Linearisierung um die Hängelage: Die Linearisierung der Nichtlinearität um die Ruhelage $\varphi_{0,1} = 0$ lautet

$$\frac{g}{\ell}\sin(\varphi) \approx \frac{g}{\ell}\sin(\varphi_{0,1}) + \frac{g}{\ell}\cos(\varphi_{0,1}) \cdot (\varphi - \varphi_{0,1}) = \frac{g}{\ell}(\varphi - \varphi_{0,1}) = \frac{g}{\ell}\Delta\varphi$$

wobei $\Delta\varphi$ die Störung um die Ruhelage ist. Außerdem ist

$$\Delta\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi} - 0 = \ddot{\varphi}$$

Somit lautet die linearisierte DGL

$$\Delta\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\Delta\varphi = 0 \qquad \text{oder} \qquad \Delta\ddot{\varphi} + \omega_0^2\Delta\varphi = 0$$

mit $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$. Die DGL hat nun exakt die Form der Gl. (2.2), weshalb die Lösung direkt angegeben werden kann:

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Interpretation: Für kleine Anfangswinkel φ_0 und kleine Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_0$ bleibt die Lösung $\varphi(t)$ für alle Zeiten klein. Die Linearisierung beschriebt das Systemverhalten gut.

Linearisierung um die Überkopflage: Die Linearisierung der Nichtlinearität um die Ruhelage $\varphi_{0,2} = \pi$ lautet

$$\frac{g}{\ell}\sin(\varphi) \approx \frac{g}{\ell}\sin(\varphi_{0,2}) + \frac{g}{\ell}\cos(\varphi_{0,2}) \cdot (\varphi - \varphi_{0,2}) = -\frac{g}{\ell}(\varphi - \varphi_{0,2}) = -\frac{g}{\ell}\Delta\varphi$$

Somit lautet die linearisierte DGL

$$\Delta\ddot{\varphi} - \frac{g}{\ell}\Delta\varphi = 0$$

Dies entspricht wegen des negativen Vorzeichens nicht der Form der Gl. (2.2), kann aber trotzdem mithilfe eines Exponentialansatzes $\Delta\varphi = Ce^{\lambda t}$ gelöst werden. Dieser ergibt nach Einsetzen die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}} = \pm\delta$$