0$  und  $\dot{x}(t=0) = v_0$  an.

### 3 Erzwungene Schwingungen

In diesem Kapitel wird die Situation betrachtet, dass der Einmassenschwinger harmonisch wirkenden Kräften oder vorgegebenen Bewegungen ausgesetzt ist:

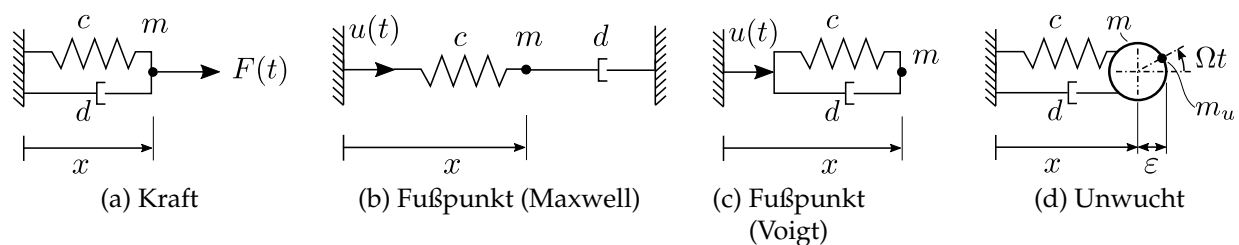


Abbildung 3.1: Einmassenschwinger mit Anregung durch äußere Kraft, durch Fußpunkt- und durch un- und durch Unwuchterregung.

Dies ändert die Sachlage insofern, als dass die Bewegung  $x(t)$  aus zwei Anteilen besteht: einer *homogenen* und einer *partikulären* Bewegung bzw. Lösung der DGL.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (3.1)$$

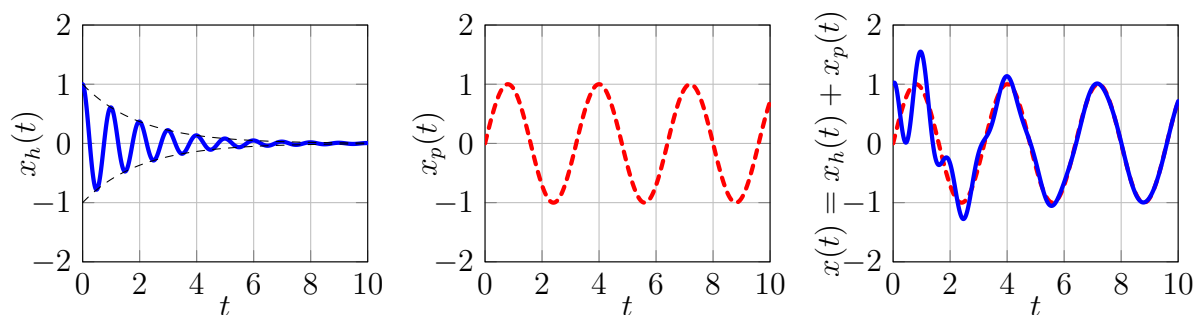


Abbildung 3.2: Erzwungene Schwingung, die sich als Summe von  $x_h(t)$  und  $x_p(t)$  zusammensetzt.



- Die homogene Lösung wurde bereits in Kapitel 2 betrachtet. Dieser Anteil, der die Bewegung und bzw. den Eigenschwingvorgang infolge von Anfangsauslenkungen wiedergibt, wird ab jetzt  $x_h(t)$  genannt.
- Die partikuläre Lösung, die durch die äußere Anregung vorgegeben wird, nennt sich  $x_p(t)$ . Er wird auch Zwangsschwingung genannt, da er die Reaktion des Schwingungssystems auf die äußere Anregung darstellt.

Ferner wird von nun an vorausgesetzt, dass schwache Dämpfung (Fall 3) vorliegt. Damit klingen die harmonischen Schwingungen  $x_h(t)$  mit zunehmender Zeit ab; nach kurzer Zeit bleibt die Zwangsschwingung übrig. Die hier betrachteten Erregungsarten umfassen gemäß Abb. 3.1

- Kraftanregung: der Einmassenschwinger wird durch eine periodische Kraft der Art  $F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t + \alpha)$  zur Schwingung angeregt. Hierbei handelt es sich bei  $\Omega$  um die Kreisfrequenz der äußeren Anregung.
- Fußpunktanregung: der Fußpunkt des Einmassenschwingers wird durch eine periodische Bewegung der Art  $u(t) = \hat{u} \cos(\Omega t + \alpha)$  verschoben. Hierbei handelt es sich bei  $\Omega$  um die Kreisfrequenz der Verschiebung.
- Unwuchtanregung: Als eine spezielle Art der Kraftanregung wird davon ausgegangen, dass die Masse des Einmassenschwingers aus einer Kreisscheibe besteht, worauf sich eine exzentrische sitzende Masse befindet. Durch Drehung der Scheibe mit Drehzahl  $\Omega$  entsteht so die Fliehkraft, deren  $x$ -Komponente lautet:  $F_u(t) = m_u \varepsilon \Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha)$ .

Der Einfachheit halber wird hier  $\alpha = 0$  gewählt, d.h. die Erregung  $F(t)$  bzw.  $u(t)$  beginnt bei  $t = 0$  mit maximaler Intensität. Dies stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar: mit Transformation auf einen anderen Beobachtungsbeginn durch  $t = \tilde{t} + \alpha/\Omega$  wird stets  $\cos(\Omega t) = \cos(\Omega \tilde{t} + \alpha)$ .

### 3.1 Ungedämpfte krafterregte Schwingungen

Die Bewegungsgleichung des ungedämpften Einmassenschwingers mit harmonischer Kraftanregung ergibt sich mit  $F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t)$  aus dem Prinzip von d'Alembert

$$m\ddot{x} + cx = F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t) \quad (3.2)$$

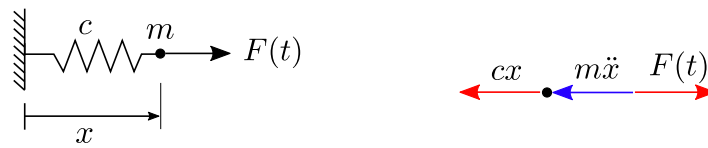


Abbildung 3.3: Einmassenschwinger ohne Dämpfung sowie die zugehörige Kräftebilanz nach dem Prinzip von d'Alembert

### Mechanik 3.1: Berechnung der Lösung mit äußerer Anregung

Das Vorgehen zur Berechnung der Gesamtlösung  $x(t)$  eines durch  $y(t)$  zwangserregten Systems

$$\ddot{x}(t) + 2D\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = y(t)$$

ist wie folgt:

1. Berechnung der homogenen Lösung gemäß Kapitel 2. Setze hierzu zunächst die Anregung  $y(t)$  zu Null, um das homogene System

$$\ddot{x}(t) + 2D\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0$$

zu lösen. Die Lösung lautet  $x_h(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t))$ . Die Integrationskonstanten der einzelnen Fundamentallösungen werden noch nicht an die Anfangsbedingungen angepasst.

2. Berechnung der partikulären Lösung. Hierzu wird ein **Ansatz vom Typ der rechten Seite** benötigt. Bei einer Anregung der Art  $y(t) = y_0 + y_c \cos(\Omega t) + y_s \sin(\Omega t)$  und  $i\Omega \neq \lambda$  lautet dieser Ansatz

$$x_p(t) = X_0 + A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$$

3. Aus dem Ansatz  $x_p(t)$  werden die Ableitungen  $\dot{x}_p(t)$  und  $\ddot{x}_p(t)$  gebildet und in die DGL eingesetzt. Nach Koeffizientenvergleich resultieren  $X_0$ ,  $A$  und  $B$ .
4. Die Gesamtlösung  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$  beinhaltet nun noch die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$ , die jetzt an die Anfangsbedingungen

$$x(t=0) = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0$$

angepasst werden.

Mit Einführung der ungedämpften Eigenfrequenz entsteht aus Gl. (3.2)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{F}}{m} \cos(\Omega t) \quad (3.3)$$

Die homogene Lösung lautet

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (3.4)$$

Die rechte Seite ist rein harmonisch, ohne Konstantanteil – daher ist schon jetzt absehbar, dass  $X_0 = 0$ . Der Vollständigkeit halber wird hier dennoch der gegebene Ansatz verwendet:

$$x_p(t) = X_0 + A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_p(t) = -A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \quad (3.6)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (3.7)$$

Einsetzen in Gl. (3.3) ergibt

$$-A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \sin(\Omega t) + \omega_0^2 (X_0 + A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) = \frac{\hat{F}}{m} \cos(\Omega t) \quad (3.8)$$

Die Parameter  $A$  und  $B$  werden durch Koeffizientenvergleich bestimmt:

$$\text{Konstantanteile:} \quad \omega_0^2 X_0 = 0 \quad (3.9)$$

$$\cos(\Omega t) : \quad -A\Omega^2 + \omega_0^2 A = \frac{\hat{F}}{m} \quad (3.10)$$

$$\sin(\Omega t) : \quad -B\Omega^2 + \omega_0^2 B = 0 \quad (3.11)$$

Die Auflösung des Gleichungssystems liefert

$$X_0 = 0 \quad (3.12)$$

$$A = \frac{\hat{F}}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (3.13)$$

$$B = 0 \quad (3.14)$$

und mit dem dimensionslosen Frequenzverhältnis  $\eta = \Omega/\omega_0$  ist dann

$$x_p(t) = \frac{\hat{F}}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) = \frac{\hat{F}}{m \omega_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} \cos(\Omega t) \quad (3.15)$$

$$= \frac{\hat{F}}{c} \frac{1}{1 - \eta^2} \cos(\Omega t) \quad (3.16)$$

$$= \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi(\eta)) \quad (3.17)$$

mit der (positiven) Amplitude  $\hat{x} = \frac{\hat{F}}{c} \left| \frac{1}{1-\eta^2} \right| = \frac{\hat{F}}{c} \frac{1}{|1-\eta^2|}$ . Das Verhältnis

$$V(\eta) = \frac{1}{|1 - \eta^2|} \quad (3.18)$$

wird Vergrößerungsfunktion genannt; sie ist der veränderliche Teil der Amplitude  $\hat{x}$  in Abhängigkeit von der Drehzahl. Ferner ist

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta < 1 \\ -\pi & \eta > 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

die Phasenverschiebung zwischen  $x_p(t)$  und der Anregung  $F(t)$ .

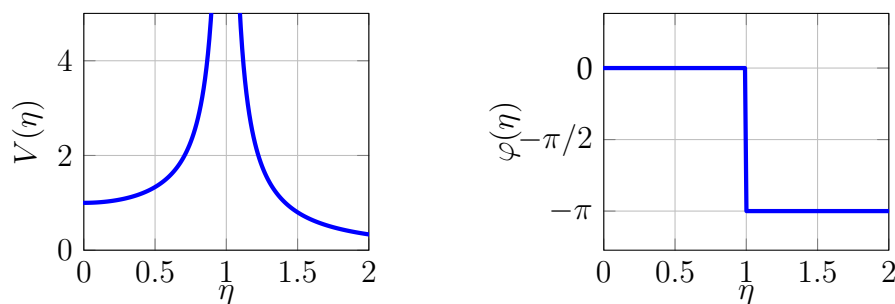


Abbildung 3.4: Betrag der Vergrößerungsfunktion  $V(\eta)$  und Phasenverschiebung  $\varphi(\eta)$ .

### Mechanik 3.2: Resonanz

Bei  $\eta = 1$ , also  $\Omega = \omega_0$ , strebt die Amplitude  $\hat{x}$  gegen  $\infty$ . In diesem Zustand regt die äußere Anregung das System genau mit *Resonanzfrequenz* zum Schwingen an. Es kann gezeigt werden, dass die Lösung im Fall  $\Omega = \omega_0$  den zeitlichen Verlauf

$$x_p(t) = \frac{\hat{F}}{2c} \sin(\omega_0 t) \cdot t \quad (3.20)$$

hat, also eine Schwingung mit linear in der Zeit anwachsender Amplitude.

Die Gesamtlösung ergibt sich schließlich zu

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi(\eta)) \quad (3.21)$$

Die Anpassung an die Anfangsbedingungen liefert die zwei Gleichungen

$$x(0) = C_1 + \hat{x} \cos(\varphi(\eta)) = x_0 \quad (3.22)$$

$$\dot{x}(0) = \omega_0 C_2 - \Omega \hat{x} \sin(\varphi(\eta)) = v_0 \quad (3.23)$$

woraus  $C_1$  und  $C_2$  bestimmt werden.

## 3.2 Gedämpfte krafterregte Schwingungen

Die Kräftebilanz zum krafterregten Einmassenschwinger mit harmonischer Anregung lautet gemäß Abb. 3.1a

$$\ddot{x} + 2D\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = F(t) = \frac{\hat{F}}{m} \cos(\Omega t) \quad (3.24)$$

Die homogene Lösung wird angegeben als

$$x_h(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) \quad (3.25)$$

Der Ansatz zur partikulären Lösung lautet gemeinsam mit den Zeitableitungen

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \quad (3.26)$$

$$\dot{x}_p(t) = -A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \quad (3.27)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (3.28)$$

Einsetzen in die DGL liefert zunächst

$$\begin{aligned} & -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \sin(\Omega t) \\ & + 2D(-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)) \\ & + \omega_0^2 (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) = \frac{\hat{F}}{m} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgen die Gleichungen

$$\cos(\Omega t) : \quad (\omega_0^2 - \Omega^2)A + 2D\omega_0 B = \frac{\hat{F}}{m} \quad (3.30)$$

$$\sin(\Omega t) : \quad -2D\omega_0 A + (\omega_0^2 - \Omega^2)B = 0 \quad (3.31)$$

Das Gleichungssystem für die Unbekannten  $A$  und  $B$  lautet in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & 2D\omega_0 \\ -2D\omega_0 & \omega_0^2 - \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{F}}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

dessen Lösung lautet

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0)^2} \frac{\hat{F}}{m} \begin{bmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 \\ 2D\omega_0 \Omega \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$= \frac{1}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2} \frac{\hat{F}}{c} \begin{bmatrix} 1 - \eta^2 \\ 2D\eta \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

### Mathematik 3.1: Lösung eines linearen Gleichungssystems im $\mathbb{R}^2$

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) im  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

hat die Lösung

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Die Inverse der Matrix ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Also folgt die Lösung

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22}y_1 - a_{12}y_2 \\ -a_{21}y_1 + a_{11}y_2 \end{bmatrix}$$

Folglich ist die Zwangsschwingung

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \quad (3.35)$$

oder auch

$$x_p(t) = \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (3.36)$$

mit

$$\hat{x} = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\hat{F}}{c} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (3.37)$$

$$\tan \varphi = -\frac{B}{A} = -\frac{2D\eta}{1 - \eta^2} \quad (3.38)$$

Hier lautet die Vergrößerungsfunktion, die das Verhältnis zwischen dynamischer Amplitude und stationärer Auslenkung angibt,

$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (3.39)$$

Sowohl die Vergrößerungsfunktion als auch der Phasenwinkel konvergieren für  $D \rightarrow 0$  mit dem Verhalten des ungedämpften Einmassenschwingers.

