# 上大附中高二上学期数学寒假作业5——综合练习

一．填空题：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n+1}=$______；

2. 过点$(1,0)$且与直线$2x+y=0$垂直的方程______；

3. 已知$\vec{a}=(-4,5)$，$\vec{b}=(-2,4)$，则$|2\vec{a}-\vec{b}|=$______；

4. 若$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角大小为______；

5. 已知直线$l$的一个法向量$\vec{n}=(1,-\sqrt{3})$，则此直线的倾斜角的大小为______；

6. 已知直线$l_1:6x+(t-1)y-8=0$，直线$l_2:(t+4)x+(t+6)y-16=0$，若$l_1$与$l_2$平行，则$t=$______；

7. 设无穷数列$\{a_n\}$的公比$q$，若$a_1=\lim\limits_{n\to\infty}(a_3+a_4+...+a_n)$，则$q=$______；

8. 设等边三角形$ABC$的边长为6，若$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$______；

9. 已知△$ABC$满足$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=4$，$O$是△$ABC$的外心，$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\dfrac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AC}$ $(\lambda\in R)$，则△$ABC$的面积是______；

10.直线$x-y+5=0$被圆$x^2+y^2-2x-4y-4=0$所截得的弦长等于________.

11. 定义函数$f(x)=\{x\cdot\{x\}\}$，其中$\{x\}$表示不小于$x$的最小整数，如$\{1.4\}=2$，$\{-2.3\}=-2$；当$x\in(0,n]$ $(n\in N^*)$时，函数$f(x)$的值域为$A_n$，记集合$A_n$中元素的个数$a_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n})=$______；

二．选择题

12. 在边长为1的正六边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$中，$\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_3A_5}$的值为（　　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

13. 已知$a_n=\begin{cases}2n-1 & n<2015\\ (-\frac{1}{2})^{n-1} & n\ge 2015\end{cases}$，$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和（　　）

A. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$都存在　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$都不存在

C. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在

14. 设$\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(-4,7)$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影为（　　）

A. $\sqrt{13}$　　B. $\frac{\sqrt{13}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{65}}{5}$　　D. $\sqrt{65}$

15. 设$\theta$是两个非零向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角，已知对任意实数$t$，$|\vec{b}-t\vec{a}|$的最小值为$2$，则（　　）

A．若$\theta$确定，则$|\vec{a}|$唯一确定　　B. 若$\theta$确定，则$|\vec{b}|$唯一确定

C. 若$|\vec{a}|$确定，则$\theta$唯一确定　　D. 若$\theta$确定，则$|\vec{a}|$唯一确定

三. 解答题

16. 在平面直角坐标系中，已知$A(2,3)$，$B(4,-1)$，$P(2,0)$，求：

（1）$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$的值；（2）$\angle APB$的大小；



17. 已知两点$A(2,1)$，$B(m,4)$，求：

（1）直线$AB$的斜率和直线$AB$的方程；

（2）已知$m\in[2-\sqrt{3},2+3\sqrt{3}]$，求直线$AB$的倾斜角$\alpha$的范围；

18. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=7$，令$b_n=a_n\cdot a_{n+1}$，$\{b_n\}$是公比为$q$ $(q>0)$的等比数列，

设$c_n=a_{2n-1}+a_{2n}$；

（1）求证：$c_n=8\cdot q^{n-1}$ $(n\in N^*)$；

（2）设$\{c_n\}$的前$n$项和为$S_n$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}$的值；

19. 定义$x_1,x_2,\ldots,x_n$的“侧平均数”为$\dfrac{n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$ $(n\in N^*)$；

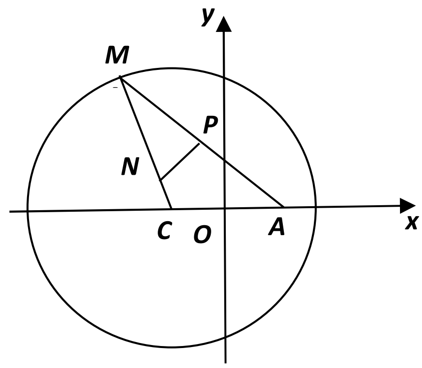
（1）若数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和的“侧平均数”为$\dfrac{1}{2n+4}$，求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）设数列$\left\{b_n\right\}$满足：当$n$为奇数时，$b_n=1$，当$n$为偶数时，$b_n=2$；若$T_n$为$\left\{b_n\right\}$前$n$项的侧平均数，求$\lim\limits_{n\to\infty}T_n$；

（3）设函数$f(x)=-x^2+4x$，对（1）中的数列$\left\{a_n\right\}$，是否存在实数$\lambda$，使得当$x\le\lambda$时，$f(x)\le\dfrac{a_n}{n+1}$对任意$n\in N^*$恒成立？若存在，求出最大的实数$\lambda$；若不存在，说明理由；

20．已知圆$C:(x+1)^2+y^2=8$.

