Skript zur Vorlesung Maschinendynamik

Georg Jehle

Wintersemester 2020/21

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript wurde als Begleitmaterial zur Vorlesung ”Maschinendynamik” an der Hochschule Mannheim zusammengestellt. Es behandelt das Schwingungsverhalten von linearen 1- und 2-Freiheitsgradsystemen sowie Grundlagen der Signalanalyse. Hierzu wurden Inhalte aus den Lehrbüchern von BRONSTEIN [1], DRESIG [2], DUBBEL [3], GASCH [4], HAUGER [5], HIBBELER [6] und WITTENBURG [7] übernommen.

Besonderer Dank hinsichtlich Erstellung und Überarbeitung des Skripts gilt den Herren Prof. Dr.-Ing. Jens Deppler und Dr.-Ing. Dominik Kern.

1 Einleitung

1.1 Begriffsdefinition

Die Maschinendynamik untersucht das Schwingungsverhalten mechanischer Konstruktionen unter Einwirkung zeitabhängiger Beanspruchungen. Das Ziel der Untersuchungen besteht darin, dynamische Bewegungen von Bauteilen sowie wirkende Kräfte zu berechnen. Die technischen Hintergründe klassischer Problemstellungen sind:

- Torsionsschwingungen von Kolbenmaschinen
- Biegeschwingungen von Turbinenschaufeln
- Unwuchterregte Schwingungen von Rotoren, z.B. Autoreifen
- Bewegung von Vibrationsstampfern
- Dynamik von Rüttelplatten
- Fahrwerksdynamik eines Fahrzeugs bei transienter Anregung, z.B. Schlaglochdurchfahrt

In vielen Fällen sind Schwingungen mechanischer Komponenten die Ursache für deren Versagen. Dauerschwingungen führen bei großen Amplituden und langer Dauer zu Ermüdungsversagen von Werkstoffen. Gleichzeitig erscheinen Schwingungen für Anwender in einigen Fällen unangenehm, z.B. wegen übertragener Vibrationen oder Geräuschen. Man spricht dann von komfortrelevanten Problemstellungen (NVH: Noise-Vibration - Harshness).

1.2 Definition von Schwingungen

Kennzeichen einer Schwingung ist die regelmäßige Wiederkehr bestimmter Merkmale, welche an messbaren Größen festgemacht wird: Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Winkel, Kraft, Moment. Schwingungen besitzen also eine Periodizität: Die gemessene Größe $x(t)$ muss $\forall t \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft haben, dass

$$x(t+T) = x(t); \qquad T > 0. \tag{1.1}$$

Dann gilt auch

$$x(t+nT) = x(t); \qquad T > 0; \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Die Größe T ist nicht eindeutig bestimmt. Die kleinste Konstante, für die (1.1) gilt, heißt Schwingungsdauer (Periode). Die Frequenz ist ihr Kehrwert

$$f = \frac{1}{T} \qquad [f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz} \tag{1.3}$$

Sie gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an.

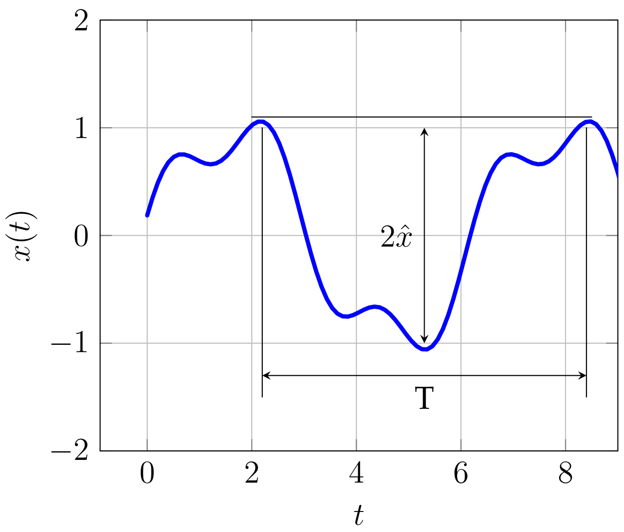


Abbildung 1.1: Schwingung, Schwingungsdauer, Amplitude

Die Schwingungsamplitude eines Signals ist gegeben durch

$$\hat{x} = \frac{\max(x) - \min(x)}{2} \tag{1.4}$$

1.3 Typische Schwingungsverläufe

1.3.1 Harmonische Schwingungen

Eine harmonische Schwingung hat die allgemeine Form

$$x(t) = C\cos(\omega t) + S\sin(\omega t) \tag{1.5}$$

Hierbei sind S und C zwei Komponenten der Amplitude, und ω die Kreisfrequenz. Aus der Periodizität der trigonometrischen Funktionen $\omega T = 2\pi$ folgt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}} \tag{1.6}$$

die Kreisfrequenz der Schwingung. Dies ist äquivalent darstellbar mithilfe von Amplitude $\hat{x}$ und Nullphasenwinkel φ:

$$x(t) = \hat{x}\cos(\omega t - \varphi) \tag{1.7}$$

Dabei gilt der Zusammenhang

$$x(\omega t = 0) = \hat{x}\cos(\varphi) = C, \tag{1.8}$$
$$x(\omega t = \frac{\pi}{2}) = \hat{x}\sin(\varphi) = S. \tag{1.9}$$