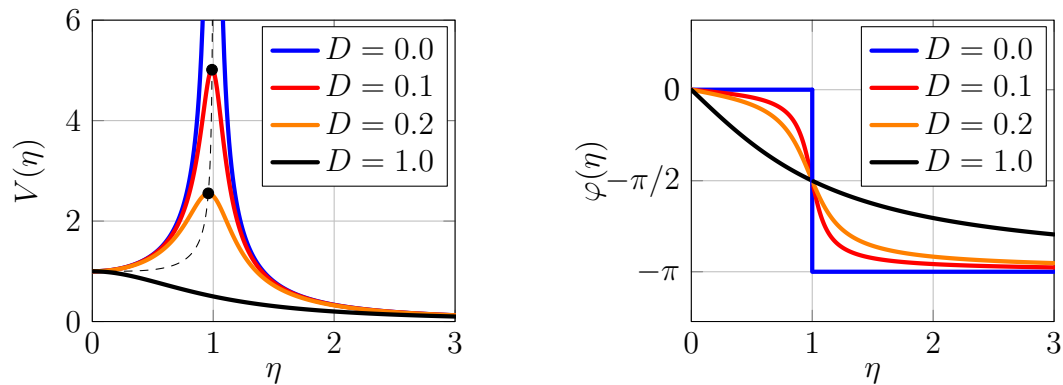


Abbildung 3.5: Vergrößerungsfunktion  $V(\eta)$  und Phasenverschiebung  $\varphi(\eta)$  für den Fall eines gedämpften krafterregten Einmassenschwingers.

Als letzter Schritt fehlt noch die Anpassung an die Anfangsbedingungen, um die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  zu bestimmen. Dieser Schritt unterscheidet sich nicht bei den verschiedenen Schwingungssystemen und wird daher an dieser Stelle und im folgenden nicht ausgeschrieben. Der Leser ist dazu angehalten, die Rechnung selbständig durchzuführen.

### 3.3 Gedämpfte fußpunkterrekte Schwingungen – Maxwell-Modell

Die Kräftebilanz zum fußpunkterregten Einmassenschwinger mit harmonischer Wegvorgabe lautet gemäß Abb. 3.1b

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2u = \omega_0^2\hat{u}\cos(\Omega t) \quad (3.40)$$

Die Bewegungsgleichung ist von der Struktur her identisch wie die der Krafterregung (Gl. (3.24)). Der Unterschied besteht in der Amplitude der rechten Seite, die hier  $\omega_0^2\hat{u}$  anstelle von  $\frac{\hat{F}}{m}$  beträgt. Insofern kann die Lösung direkt angegeben werden:

$$\text{homogene Lösung:} \quad x_h(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) \quad (3.41)$$

$$\text{partikuläre Lösung:} \quad x_p(t) = \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (3.42)$$

$$\text{wobei} \quad \hat{x} = \hat{u} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (3.43)$$

$$\tan \varphi = -\frac{2D\eta}{1 - \eta^2} \quad (3.44)$$

Die normierten Verläufe von  $\hat{x}$  und  $\varphi$  sind damit identisch wie in Abb. 3.5.

### 3.4 Gedämpfte fußpunkterrekte Schwingungen – Voigt-Modell

Die Kräftebilanz zum fußpunkterregten Einmassenschwinger mit harmonischer Wegvorgabe lautet gemäß Abb. 3.1c

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2u + 2D\omega_0\dot{u} \quad (3.45)$$

Die homogene Lösung lautet

$$x_h(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) \quad (3.46)$$

Die rechte Seite ist ausgeschrieben

$$u(t) = \hat{u} \cos(\Omega t) \quad u(t) = -\Omega \hat{u} \sin(\Omega t) \quad (3.47)$$



Der Ansatz zur partikulären Lösung lautet gemeinsam mit den Zeitableitungen

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \quad (3.48)$$

$$\dot{x}_p(t) = -A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \quad (3.49)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (3.50)$$

Einsetzen in die DGL liefert zunächst

$$-A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (3.51)$$

$$+ 2D(-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t))$$

$$+ \omega_0^2(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) = \omega_0^2 \hat{u} \cos(\Omega t) - 2D\Omega\omega_0 \hat{u} \sin(\Omega t)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgen die Gleichungen

$$\cos(\Omega t) : \quad (\omega_0^2 - \Omega^2)A + 2D\omega_0 B = \omega_0^2 \hat{u} \quad (3.52)$$

$$\sin(\Omega t) : \quad -2D\omega_0 A + (\omega_0^2 - \Omega^2)B = -2D\omega_0 \Omega \hat{u} \quad (3.53)$$

Das Gleichungssystem für die Unbekannten  $A$  und  $B$  lautet in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & 2D\omega_0 \\ -2D\omega_0 & \omega_0^2 - \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 \hat{u} \\ -2D\omega_0 \Omega \hat{u} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

dessen Lösung lautet

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\Omega\omega_0)^2} \hat{u} \begin{bmatrix} \omega_0^2(\omega_0^2 - \Omega^2) + (2D\omega_0\Omega)^2 \\ 2D\omega_0\Omega^3 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$= \frac{1}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2} \hat{u} \begin{bmatrix} 1 - \eta^2 + (2D\eta)^2 \\ 2D\eta^3 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Folglich ist die Zwangsschwingung

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \quad (3.57)$$

oder auch

$$x_p(t) = \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (3.58)$$

mit

$$\hat{x} = \sqrt{A^2 + B^2} = \hat{u} \sqrt{\frac{1 + (2D\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (3.59)$$

$$\tan \varphi = -\frac{B}{A} = -\frac{2D\eta^3}{1 - \eta^2 + (2D\eta)^2} \quad (3.60)$$

In diesem Fall lautet die Vergrößerungsfunktion also

$$V(\eta) = \sqrt{\frac{1 + (2D\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (3.61)$$

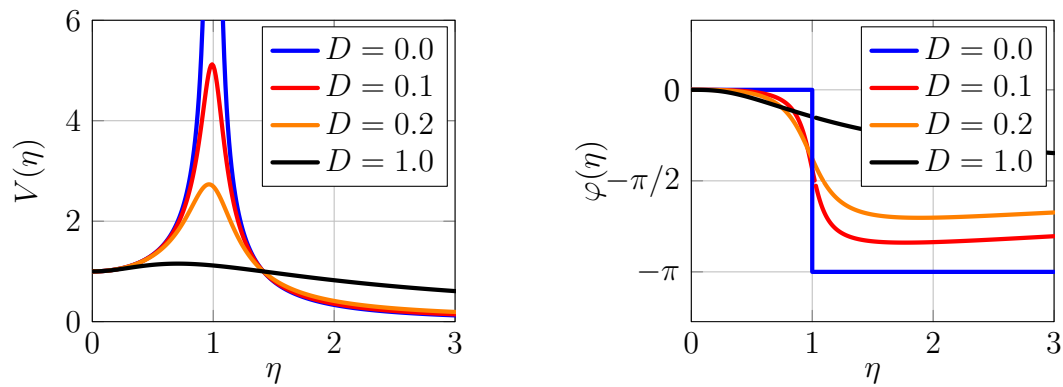


Abbildung 3.6: Vergrößerungsfunktion  $V(\eta)$  und Phasenverschiebung  $\varphi(\eta)$  für den Fall eines gedämpften fußpunkterregten Einmassenschwingers (Voigt-Modell).

Beim Frequenzverhältnis  $\eta = \sqrt{2}$  kreuzen sich die Verläufe der Vergrößerungsfunktion für alle Werte von  $D$ . Das bedeutet, dass im Bereich ab  $\eta > \sqrt{2}$  eine Erhöhung der Dämpfung zu einer Amplitudensteigerung führt. Dieser Effekt muss bei der Auswahl und Auslegung der Dämpfung in einer technischen Anwendung bekannt sein, sofern das Ziel darin besteht, Schwingungsamplituden zu minimieren.

### 3.5 Gedämpfte unwuchterregte Schwingungen

Die Kräftebilanz zum fußpunkterregten Einmassenschwinger mit harmonischer Wegvorgabe lautet gemäß Abb. 3.1d

$$(m_1 + m_u)\ddot{x} + d\dot{x} + cx = m_u e \Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (3.62)$$

Mit  $\omega_0^2 = c/(m_1 + m_u)$ ,  $2D\omega_0 = d/(m_1 + m_u)$  und  $\mu = m_u/(m_1 + m_u)$  wird die DGL vereinfacht zu

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \mu e\Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (3.63)$$

Man erkenne die gleiche Struktur der linken Seite im Vergleich zur Krafterregung, sowie den Unterschied auf der rechten Seite: die Amplitude der Anregung ist jetzt proportional zu  $\Omega^2$ . Sie wird also mit zunehmender Drehzahl der Maschine größer. Dieser Effekt ist bedingt durch die Fliehkraft der Unwuchtmasse.

Die homogene Lösung lautet

$$x_h(t) = e^{-\delta t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) \quad (3.64)$$

Der Ansatz zur partikulären Lösung lautet gemeinsam mit den Zeitableitungen

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \quad (3.65)$$

$$\dot{x}_p(t) = -A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \quad (3.66)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (3.67)$$

Einsetzen in die DGL liefert zunächst

$$\begin{aligned} & -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \sin(\Omega t) \\ & + 2D(-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)) \\ & + \omega_0^2(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) = \mu e\Omega^2 \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich folgen die Gleichungen

$$\cos(\Omega t) : \quad (\omega_0^2 - \Omega^2)A + 2D\omega_0 B = \mu e\Omega^2 \quad (3.69)$$

$$\sin(\Omega t) : \quad -2D\omega_0 A + (\omega_0^2 - \Omega^2)B = 0 \quad d..! \quad (3.70)$$

Das Gleichungssystem für die Unbekannten  $A$  und  $B$  lautet in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 & 2D\omega_0 \\ -2D\omega_0 & \omega_0^2 - \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu e\Omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

dessen Lösung lautet

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\Omega\omega_0)^2} \mu e \Omega^2 \begin{bmatrix} \omega_0^2 - \Omega^2 \\ 2D\omega_0\Omega \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$= \frac{\mu e}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2} \begin{bmatrix} (1 - \eta^2)\eta^2 \\ 2D\eta^3 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Folglich ist die Zwangsschwingung

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \quad (3.74)$$

oder auch

$$x_p(t) = \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (3.75)$$

mit

$$\hat{x} = \sqrt{A^2 + B^2} = \mu e \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (3.76)$$

$$\tan \varphi = -\frac{B}{A} = -\frac{2D\eta}{1 - \eta^2} \quad (3.77)$$

In diesem Fall lautet die Vergrößerungsfunktion also

$$V(\eta) = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}, \quad (3.78)$$

der Phasengang exakt gleich wie beim krafteerregten Einmassenschwinger.

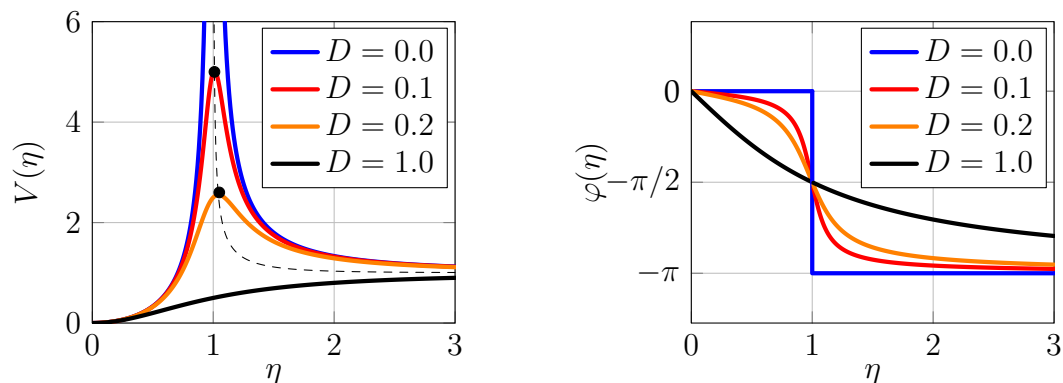


Abbildung 3.7: Vergrößerungsfunktion  $V(\eta)$  und Phasenverschiebung  $\varphi(\eta)$  für den Fall eines gedämpften unwuchterregten Einmassenschwingers.

Aus  $V(\eta)$  ist abzulesen, dass bei  $\eta = 0$ , also Stillstand der Maschine, keine statische

Verschiebung auftritt. Außerdem gilt  $V(\eta \rightarrow \infty) = 1$ . Zur Interpretation des Verhaltens wird der Schwerpunktsatz betrachtet: Für einen aus  $m_1$  und  $m_u$  zusammengesetzten Körper gilt für den Gesamtschwerpunkt in  $x$ -Richtung

$$m_{ges}x_{ges} = m_1x_1 + m_u x_u \quad , \text{ also} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} x_{ges} &= \frac{m_1}{m_{ges}}x_1 + \frac{m_u}{m_{ges}}x_u = \frac{m_1}{m_1 + m_u}x_1 + \frac{m_u}{m_1 + m_u}x_u \\ &= (1 - \mu)x_1 + \mu x_u \end{aligned} \quad (3.80)$$

Weiterhin ist

$$x_u = x_1 + h + e \cos(\Omega t) \quad (3.81)$$

weshalb

$$x_{ges} = x_1 + \mu(h + e \cos(\Omega t)) \quad (3.82)$$

Für große Frequenzverhältnisse ist

$$x_1 = V(\eta)\mu e \cos(\Omega t + \varphi) \approx 1 \cdot \mu e \cos(\Omega t - \pi) = -\mu e \cos(\Omega t) \quad (3.83)$$

woraus für den Gesamtschwerpunkt folgt

$$x_{ges} = \mu h. \quad (3.84)$$

Bei sehr großen Frequenzverhältnissen  $\eta \gg 1$  (überkritischer Frequenzbereich) bleibt also der Gesamtschwerpunkt  $x_{ges}$  des zusammengesetzten Systems in Ruhe. Dieser Effekt nennt sich Selbstzentrierung.

