

Mathematik 2.2: Lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0$$

wird mithilfe des Exponentialansatzes

$$x(t) = C e^{\lambda t}$$

gelöst. Der Ansatz eingesetzt in die DGL liefert das Eigenwertproblem

$$\sum_{k=0}^n a_k C \lambda^k e^{\lambda t} = \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) C e^{\lambda t} = 0.$$

Wegen $C \neq 0$ folgt das charakteristische Polynom

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

woraus die Eigenwerte $\lambda_{1,2,\dots,n}$ bestimmt werden. Die Lösungsanteile

$$x_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}$$

werden *Fundamentallösungen* genannt; die Gesamtlösung setzt sich aus ihnen zusammen:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n C_k x_k(t) = C_n e^{\lambda_n t} + \dots + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Die Integrationskonstanten C_k müssen durch geeignete Anfangsbedingungen bestimmt werden.