

Beispiel 5.2: Modale Entkopplung

Es wird das ungedämpfte System

$$\begin{bmatrix} 8m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

betrachtet. Die Eigenwertpaare sind vor Normierung

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{2m}} \quad \vec{r}_1 = s_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{5c}{4m}} \quad \vec{r}_2 = s_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Die Normierung bzgl. der Massenmatrix liefert die freien Konstanten

$$\vec{r}_1 \cdot (M\vec{r}_1) = 12s_1^2m \stackrel{!}{=} 1 \quad \rightarrow \quad s_1 = \frac{1}{2\sqrt{3m}} \quad (5.64)$$

$$\vec{r}_2 \cdot (M\vec{r}_2) = 24s_2^2m \stackrel{!}{=} 1 \quad \rightarrow \quad s_2 = \frac{1}{2\sqrt{6m}} \quad (5.65)$$

Die Modalmatrix ist

$$R = [\vec{r}_1, \vec{r}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{2\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Die modal entkoppelte Massen- und Steifigkeitsmatrix lauten

$$R^T M R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{6m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{2\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$