## 3.6 Alternative Lösungsansätze für Zwangsschwingungen

Bis jetzt wurde als Lösungsansatz die Form  $x_p(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$  gewählt, womit durch Einsetzen in die DGL ein algebraisches Gleichungssystem zur Lösung von  $A$  und  $B$  entstand, wodurch letztlich  $x_p(t)$  bestimmt war. Es gibt manche DGLn, für die alternative gleichwertige Lösungsansätze zu geschickteren, ggf. kürzeren Rechenwegen führen. Davon werden in diesem Abschnitt zwei Stück präsentiert und anhand der Fußpunktanregung (Maxwell-Modell) demonstriert. Es sei vorweggeschickt, dass

der bisherige Ansatz bereits vollständig ist und durch einen alternativen vollständigen Ansatz dieselbe Lösung resultiert.

### 3.6.1 Ansatz mit Phasenverschiebung

Der Ansatz mit Phasenverschiebung lautet gemeinsam mit seinen Ableitungen

$$x_p(t) = \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (3.85)$$

$$\dot{x}_p(t) = -\Omega \hat{x} \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\Omega^2 \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi)$$

In die DGL (Gl. (3.40)) eingesetzt resultiert zunächst

$$-\Omega^2 \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi) - 2D\omega_0 \Omega \hat{x} \sin(\Omega t + \varphi) + \omega_0^2 \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi) = \omega_0^2 \hat{u} \cos(\Omega t) \quad (3.86)$$

Der Koeffizientenvergleich wie bisher kann auf diese Art nicht durchgeführt werden, da die rechte Seite noch nicht in der Form mit Phasenverschiebung vorliegt. Dazu bedarf es der Additionstheoreme:

#### Mathematik 3.2: Additionstheoreme der Trigonometrie

Die Additionstheoreme der Trigonometrie lauten

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

Dies wird verwendet für die folgende Umformung:

$$\cos(\Omega t) = \cos(\Omega t + \varphi - \varphi) = \cos(\Omega t + \varphi) \cos(\varphi) + \sin(\Omega t + \varphi) \sin(\varphi) \quad (3.87)$$

Es folgt also aus der DGL mit Ansatz

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \Omega^2) \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi) - 2D\omega_0 \Omega \hat{x} \sin(\Omega t + \varphi) \\ &= \omega_0^2 \hat{u} (\cos(\Omega t + \varphi) \cos(\varphi) + \sin(\Omega t + \varphi) \sin(\varphi)) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Der Koeffizientenvergleich kann nun durchgeführt werden:

$$\cos(\Omega t + \varphi) : \quad (\omega_0^2 - \Omega^2) \hat{x} = \omega_0^2 \hat{u} \cos(\varphi) \quad (3.89)$$

$$\sin(\Omega t + \varphi) : \quad -2D\omega_0 \Omega \hat{x} = \omega_0^2 \hat{u} \sin(\varphi) \quad (3.90)$$

Dann folgt aus Quadrieren und Addieren von (3.89) und (3.89)

$$((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2) \hat{x}^2 = \omega_0^4 \hat{u}^2, \text{ also} \quad (3.91)$$

$$\hat{x} = \frac{\omega_0^2 \hat{u}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2}}. \quad (3.92)$$

Der Quotient von (3.89) und (3.89) liefert

$$-\frac{2D\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \tan(\varphi) \quad (3.93)$$

Dasselbe Ergebnis wurde bereits zu Beginn dieses Kapitels hergeleitet, wofür aber ein längerer Rechenweg notwendig war. Dadurch, dass hier bereits im Ansatz die betragsmäßige Amplitude  $\hat{x}$  und der Nullphasenwinkel  $\varphi$  verwendet wurden, kam das Ergebnis direkt in dieser Form vor. Insgesamt ist dieser Weg also kürzer.

Gleichwohl wird erkannt, dass es sich bei den Gleichungen (3.89) und (3.90) um nichtlineare Zusammenhänge zwischen  $\hat{x}$  und  $\varphi$  handelt, welche nur in speziellen Sonderfällen – so auch hier – gelöst werden können. Der Ansatz mit Phasenverschiebung birgt also das Risiko eines Gleichungssystems, das keine analytische Lösung mehr besitzt.

### 3.6.2 Komplexe Erweiterung

Eine weitere Möglichkeit ist durch die komplexe Erweiterung gegeben. Dazu wird zunächst sowohl die rechte Seite mithilfe der Euler-Formel umgeschrieben:

$$u = \hat{u} \cos(\Omega t) = \hat{u} \operatorname{Re}(\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)) = \hat{u} \operatorname{Re}(e^{i\Omega t}) = \operatorname{Re}(\hat{u} e^{i\Omega t}) \quad (3.94)$$

wobei  $\operatorname{Re}(\cdot)$  der Realteil-Operator ist. Aus dem Ansatz für die partikuläre Lösung wird

$$x_p = \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi) = \hat{x} \operatorname{Re}(\cos(\Omega t + \varphi) + i \sin(\Omega t + \varphi)) = \hat{x} \operatorname{Re}(e^{i(\Omega t + \varphi)}) \quad (3.95)$$

$$= \operatorname{Re}(\underbrace{\hat{x} e^{i\varphi}}_{:=X} e^{i\Omega t}) = \operatorname{Re}(X e^{i\Omega t}) \quad (3.96)$$

mit  $X$  dem *komplexen Frequenzgang*, in dem sowohl die Amplitude als auch eine Phasenlage gegenüber der Anregung  $u$  enthalten sind:

$$\operatorname{abs}(X) = \sqrt{\operatorname{Re}(X)^2 + \operatorname{Im}(X)^2} = \sqrt{\hat{x}^2 \cos^2(\varphi) + \hat{x}^2 \sin^2(\varphi)} = \hat{x} \quad (3.97)$$

$$\tan(\arg(X)) = \frac{\operatorname{Im}(X)}{\operatorname{Re}(X)} = \frac{\hat{x} \sin(\varphi)}{\hat{x} \cos(\varphi)} = \tan(\varphi) \quad (3.98)$$

### Mathematik 3.3: Betrag und Phase einer komplexen Zahl

Eine komplexe Zahl  $X = a + ib$  hat einen Real- und Imaginärteil

$$a = \operatorname{Re}(X), \quad b = \operatorname{Im}(X),$$

einen Betrag

$$\operatorname{abs}(X) = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(X)^2 + \operatorname{Im}(X)^2}$$

und einen Phasenwinkel  $\varphi = \arg(X)$ , der über die Beziehung

$$\tan(\arg(X)) = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{Im}(X)}{\operatorname{Re}(X)}$$

definiert ist.

Die komplexe Erweiterung besteht nun darin, den Realteil-Operator wegzulassen. Dann ist

$$u = \hat{u}e^{i\Omega t} \quad x_p = Xe^{i\Omega t} \quad (3.99)$$

$$\dot{x}_p = i\Omega Xe^{i\Omega t} \quad \ddot{x}_p = -\Omega^2 Xe^{i\Omega t} \quad (3.100)$$

In der DGL des fußpunkterregten Einmassenschwingers nach dem Maxwell-Modell wird dies zu

$$-\Omega^2 Xe^{i\Omega t} + 2D\omega_0 i\Omega Xe^{i\Omega t} + \omega_0^2 Xe^{i\Omega t} = \omega_0^2 \hat{u}e^{i\Omega t} \quad (3.101)$$

Diese Gleichung wird direkt nach  $X$  aufgelöst, um den komplexen Frequenzgang zu erhalten:

$$X = \frac{\omega_0^2 \hat{u}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2Di\omega_0\Omega} \quad (3.102)$$

Zur weiteren Analyse ist es hier sinnvoll, die komplexe Zahl  $i$  aus dem Nenner zu entfernen, was mithilfe einer Erweiterung gelingt:

$$X = \frac{\omega_0^2 \hat{u}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2Di\omega_0\Omega} \cdot \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2Di\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2Di\omega_0\Omega} = \frac{\omega_0^2 \hat{u} (\omega_0^2 - \Omega^2 - 2Di\omega_0\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2} \quad (3.103)$$



Es folgt wieder das bekannte Ergebnis

$$\hat{x} = \omega_0^2 \hat{u} \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2} = \frac{\omega_0^2 \hat{u}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2Di\omega_0\Omega)^2}} \quad (3.104)$$

$$\tan(\varphi) = - \frac{2D\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (3.105)$$

Diese Herangehensweise zur Berechnung zwangserregter Schwingungen hat den Vorteil der kompakten Schreibweise sowie der Linearität der entstehenden Gleichungssysteme; sie ist allerdings wegen der komplexen Ergebnisse schwerer zu interpretieren und daher insbesondere für die numerische Analyse vorteilhaft.

## Aufgaben zu Kapitel 3

**3.1** Aus welchen Lösungsanteilen setzt sich die Schwingungsantwort zwangserregter Systeme zusammen?

**3.2** Bestimmen Sie für das System  $\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} + 4x = 4\cos(5t)$  die Parameter  $\omega_0$  und  $D$ . Geben Sie die homogene Lösung  $x_h(t)$  an. Berechnen Sie anschließend die partikuläre Lösung  $x_p(t)$ . Passen Sie schließlich noch die Gesamtlösung  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$  an die Anfangsbedingungen  $x(0) = 1$  und  $\dot{x}(0) = 0$  an.

**3.3** Das ungedämpfte System  $\ddot{x} + 4x = 4\Omega^2 \cos(\Omega t)$  hat die homogene Lösung  $x_h(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$ . Berechnen Sie die partikuläre Lösung! Passen Sie außerdem die Gesamtlösung an die Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$  und  $\dot{x}(0) = 0$  an.

**3.4** Berechnen Sie die partikuläre Lösung  $x_p(t)$  des gedämpften unwuchterregten Einmassenschwingers mithilfe der komplexen Erweiterung. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der in Abschnitt 3.5 gezeigten Variante.

**3.5** Wie lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung im Fall eines

1. gedämpften Einmassenschwingers mit harmonischer Anregung?
2. ungedämpften Einmassenschwingers mit harmonischer Anregung außerhalb der Resonanzfrequenz?
3. ungedämpften Einmassenschwingers mit harmonischer Anregung bei Resonanzfrequenz?

**3.6** Kann ein gedämpfter Einmassenschwinger mit  $0 < D < 1$  durch harmonische Krafterregung derart angeregt werden, dass die Amplitude unendlich groß wird? Wieso nicht?

# 4 Anregungssignale und Fourieranalyse

## 4.1 Anregung durch Impuls

### 4.1.1 Sprungfunktion und Dirac-Impuls

Die Sprung- und die Impulsfunktion gehören zur Funktionenklasse der Distributionen. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie mengenwertige Eigenschaften besitzen – beispielsweise die elementweise Definition.

#### Mathematik 4.1: Sprungfunktion

Die Sprungfunktion  $\sigma(t)$  ist definiert als

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \end{cases}$$

Formal betrachtet ist der Dirac-Impuls die Ableitung der Sprungfunktion. Wegen der unendlich großen Steigung bei  $t = 0$  wird die Definition über einen Grenzwert eingeführt:

#### Mathematik 4.2: Dirac-Impuls

Der Dirac-Impuls  $\delta(t)$  ist definiert als

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & t \leq -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \leq t \end{cases}$$

Es gilt der integrale Zusammenhang zwischen Sprungfunktion und Dirac-Impuls

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} t \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon - (-\varepsilon)}{2\varepsilon} = 1 \quad (4.1)$$

Die zu erwähnenden Eigenschaften des Dirac-Impulses sind

- Die Impulsdauer  $2\varepsilon$  ist wegen  $\varepsilon \rightarrow 0$  unendlich kurz
- Die Impulshöhe  $\frac{1}{2\varepsilon}$  ist unendlich groß
- Für jede Funktion  $f(t)$ , die bei  $t = t_0$  stetig ist, gilt die Ausblendeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (4.2)$$

### 4.1.2 Impulsantwort

Die Anregung durch Impuls ist ein spezielles Testsignal, mit dem die wichtigsten Eigenschaften eines Schwingungssystems ermittelt werden können. Im Falle des Einmassenschwingers lautet die DGL

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = \delta(t) \quad (4.3)$$

wobei für den Dirac-Impuls  $\delta(t)$  die abschnittsweise Definition in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  verwendet wird. Dementsprechend ist die Lösung abschnittsweise definiert:

**Vor Impuls ( $t \leq -\varepsilon$ )** Die Masse ist in Ruhe. Also sind Lage und Geschwindigkeit

$$x(-\varepsilon) = 0 \quad \dot{x}(-\varepsilon) = 0 \quad (4.4)$$

**Während des Impuls ( $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$ )** Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = \frac{1}{2\varepsilon} \quad (4.5)$$

Die Integration über die Impulsdauer ergibt in mehreren Schritten

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (m\ddot{x} + d\dot{x} + cx) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt \quad (4.6)$$

$$m \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ddot{x} dt + d \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \dot{x} dt + c \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x dt = 1 \quad (4.7)$$

$$m(\dot{x}(\varepsilon) - \dot{x}(-\varepsilon)) + d(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)) + c \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x dt = 1 \quad (4.8)$$

Unter der Annahme, dass die Lage  $x(t)$  während der Impulsdauer stetig bleibt, folgt  $x(-\varepsilon) = x(\varepsilon) = x_0$  und damit

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x dt = c \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_0 dt = 2\varepsilon x_0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (4.9)$$

Somit verbleibt

$$m \left( \dot{x}(\varepsilon) - \underbrace{\dot{x}(-\varepsilon)}_0 \right) = 1 \quad (4.10)$$

Zur Zeit  $t = \varepsilon$  gilt also:

$$x(\varepsilon) = x(-\varepsilon) = 0 \quad \dot{x}(\varepsilon) = \frac{1}{m} \quad (4.11)$$

Wegen  $\varepsilon \rightarrow 0$  gelten auch die Bezeichnungen

$$t = -\varepsilon = 0^- \quad t = \varepsilon = 0^+ \quad (4.12)$$

**Nach dem Impuls ( $\varepsilon \leq t$ )** Die Bewegungsgleichung lautet mit Anfangsbedingungen

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = 0 \quad x(0^+) = 0 \quad \dot{x}(0^+) = \frac{1}{m} \quad (4.13)$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t) \quad (4.14)$$

Der Impuls lässt sich im Experiment als Hammerschlag realisieren. Aus der Impulsantwort (Gl. (4.14)) lassen sich die Systemparameter  $m, d, D$  bestimmen.