（1）设点$Q(x,y)$是圆 C 上一点，求$x+y$的取值范围；




（2）如图，定点$A(1,0), M$为圆 C 上一动点，点 P 在 AM 上，点 N 在 CM 上，且满足$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{AM}=0,$求点$N$的轨迹的内接矩形的最大面积.

21．对于一组向量$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},...,\overrightarrow{a_n}$ $(n\in N^*)$，令$\overrightarrow{S_n}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+...+\overrightarrow{a_n}$，如果存在$\overrightarrow{a_p}$

$(p\in\{1,2,3...,n\})$，使得$|\overrightarrow{a_p}|\geq|\overrightarrow{S_n}-\overrightarrow{a_p}|$，那么称$\overrightarrow{a_p}$是该向量组的“$h$向量”；

（1）设$\overrightarrow{a_n}=(n,n+x)$ $(n\in N^*)$，若$\overrightarrow{a_3}$是向量组$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$的“$h$向量”；



（2）若$\overrightarrow{a_n}=((\frac{1}{3})^{n-1},(-1)^n)$ $(n\in N^*)$，向量组$\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},...,\overrightarrow{a_n}$ $(n\in N^*)$是否存在“$h$向量”？给出你的结论并说明理由；

# 参考答案

1. $1$；　2. $x-2y-1=0$；　3. $6\sqrt{2}$；

4. $\dfrac{2\pi}{3}$；　5. $\dfrac{\pi}{6}$；　6. $-5$；　7. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$；

8. $-18$；　9. $2\sqrt{5}$ 或 $\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$；　10. $2$；　11. 2

12. B；　13. A；　14. C；　15. B；

16. （1）$-3$；（2）$\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

17. （1）当 $m=2$，$k$ 不存在，直线方程 $x=2$；

当 $m\neq 2$，$k=\dfrac{3}{m-2}$，$y-1=\dfrac{3}{m-2}(x-2)$；

（2）$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}]$；

18. （1）略；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=\begin{cases}\dfrac{1-q}{8}, & q\in(0,1)\\ 0, & q\in[1,+\infty)\end{cases}$；

19. （1）$a_n=4n+2$；（2）$\dfrac{2}{3}$；（3）$\lambda=1$；



20. 解：（理）（**1**）∵点在圆 ***C*** 上，∴可设

$\begin{cases}x=-1+2\sqrt{2}\cos\alpha\\ y=2\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$ $\alpha\in[0,2\pi)$；……………………………**2** 分

$x+y=-1+2\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=-1+4\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$，…………………………

…………………**4** 分

从而

$x+y\in[-5,3]$.………………………………………………………………………

………6 分

（2）$\because \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{AM}=0.$

∴NP 为 AM 的垂直平分线，∴

|NA|=|NM|.……………………………………………………………8 分

又$\because |CN|+|NM|=2\sqrt{2}, \therefore |CN|+|AN|=2\sqrt{2}>2.$

∴动点 N 的轨迹是以点 C（－1，0），A（1，0）为焦点的椭圆.………………………………………10 分

且椭圆长轴长为$2a=2\sqrt{2}$,焦距 2c=2.　$\therefore a=\sqrt{2}, c=1, b^2=1.$

∴点 N 的轨迹是方程为

$\frac{x^2}{2}+y^2=1.$………………………………………………………………………12 分

所以轨迹 E 为椭圆，其内接矩形的最大面积为

$2\sqrt{2}$.…………………………………………………14 分

21.（1）$[-2,0]$；（2）$\overrightarrow{a_1}$是“$h$向量”；

# 上海市实验学校2015学年度

# 第一学期高二数学学科期中考试试卷

**（考试时间：90分钟）**

**2015年 11月10日**

**一、填空题（本大题满分40分,共有10题，只要求直接填写结果，每题填对得4分，否则一律得零分）**

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n+1}=$ __1__

2、过点$(1,0)$且与直线$2x+y=0$垂直的直线的方程$\underline{x-2y-1=0}$.

3、已知$\vec{a}=(-4,5)$，$\vec{b}=(-2,4)$，则$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\underline{6\sqrt{2}}$

4、若$\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|\vec{b}\right|=2$，且$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角大小为$\underline{\dfrac{2}{3}\pi}$

5、已知直线$l$的一个法向量是$\vec{n}=\left(1,-\sqrt{3}\right)$，则此直线的倾斜角的大小为$\underline{\dfrac{\pi}{6}}$

6、已知直线$l_1:6x+(t-1)y-8=0$，直线$l_2:(t+4)x+(t+6)y-16=0$，若$l_1$与$l_2$ 平行，则$t=$

$\underline{-5}$

7、设无穷等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$，若$a_1=\lim\limits_{n\to\infty}(a_3+a_4+\cdots+a_n)$，则$q=\underline{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

8、 设等边三角形ABC边长为6，若 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}$ 等于$\underline{-18}$

9、已知$\Delta ABC$满足$|AB|=3,|AC|=4$，$O$是$\Delta ABC$的外心，且

$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\dfrac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AC}\quad(\lambda\in R)$，则$\Delta ABC$的面积是$\underline{2\sqrt{5}\text{或}\dfrac{3}{2}\sqrt{7}}$.