Somit folgt der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Darstellung der Amplituden und Nullphasenwinkel:

$$C = \hat{x}\cos(\varphi) \qquad S = \hat{x}\sin(\varphi) \tag{1.10}$$

oder invers

$$\hat{x} = \sqrt{C^2 + S^2}, \qquad \tan(\varphi) = \frac{S}{C}. \tag{1.11}$$

1.3.2 Überlagerte harmonische Schwingungen

In verschiedenen Zusammenhängen überlagern sich harmonische Schwingungen. Im einfachsten Fall handelt es sich um gleichfrequente Schwingungen mit verschiedener Amplitude und Phase:

$$x_1(t) = \hat{x}_1\cos(\omega t + \varphi_1) \tag{1.12}$$
$$x_2(t) = \hat{x}_2\cos(\omega t + \varphi_2) \tag{1.13}$$

Für $\varphi_1 = \varphi_2$ heißen die Schwingungen *in Phase*, für $|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi$ *in Gegenphase*. Die resultierende Schwingung ist die Summe der zwei Komponenten:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= (\hat{x}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{x}_2 \cos(\varphi_2)) \cos(\omega t) - (\hat{x}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{x}_2 \sin(\varphi_2)) \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{1.14}$$

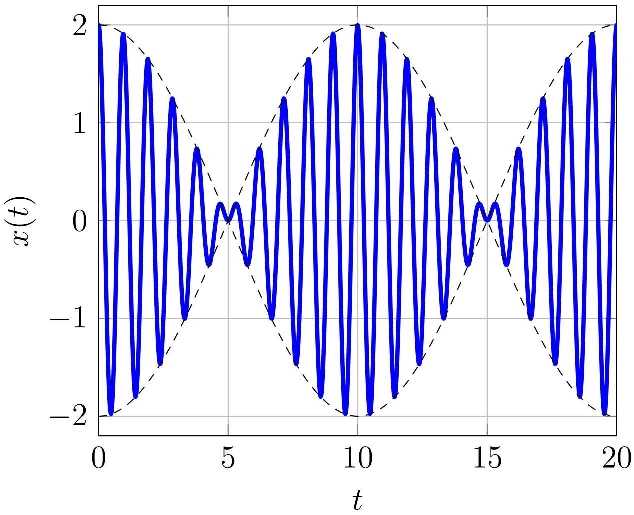


Abbildung 1.2: Schwebung, entstanden aus der Addition $\cos(2\pi t) + \cos(2.2\pi t)$.

Im Fall verschiedener Frequenzen folgt für die Gesamtschwingung durch kurze Rechnung

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \hat{x}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{x}_2 \cos(\omega_2 t) \tag{1.15}$$

$$= \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) + \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) \tag{1.16}$$

$$= (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \cos(\omega_D t) \cos(\omega_m t) - (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \sin(\omega_D t) \sin(\omega_m t) \tag{1.17}$$

Hierbei handelt es sich um zwei harmonische Schwingungen unterschiedlicher Frequenz mit $\omega_D = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ und $\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Für $\omega_1 \approx \omega_2$ ist also $\omega_m \approx \omega_1 \approx \omega_2$ (Schwingungsfrequenz wie bisher) und ω_D sehr klein (langsame überlagerte Schwingung). Die Überlagerung lässt sich auch umschreiben zu

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_m t + \varphi) \tag{1.18}$$

wobei

$$\hat{x} = \sqrt{(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)^2 \cos^2(\omega_D t) + (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 \sin^2(\omega_D t)}, \tag{1.19}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\hat{x}_2 - \hat{x}_1}{\hat{x}_2 + \hat{x}_1} \tan(\omega_d t). \tag{1.20}$$

Die Amplitude und die Phase der Schwingung ändern sich also mit ω_D. Dieser Effekt wird als Schwebung (Abb. 1.2) bezeichnet.

1.3.3 Nicht-harmonische Schwingungen

Die meisten Schwingungsarten sind nicht harmonisch. An dieser Stelle seien beispielhaft die Sägezahn- und die Rechteckfunktion genannt (Abb. 1.3). Solche Funktionen können in eine harmonische Ersatzdarstellung überführt werden (siehe Kapitel 4), was im Vergleich zu den Knick- und Sprung-behafteten ursprünglichen Funktionen viele Vorteile bietet.