## 4.2 Periodische Anregung

### 4.2.1 Darstellung von Singalen im Zeit- und im Frequenzbereich

Eine harmonische Schwingung lässt sich im Frequenzbereich vollständig durch Amplitude  $\hat{x}$ , Kreisfrequenz  $\Omega$  und Nullphasenwinkel  $\varphi$  beschreiben. Diese Eigenschaft motiviert die Darstellung im Zeit- und im Frequenzbereich:

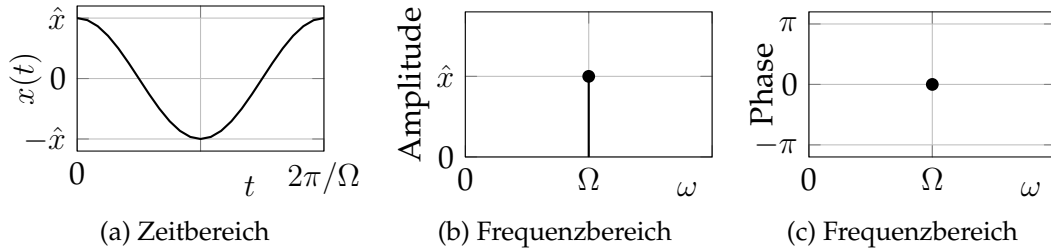


Abbildung 4.1: Reines Cosinussignal  $x(t) = \hat{x} \cos(\Omega t) = \text{Re}(\hat{x}e^{i\Omega t})$

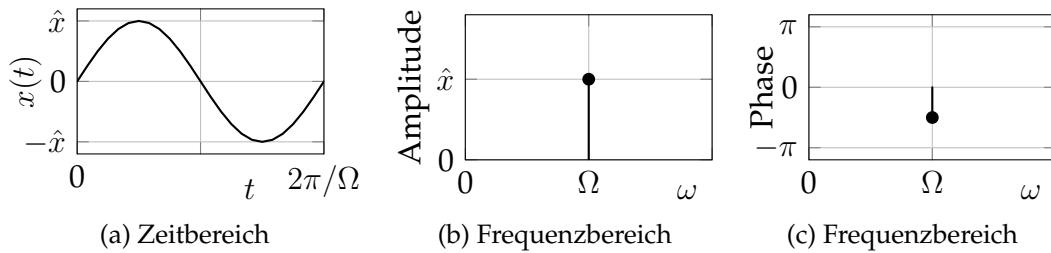


Abbildung 4.2: Reines Sinussignal  $x(t) = \hat{x} \sin(\Omega t) = \text{Re}(\hat{x}e^{i(\Omega t - \pi/2)})$

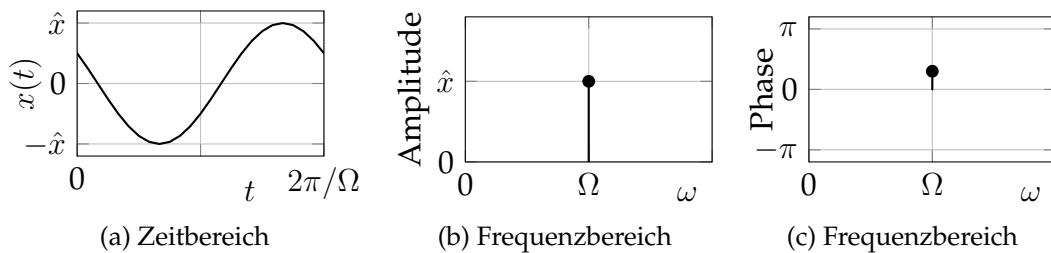


Abbildung 4.3: Allgemeines Signal  $x(t) = \hat{x} \cos(\Omega t + \varphi) = \text{Re}(\hat{x}e^{i(\Omega t + \varphi)})$

Die Überführung einer harmonischen Funktion vom Zeit- in den Frequenzbereich ist eine Äquivalenztransformation. Wird eine allgemeine periodische Funktion als Überlagerung vieler harmonischer Schwingungsanteile mit jeweiliger Kreisfrequenz, Amplitude und Nullphasenwinkel betrachtet, dann kommen in der Darstellung im Frequenzbereich entsprechende Komponenten hinzu. Dies motiviert den nächsten Abschnitt:

### 4.3 Darstellung periodischer Funktionen durch Fourierreihen

Es sei eine  $T$ -periodische Funktion mit der Grundfrequenz  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  gegeben. Unter den Voraussetzungen

- endlich viele Sprungstellen endlicher Höhe
- 2-Fache Integrierbarkeit von  $x(t)$

lässt sich die Funktion  $x(t)$  als *Fourierreihe* darstellen:

### Mathematik 4.3: Fourierreihe

Die Entwicklung von  $x(t)$  als Fourierreihe lautet

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\Omega t) + S_k \sin(k\Omega t)$$

wobei die Koeffizienten des Polynoms nach

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(k\Omega t) dt \quad k \in \mathbb{N}$$

$$S_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(k\Omega t) dt \quad k \in \mathbb{N}$$

berechnet werden.

Alternativ gelten auch die folgenden Darstellungen:

### Mathematik 4.4: Darstellung der Fourierreihe durch Amplitude und Phase

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k \cos(k\Omega t + \varphi_k)$$

Die Folge  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots$  heißt *Amplitudenspektrum*, die Folge  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  heißt *Phasenspektrum*. Man spricht auch von der Spektraldarstellung der Funktion  $x(t)$ .

### Mathematik 4.5: Darstellung der Fourierreihe als komplexes Polynom

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\Omega t}$$

wobei die Koeffizienten des Polynoms nach

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-ik\Omega t} dt \quad k \in \{-n, n\}, n \in \mathbb{N}$$

berechnet werden.

Anmerkungen:

- Die Darstellung der Funktion  $x(t)$  als Fourierreihe bietet den Vorteil der Zerlegung in einzelne Frequenzanteile
- Der Anteil  $\hat{x}_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$  heißt *Grundschwingung* oder *1. Harmonische*
- Der Anteil  $\hat{x}_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2)$  heißt *1. Oberschwingung* oder *2. Harmonische*
- Der Anteil  $\hat{x}_k \cos(k\Omega t + \varphi_k)$  heißt *(k-1)-te Oberschwingung* oder *k-te Harmonische*
- Bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten muss nicht zwingend auf  $t \in [-T/2, T/2]$  integriert werden. Wichtig ist, dass eine Periode vollständig abgedeckt ist: Es muss gelten  $t \in [t_0, t_0 + T]$  für beliebige  $t_0$ .
- Periodische Funktionen können durch eine endliche Zahl von Elementen ihrer Fourierreihe approximiert werden. Der Fehler konvergiert im quadratischen Mittel.

Es gelten insbesondere die zwei Spezialfälle:

**Gerade Funktionen.** Für gerade Funktionen  $x(t)$  gilt  $x(t) = x(-t)$ . Dann folgt:

$$S_k = 0 \quad C_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(k\Omega t) dt \quad (4.15)$$

**Ungerade Funktionen.** Für ungerade Funktionen  $x(t)$  gilt  $x(t) = -x(-t)$ . Dann folgt:

$$S_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(k\Omega t) dt \quad C_k = 0 \quad (4.16)$$

#### Beispiel 4.1: Rechteckschwingung

Das Rechtecksignal ist definiert als

$$x(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (4.17)$$



Die Grundfrequenz ist  $\Omega = 2\pi/T$ . Diese Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, also ungerade. Daher ist

$$C_k = 0, k \in \mathbb{N}_0, \quad (4.18)$$

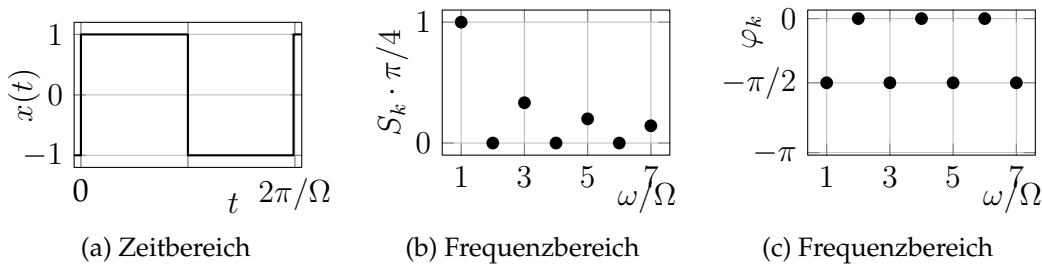
$$S_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(k\Omega t) dt \quad (4.19)$$

$$= -\frac{4}{Tk\Omega} \left( \cos\left(k\Omega \frac{T}{2}\right) - 1 \right) \quad (4.20)$$

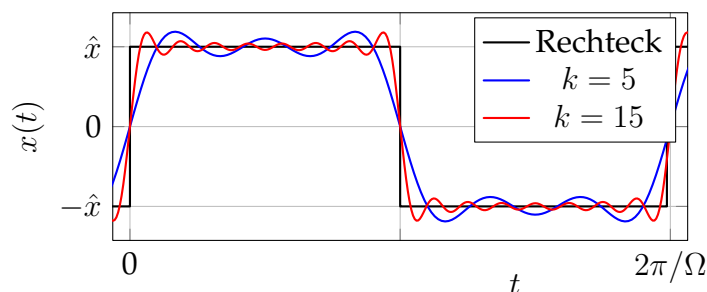
$$= \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k) \quad (4.21)$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.22)$$

Die Reihenentwicklung der Rechteckfunktion  $x(t) = \sum_k S_k \sin(k\Omega t)$  hat wegen  $x(t) = \sum_k S_k \cos(k\Omega t - \pi/2)$  die Amplituden  $\hat{x}_k = S_k$  und die Phasen  $\varphi_k = -\pi/2$ . Die Darstellung im Zeit- und im Frequenzbereich ist wie folgt:

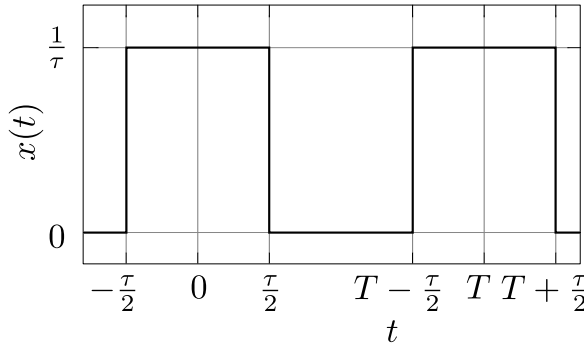


Die Amplituden der  $k$ -ten Harmonischen fallen mit  $\frac{1}{k}$  ab. Aufgrund der steilen Flanken der Rechteckfunktion spielen höhere Harmonische eine wichtige Rolle bei der Konvergenz der Reihe. Wegen der Unstetigkeit im Zeitverlauf tritt das *Gibbs'sche Phänomen* auf, das zum Überschwingen der Fourierentwicklung gegenüber der Rechteckfunktion führt.



### Beispiel 4.2: Rechteckimpulsfolge

Eine Rechteckimpulsfolge ist definiert als die periodische Abfolge von Rechteckimpulsen. Die Periode sei gegeben durch  $T$ , die Impulslänge durch  $\tau$ . Analog zum Dirac-Stoß hat die Fläche des Stoßes per Definition den Wert 1.



Es liegt eine gerade Funktion vor. Die Berechnung der Fourierkoeffizienten liefert

$$S_k = 0, k \in \mathbb{N}_0, \quad (4.23)$$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \quad (4.24)$$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\Omega t) dt = \frac{2}{T} \left( \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{1}{\tau} \cos(k\Omega t) dt + \int_{\tau/2}^{T-\tau/2} 0 dt \right) \quad (4.25)$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{T k \Omega} \frac{1}{\tau} \left( \sin \left( k \Omega \frac{\tau}{2} \right) \right) \quad (4.26)$$

$$= \frac{2}{k \pi \tau} \sin \left( k \pi \frac{\tau}{T} \right) \quad (4.27)$$

Somit lautet die Fourierreihe der Rechteckimpulsfolge

$$x(t) = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k \pi \tau} \sin \left( k \pi \frac{\tau}{T} \right) \cos(k\Omega t) \quad (4.28)$$

Der Stoßcharakter wird unterschieden nach Verhältnis von  $\tau$  und  $T$ : Bei einem kleinen Wert von  $\tau$  (kurzer Stoßdauer) ist die Amplitude  $\frac{2}{k \pi \tau}$  groß. Die erste Nullstelle der  $C_k$  liegt bei  $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{k}$ . Es liegt viel Energie bei hohen Frequenzen vor. Man spricht vom *harten Stoß*. Im Gegensatz dazu kommt die erste Nullstelle der  $C_k$  umso früher, je größer das Verhältnis  $\tau/T$ . Es liegt viel Energie bei den kleinen Frequenzen. Die Verteilung der Amplituden in Abhängigkeit der Frequenz ist in der folgenden Abbildung zu sehen.

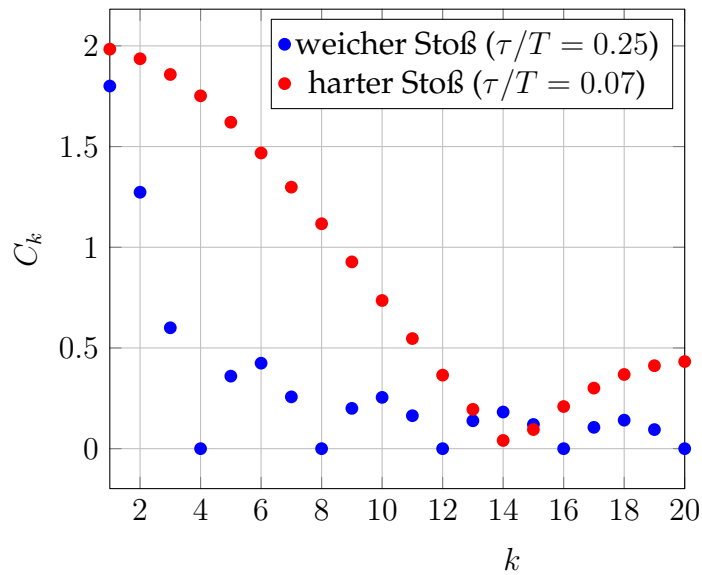


Abbildung 4.4: Harter und weicher Stoß.