10、定义函数$f(x)=\{x\cdot\{x\}\}$，其中$\{x\}$表示不小于$x$的最小整数，如$\{1.4\}=2$，$\{-2.3\}=-2$．当$x\in(0,n]$（$n\in\mathbf{N}^*$）时，函数$f(x)$的值域为$A_n$，记集合$A_n$中元素的个数为$a_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)=\underline{2}$

【解析】易知：当$n=1$时，因为$x\in(0,1]$，所以$\{x\}=1$，所以$\{x\{x\}\}=1$，所以

$A_1=\{1\},a_1=1$；

当 $n=2$ 时，因为 $x\in(1,2]$，所以 $\{x\}=2$，所以 $\{x\{x\}\}\in(2,4]$，所以 $A_2=\{1,3,4\},a_2=3$；

当 $n=3$ 时，因为 $x\in(2,3]$，所以 $\{x\}=3$，所以 $\{x\{x\}\}=\{3x\}\in(6,9]$，所以 $A_3=\{1,3,4,7,8,9\},a_3=6$；

当 $n=4$ 时，因为 $x\in(3,4]$，所以 $\{x\}=4$，所以 $\{x\{x\}\}=\{4x\}\in(12,16]$，

所以 $A_4=\{1,3,4,7,8,9,13,14,15,16\},a_4=10$；

当 $n=5$ 时，因为 $x\in(4,5]$，所以 $\{x\}=5$，所以 $\{x\{x\}\}=\{5x\}\in(20,25]$，所以 $A_5=\{1,3,4,7,8,9,13,14,15,16,21,22,23,24,25\},a_5=15$，

由此类推：$a_n=a_{n-1}+n$，所以 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，所以

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{2n}{n+1}$$

**二、选择题（本大题满分 16 分，共有 4 题，每题都给出四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得 4 分，否则一律得零分。）**

11、在边长为 1 的正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 中，$\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_3A_5}$ 的值为………………（ $B$ ）.

A．$\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

12、已知 $a_n=\begin{cases}2n-1 & ,n<2015\\ (-\frac{1}{2})^{n-1} & ,n\ge 2015\end{cases}$，$S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和………………（ $A$ ）

A．$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 都存在　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 都不存在

C．$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在　　D．$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在

**13**、设 $\vec{a}=(2,3),\vec{b}=(-4,7)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为…………………………　（ $C$ ）

A．$\sqrt{13}$　　B. $\dfrac{\sqrt{13}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{65}}{5}$　　D．$\sqrt{65}$

14、设$\theta$为两个非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角，已知对任意实数$t$，$|\vec{b}-t\vec{a}|$的最小值为2，则（ B ）

$A$.若$\theta$确定，则$|\vec{a}|$唯一确定　　　　$B$.若$\theta$确定，则$|\vec{b}|$唯一确定

$C$.若$|\vec{a}|$确定，则$\theta$唯一确定　　　　$D$.若$|\vec{b}|$确定，则$\theta$唯一确定

**三、解答题(本大题满分44分，共4题，解答下列各题必须写出必要的步骤)**

15、**(本题满分10分)** 在平面直角坐标系中，已知$A(2,\ 3)$，$B(4,\ -1)$，$P(2,\ 0)$，

求：（1）$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$的值；　（2）$\angle APB$的大小.

解：（1）$\overrightarrow{AP}=(0,\ -3)$，$\overrightarrow{BP}=(-2,\ 1)$，

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0\cdot(-2)+(-3)\cdot 1=-3$.

（2）$\cos\angle APB=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{-3}{3\cdot\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore\ \angle APB=\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{B}$的值为$-3$；　$\angle APB$的大小为$\pi-\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

16、**(本题满分10分)** 已知两点$A(2,1)$，$B(m,4)$，求

（1）直线$AB$的斜率和直线$AB$的方程；

（2）已知$m\in[2-\sqrt{3},2+3\sqrt{3}]$，求直线$AB$的倾斜角$\alpha$的范围.