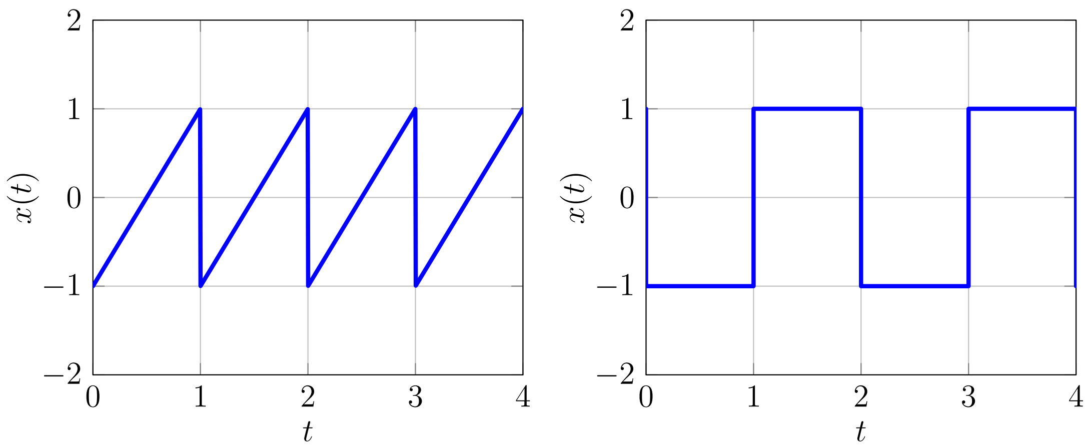


Abbildung 1.3: Beispiele für periodische nicht-harmonische Funktionen: Sägezahnfunktion, Rechteckfunktion.

1.3.4 Weitere Schwingungsverläufe

Es gibt außer den genannten noch weitere Schwingungsverläufe, die die Anforderung der Periodizität im eigentlichen Sinne verletzen. Sie laufen unter $T \to \infty$ (unendlich große Periodendauer):

- Impulsförmige Schwingung: einmaliges Event
  Bsp.: Hammerschlag, Impulshammer, Kollision, mechanischer Stoß, ...

- Zufallsschwingung: Grundschwingungen werden von Rauschen überlagert
  Bsp.: Seitenwind bewegt Fahrzeug, die Fahrbahnunebenheit regt ein Fahrzeug zu zufälligen horizontalen Schwingungen an, reale Messungen mit Messrauschen, ...

1.4 Schwingungsformen von Mehrfreiheitsgradsystemen

Ein schwingungsfähiger Körper kann je nach Anregung auch innere Deformationen ausführen, weshalb in einigen Fällen die Betrachtung der Problemstellung als Mehrfreiheitsgradsystem notwendig wird. Man unterscheidet

- 1-Freiheitsgrad-Systeme
- n-Freiheitsgrad-Systeme, mit n einer natürlichen Zahl
- System mit ∞ vielen Freiheitsgraden (elastisches Kontinuum)

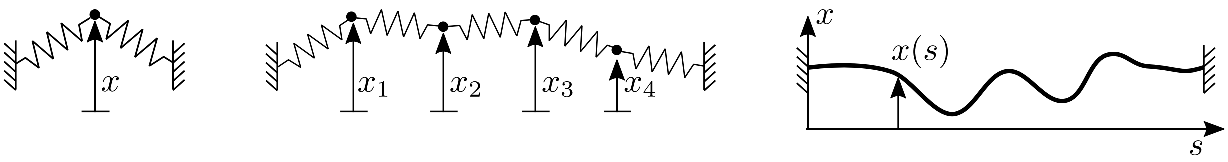
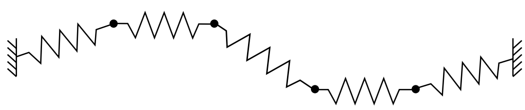


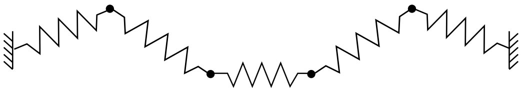
Abbildung 1.4: Systeme mit einem, vier und ∞ vielen Freiheitsgraden

Die Schwingungsformen des betrachteten Körpers treten in Abhängigkeit von der Frequenz der Anregung auf. Am Beispiel eines 4-Freiheitsgradschwingers können vier verschiedene Schwingungsformen dargestellt werden (Abb. 1.5), bei denen sich die einzelnen Freiheitsgrade wechselweise in Gleich- oder Gegenphase bewegen.

(a) Erste Schwingungsform



(b) Zweite Schwingungsform



(c) Dritte Schwingungsform

(d) Vierte Schwingungsform

Abbildung 1.5: Schwingungsformen eines $4-$Freiheitsgrad-Systems

1.5 Entstehungmechanismen von Schwingungen

1.5.1 Freie Schwingungen

Gitarrensaiten, Stimmgabeln oder Beispiele aus der Technik werden durch Mechanismen einmalig angestoßen oder angezupft und dann sich selbst überlassen. Die Bewegung, die sich dann einstellt, nennt sich freie Schwingung, da die Ursache nur einmalig am Anfang der Beobachtung steht und dann instantan verschwindet. Die Schwingungsfrequenzen sind Eigenfrequenzen des Schwingungssystems.