### Beispiel 4.3: Dreieckschwingung

Die Dreieckschwingung ist definiert als

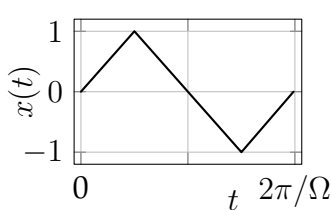
$$x(t) = \begin{cases} t \cdot \frac{4}{T} & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ 2 - t \cdot \frac{4}{T} & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \end{cases} \quad (4.29)$$

Auch diese Funktion ist ungerade, weshalb die Koeffizienten  $C_k$  allesamt verschwinden. Ferner ist

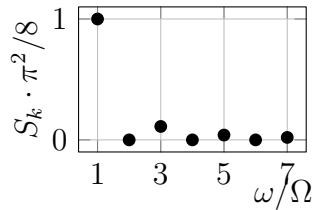
$$S_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(k\Omega t) dt \quad (4.30)$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{8}{k^2\pi^2} \cdot (-1)^{(k-1)/2} & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.31)$$

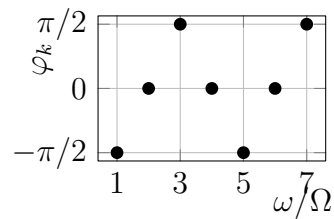
Die Darstellung von Zeitsignal, Amplituden- und Phasenspektrum ist wie folgt:



(a) Zeitbereich



(b) Frequenzbereich



(c) Frequenzbereich

## 4.4 Erzwungene Schwingungen mit periodischer Anregung

Es wird der gedämpfte Einmassenschwinger (Parameter  $m, d, c$ ) mit periodischer Krafterregung  $F(t)$  betrachtet. Die Krafterregung sei jetzt *polyharmonisch*, d.h. sie setzt sich aus vielen Frequenzanteilen zusammen. Dies ist beispielsweise bei Rechtecks- oder Dreiecksanregung der Fall. Die allgemeine Darstellung sei als Fourierreihe gegeben:

$$F(t) = \frac{F_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} F_{C,k} \cos(k\Omega t) + F_{S,k} \sin(k\Omega t) \quad (4.32)$$

Somit lautet die DGL

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = \frac{F_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} F_{C,k} \cos(k\Omega t) + F_{S,k} \sin(k\Omega t) \quad (4.33)$$

Die Antwort  $x(t)$  kann für drei isolierte Fälle separat betrachtet werden:

**Fall 1:**  $k = 0$ . Die Anregung  $F_1(t) = F_0/2$  ist konstant; die Antwort darauf (partikuläre Lösung) kann durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite bestimmt werden:

$$x_1(t) = K \text{ (konstant)} \quad \dot{x}_1(t) = 0 \quad \ddot{x}_1(t) = 0 \quad (4.34)$$

Nach kurzer Umformung folgt

$$x_1(t) = K = \frac{F_0}{2c} \quad (4.35)$$

**Fall 2:**  $k \geq 1, F_{S,k} = 0$ . Die Anregung durch eine Drehzahlvielfache lautet  $F_2(t) = F_{C,k} \cos(k\Omega t)$ . Die Antwort darauf (partikuläre Lösung) lautet

$$x_2(t) = V \left( \frac{k\Omega}{\omega_0} \right) \frac{F_{C,k}}{c} \cos(k\Omega t + \varphi_k) \quad (4.36)$$

$$V \left( \frac{k\Omega}{\omega_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{k\Omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2D\frac{k\Omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (4.37)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 - (k\eta)^2)^2 + (2Dk\eta)^2}} = V(k\eta) \quad (4.38)$$

$$\tan(\varphi_k) = -\frac{2D\frac{k\Omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{k\Omega}{\omega_0}\right)^2} = -\frac{2Dk\eta}{1 - (k\eta)^2} \quad (4.39)$$

**Fall 3:**  $k \geq 0, F_{C,k} = 0$ . Die Anregung durch eine Drehzahlvielfache lautet  $F_3(t) = F_{C,k} \sin(k\Omega t)$ . Die Antwort darauf (partikuläre Lösung) lautet in Analogie zu Fall 2

$$x_3(t) = V(k\eta) \frac{F_{C,k}}{c} \sin(k\Omega t + \varphi_k) \quad (4.40)$$

Gemäß dem Superpositionsprinzip ist die Schwingungsantwort auf die Einzelanregungen  $F(t) = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)$  die Summe der Einzelantworten  $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ , also

$$x(t) = \frac{F_0}{2c} + \sum_{k=1}^{\infty} V(k\eta) \left( \frac{F_{C,k}}{c} \cos(k\Omega t + \varphi_k) + \frac{F_{S,k}}{c} \sin(k\Omega t + \varphi_k) \right) \quad (4.41)$$

Diese Lösung hat Eigenschaften wie die Schwingungsantwort auf eine Einzelanregung. Die Resonanz des ungedämpften Einmassenschwingers wird jetzt nicht mehr nur bei  $\Omega = \omega_0$ , sondern bei  $k\Omega = \omega_0$  mit allen  $k \in \mathbb{N}$  angeregt.

#### Beispiel 4.4: Motorblockanregung

Die Vertikalbewegung eines Motorblocks kann durch die bekannte DGL des 1-Massen-Schwingers beschrieben werden. Die Schwingungsanregung durch Zündung der 4 Zylinder hat ihre Hauptkomponenten bei doppelter und -facher Motordrehzahl. Die vereinfachte Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = F_{C,2} \cos(2\Omega t) + F_{C,4} \cos(4\Omega t) \quad (4.42)$$

Gemäß Gleichung (4.41) lautet die partikuläre Lösung

$$x(t) = V_{Kraftanregung} \left( \frac{2\Omega}{\omega_0} \right) \frac{F_{C,2}}{c} \cos(2\Omega t + \varphi_2) \quad (4.43)$$

$$+ V_{Kraftanregung} \left( \frac{4\Omega}{\omega_0} \right) \frac{F_{C,4}}{c} \cos(2\Omega t + \varphi_4) \quad (4.44)$$

In *Octave* lautet eine mögliche Implementierung

```
function dy = Motorblock(t,y)
```

```

Fc2 = 1; Fc4 = 0.5;

Omega = t*500*2*pi/60; % Drehzahlhochlauf (500 rpm
                        % pro Sekunde)

Phi = 1/2*Omega*t;

dy = zeros(size(y));
dy(1) = y(2);
dy(2) = (-c*y(1)-d*y(2) + Fc2*cos(2*Phi) + Fc4*cos(4*Phi))/m;

% main function
close all; clear variables; clc;
tspan = linspace(0,10,10000);
y0 = [0,0];
[tout,yout] = ode45(@Motorblock,tspan,y0);
figure, plot(tout,yout(:,1));

Fs=length(tout)/(tout(end)-tout(1));
step=ceil(50*Fs/1000); window=ceil(500*Fs/1000);
[s,f,t] = specgram(yout(:,1), 2^10, Fs,window, window-step);
[t,f] = meshgrid(t,f);
figure, surf(t,f,abs(s),'edgecolor','none');
caxis([0.0 1e-3]); axis([0 10 10 200 0 1e-2]);

```

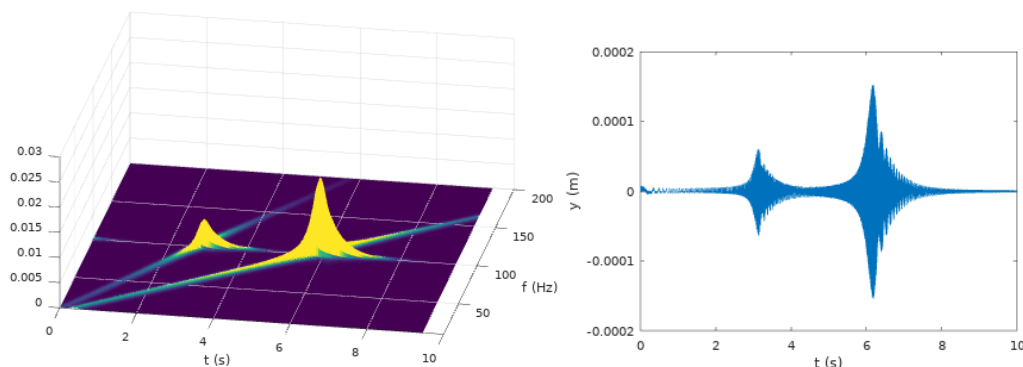


Abbildung 4.5: Spektrogramm der Auslenkung  $y(t)$  bei Hochlaufsimulation und Anregung mit 2. und 4. Ordnung. Charakteristisch sind im Spektrogramm die Anregungsordnungen, mit denen die Resonanz jeweils getroffen wird.

## 4.5 Nichtperiodische Vorgänge

Für periodische Funktionen gilt:  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ . Die Grundfrequenz ist also durch die endliche Periodenlänge begrenzt. Für nichtperiodische Funktionen (z.B. einmalige Vorgänge) geht die Schwingungsdauer  $T$  gegen unendlich. Damit ist auch die Grundfrequenz  $\Omega \rightarrow d\omega$  (sie wird differenziell klein) bzw.  $k\Omega \rightarrow \omega$ . Mit Darstellung von (Mathematik 4.5) lauten die komplexen Schwingungskomponenten im Grenzübergang

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T x(t) e^{-ik\Omega t} dt}_{=: X_k = X(k\Omega)} e^{ik\Omega t} \quad (4.45)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt}_{X(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \quad (4.46)$$

Dies motiviert die folgende Definition:

### Mathematik 4.6: Fouriertransformation

Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}(x)$  beschreibt die Transformation einer Funktion  $x(t)$  in den Frequenzbereich. Sie ist definiert durch

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Die Rücktransformierte  $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$  wird berechnet als

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Der Betrag  $|X(\omega)|$  beschreibt das Amplitudenspektrum der nichtperiodischen Funktion  $x(t)$ . Es gilt der Zusammenhang zwischen Amplitude und Phase

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} = \operatorname{Re}\{X(\omega)\} + i \cdot \operatorname{Im}\{X(\omega)\} \quad (4.47)$$

$$\tan(\varphi(\omega)) = \frac{\operatorname{Im}\{X(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{X(\omega)\}} \quad (4.48)$$

In der Definition der Fouriertransformierten in (Mathematik 4.6) wurde angenommen, dass die aperiodischen Signale für  $t < 0$  den Wert 0 haben. Um den Fall  $x(t < 0) \neq 0$  abzudecken, lautet die verallgemeinerte Fouriertransformierte

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.49)$$

Die Rücktransformierte bleibt unverändert. Für die Fouriertransformation gelten die folgenden Rechenregeln:

- Linearität

$$\mathcal{F}\{c_1x_1(t) + c_2x_2(t)\} = c_1X_1(\omega) + c_2X_2(\omega) \quad (4.50)$$

- Differentiation im Urbildraum

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (i\omega)^n X(\omega) - x(0^+) \quad (4.51)$$

mit der Anfangsbedingung  $x(0^+)$ , welche bei homogenen Anfangsbedingungen verschwindet.

#### Beispiel 4.5: Dirac-Impuls

Die Fouriertransformierte des Dirac-Impuls berechnet sich unter Berücksichtigung der Ausblendeigenschaft zu

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega \cdot 0} = 1 \quad (4.52)$$

Ein Dirac-Impuls ist ein unendlich harter Stoß. Folglich befinden sich in dessen Amplitudenspektrum alle Frequenzen mit der Spektraldichte 1. Man spricht von *weißem Rauschen*.

#### Beispiel 4.6: Sprungfunktion

Die Fouriertransformierte der Sprungfunktion berechnet sich wegen  $\delta(t) = d\sigma(t)/dt$  und

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = i\omega\mathcal{F}(\sigma(t)) - \delta(0^+) = i\omega\mathcal{F}(\sigma(t)) \quad (4.53)$$



zu

$$\mathcal{F}(\sigma(t)) = \frac{1}{i\omega} \quad (4.54)$$

#### Beispiel 4.7: Harmonische Funktion

$$\mathcal{F}(\sin(\Omega t)) = i\pi (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)) \quad (4.55)$$

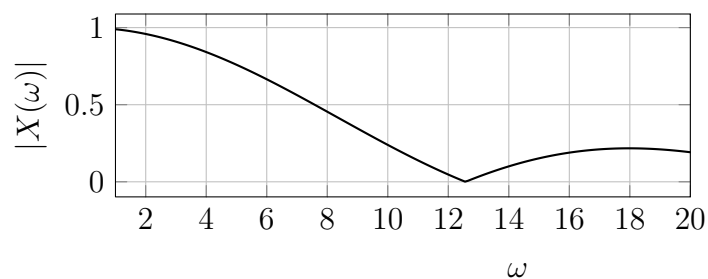
$$\mathcal{F}(\cos(\Omega t)) = \pi (\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)) \quad (4.56)$$

#### Beispiel 4.8: Rechteckimpuls ohne Wiederholung

In Analogie zur Rechteckimpulsfolge wird der einmalige Rechteckimpuls ohne Wiederholung, d.h. mit  $T \rightarrow \infty$ , im Frequenzbereich betrachtet. Dafür eignet sich die Fouriertransformation:

$$X(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{1}{\tau} e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2}}{i\tau\omega} = \frac{2}{\tau\omega} \sin(\omega\tau/2) \quad (4.57)$$

Bemerkenswert an diesem Ergebnis sind zwei Beobachtungen: Das bisherige diskrete Frequenzspektrum (Grundfrequenz  $\Omega$ ) geht nun über in ein verteiltes Spektrum, für das alle reellen Werte von  $\omega$  zugelassen sind; die weiteren Eigenschaften des bisherigen Ergebnisses sind beibehalten. Ferner folgt für den Grenzübergang  $\tau \rightarrow 0$  das Ergebnis von Beispiel 4.5.