解：（1）当$m=2$时，直线$AB$的斜率不存在，直线$AB$的方程为$x=2$

当$m\neq 2$时，直线$AB$的斜率$k_{AB}=\dfrac{3}{m-2}$，

直线$AB$的方程为$y-1=\dfrac{3}{m-2}(x-2)$

（2）当$m=2$时，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

当$m\neq 2$时，由$m\in\left[2-\sqrt{3},2+3\sqrt{3}\right]\Rightarrow k_{AB}=\dfrac{3}{m-2}\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$

$\Rightarrow\alpha\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}]$

所以直线$AB$的倾斜角$\alpha$的范围是$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$

17、**(本题满分 12 分)** 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=7$，令$b_n=a_n a_{n+1}$，$\{b_n\}$是公比为$q(q>0)$的等比数列，设$c_n=a_{2n-1}+a_{2n}$，

（1） 求证：$c_n=8\cdot q^{n-1}\ \ n\in N^*$；

（2） 设$\{c_n\}$的前$n$项和为$S_n$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}$的值。

解：(1) $b_1=a_1\cdot a_2=7$，$b_n=7\cdot q^{n-1}=a_n\cdot a_{n+1}$，

$\therefore\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q$　　　$\therefore a_{2n-1}=a_1\cdot q^{n-1}=q^{n-1}$，$\therefore a_{2n}=a_2\cdot q^{n-1}=7\cdot q^{n-1}$

$\therefore c_n=8\cdot q^{n-1}\ \ n\in N^*$

（2）当$q=1$时，$c_n=8$，$\therefore S_n=8\cdot n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=0$

当$q\neq1$时，$S_n=\dfrac{8\cdot(1-q^n)}{1-q}$，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1-q}{8\cdot(1-q^n)}$

其中$q\in(0,1)$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1-q}{8}$

$$q\in(1,+\infty)\text{时，}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-q)\left(\frac{1}{q}\right)^n}{8\cdot\left[\left(\frac{1}{q}\right)^n-1\right]}=0$$

综上：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{S_n}=\begin{cases}\dfrac{1-q}{8} & q\in(0,1)\\ 0 & q\in[1,+\infty)\end{cases}$

18、**（本题满分 12 分）**

定义 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$ 的“倒平均数”为 $\dfrac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$（$n\in N^*$）.

（1）若数列 $\{a_n\}$ 前 $n$ 项的“倒平均数”为 $\dfrac{1}{2n+4}$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足：当 $n$ 为奇数时，$b_n=1$，当 $n$ 为偶数时，$b_n=2$．若 $T_n$ 为 $\{b_n\}$ 前 $n$ 项的倒平均数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$；

（3）设函数 $f(x)=-x^2+4x$，对（1）中的数列 $\{a_n\}$，是否存在实数 $\lambda$，使得当 $x\le\lambda$ 时，$f(x)\le\dfrac{a_n}{n+1}$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立？若存在，求出最大的实数 $\lambda$；若不存在，说明理由.

解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，由题意，$T_n=\dfrac{n}{S_n}=\dfrac{1}{2n+4}$，所以 $S_n=2n^2+4n$.

所以 $a_1=S_1=6$，当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=4n+2$，而 $a_1$ 也满足此式.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=4n+2$.）

（2）设数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，则当 $n$ 为偶数时，$S_n=\dfrac{3n}{2}$，

当 $n$ 为奇数时，$S_n=\dfrac{3(n-1)}{2}+1=\dfrac{3n-1}{2}$.

所以$T_n=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, & 当n为偶数\\ \dfrac{2n}{3n-1}, & 当n为奇数\end{cases}$.　　所以 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\dfrac{2}{3}$.

（3）假设存在实数 $\lambda$，使得当 $x\le\lambda$ 时，$f(x)\le\dfrac{a_n}{n+1}$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立，则 $-x^2+4x\le\dfrac{4n+2}{n+1}$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立，

令 $c_n=\dfrac{4n+2}{n+1}$，因为 $c_{n+1}-c_n=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}>0$，所以数列 $\{c_n\}$ 是递增数列，…（1 分）

所以只要 $-x^2+4x\le c_1$，即 $x^2-4x+3\ge 0$，

解得 $x\le 1$ 或 $x\ge 3$.

所以存在最大的实数 $\lambda=1$，使得当 $x\le\lambda$ 时，$f(x)\le\dfrac{a_n}{n+1}$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立

**四、附加题：**（每题 10 分，共 20 分）

19、对于一组向量 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ $(n\in N^*)$，令 $\overrightarrow{S_n}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\cdots+\overrightarrow{a_n}$，如果存在 $\overrightarrow{a_p}$ $(p\in\{1,2,3\cdots,n\})$，使得 $|\overrightarrow{a_p}|\geq|\overrightarrow{S_n}-\overrightarrow{a_p}|$，那么称 $\overrightarrow{a_p}$ 是该向量组的"$h$ 向量".

