Beispiel 2.1: Nichtlineare Federkennlinie

Eine Federkennlinie kann beschrieben werden durch den Kraft-Weg-Zusammenhang $f(x) = \sin(x) + a_1 x + a_3 x^3$. Die DGL des 1-Massen-Schwingers lautet somit:

$$m\ddot{x} + \sin(x) + a_1 x + a_3 x^3 = 0$$

Die Ruhelage berechnet sich aus der Gleichung

$$f(x_0) = \sin(x_0) + a_1 x_0 + a_3 x_0^3 = 0$$

zu $x_0 = 0$. Ferner ist

$$f'(x_0) = \cos(x_0) + a_1 + 3a_3 x_0^2.$$

Die linearisierte DGL in der Störung um x_0 ist also mit der Vereinfachung $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} 0 =& m\Delta\ddot{x} + \sin(x_0) + a_1 x_0 + a_3 (x_0)^3 + \left(\cos(x_0) + a_1 + 3a_3 x_0^2\right) \Delta x \\ =& m\Delta\ddot{x} + (1 + a_1)\,\Delta x \end{aligned}$$

Alternativ wird die DGL

$$\Delta\ddot{x} + \omega_0^2 \Delta x = 0,$$

wobei $\omega_0^2 = \frac{f'(x_0)}{m} = \frac{1+a_1}{m}$ das Quadrat der ungedämpften Eigenkreisfrequenz ist.