1.5.2 Erzwungene Schwingung

Ein Fahrzeug, welches sich über eine unebene Fahrbahn bewegt, wird durch äußere Kräfte und/oder Momente permanent zu Schwingungen angeregt. Die Frequenz dieser Bewegung und vergleichbarer Beispiele ist im stationären Schwingungszustand die Frequenz Ω, die durch die äußere Anregung gegeben ist.

1.5.3 Selbsterregte Schwingung

Schwingungen wie beim Bremsenquietschen, Streichinstrumenten oder in einer mechanischen Uhr sind selbsterregt, da sich im Gesamtsystem eine Energiequelle und -Senke findet. Die Schwingungsfrequenz entspricht in vielen Fällen einer Eigenfrequenz, wobei sich hier aufgrund der komplexen Schwingungsursache und möglicherweise dominanter Nichtlinearitäten Abweichungen ergeben können.

1.5.4 Parametererregte Schwingung

Bei Schwingungen, die durch periodisch zeitveränderliche Parameter im System (Steifigkeiten, Abstände, ...) entstehen, spricht man von parametererregten Schwingungen. Ein Beispiel aus der Technik ist im Wälzkontakt von Getrieben zu finden, wo die wechselnde Anzahl von Verzahnungseingriffen zu einer zeitveränderlichen Steifigkeit führt; ein weiteres Beispiel ist die periodische Schwerpunktverlagerung eines Kindes auf einer Schaukel, was die gewünschte Bewegung erzeugt. Daher handelt es sich bei den Schwingungsfrequenzen auch um Teile oder Vielfache der Parameterfrequenz.

2 Freie Schwingungen

In diesem Abschnitt werden freie Schwingungen von mechanischen 1-Freiheitsgrad-Systemen untersucht, die nach einer Anfangsauslenkung sich selbst überlassen werden. Es sollen nur statische Kräfte auf die betrachteten Systeme wirken.

2.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

Ausgangspunkt für die freien ungedämpften Schwingungen ist ein 1-Massen-Schwinger mit nichtlinearer Federkraft $f(x)$.

Abbildung 2.1: Einmassenschwinger mit nichtlinearer Kennlinie sowie dessen Kräftefreischnitt nach d'Alembert, wobei $m\ddot{x}$ die d'Alembert'sche Trägheitskraft ist und $f(x)$ die Federkraft.

Die Bilanz der Kräfte liefert:

$$m\ddot{x} + f(x) = 0 \tag{2.1}$$

Eine solche Differentialgleichung (DGL) ist aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs $f(x)$ im Allgemeinen nicht analytisch lösbar. Wenn dennoch eine Analyse durchgeführt werden soll, dann kann die Gleichung (2.1) als nächstes linearisiert werden (Mechanik 2.1). Nach dieser Vereinfachung beschreibt die Gleichung nur noch die Dynamik kleiner Störungen Δx um eine Ruhelage x_0, was aber in vielen Fällen in der Praxis ausreichend ist. Die Linearisierung wird nach dem Satz von Taylor (Mathematik 2.1) durchgeführt.

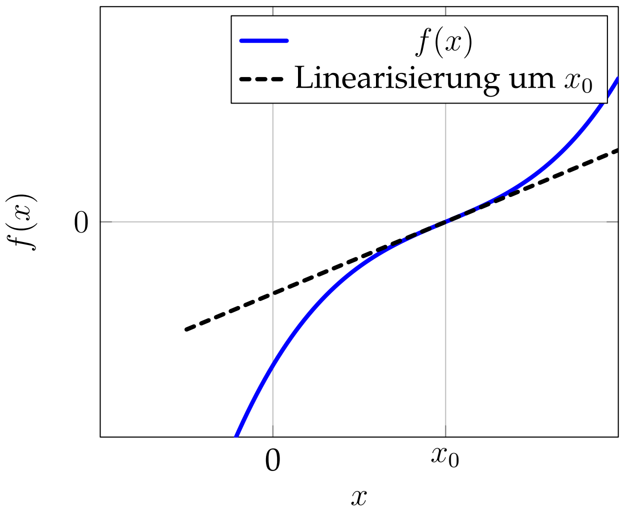


Abbildung 2.2: Nichtlineare Federkennlinie

Mathematik 2.1: Taylorreihen-Entwicklung

Sei $f(x)$ eine $n-$mal stetig differenzierbare Funktion und x_0 ein Entwicklungspunkt. Dann ist die Taylorreihenentwicklung definiert als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^k f(x_0)}{\mathrm{d}x^k} \frac{(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \ldots$$

Die Reihendarstellung konvergiert für $n \to \infty$ mit $f(x)$, falls $f(x)$ $\infty-$mal stetig differenzierbar ist.