（1）设 $\overrightarrow{a_n}=(n,x+n)(n\in N^*)$，若 $\overrightarrow{a_3}$ 是向量组 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ 的"$h$ 向量"，求实数 $x$ 的取值范围；

（2）若 $\overrightarrow{a_n}=((\frac{1}{3})^{n-1},(-1)^n)(n\in N^*)$，向量组 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ 是否存在"$h$ 向量"？给出你的结论并说明理由。

解：(1)由题意，得：$|\overrightarrow{a_3}|\geq|\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}|$，则 $\sqrt{9+(x+3)^2}\geq\sqrt{9+(2x+3)^2}$

解得：$-2\leq x\leq 0$

(2) $\overrightarrow{a_1}$ 是向量组 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ 的"$h$ 向量"，证明如下：

$\overrightarrow{a_1}=(1,-1)$，$|\overrightarrow{a_1}|=\sqrt{2}$

当 $n$ 为奇数时，$\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\cdots+\overrightarrow{a_n}=(\dfrac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]}{1-\frac{1}{3}},0)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1},0)$

$0\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}<\frac{1}{2}$，故 $|\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\cdots+\overrightarrow{a_n}|=\sqrt{[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}]^2+0^2}<\frac{1}{2}<\sqrt{2}$，

即 $|\overrightarrow{a_1}|>|\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\cdots+\overrightarrow{a_n}|$

当 $n$ 为偶数时，$\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\cdots+\overrightarrow{a_n}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1},1)$

故 $|\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\cdots+\overrightarrow{a_n}|=\sqrt{[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}]^2+1^2}<\sqrt{\frac{5}{4}}<\sqrt{2}$

即 $|\overrightarrow{a_1}|>|\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\cdots+\overrightarrow{a_n}|$

综合得：$\overrightarrow{a_1}$ 是向量组 $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3},\cdots,\overrightarrow{a_n}$ 的"$h$ 向量"

20、等差数列$\{x_n\}$的前$n$项和记为$S_n$，等比数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，

已知$x_3=5, S_3=9$，$b_2=x_2+1$，$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=16,$

（1）求数列$\{x_n\}$的通项$x_n$；

（2）设$M_n=\lg b_1+\lg b_2+\cdots+\lg b_n$,求$M_n$的最大值及此时$n$的值；

（3）判别方程$\sin^2 x_n+x_n\cos x_n+1=S_n$是否有解，说明理由。

解：（1）$\begin{cases}x_3=5\\S_3=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1+2d=5\\3x_1+3d=9\end{cases}$ $x_1=1$ $d=2$ $x_n=2n-1$

（2）设$\{b_n\}$的公比为 q，由已知|q|<1，且 q≠0∴$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\frac{b_1}{1-q}=\frac{b_2}{(1-q)q}=16$

由于$b_2=x_2+1=4$ 所以 $4q^2-4q+1=0$，

$\therefore q=\frac{1}{2}, b_1=8$ $\therefore b_n=8\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=2^{4-n}\ldots$

$\because M_n=\lg b_1+\lg b_2+\cdots+\lg b_n=\lg 2^3+\lg 2^2+\cdots+\lg 2^{4-n}$

$=[(3+2)+\cdots+(4-n)]\lg 2$ $=\frac{n(7-n)}{2}\lg 2=-\frac{\lg 2}{2}[(n-\frac{7}{2})^2-\frac{49}{4}]$

由于$-\frac{\lg 2}{2}<0$ 所以当 n=3 或 n=4 时，$(M_n)_{\max}=(3+2+1)\lg 2=6\lg 2.$

(3) $\sin^2 x_n+x_n\cos x_n+1=S_n$， 由于$x_n=2n-1, S_n=n^2$，

则方程为：$\sin^2(2n\text{-}1)+(2n\text{-}1)\cos(2n\text{-}1)+1=n^2$

①$n=1$时，$\sin^2 1+\cos 1=0$ 无解--

②$n=2$时，$\sin^2 3+3\cos 3+1=4$ 所以$\cos^2 3-3\cos 3+2=0$

所以$\cos 3=1, \cos 3=2$ 无解

③$n\geq 3$时，$\sin^2(2n-1)+(2n-1)\cos(2n-1)+1<1+(2n-1)+1=2n+1<n^2$

所以$\sin^2(2n-1)+(2n-1)\cos(2n-1)+1=n^2$无解

综上所述，对于一切正整数方程$\sin^2 x_n+x_n\cos x_n+1=S_n$都无解-

20．等差数列$\{x_n\}$的前$n$项和为$S_n$，等比数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$；已知$x_3=5$，$S_3=9$，$b_2=a_2+1$，$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=16$；

（1）求数列$\{x_n\}$的通项$x_n$；

（2）设$M_n=\lg b_1+\lg b_2+...+\lg b_n$，求$M_n$的最大值及此时$n$的值；

（3）数列方程$\sin^2 x_n+x_n\cos x_n+1=S_n$是否有解，说明理由；

解．（1）$x_n=2n-1$；（2）$n=3$或$n=4$时，$(M_n)_{\max}=6\lg 2$；（3）无解；

# 上大附中高二上学期寒假作业 6——综合卷

一、填空题：

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-5}$=_______________.

2．已知$\vec{a}$=（1﹣t，2），$\vec{b}$=（﹣2，1），若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 t=__________.

3．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1$=﹣4，$a_5$=﹣12，则 $a_3$=_______________.

4．化简：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}$=_______________.