#### Beispiel 4.9: Impulsantwort des Einmassenschwingers

Die Fouriertransformation angewandt auf die Gleichung (4.3) lautet gemäß der Rechenregeln:

$$-\omega^2 X(\omega) + 2Di\omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega) = \frac{1}{m} \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \frac{1}{m} \quad \text{bzw.} \quad (4.58)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2Di\omega)} \quad (4.59)$$

Diese Darstellung der Fouriertransformierten erinnert stark an die komplexe Darstellung der Übertragungsfunktion und motiviert den nächsten Abschnitt:

## 4.6 Berechnung der Schwingungsantwort mithilfe des komplexen Frequenzgangs

Als Ausgangspunkt wird ein lineares System mit zeitunabhängigen Parametern und einer allgemeinen Eingangsgröße  $y(t)$  gewählt. Die Anwendung der Fouriertransformation auf die Differentialgleichung

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x}{dt^k} = b_0 y \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.60)$$

lautet

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k \cdot (i\omega)^k \right) X(\omega) = b_0 Y(\omega) \quad (4.61)$$

Ferner wird die Übertragungsfunktion

$$G(\omega) = \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} = \frac{b_0}{\sum_{k=0}^n a_k \cdot (i\omega)^k} \quad (4.62)$$

eingeführt, welche im Frequenzbereich den Zusammenhang zwischen Einheitsanregung und Antwort herstellt.

Wie im (Beispiel 4.9) ersichtlich, folgt aus der *Einheitsanregung*  $y(t) = \delta(t)$  im Frequenzbereich die Übertragungsfunktion. Außerdem ist die Übertragungsfunktion  $G(\omega)$  auch aus der Fouriertransformation der Impulsantwort  $g(t)$  berechenbar:

$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{m\omega_d} e^{-D\omega_0 t} \sin(\omega_d t) \right\} = \frac{1}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2Di\omega)}$ . Diese Beobachtung ist allgemein gültig: Es ist stets

$$\mathcal{F} \{g(t)\} = G(\omega) \quad (4.63)$$

Die Übertragungsfunktion  $G(\omega)$  beschreibt ein lineares zeitinvariantes System vollständig. Ist sie bekannt, dann kann die Antwort auf eine beliebige Anregung im Frequenzbereich berechnet werden. Die Rücktransformation liefert die Schwingungsantwort im Zeitbereich: mit  $X(\omega) = G(\omega)Y(\omega)$  ist

$$\mathcal{F} \{x(t)\} = X(\omega) = G(\omega)Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-i\omega t} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.64)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) y(\tau) d\tau \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (4.65)$$

$$= \mathcal{F} \{g(t) * y(t)\} \quad (4.66)$$

mit

$$g(t) * y(t) := \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) y(\tau) d\tau \quad (4.67)$$

der *Faltung* zwischen der Gewichtsfunktion und einer beliebigen Anregungsfunktion.

## Aufgaben zu Kapitel 4

**4.1** Bestimmen Sie die Koeffizienten  $C_0$ ,  $C_k$  und  $S_k$  der folgenden Funktionen:

a.  $f(t) = a \sin(\Omega t) + b \cos(2\Omega t), \quad t \in [0, 2\pi/\Omega] \quad (4.68)$

b.  $f(t) = a \sin^2(\Omega t) - \cos(\Omega t), \quad t \in [0, 2\pi/\Omega] \quad (4.69)$

c.  $f(t) = c + a \sin(\Omega t) + b \sin(\Omega t) \cos(\Omega t), \quad t \in [0, 2\pi/\Omega] \quad (4.70)$

d.  $f(t) = \sigma(t) - \sigma(t-1), \quad t \in [0, 2] \quad (4.71)$

d.  $f(t) = t \cdot \sigma(t) + (1-t) \cdot \sigma(t-1), \quad t \in [0, 2] \quad (4.72)$

**4.2** Bestimmen Sie die Koeffizienten  $a_k$  der folgenden Funktionen:

a.  $f(t) = a \sin(\Omega t) + b \cos(2\Omega t), \quad t \in [0, 2\pi/\Omega] \quad (4.73)$

b.  $f(t) = a \sin^2(\Omega t) - \cos(\Omega t), \quad t \in [0, 2\pi/\Omega] \quad (4.74)$

c.  $f(t) = c + a \sin(\Omega t) + b \sin(\Omega t) \cos(\Omega t), \quad t \in [0, 2\pi/\Omega] \quad (4.75)$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der Aufgabe 4.1.

**4.3** Berechnen Sie jeweils die partikuläre Lösung  $x_p(t)$  der DGL

a.  $\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = c_1 + c_2 \sin^2(\Omega t) \quad (4.76)$

b.  $\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = c_1 |\sin(\Omega t)| \quad (4.77)$

Verfolgen Sie dabei die folgenden Schritte: Überführung der rechten Seite in eine Fourierreihe, Berechnung der partikulären Lösung zu jeder Anregungskomponente, Summation der Lösungsanteile.

**4.4** Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Ausdrücke

a.  $f(t) = \sigma(t) \quad (4.78)$

b.  $f(t) = \sigma(t - t_0) \quad (4.79)$

c.  $\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos(\Omega t) \quad (4.80)$

Berechnen Sie insbesondere für den Ausdruck von Aufgabe c. die Funktion  $X(\omega)$ .

**4.5** Führen Sie zum Aufgabenteil c. von 4.4 die Rücktransformation von  $X(\omega)$  in den Zeitbereich durch, sodass Sie die  $x(t)$  erhalten.

# 5 Schwingungen mit 2 Freiheitsgraden

## 5.1 Beispiele

Um die Dynamik einer realen Anwendung zu beschreiben, muss die Frage geklärt werden, wie viele Freiheitsgrade nötig sind. In vielen Fällen reicht ein einziger Freiheitsgrad aus – so im Beispiel der Schwingerkette (Abb. 1.5) bei niedrigen Schwingungsfrequenzen, wo nur die erste Schwingform angeregt wird. Bei höheren Anregungsfrequenzen treten Schwingformen auf, wo sich Kettenglieder teilweise in Gegenphase bewegen. Hier muss die Modellbeschreibung mehrere Freiheitsgrade enthalten.

Beispiele für Schwingungssysteme, wo zwei Freiheitsgrade sinnvoll erscheinen, sind ein Biegebalken mit zwei konzentrierten Massen, ein 2-Drehscheiben-system mit Torsionsfedern, die Bewegung eines Körpers in der Ebene oder ein System zur Beschreibung der Hub- und Nickbewegung eines Fahrzeugs (Abb. 5.1).

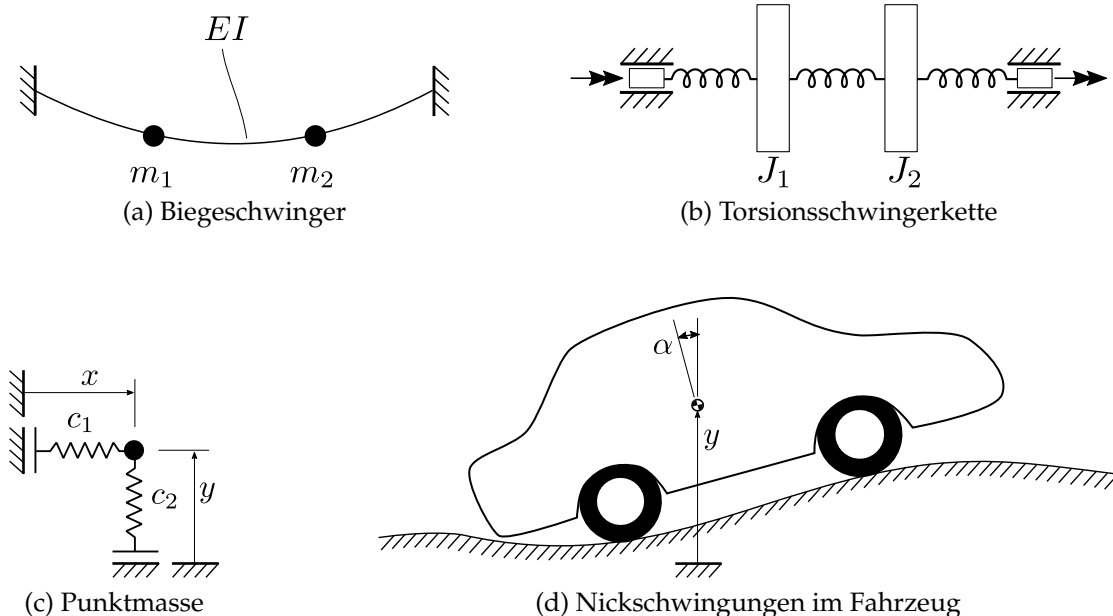


Abbildung 5.1: 2-Freiheitsgrad-Systeme

Im folgenden Abschnitt wird das Ersatzmodell für die Vertikalschwingung einer Ma-

schine auf einem Fundament behandelt. Hierbei ist die Maschine durch eine viskoelastische Verbindung auf einem Schwingfundament befestigt.

## 5.2 Bewegungsgleichung

Die weiteren Untersuchungen von Zwei-Freiheitsgrad-Systemen werden im Folgenden anhand der Maschine auf Fundament durchgeführt. Zunächst wird der Aufbau und der Freischnitt nach d'Alembert dargestellt:

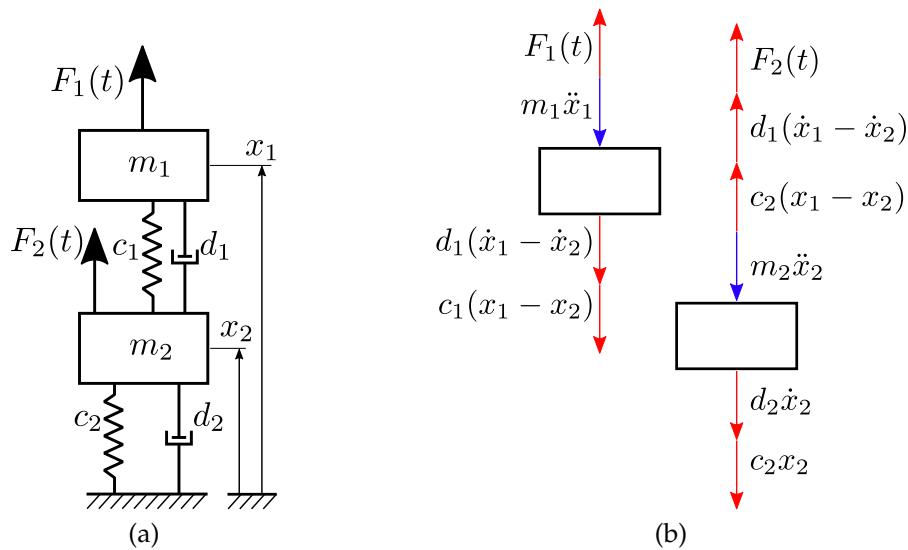


Abbildung 5.2: Schwingungssystem und Freischnitt im Sinne d'Alemberts

Die Bewegungsgleichung des dargestellten Systems lautet

$$m_1 \ddot{x}_1 + d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1(x_1 - x_2) = F_1(t) \quad (5.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + d_2 \dot{x}_2 + d_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2 x_2 + c_1(x_2 - x_1) = F_2(t) \quad (5.2)$$

Diese Gleichungen lauten in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\vec{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & -d_1 \\ -d_1 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\vec{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}}_{\vec{F}} \quad (5.3)$$

Hier bei bezeichnet  $M$  die Massenmatrix,  $D$  die Dämpfungsmatrix,  $K$  die Steifigkeitsmatrix,  $\vec{x}$  den Vektor der Positionen und  $\vec{F}$  den Vektor der Kraftanregung. Man spricht bei

$$M\ddot{\vec{x}} + D\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{F} \quad (5.4)$$

von einem linearen, gekoppelten, inhomogenen System von Differentialgleichungen von zwei Freiheitsgraden mit konstanten Koeffizienten.

### 5.3 Ungedämpfte Schwingungen

Bereits im Kapitel 3 dieser Vorlesung wurden freie und erzwungene Schwingungen von Einfreiheitsgradschwingern behandelt. Die Vorgehensweise ist bei Mehrfreiheitsgradsystemen grundsätzlich identisch – es ergeben sich allerdings ein paar Besonderheiten, auf die hier eingegangen werden soll. Es wird zunächst das ungedämpfte System

$$M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \cos(\Omega t) \quad (5.5)$$

betrachtet, welches die nun vektorwertige Gesamtlösung  $\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$  (homogene und partikuläre Lösung) besitzt. Zur Berechnung der homogenen Lösung  $\vec{x}_h(t)$  wird zunächst das System

$$M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{0} \quad (5.6)$$

betrachtet und mithilfe eines Exponentialansatz

$$\vec{x}_h = \vec{r}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (5.7)$$

gelöst. Hierbei ist  $\vec{r}$  der *Eigenvektor* und  $\lambda$  der zu bestimmende Eigenwert. Ableiten und Einsetzen in die Bewegungsdifferentialgleichung liefert

$$\dot{\vec{x}}_h = \lambda \vec{r} e^{\lambda t} \quad (5.8)$$

$$\ddot{\vec{x}}_h = \lambda^2 \vec{r} e^{\lambda t} \quad (5.9)$$

$$(M\lambda^2 + K)\vec{r}e^{\lambda t} = \vec{0} \quad (5.10)$$

Die algebraische Gleichung

$$(M\lambda^2 + K)\vec{r} = \vec{0} \quad (5.11)$$

heißt *Eigenwertproblem*. Die Bilanz der Anzahl Gleichungen und Unbekannter zeigt: Es gibt zwei Gleichungen zur Bestimmung der zwei Komponenten von  $\vec{r}$  sowie den Eigenwert  $\lambda$  – das Gleichungssystem ist also unterbestimmt. Diese Situation kennen wir schon vom 1-Freiheitsgrad-System, wo die Amplitude der Koeffizienten des Exponentialansatzes erst durch Zusatzbedingungen (Anpassung an die Anfangsbedingungen) gefunden werden kann.