Mechanik 2.1: Linearisierung um eine Ruhelage

Zur Linearisierung einer DGL um eine Ruhelage werden folgende Schritte befolgt:

- **Berechnung der Ruhelage:** setze $x = x_0$ =konst., dann ist $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$. Einsetzen in die DGL liefert eine algebraische Gleichung zur Bestimmung der Ruhelage(n):

$$f(x_0) = 0$$

- **Definition der Störung** Δx um die Ruhelage x_0: $x = x_0 + \Delta x$. Einsetzen in die DGL ergibt

$$m\Delta\ddot{x} + f(x_0 + \Delta x) = 0$$

- **Linearisierung:** Taylorreihen-Entwicklung der nichtlinearen Funktion $f(x_0 + \Delta x)$ in der Störung Δx bis zur 1. Ordnung:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

- **Einsetzen und vereinfachen:**

$$m\Delta\ddot{x} + f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 0$$

Der Term $f(x_0)$ verschwindet, da aus ihm die Ruhelage berechnet wurde. Es bleibt die homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten für die Beschreibung der kleinen Störung um die Ruhelage

$$m\Delta\ddot{x} + f'(x_0) \cdot \Delta x = 0$$

Beispiel 2.1: Nichtlineare Federkennlinie

Eine Federkennlinie kann beschrieben werden durch den Kraft-Weg-Zusammenhang $f(x) = \sin(x) + a_1 x + a_3 x^3$. Die DGL des 1-Massen-Schwingers lautet somit:

$$m\ddot{x} + \sin(x) + a_1 x + a_3 x^3 = 0$$

Die Ruhelage berechnet sich aus der Gleichung

$$f(x_0) = \sin(x_0) + a_1 x_0 + a_3 x_0^3 = 0$$

zu $x_0 = 0$. Ferner ist

$$f'(x_0) = \cos(x_0) + a_1 + 3a_3 x_0^2.$$

Die linearisierte DGL in der Störung um x_0 ist also mit der Vereinfachung $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= m\Delta\ddot{x} + \sin(x_0) + a_1 x_0 + a_3 (x_0)^3 + \left(\cos(x_0) + a_1 + 3a_3 x_0^2\right) \Delta x \\ &= m\Delta\ddot{x} + (1 + a_1)\,\Delta x \end{aligned}$$

Alternativ wird die DGL

$$\Delta\ddot{x} + \omega_0^2 \Delta x = 0,$$

wobei $\omega_0^2 = \frac{f'(x_0)}{m} = \frac{1+a_1}{m}$ das Quadrat der ungedämpften Eigenkreisfrequenz ist.

Die Koeffizienten der DGL (2.1) sind konstant, weshalb als Lösungsansatz für die homogene Lösung der Exponentialansatz verwendet werden kann:

Mathematik 2.2: Lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k} = a_n \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 x(t) = 0$$

wird mithilfe des Exponentialansatzes

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

gelöst. Der Ansatz eingesetzt in die DGL liefert das Eigenwertproblem

$$\sum_{k=0}^{n} a_k C \lambda^k e^{\lambda t} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) Ce^{\lambda t} = 0.$$

Wegen $C \neq 0$ folgt das charakteristische Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

woraus die Eigenwerte $\lambda_{1,2,\ldots,n}$ bestimmt werden. Die Lösungsanteile

$$x_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}$$

werden *Fundamentallösungen* genannt; die Gesamtlösung setzt sich aus ihnen zusammen:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k x_k(t) = C_n e^{\lambda_n t} + \ldots + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Die Integrationskonstanten C_k müssen durch geeignete Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Nach dem beschriebenen Vorgehen in (Mathematik 2.2) und $f'(x_0) =: c$ lautet die DGL der Störung zur Gl. (2.1)

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta x = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{:=\omega_0^2} \Delta x = 0 \tag{2.2}$$

Der Lösungsansatz und dessen Ableitungen sind

$$\Delta x = Ae^{\lambda t}, \qquad \Delta\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}, \qquad \Delta\ddot{x} = \lambda^2 Ae^{\lambda t} \tag{2.3}$$

Dies eingesetzt in Gl. (2.1) liefert

$$(\lambda^2 + \omega_0^2)Ae^{\lambda t} = 0, \qquad \text{woraus folgt} \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0. \tag{2.4}$$

Somit gibt es zwei komplexe Fundamentallösungen

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega_0 t}, \qquad x_2(t) = A_2 e^{-i\omega_0 t} \tag{2.5}$$

Die Gesamtlösung ergibt sich unter Beschränkung auf rein reelle Lösungen zu

$$\begin{aligned} x(t) &= Re\{x_1(t) + x_2(t)\} \\ &= Re\{A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}\} \\ &= Re\{A_1 + A_2\}\cos(\omega_0 t) + Re\{iA_1 - iA_2\}\sin(\omega_0 t) \\ &= C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Hierbei wurde zur Transformation die Euler-Formel verwendet:

Mathematik 2.3: Euler-Formel

Es gilt der Zusammenhang

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Die Kreisfrequenz ω_0 wurde bereits durch Masse und Steifigkeit festgelegt und hängt somit nur von Systemparametern ab. Sie ist dem System *eigen* und heißt deshalb *Eigenkreisfrequenz*.

