Aus der Forderung nach der Existenz der nicht-trivialen Lösung $\vec{r} \neq \vec{0}$ folgt das charakteristische Polynom

$$0 = \det(M\lambda^2 + K) = \left| \begin{bmatrix} m\lambda^2 + c & -c \\ -c & 8m\lambda^2 + 6c \end{bmatrix} \right| \tag{5.29}$$

$$= 8m^2\lambda^4 + 14cm\lambda^2 + 5c^2 \tag{5.30}$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{\frac{c}{2m}} \qquad \lambda_{3/4} = \pm i\sqrt{\frac{5c}{4m}} \tag{5.31}$$

Wird $\lambda_{1/2}$ in Gl. (5.19) eingesetzt, dann ist

$$0 = (M\lambda_{1/2}^2 + K)\vec{r}_{1/2} = \begin{bmatrix} m\lambda_{1/2}^2 + c & -c \\ -c & 8m\lambda_{1/2}^2 + 6c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_{1/2} \tag{5.32}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_{1/2} \tag{5.33}$$

Mit $\vec{r}_{1/2}$ dem zum Eigenwertpaar $\lambda_{1/2}$ gehörigen Eigenvektorpaar. Die Eigenvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ sind identisch. Die zwei Zeilen von Gl.(5.26) sind linear abhängig. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen – die Lösung kann also nur bis auf eine Konstante bestimmt werden. Setze $r_1 = z$, dann folgt

$$\vec{r}_{1/2} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{1}{2}z \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

Die zusätzliche Forderung nach $|\vec{r}_{1/2}| = \sqrt{5}z \stackrel{!}{=} 1$ führt zum *normierten Eigenvektor*

$$\vec{r}_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad |\vec{r}_{1/2}| = 1 \tag{5.35}$$

Beim Eigenwertpaar $\lambda_{3/4}$ ergibt sich

$$0 = (M\lambda_{3/4}^2 + K)\vec{r}_{3/4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}c & -c \\ -c & 4c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_{3/4} \tag{5.36}$$