Zur Lösung wird die folgende Betrachtung herangezogen: Wenn die Matrix  $(M\lambda^2 + K)$  invertierbar ist, dann folgt direkt die triviale Lösung  $\vec{r} = \vec{0}$ , also  $\vec{x}_h = \vec{0}$ . Um allgemeine nicht-triviale Lösungen zuzulassen, darf  $(M\lambda^2 + K)$  also nicht invertierbar sein. Daher muss die Determinante dieser Matrix verschwinden:

$$\det(M\lambda^2 + K) = 0 \quad (5.12)$$

Diese Gleichung ist im Fall von 2-Freiheitsgrad-Systemen mit  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ein Polynom 4. Grades in  $\lambda$ . Die Eigenwerte  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  treten in konjugiert komplexen Paaren auf:

$$\lambda_{1/4} = \pm i\omega_1 \quad \lambda_{2/3} = \pm i\omega_2 \quad (5.13)$$

Zur Bestimmung der Eigenvektoren werden die Eigenwerte in das Eigenwertproblem (5.11) eingesetzt:

$$\lambda_i : \quad (M\lambda_i^2 + K)\vec{r}_i = 0 \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (5.14)$$

Wegen der Singularität der Matrix  $(M\lambda_i^2 + K)$  sind die Zeilen des Gleichungssystems (5.14) linear abhängig. Der Lösungsvektor  $\vec{r}_i$  kann bis auf eine freie Konstante  $u$  berechnet werden. Es verbleiben also insgesamt 4 Konstanten zur Bestimmung der freien Schwingung  $\vec{x}_h(t)$ , die durch die Anfangsbedingungen gewählt werden.

Die Quadrate der Eigenwerte sind  $\lambda_{1/4}^2 = -\omega_1^2$ ,  $\lambda_{2/3}^2 = -\omega_2^2$ . Daher sind die Bestimmungsgleichungen für  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_4$  identisch, ebenso für  $\vec{r}_2$  und  $\vec{r}_3$ ; es folgt  $\vec{r}_1 = \vec{r}_4$  und  $\vec{r}_2 = \vec{r}_3$ . Die homogene Lösung lautet schlussendlich

$$\vec{x}_h(t) = \tilde{C}_1 \vec{r}_1 e^{i\omega_1 t} + \tilde{C}_2 \vec{r}_2 e^{i\omega_2 t} + \tilde{C}_3 \vec{r}_2 e^{-i\omega_2 t} + \tilde{C}_4 \vec{r}_1 e^{-i\omega_1 t} \quad (5.15)$$



oder in reeller Darstellung

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \vec{r}_1 \sin(\omega_1 t) + C_2 \vec{r}_1 \cos(\omega_1 t) + C_3 \vec{r}_2 \sin(\omega_2 t) + C_4 \vec{r}_2 \cos(\omega_2 t) \quad (5.16)$$

In einem ungedämpften System ( $M$ - $K$ -System) sind die Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  stets imaginär und die Eigenvektoren  $\vec{r}$  reellwertig. Dies ändert sich, sobald Dämpfung vorliegt.

Für die partikuläre Lösung  $x_p(t)$  des zwangserregten Systems wird der vektorwertige Ansatz vom Typ der rechten Seite eingesetzt:

$$\vec{x}_p = \vec{p} \cos(\Omega t) + \vec{q} \sin(\Omega t) \quad \ddot{\vec{x}}_p = -\Omega^2 \vec{p} \cos(\Omega t) - \Omega^2 \vec{q} \sin(\Omega t) \quad (5.17)$$

Hierbei sind  $\vec{p}$  und  $\vec{q}$  die noch zu bestimmenden Amplituden. Einsetzen liefert

$$-\Omega^2 M \vec{p} \cos(\Omega t) - \Omega^2 M \vec{q} \sin(\Omega t) + K \vec{p} \cos(\Omega t) + K \vec{q} \sin(\Omega t) = \vec{F} \cos(\Omega t) \quad (5.18)$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt zwei Gleichungen

$$\cos(\Omega t) : \quad -\Omega^2 M \vec{p} + K \vec{p} = \vec{F} \quad (5.19)$$

$$\sin(\Omega t) : \quad -\Omega^2 M \vec{q} + K \vec{q} = \vec{0} \quad (5.20)$$

Es folgen die Lösungen

$$\vec{p} = (K - \Omega^2 M)^{-1} \vec{F} \quad \vec{q} = \vec{0} \quad (5.21)$$

Als Gesamtlösung ergibt sich durch Superposition

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) \\ &= C_1 \vec{r}_1 \sin(\omega_1 t) + C_2 \vec{r}_1 \cos(\omega_1 t) + C_3 \vec{r}_2 \sin(\omega_2 t) + C_4 \vec{r}_2 \cos(\omega_2 t) \\ &\quad + (K - \Omega^2 M)^{-1} \vec{F} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die freien Konstanten können jetzt mithilfe der Anfangsbedingungen bestimmt werden. Hierzu lauten die vier Gleichungen

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(t=0) = C_2 \vec{r}_1 + C_4 \vec{r}_2 + (K - \Omega^2 M)^{-1} \vec{F} \quad (5.23)$$

$$\vec{v}_0 = \dot{\vec{x}}(t=0) = \omega_1 C_1 \vec{r}_1 + \omega_2 C_3 \vec{r}_2 - \Omega (K - \Omega^2 M)^{-1} \vec{F} \quad (5.24)$$

welche die Gleichungssysteme

$$\vec{x}_0 - (K - \Omega^2 M)^{-1} \vec{F} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\vec{v}_0 + \Omega(K - \Omega^2 M)^{-1} \vec{F} = [\omega_1 \vec{r}_1, \omega_2 \vec{r}_2] \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

ergeben.

### Mathematik 5.1: Auszüge aus der linearen Algebra

Transposition eines Vektors:

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

Transposition einer Matrix:

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Skalarprodukt:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

oder in alternativer Schreibweise

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Matrix-Vektor-Produkt:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

Skalarprodukt mit Matrix-Vektor-Produkt:

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot (A\vec{y}) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}y_1 + A_{12}y_2 \\ A_{21}y_1 + A_{22}y_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1y_1A_{11} + x_1y_2A_{12} + x_2y_1A_{21} + x_2y_2A_{22} \\ \vec{y} \cdot (A\vec{x}) &= x_1y_1A_{11} + x_1y_2A_{21} + x_2y_1A_{12} + x_2y_2A_{22}\end{aligned}$$

Gemäß der letzten Formel gilt die Vertauschungsrelation

$$\vec{x} \cdot (A\vec{y}) = \vec{y} \cdot (A^T\vec{x})$$

Matrix-Matrix-Produkt:

$$\begin{aligned}AB &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Aus Vektoren zusammengesetzte Matrix:

$$R = [\vec{x}, \vec{y}] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

### Beispiel 5.1: Ungedämpfter 2-Massen-Schwinger

Im betrachteten System zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren sei  $m_1 = m, m_2 = 8m, c_1 = c, c_2 = 5c, d_1 = d_2 = 0$ . Die Bewegungsgleichung lautet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 8m \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\vec{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & 6c \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\Omega t) \quad (5.27)$$

Mit dem Exponentialansatz für die homogene Lösung  $\vec{x}_h = \vec{r}e^{\lambda t}$  folgt  $\ddot{\vec{x}}_h = \lambda^2 \vec{r}e^{\lambda t}$  und

$$(M\lambda^2 + K)\vec{r}e^{\lambda t} = \vec{0} \quad (5.28)$$

Aus der Forderung nach der Existenz der nicht-trivialen Lösung  $\vec{r} \neq \vec{0}$  folgt das charakteristische Polynom

$$0 = \det(M\lambda^2 + K) = \left| \begin{bmatrix} m\lambda^2 + c & -c \\ -c & 8m\lambda^2 + 6c \end{bmatrix} \right| \quad (5.29)$$

$$= 8m^2\lambda^4 + 14cm\lambda^2 + 5c^2 \quad (5.30)$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_{1/4} = \pm i\sqrt{\frac{c}{2m}} \quad \lambda_{2/3} = \pm i\sqrt{\frac{5c}{4m}} \quad (5.31)$$

Wird  $\lambda_{1/4}^2 = -\omega_1$  in Gl. (5.19) eingesetzt, dann ist

$$0 = (-\omega_1^2 M + K)\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 m + c & -c \\ -c & -8\omega_1^2 m + 6c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_1 \quad (5.32)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_1 \quad (5.33)$$

Mit  $\vec{r}_1$  dem zur Eigenkreisfrequenz  $\omega_1$  gehörigen Eigenvektor. Die zwei Zeilen von Gl.(5.26) sind linear abhängig. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen – die Lösung kann also nur bis auf eine Konstante bestimmt werden. Setze  $r_1 = s$ , dann folgt

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{2}s \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Die zusätzliche Forderung nach  $|\vec{r}_1| = \sqrt{5}s \stackrel{!}{=} 1$  führt zum *normierten Eigenvektor*

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad |\vec{r}_1| = 1 \quad (5.35)$$

Beim Eigenwertpaar  $\lambda_{2/3} = \pm i\omega_2$  ergibt sich

$$0 = (-\omega_2^2 M + K)\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}c & -c \\ -c & 4c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_2 \quad (5.36)$$

und der zugehörige normierte Eigenvektor ist

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Die homogene Lösung ist in reeller Darstellung

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \vec{r}_1 \sin(\omega_1 t) + C_2 \vec{r}_1 \cos(\omega_1 t) + C_3 \vec{r}_2 \sin(\omega_2 t) + C_4 \vec{r}_2 \cos(\omega_2 t) \quad (5.38)$$

Die Eigenvektoren  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  kennzeichnen die Eigenschwingungsformen:

- 1. Eigenschwingungsform bei  $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{2m}}$ . Die Bewegung beider Massen ist gleichphasig, da die Vorzeichen der Komponenten von  $\vec{r}_1$  gleich sind
- 2. Eigenschwingungsform bei  $\omega_2 = \sqrt{\frac{5c}{4m}}$ . Die Bewegung beider Massen ist gegenphasig, da die Vorzeichen der Komponenten von  $\vec{r}_2$  verschieden sind

Die partikuläre Lösung folgt direkt nach Gl. (5.22)

$$\vec{x}_p(t) = (K - \Omega^2 M)^{-1} \vec{F} = \begin{bmatrix} c - m\Omega^2 & -c \\ -c & 6c - 8m\Omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\Omega t) \quad (5.39)$$

$$= \frac{F_1}{8m^2\Omega^4 - 14cm\Omega^2 + 5c^2} \begin{bmatrix} 6c - 8m\Omega^2 \\ c \end{bmatrix} \cos(\Omega t) \quad (5.40)$$

Die Konstanten  $C_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$  werden durch Anpassung an die Anfangsbedingungen zu

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{3} & \frac{\sqrt{5}}{6} \\ \frac{\sqrt{17}}{3} & -\frac{\sqrt{17}}{6} \end{bmatrix} [\vec{x}_0 - \vec{p}] \quad (5.41)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{6}(4x_{01} + x_{02}) \\ \frac{\sqrt{17}}{6}(2x_{01} - x_{02}) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$- \frac{F_1}{8m^2\Omega^4 - 14cm\Omega^2 + 5c^2} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{3}(6c - 8m\Omega^2) + \frac{\sqrt{5}}{6}c \\ \frac{\sqrt{17}}{3}(6c - 8m\Omega^2) + \frac{\sqrt{17}}{6}c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{3\omega_1} & \frac{\sqrt{5}}{6\omega_1} \\ \frac{\sqrt{17}}{3\omega_3} & -\frac{\sqrt{17}}{6\omega_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_0 + \Omega \vec{p} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{6\omega_1}(4v_{01} + v_{02}) \\ \frac{\sqrt{17}}{6\omega_3}(2v_{01} - v_{02}) \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$+ \frac{\Omega F_1}{8m^2\Omega^4 - 14cm\Omega^2 + 5c^2} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{3\omega_1}(6c - 8m\Omega^2) + \frac{\sqrt{5}}{6\omega_1}c \\ \frac{\sqrt{17}}{3\omega_3}(6c - 8m\Omega^2) + \frac{\sqrt{17}}{6\omega_3}c \end{bmatrix}$$

## 5.4 Modale Entkopplung

Die beiden Eigenwertpaare  $(\omega_i, \vec{r}_i)$  und  $(\omega_j, \vec{r}_j)$  erfüllen jeweils das Eigenwertproblem  $(-\omega_i^2 M + K)\vec{r}_i = \vec{0}$  bzw.  $(-\omega_j^2 M + K)\vec{r}_j = \vec{0}$ . Die Multiplikation dieser Gleichungen mit dem jeweils anderen Eigenvektor liefert zwei skalare Gleichungen

$$-\omega_i^2 \vec{r}_j \cdot (M\vec{r}_i) + \vec{r}_j \cdot (K\vec{r}_i) = \vec{r}_j \cdot \vec{0} = 0 \quad (5.45)$$

$$-\omega_j^2 \vec{r}_i \cdot (M\vec{r}_j) + \vec{r}_i \cdot (K\vec{r}_j) = \vec{r}_i \cdot \vec{0} = 0 \quad (5.46)$$

Ferner ist, gemeinsam mit der Vertauschungsrelation aus (Mathematik 5.1),

$$-\omega_i^2 \vec{r}_j \cdot (M\vec{r}_i) + \vec{r}_j \cdot (K\vec{r}_i) = -\omega_i^2 \vec{r}_i \cdot (M^T \vec{r}_j) + \vec{r}_i \cdot (K^T \vec{r}_j) \quad (5.47)$$

Sowohl Massen- als auch Steifigkeitsmatrix sind symmetrisch, weshalb  $M^T = M$  und  $K^T = K$ . Einsetzen in Gl. (5.45) und Subtraktion mit Gl. (5.46) führt auf

$$-(\omega_j^2 - \omega_i^2) \vec{r}_i \cdot (M\vec{r}_j) = 0 \quad (5.48)$$

Für einfache Eigenwerte gilt  $\omega_i \neq \omega_j$  ( $i \neq j$ ); dann sind die Eigenvektoren *bezüglich der Massenmatrix orthogonal*:

$$\vec{r}_i \cdot (M\vec{r}_j) = 0 \quad (5.49)$$

Aus Gl. (5.46) folgt dann direkt die Orthogonalität bezüglich der Steifigkeitsmatrix

$$\vec{r}_i \cdot (K\vec{r}_j) = 0 \quad (5.50)$$

Für  $i = j$  ist

$$-\omega_i^2 \vec{r}_i \cdot (M\vec{r}_i) + \vec{r}_i \cdot (K\vec{r}_i) = 0 \quad (5.51)$$

und damit der *Rayleigh-Quotient*

$$\omega_i^2 = \frac{\vec{r}_i \cdot (K\vec{r}_i)}{\vec{r}_i \cdot (M\vec{r}_i)} \quad (5.52)$$

definiert. Wenn die Eigenwerte massenbezogen normiert werden, d.h.  $\vec{r}_i \cdot (M\vec{r}_i) = 1$ , dann vereinfacht sich der Rayleigh-Quotient zu  $\omega_i^2 = \vec{r}_i \cdot (K\vec{r}_i)$ . Ferner wird die *Modal-matrix* definiert durch die Matrix der linear unabhängigen Eigenvektoren

$$R = [\vec{r}_1, \vec{r}_2] \quad (5.53)$$

Da die Eigenvektoren den Zustandsraum vollständig aufspannen, kann der Zustandsvektor auch wie folgt dargestellt werden:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = z_1 \vec{r}_1 + z_2 \vec{r}_2 = [\vec{r}_1, \vec{r}_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = R\vec{z} \quad (5.54)$$

und folglich ist das zwangserregte System

$$\vec{F} = M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = M \left( [\vec{r}_1, \vec{r}_2] \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} \right) + K \left( [\vec{r}_1, \vec{r}_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) \quad (5.55)$$

$$= MR\ddot{\vec{z}} + KR\vec{z} \quad (5.56)$$

Linksmultiplikation mit  $R^T$  führt zu

$$R^T \vec{F} = R^T MR\ddot{\vec{z}} + R^T KR\vec{z} \quad (5.57)$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{r}_1^T \\ \vec{r}_2^T \end{bmatrix} M[\vec{r}_1, \vec{r}_2] \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{r}_1^T \\ \vec{r}_2^T \end{bmatrix} K[\vec{r}_1, \vec{r}_2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{r}_1^T M \vec{r}_1 & \vec{r}_1^T M \vec{r}_2 \\ \vec{r}_2^T M \vec{r}_1 & \vec{r}_2^T M \vec{r}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{r}_1^T K \vec{r}_1 & \vec{r}_1^T K \vec{r}_2 \\ \vec{r}_2^T K \vec{r}_1 & \vec{r}_2^T K \vec{r}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.59)$$

Bzw.