Als Parameter bleiben die Integrationskonstanten C und S, die durch die Anfangsbedingungen (Anfangslage und, Anfangsgeschwindigkeit) festgelegt werden:

$$x(t=0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 \overset{!}{=} x_0 \tag{2.7}$$

$$\dot{x}(t=0) = -C_1\omega_0 \sin(0) + C_2\omega_0 \cos(0) = C_2\omega_0 \overset{!}{=} v_0 \tag{2.8}$$

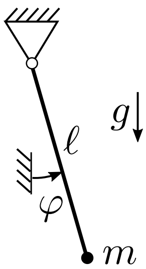
Als Gesamtlösung ergibt sich so

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \tag{2.9}$$

Die Schwingungsdauer der Bewegung ist $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Beispiel 2.2: Mathematisches Pendel

Ein mathematisches Pendel besteht aus einem masselosen Stab der Länge ℓ, der einseitig an einem Gelenk befestigt ist. An seinem freien Ende befindet sich ein Gewicht mit Punktmasse m. Das System ist der Schwerkraft unterworfen (Gravitationskonstante g). Die Auslenkung wird durch den Verdrehwinkel φ beschrieben.



Die Bewegungsgleichung folgt aus der Momentenbilanz um das Gelenk und lautet

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + mg\ell \sin(\varphi) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi) = 0$$

Diese DGL ist zunächst nichtlinear. Bei der Bestimmung der Ruhelagen finden sich zwei Lösungen:

$$\ddot{\varphi} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{g}{\ell}\sin(\varphi) = 0$$

also

$\varphi_{0,1} = 0,$ (Hängelage) $\qquad$ $\varphi_{0,2} = \pi.$ (Überkopflage)

Linearisierung um die Hängelage: Die Linearisierung der Nichtlinearität um die Ruhelage $\varphi_{0,1} = 0$ lautet

$$\frac{g}{\ell}\sin(\varphi) \approx \frac{g}{\ell}\sin(\varphi_{0,1}) + \frac{g}{\ell}\cos(\varphi_{0,1}) \cdot (\varphi - \varphi_{0,1}) = \frac{g}{\ell}(\varphi - \varphi_{0,1}) = \frac{g}{\ell}\Delta\varphi$$

wobei $\Delta\varphi$ die Störung um die Ruhelage ist. Außerdem ist

$$\Delta\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi} - 0 = \ddot{\varphi}$$

Somit lautet die linearisierte DGL

$$\Delta\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\Delta\varphi = 0 \qquad \text{oder} \qquad \Delta\ddot{\varphi} + \omega_0^2\Delta\varphi = 0$$

mit $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$. Die DGL hat nun exakt die Form der Gl. (2.2), weshalb die Lösung direkt angegeben werden kann:

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Interpretation: Für kleine Anfangswinkel φ_0 und kleine Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_0$ bleibt die Lösung $\varphi(t)$ für alle Zeiten klein. Die Linearisierung beschriebt das Systemverhalten gut.

Linearisierung um die Überkopflage: Die Linearisierung der Nichtlinearität um die Ruhelage $\varphi_{0,2} = \pi$ lautet

$$\frac{g}{\ell}\sin(\varphi) \approx \frac{g}{\ell}\sin(\varphi_{0,2}) + \frac{g}{\ell}\cos(\varphi_{0,2}) \cdot (\varphi - \varphi_{0,2}) = -\frac{g}{\ell}(\varphi - \varphi_{0,2}) = -\frac{g}{\ell}\Delta\varphi$$

Somit lautet die linearisierte DGL

$$\Delta\ddot{\varphi} - \frac{g}{\ell}\Delta\varphi = 0$$

Dies entspricht wegen des negativen Vorzeichens nicht der Form der Gl. (2.2), kann aber trotzdem mithilfe eines Exponentialansatzes $\Delta\varphi = Ce^{\lambda t}$ gelöst werden. Dieser ergibt nach Einsetzen die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}} = \pm\delta$$

also zwei reelle Eigenwerte. Die zwei Fundamentallösungen

$$\Delta\varphi_1 = C_1 e^{\delta t} \qquad\qquad \Delta\varphi_2 = C_2 e^{-\delta t}$$

ergeben die Gesamtlösung

$$\Delta\varphi = C_1 e^{\delta t} + C_2 e^{-\delta t}$$

Anpassen an die Anfangslage $\varphi(t = 0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t = 0)$ liefert schließlich die Gesamtlösung

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi_0 + \frac{\dot{\varphi}_0}{\delta}}{2} e^{\delta t} + \frac{\varphi_0 - \frac{\dot{\varphi}_0}{\delta}}{2} e^{-\delta t}$$

Interpretation: Nach einer Störung in der Auslenkung und/oder Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ klingt die Lösung in der Nähe der Überkopflage exponentiell auf. Sie ist im Gegensatz zur Hängelage nicht schwingungsfähig. Die linearisierte Lösung beschreibt das qualitative Verhalten korrekt, ist aber quantitativ höchstens für eine sehr kurze Zeitdauer richtig.

