Beispiel 2.1: Nichtlineare Federkennlinie

Eine Federkennlinie kann beschrieben werden durch den Kraft-Weg-Zusammenhang $f(x) = \sin(x) + a_1 x + a_3 x^3$. Die DGL des 1-Massen-Schwingers lautet somit:

$$m\ddot{x} + \sin(x) + a_1 x + a_3 x^3 = 0$$

Die Ruhelage berechnet sich aus der Gleichung

$$\sin(x_0) + a_1 x_0 + a_3 x_0^3 = 0$$

zu $x_0 = 0$. Die DGL in der Störung um x_0 ist also

$$\begin{aligned}
0 =& m(\ddot{x}_0 + \Delta\ddot{x}) + \sin(x_0) + a_1(x_0 + x) + a_3(x_0 + x)^3 \\
=& m\Delta\ddot{x} + \sin(x_0 + x) + a_1(x_0 + x) + a_3(x_0 + x)^3 \\
=& m\Delta\ddot{x} + \sin(x_0) + a_1 x_0 + a_3(x_0)^3 + \left(\cos(x_0) + a_1 + 3x_0^2\right)\Delta x \\
\approx& m\Delta\ddot{x} + (1 + a_1)\,\Delta x
\end{aligned}$$

Hier ist $f'(x_0) = 1 + a_1 = c$ die lokale Steifigkeit in der Nähe der Ruhelage. Alternativ wird die DGL

$$\Delta\ddot{x} + \omega_0^2 \Delta x = 0,$$

wobei $\omega_0^2 = \frac{f'(x_0)}{m} = \frac{c}{m}$ das Quadrat der ungedämpften Eigenkreisfrequenz ist.