5．在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_5a_6$=9，则 $\log_3a_1+\log_3a_2+\ldots+\log_3a_{10}$=__________.

6．设 $S_n$ 表示等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $S_9$=18，$S_n$=240，若 $a_{n-4}$=30（n＞9），则 n=______.

7．若$|\vec{a}|$=2，$|\vec{b}|$=1，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为 120°，则$|\vec{a}-\vec{b}|$=____________.

8．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{5}$，$a_n+a_{n+1}=\frac{6}{5^{n+1}}$（n=1，2，3…），此数列前 n 项和 $S_n$ 的公式为_________.

9. 方程$\frac{x^2}{2\lambda-1}+\frac{y^2}{2-\lambda}=1$表示椭圆,则$\lambda$的取值范围为____________________。

10.椭圆的长短轴之和为 18，焦距为 6，则椭圆的标准方程为_________________。

11.  过点 $A(2,4)$ 向圆 $x^2+y^2=4$ 所引的切线方程为_________________。



12.（3 分）已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=2^{n-1}$，数列$\{b_n\}$的通项公式是 $b_n$=3n，令集合 A=$\{a_1，a_2，…，a_n，…\}$，B=$\{b_1，b_2，…，b_n，…\}$，n∈$N^*$．将集合 A∪B 中的元素按从小到大的顺序排列构成的数列记为$\{c_n\}$．则数列$\{c_n\}$的前 28 项的和 $S_{28}$=____________.

二、选择题

13. 椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}$=1 的焦点为 $F_1$ 和 $F_2$，点 $P$ 在椭圆上.如果线段 $PF_1$ 的中点在 $y$ 轴上，那么$|PF_1|$是$|PF_2|$的（　　）

A.7 倍　　B.5 倍　　C.4 倍　　D.3 倍

14．我们把 1，3，6，10，15，...这些数叫做三角形数，因为这些数目的点子可以排成一个正三角形（如图）

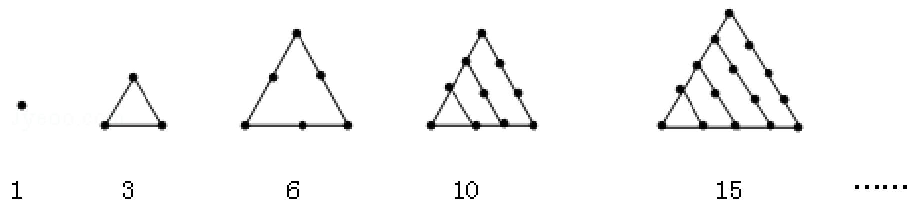
则第七个三角形数是（）

A．27

B．28

C．29

D．30




15．若两个非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，互相垂直，则下列一定成立的是（）

A．$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$　　B．$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$

C．$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$　　D．$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

16．设$\{a_n\}$是各项为正数的无穷数列，$A_i$是边长为 $a_i$，$a_{i+1}$ 的矩形的面积（i=1，2，...），则$\{A_n\}$为等比数列的充要条件是（　　）

A．$\{a_n\}$是等比数列

B．$a_1$，$a_3$，...，$a_{2n-1}$，...或 $a_2$，$a_4$，...，$a_{2n}$，...是等比数列

C．$a_1$，$a_3$，...，$a_{2n-1}$，...和 $a_2$，$a_4$，...，$a_{2n}$，...均是等比数列

D．$a_1$，$a_3$，...，$a_{2n-1}$，...和 $a_2$，$a_4$，...，$a_{2n}$，...均是等比数列，且公比相同

**三、解答题**

17.已知椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，过左焦点作倾斜角为$\frac{\pi}{6}$的直线交椭圆于 A、B 两点，

（1）求弦 AB 的长；

（2）求左焦点 $F_1$ 到 AB 中点 M 的长。

18.（10 分）若 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，求

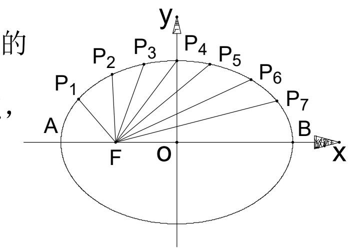
（1）向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角 θ；　　　　（2）$|2\vec{a}+\vec{b}|$.

19．从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业．根据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少$\frac{1}{5}$．本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加$\frac{1}{4}$.

（1）设 n 年内（本年度为第一年）总投入为 $a_n$ 万元，旅游业总收入为 $b_n$ 万元．写出 $a_n$，$b_n$ 的表达式；

（2）至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入？

20.如图把椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的长轴 *AB* 分成 8 份，过每个分点作 *x* 轴的垂线交椭圆的上半部分于 $P_1,P_2,\cdots\cdots P_7$ 七个点，*F* 是椭圆的一个焦点，求 $|P_1F|+|P_2F|+\ldots\ldots+|P_7F|$ 的值。




21.已知 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 分别是与 x 轴、y 轴正方向相同的单位向量，$\overrightarrow{OB_1}=a\cdot\vec{i}+2\vec{j}$（a∈R），对任意正整数 n，$\overrightarrow{B_nB_{n+1}}=51\cdot\vec{i}+3\cdot 2^{n-1}\vec{j}$.