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{F} \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Es liegen also zwei entkoppelte Einzeldifferentialgleichungen vor:

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = \vec{r}_1 \cdot \vec{F} \quad \ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{F} \quad (5.61)$$

Modale Entkopplung des Differentialgleichungssystems setzt die Kenntnis der Eigenvektoren voraus. Der Vorteil der modalen Entkopplung ist, dass die Gleichungen unabhängig voneinander gelöst werden können. Dies ist insbesondere bei erzwungenen Schwingungen vorteilhaft, weil nun auf die vektorwertige DGL zugänglich ist für die Methoden der skalaren DGLn.

### Beispiel 5.2: Modale Entkopplung

Es wird das ungedämpfte System

$$\begin{bmatrix} 8m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

betrachtet. Die Eigenwertpaare sind vor Normierung

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{2m}} \quad \vec{r}_1 = s_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{5c}{4m}} \quad \vec{r}_2 = s_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Die Normierung bzgl. der Massenmatrix liefert die freien Konstanten

$$\vec{r}_1 \cdot (M\vec{r}_1) = 12s_1^2m \stackrel{!}{=} 1 \quad \rightarrow \quad s_1 = \frac{1}{2\sqrt{3m}} \quad (5.65)$$

$$\vec{r}_2 \cdot (M\vec{r}_2) = 24s_2^2m \stackrel{!}{=} 1 \quad \rightarrow \quad s_2 = \frac{1}{2\sqrt{6m}} \quad (5.66)$$

Die Modalmatrix ist

$$R = [\vec{r}_1, \vec{r}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{2\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Die modal entkoppelte Massen- und Steifigkeitsmatrix lauten

$$R^T M R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{6m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{2\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$



ferner

$$R^T K R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{6m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{2\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{c}{2m} & 0 \\ 0 & \frac{5c}{4m} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

und

$$R^T F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{6m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_0 \cos(\Omega t)}{2\sqrt{3m}} \\ \frac{F_0 \cos(\Omega t)}{2\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Das gekoppelte Differentialgleichungssystem  $M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{F}$  wurde also transformiert in zwei voneinander entkoppelte Differentialgleichungen  $\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = F_0 \cos(\Omega t)/(2\sqrt{3m})$  und  $\ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 = F_0 \cos(\Omega t)/(2\sqrt{6m})$ , die unabhängig voneinander gelöst werden können.

## 5.5 Systeme mit modaler Dämpfung

Im Fall von Dämpfung und ohne äußere Anregung lautet die Systembeschreibung

$$M\ddot{\vec{x}} + D\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{0} \quad (5.73)$$

Unter *modaler Dämpfung* versteht man eine spezielle Zusammensetzung der Dämpfungsmatrix der Form

$$D = \alpha M + \beta K \quad (5.74)$$

also massen- und steifigkeitsproportionale Anteile der Dämpfung mit Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ . Die homogene Lösung des gedämpften Systems wird mithilfe des Exponentialansatzes  $\vec{x} = \vec{r}e^{\lambda t}$  nach

$$(\lambda^2 M + (\alpha M + \beta K)\lambda + K) \vec{r}e^{\lambda t} = \vec{0} \quad (5.75)$$

$$[(\lambda^2 + \lambda\alpha) M + (\lambda\beta + 1) K] \vec{r}e^{\lambda t} = \vec{0} \quad (5.76)$$

$$\left[ \underbrace{\frac{\lambda^2 + \lambda\alpha}{\lambda\beta + 1}}_{\mu_g} M + K \right] \vec{r}e^{\lambda t} = \vec{0} \quad (5.77)$$

$$(5.78)$$

berechnet. Wie im ungedämpften Fall wird hier  $\vec{r} \neq \vec{0}$  gefordert, weshalb die Bestimmung der Eigenwerte aus

$$\det(\mu_g M + K) = 0 \quad (5.79)$$

folgt. Man stelle fest, dass es sich hier um dieselbe Struktur wie im zugehörigen ungedämpften Schwingungssystem  $M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{0}$  handelt, welche mit dem ungedämpften Eigenwertproblem  $(\lambda_u^2 M + K)\vec{r}_u = \vec{0}$  verbunden ist. Damit ist  $\lambda_u^2 = \mu_g$  und  $\vec{r} = \vec{r}_u$ , sprich:

### Mechanik 5.1: Eigenwerte und -vektoren bei modaler Dämpfung

Die Eigenvektoren im ungedämpften System

$$M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{0} \quad (5.80)$$

und im modal gedämpften System

$$M\ddot{\vec{x}} + (\alpha M + \beta K)\dot{\vec{x}} + K\vec{x} = \vec{0} \quad (5.81)$$

sind bei beliebigen  $\alpha$ ,  $\beta$  und ansonsten gleichen Parametern identisch. Die gedämpften und ungedämpften Eigenwerte unterscheiden sich.

Die Schlussfolgerung ist, dass ungedämpften Eigenvektoren zur modalen Entkopplung verwendet werden können:

$$R^T M R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

$$R^T K R = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

$$R^T D R = \alpha R^T M R + \beta R^T K R = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

Mit der rechten Seite  $R^T \vec{F}$  kann nun folglich das entkoppelte System gelöst werden, um freie und erzwungene Schwingungen zu berechnen.

## 5.6 Erzwungene Koppelschwingungen und Tilgung

In diesem Abschnitt wird der ungedämpfte Zwei-Massen-Schwinger mit  $F_2(t) = 0$  und  $F_1(t) = F_0 \cos(\Omega t)$  betrachtet.

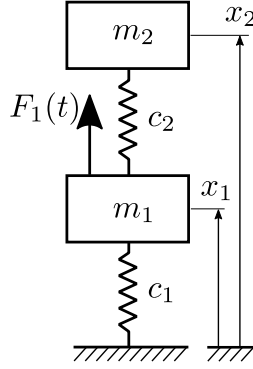


Abbildung 5.3: Zwei-Massen-Schwinger mit äußerer Anregung

Die Bewegungsgleichungen sind in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\vec{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{F}_0 \cos(\Omega t)} \cos(\Omega t) \quad (5.85)$$

An dieser Stelle sind lediglich die erzwungenen Schwingungen interessant, also die partikuläre Lösung. Der Lösungsansatz wird vom Typ der rechten Seite gewählt:

$$\vec{x} = \vec{p} \cos(\Omega t) + \vec{q} \sin(\Omega t) \quad (5.86)$$

Gemäß der Gleichung (5.21) folgen die Lösungen durch Einsetzen in die DGL

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = (K - \Omega^2 M)^{-1} \vec{F}_0 \\ &= \frac{1}{m_1 m_2 (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_3^2)} \begin{bmatrix} (c_2 - m_2 \Omega^2) F_0 \\ c_2 F_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\vec{q} = \vec{0} \quad (5.88)$$

wobei die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}} \quad (5.89)$$

$$\omega_3^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}} \quad (5.90)$$

In der Gleichung (5.87) ist zu erkennen, dass die Amplitudenkomponente  $p_1$  bei einer *Tilgungsfrequenz*  $\Omega_T = \sqrt{c_2/m_2}$  verschwindet. Das Phänomen der *Tilgung* besteht darin, dass die durch Anregung zugeführte Energie ausschließlich auf den Schwingungstilger (hier: Körper mit Masse  $m_2$ ) übertragen wird. Dadurch ändert sich die kinetische Energie des Körpers mit Masse  $m_1$  nicht; Er befindet sich trotz der äußeren Anregung vollständig in Ruhe.

Neben der Tilgungsfrequenz gibt es außerdem Resonanzen mit unendlich großer Amplitude bei  $\omega_1$  und  $\omega_3$ . Der Verlauf der Amplitude in Abhängigkeit von  $\Omega$  ist für  $m_1 = 8$ ,  $m_2 = 1$ ,  $c_1 = 5$ ,  $c_2 = 1$  in der Abbildung 5.4 dargestellt.

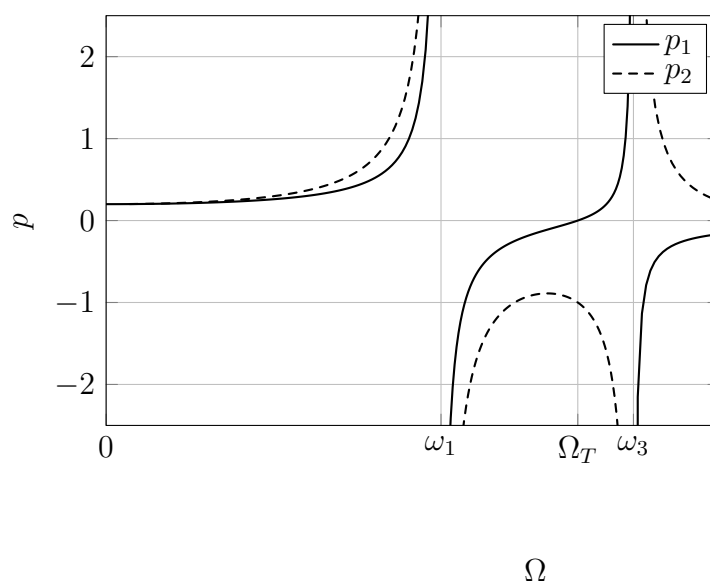


Abbildung 5.4: Verlauf der Amplituden beim Zwei-Freiheitsgrad-Schwinger für Parameterwerte  $m_1 = 8$ ,  $m_2 = 1$ ,  $c_1 = 5$ ,  $c_2 = 1$ .

Zur Plausibilisierung kann folgendes Gedankenexperiment durchgeführt werden: setzt man in der Bewegungsgleichung (5.85) den Freiheitsgrad  $x_1 = 0$ , dann folgt aus der ersten Zeile

$$-c_2 x_2 = F_0 \cos(\Omega t) \quad (5.91)$$

D.h. die Federkraft der Feder  $c_2$  steht im Gleichgewicht mit der Anregung. Sie kompensiert also gerade die Anregungskraft, sodass die resultierende Kraft auf die Masse  $m_1$  identisch 0 ist. Daher ruht die Masse  $m_1$ .

## Aufgaben zu Kapitel 5

**5.1** Wie viele unterschiedliche Eigenwerte hat ein mechanisches System mit einem Freiheitsgrad?

**5.2** Wie viele unterschiedliche Eigenwerte hat ein mechanisches System mit zwei Freiheitsgraden?

**5.3** Wie viele unterschiedliche Eigenwerte hat ein mechanisches System mit drei Freiheitsgraden?

**5.4** Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren des dynamischen Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\Omega t) \quad (5.92)$$

**5.5** Berechnen Sie für das System in Aufgabe 5.4 die partikuläre Lösung mithilfe eines Ansatzes vom Typ der rechten Seite.

**5.6** Bestimmen Sie für das System in Aufgabe 5.4 die Modalmatrix und führen Sie die modale Entkopplung durch, sodass Sie zwei entkoppelte DGLn für  $z_1$  und  $z_2$  erhalten.

**5.7** Bestimmen Sie für das Ergebnis aus Aufgabe 5.6 die partikuläre Lösung der Gleichungen in  $z_1$  und  $z_2$ . Führen Sie die Rücktransformation der Lösung zu  $x_1$  und  $x_2$  durch. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Aufgabe 5.5.

# Literaturverzeichnis

- [1] BRONSTEIN, I.N. ; HROMKOVIC, J. ; LUDERER, B. ; SCHWARZ, H.-R. ; BLATH, J. ; SCHIED, A. ; DEMPE, S. ; WANKA, G. ; GOTTWALD, S. ; ZEIDLER, E.: *Taschenbuch der Mathematik*. Bd. 1. Springer-Verlag, 2012
- [2] DRESIG, H. ; FIDLIN, A.: *Schwingungen mechanischer Antriebssysteme: Modellbildung, Berechnung, Analyse, Synthese*. Springer-Verlag, 2014
- [3] DUBBEL, H. ; BEITZ, W. ; KÜTTNER, K.-H.: *DUBBEL: Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag, 2013
- [4] GASCH, R. ; NORDMANN, R. ; PFÜTZNER, H.: *Rotordynamik*. Springer-Verlag, 2006
- [5] HAUGER, Werner ; SCHNELL, Walter ; GROSS, Dietmar: *Technische Mechanik: Band 3: Kinetik*. Bd. 217. Springer-Verlag, 2013
- [6] HIBBELER, R.C. ; WAUER, J. ; SEEMANN, W.: *Technische Mechanik 3 – Dynamik*. Pearson, 2012
- [7] WITTENBURG, J.: *Schwingungslehre: lineare Schwingungen, Theorie und Anwendungen*. Springer-Verlag, 2013