Fazit. Eine Linearisierung um unterschiedliche Ruhelagen liefert im Allgemeinen verschiedene Bewegungsgleichungen, die verschiedene Eigenschaften haben können.

2.2 Freie gedämpfte Schwingungen

Im gedämpften Einmassenschwinger wird zusätzlich parallel zur Federkraft ein Dämpfer geschaltet, sodass sich das System um die Dämpferkraft erweitert:

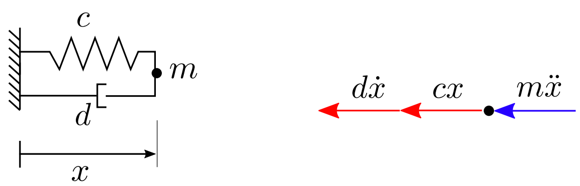


Abbildung 2.3: Linearer gedämpfter Einmassenschwinger sowie dessen Kräftefreischnitt nach d'Alembert, wobei $m\ddot{x}$ die d'Alembert'sche Trägheitskraft ist, cx die Federkraft und $d\dot{x}$ die Dämpferkraft.

Der ungedämpfte Einmassenschwinger (Kapitel 2.1) stellt somit den Sonderfall $d = 0$ dar. Die Kräftebilanz liefert

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = 0 \qquad \text{bzw.} \tag{2.10}$$
$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

Mechanik 2.2: Parameter des gedämpften Einmassenschwingers

Zur einheitlichen Beschreibung werden die folgenden Parameter eingeführt:

- Ungedämpfte Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$
- Exponentielle Abklingrate: $\delta = \frac{d}{2m}$
- Lehr'sches Dämpfungsmaß: $D = \frac{d}{2m\omega_0}$
- Gedämpfte Eigenkreisfrequenz $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$
- Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega_d$

Die vereinfachte Gleichung des homogenen gedämpften Einmassenschwingers lautet nach (Mechanik 2.2):

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.11}$$

Beispiel 2.3: Nichlinearer Einmassenschwinger mit Dämpfung

Die DGL lautet in diesem Beispiel

$$(J + mR^2)\ddot{x} + d\dot{x}\cos(x) + c_0 x + c_3 x^3 = 0$$

wobei alle Koeffizienten positive Werte haben sollen. Das Ziel ist, auf die Form (2.11) zu kommen. Dazu werden zunächst die Ruhelagen bestimmt. Mit $x = x_0$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$ folgt

$$c_0 x_0 + c_3 x_0^3 = 0, \qquad \text{weshalb} \qquad x_{0,1} = 0, \qquad x_{0,2/3} = \pm\sqrt{-c_0/c_3}$$

Mit $c_0 > 0$, $c_3 > 0$ ist nur die Ruhelagen $x_{0,1}$ physikalisch sinnvoll. Also wird um diese Ruhelage linearisiert. Es ist

$$
\begin{aligned}
f(x,\dot{x}) &= d\dot{x}\cos(x) + c_0 x + c_3 x^3 \\
f(x_{0,1}+\Delta x, \Delta\dot{x}) &= d\Delta\dot{x}\cos(x_{0,1}+\Delta x) + c_0(x_{0,1}+\Delta x) + c_3(x_{0,1}+\Delta x)^3 \\
&= d\Delta\dot{x}\cos(\Delta x) + c_0\Delta x + c_3\Delta x^3 \\
&\approx d\Delta\dot{x}\cdot(\cos(0) - \cancel{\sin(0)\cdot\Delta x}) + c_0\Delta x + \cancel{c_3\Delta x^3} \\
&= d\Delta\dot{x} + c_0\Delta x
\end{aligned}
$$

Also folgt die linearisierte DGL

$$(J + mR^2)\Delta\ddot{x} + d\Delta\dot{x} + c_0\Delta x = 0$$

Sie lässt sich auf die Form der Gl. (2.11) bringen, wenn die Koeffizienten

$$\omega_0^2 = \frac{c_0}{J + mR^2} \qquad D = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{1}{c_0(J+mR^2)}}$$

gewählt werden.

Die Fundamentallösung der Gl. (2.11) ist mit $\lambda_{1,2} = -D\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{D^2-1}$

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{2.12}$$

Welchen qualitativen Verlauf die Lösung annimmt, hängt maßgeblich mit der Größe des Lehr'schen Dämpfungsmaßes D zusammen:

Fall 1: starke Dämpfung. Bei $D > 1$ gilt

$$\lambda_1 = -D\omega_0 + \omega_0\sqrt{D^2-1} < 0 \qquad \lambda_2 = -D\omega_0 - \omega_0\sqrt{D^2-1} < 0 \tag{2.13}$$

Die Lösung $x = C_1x_1 + C_2x_2$ setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen, deren Verlauf wegen der $\lambda_i < 0$ immer expontiell abklingt. Da hiermit Schwingungen ausgeschlossen sind, wird die Bewegung auch *Kriechbewegung* genannt.

