Mathematik 2.2: Lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k} = a_n \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} + ... + a_1 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 x(t) = 0$$

wird mithilfe des Exponentialansatzes

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

gelöst. Der Ansatz eingesetzt in die DGL liefert das Eigenwertproblem

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C \lambda^k e^{\lambda t} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) Ce^{\lambda t} = 0.$$

Wegen $C \neq 0$ folgt das charakteristische Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = a_n \lambda^n + ... + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

woraus die Eigenwerte $\lambda_{1,2,...,n}$ bestimmt werden. Die Lösungsanteile

$$x_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}$$

werden *Fundamentallösungen* genannt; die Gesamtlösung setzt sich aus ihnen zusammen:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k x_k(t) = C_n e^{\lambda_n t} + ... + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Die Integrationskonstanten C_k müssen durch geeignete Anfangsbedingungen bestimmt werden.