Beispiel 5.2: Modale Entopplung

Es wird das ungedämpfte System

$$\begin{bmatrix} 8m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.61}$$

betrachtet. Die Eigenwertpaare sind vor Normierung

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{2m}} \qquad \vec{r}_1 = s_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{5c}{4m}} \qquad \vec{r}_2 = s_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

Die Normierung bzgl. der Massenmatrix liefert die freien Konstanten

$$\vec{r}_1 \cdot (M\vec{r}_1) = 12 s_1^2 m \overset{!}{=} 1 \qquad \rightarrow \qquad s_1 = \frac{1}{2\sqrt{3m}} \tag{5.64}$$

$$\vec{r}_2 \cdot (M\vec{r}_2) = 24 s_2^2 m \overset{!}{=} 1 \qquad \rightarrow \qquad s_2 = \frac{1}{2\sqrt{6m}} \tag{5.65}$$

Die Modalmatrix ist

$$R = [\vec{r}_1, \vec{r}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{2\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \tag{5.66}$$

Die modal entkoppelte Massen- und Steifigkeitsmatrix lauten

$$R^T M R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{6m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3m}} & \frac{1}{2\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & -\frac{2}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \tag{5.67}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.68}$$