Fall 2: aperiodischer Grenzfall. Bei $D = 1$ fallen die zwei Eigenwerte zusammen:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -D\omega_0 = -\delta \tag{2.14}$$

Aufgrund des doppelten Eigenwerts ist die Lösung $x = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t}$.

Fall 3: schwache Dämpfung. Bei $0 < D < 1$ ist

$$D^2 - 1 < 0, \qquad \text{also} \qquad \omega_0\sqrt{D^2-1} = i\omega_0\sqrt{1-D^2} = i\omega_d \tag{2.15}$$

mit i der komplexen Zahl. Die (komplexe) Fundamentallösung kann hier transformiert werden in reellwertige Funktionen:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{C}_1 e^{-\delta t + i\omega_d t} + \tilde{C}_2 e^{-\delta t - i\omega_d t} \\ &= e^{-\delta t}\left(\tilde{C}_1 e^{i\omega_d t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega_d t}\right) \\ &= e^{-\delta t}\left(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Es handelt sich bei der Bewegung um eine gedämpfte Schwingung mit Kreisfrequenz $\omega_d < \omega_0$, deren Amplitude mit zunehmender Zeit exponentiell abklingt.

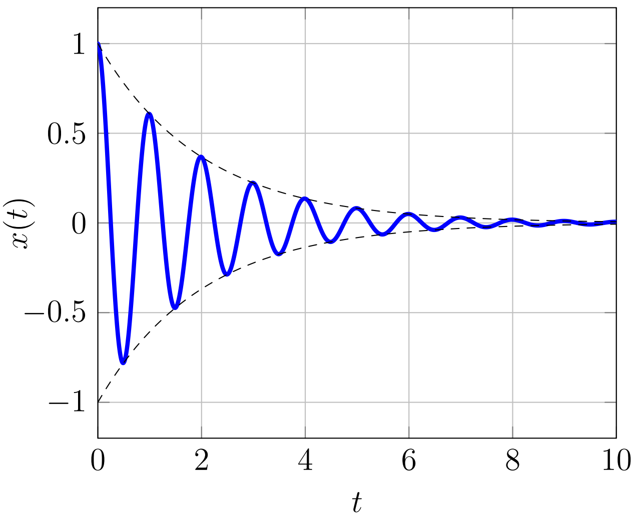


Abbildung 2.4: Verlauf einer gedämpften Schwingung.

Es lässt sich zeigen, dass das Maß der Amplitudenreduktion gegeben ist durch

$$\frac{x(t)}{x(t+T_d)} = e^{\delta T_d} \tag{2.17}$$

Daraus folgt direkt das *logarithmische Dekrement*:

$$\Lambda := \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_d)}\right) = \delta T_d = D\omega_0 T_d \tag{2.18}$$

Mit bekanntem ω_0, gemessenen T_d und Λ lässt sich so aus einer Messung das Lehr'sche Dämpfungsmaß bestimmen.

Aufgaben zu Kapitel 2

2.1 Welche Unterschiede gibt es zwischen ungedämpften und gedämpften Schwingungen?

2.2 Mit welchen standardisierten Parametern (Konstanten) lässt sich ein lineares mechanisches Schwingungssystem mit einem Freiheigsgrad beschreiben? Welche Bedeutung haben sie?

2.3 Welche Eigenschaften muss eine DGL haben, damit sie mit einem Exponentialansatz gelöst werden kann?

2.4 Linearisieren Sie die folgenden Ausdrücke in der Variable x um den Entwicklungspunkt $x = 0$:

$$y = x^2 + \sin(x) + \frac{e^x}{1+x} \qquad\qquad y = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{2.19}$$

2.5 Bestimmen Sie die Ruhelage(n) der folgenden DGLn:

$$\ddot{x} + c_1 x - c_3 x^3 = 0 \qquad\qquad \ddot{x} + d\dot{x} + c_1 \sin(kx) = 0 \tag{2.20}$$

$$\ddot{x} + (d_1 + d_2)\dot{x} + c_1 x + c_2 x^2 = 0 \tag{2.21}$$

Linearisieren Sie die DGL anschließend für kleine Störungen $\Delta x = x - x_0$ um jede berechnete Ruhelage x_0!

2.6 Bestimmen Sie für die DGL

$$(m + R^2 J)\ddot{x} + me\Omega^2\dot{x} + c_0 x = 0 \tag{2.22}$$

die Ersatzparameter ω_0, ω_d, D, δ, und geben Sie die Lösung der DGL in allgemeiner Form an! Passen Sie die Integrationskonstanten an die Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$ an.