（1）若 $\overrightarrow{OB_1}\perp\overrightarrow{B_2B_3}$，求 a 的值；

（2）求向量 $\overrightarrow{OB_n}$；

（3）设向量 $\overrightarrow{OB_n}=x_n\cdot\vec{i}+y_n\cdot\vec{j}$，求最大整数 a 的值，使对任意正整数 n，都有 $x_n<y_n$ 成立.

参考答案与试题解析

## 一、填空题（每小题 3 分，总分 36 分）

1．（3 分）计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-5}=$1.

考点： 数列的极限．

专题： 点列、递归数列与数学归纳法．

分析： 直接利用分式分母同除 n，利用数列的极限的运算法则求解即可．

解答： 解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-5}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{5}{n}}=\frac{1+0}{1-0}=1$.

故答案为：1．

点评： 本题考查数列的极限的运算法则的应用，基本知识的考查．

2．（3 分）已知$\overrightarrow{a}=(1-t,\ 2)$，$\overrightarrow{b}=(-2,\ 1)$，若$\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$，则 t=5.

考点： 平行向量与共线向量；平面向量的坐标运算．

专题： 平面向量及应用．

分析： 利用向量平行的充要条件，列出方程求解即可．

解答： 解：知$\overrightarrow{a}=(1-t,\ 2)$，$\overrightarrow{b}=(-2,\ 1)$，

若$\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$，

则：$1-t=-2\times2$，

解得 $t=5$．

故答案为：5．

点评： 本题考查向量共线的充要条件应用，基本知识的考查．

3．（3 分）已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-4$，$a_5=-12$，则 $a_3$=－8.

考点： 等差数列的通项公式．

专题： 等差数列与等比数列．

分析： 根据等差数列的通项公式和题意求出公差 d，再求出 $a_3$ 的值．

解答： 解：设等差数列$\{a_n\}$的公差是 d，

因为 $a_1=-4$，$a_5=-12$，所以 $d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=-2$，

则 $a_3=a_1+2d=-8$，

故答案为：$-8$.

点评：　本题考查等差数列的通项公式，属于基础题.

4．（3 分）化简：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$.

考点：　向量的加法及其几何意义；向量的减法及其几何意义.

专题：　平面向量及应用.

分析：　根据平面向量的加法与减法的法则，进行化简即可.

解答：　解：∵ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{0}$.

故答案为：$\overrightarrow{0}$.

点评：　本题考查了平面向量的线性运算问题，解题时应灵活应用平面向量的合成法则，是基础题.

5．（3 分）在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_5a_6=9$，则 $\log_3a_1+\log_3a_2+\ldots+\log_3a_{10}=$<u>10</u>.

考点：　等比数列的性质.



专题：　计算题.

分析：　根据等比数列的性质可知 $a_1a_{10}=a_2a_9=\ldots a_5a_6$，再利用对数的性质即可得到答案.

解答：　解：$\log_3a_1+\log_3a_2+\ldots+\log_3a_{10}=\log_3(a_1a_{10})+\log_3(a_2a_9)+\ldots\log_3(a_5a_6)=5\log_3(a_5a_6)=10$

故答案为：10

6．（3 分）设 $S_n$ 表示等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $S_9=18$，$S_n=240$，若 $a_{n-4}=30$（$n>9$），则 $n=$<u>15</u>.

考点：　等差数列的前 n 项和；等差数列的性质.

专题：　计算题.

分析： 先根据等差数列的求和公式和等差数列的等差中项的性质利用 $S_9=18$ 求得 $a_5$，进而根据等差中项性质可知 $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(a_5+a_{n-4})n}{2}=240$，求得 n．

解答： 解：$S_9=9a_5$∴ $a_5=2$

∴ $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(a_5+a_{n-4})n}{2}=\frac{(2+30)n}{2}=240$

n=15

故答案为 15

点评： 本题主要考查了等差数列的前 n 项和的问题．巧妙地利用了等差中项的性质．

7．（3 分）若 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为 120°，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$．

考点： 数量积表示两个向量的夹角．

专题： 平面向量及应用．

分析： 由题设条件，对 $|\vec{a}-\vec{b}|$进行平方，先出和向量模的平方，再开方求两者和的模．

解答： 解：$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为 120°，

由题意 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4+1-2\times2\times1\times\cos120°=7$，

∴ $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$．

故答案为：$\sqrt{7}$．



点评： 本题考查向量模的求法，对向量的求模运算，一般采取平方方法表示成向量的内积，根据内积公式求出其平方，再开方求模，本题是向量中的基本题．

8．（3 分）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{5}$，$a_n+a_{n+1}=\frac{6}{5^{n+1}}$（n=1，2，3…），此数列前 n 项和 $S_n$ 的公式为$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(\frac{1}{5})^n$．

考点： 数列递推式．

专题： 等差数列与等比数列．

分析： 根据数列的递推关系依次求出数列的前几项，根据数列的规律，即可得到结论．

解答： 解：∵ 数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{5}$，$a_n+a_{n+1}=\frac{6}{5^{n+1}}$（n=1，2，3...），

∴ $a_1+a_2=\frac{6}{25}$，则 $a_2=\frac{6}{25}-\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$，

∴ $a_2+a_3=\frac{6}{125}$，则 $a_3=\frac{6}{125}-\frac{1}{25}=\frac{1}{125}$，

∴ $a_3+a_4=\frac{6}{625}$，则 $a_4=\frac{6}{625}-\frac{1}{125}=\frac{1}{625}$，

...，

则数列$\{a_n\}$是公比 $q=\frac{1}{5}$，首项 $a_1=\frac{1}{5}$的等比数列，

则数列前 n 项和 $S_n=\frac{\frac{1}{5}[1-(\frac{1}{5})^n]}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(\frac{1}{5})^n$，

故答案为：$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(\frac{1}{5})^n$

点评： 本题主要考查数列的前 n 项和的计算，根据递推关系判断数列是等比数列是解决本题的关键．

9. $(-\frac{1}{2},1)\cup(1,2)$

10. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$或$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$

11、$x=2$或$3x-4y+10=0$



12.（3 分）已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=2^{n-1}$，数列$\{b_n\}$的通项公式是 $b_n=3n$，令集合 $A=\{a_1，a_2，...，a_n，...\}$，$B=\{b_1，b_2，...，b_n，...\}$，$n\in N^*$．将集合 A∪ B 中的元素按从小到大的顺序排列构成的数列记为$\{c_n\}$．则数列$\{c_n\}$的前 28 项的和 $S_{28}$=820．

考点： 数列的求和．

专题： 计算题．

分析： 由题意可知两集合中无公共项，$\{c_n\}$的前 28 项由$\{a_n\}$中的前 7 项及$\{b_n\}$中的前 21 项构成．进而根据等比和等差数列的求和公式即可得到答案．

解答： 解：两集合中无公共项，$\{c_n\}$的前 28 项由$\{a_n\}$中的前 7 项及$\{b_n\}$中的前 21 项构成．

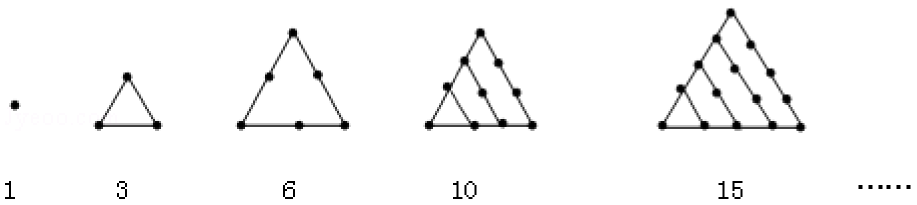
所以 $S_{28}=\frac{1-2^{7}}{1-2}+\frac{21(3+63)}{2}=820$.

点评：　本题主要考查了数列的求和问题．熟练掌握等比和等差数列的求和公式，是正确解题的前提．

**二、选择题（每小题 3 分，总分 12 分）**

13．　A

14．（3 分）我们把 1，3，6，10，15，...这些数叫做三角形数，因为这些数目的点子可以排成一个正三角形（如图）




则第七个三角形数是（）

A．27　　B．28　　C．29　　D．30

考点：　数列的应用．

分析：　原来三角形数是从 1 开始的连续自然数的和．1 是第一个三角形数，3 是第二个三角形数，6 是第三个三角形数，10 是第四个三角形数，15 是第五个三角形数...那么，第七个三角形数就是：l+2+3+4+5+6+7=28．

解答：　解：原来三角形数是从 1 开始的连续自然数的和．

l 是第一个三角形数，

3 是第二个三角形数，

6 是第三个三角形数，

10 是第四个三角形数，

15 是第五个三角形数，

...

那么，第七个三角形数就是：l+2+3+4+5+6+7=28．

故选 B．

点评：　本题考查数列在生产实际中的应用，考查运算求解能力，推理论证能力；考查化归与转化思想．综合性强，难度大，易出错，是高考的重点．解题时要认真审题，注意总结规律．



15．（3 分）若两个非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，互相垂直，则下列一定成立的是（）

A． $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$　　B． $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$　C． $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$D．

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

考点：　平面向量数量积的运算；向量的模．
专题：　平面向量及应用．
分析：　首先，根据向量垂直，则它们的数量积为 0，可以容易得到选项 A 错误，然后，再利用向量的运算法则及运算律求解其它选项即可．

解答：　解：∵ 非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，互相垂直，

∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

对于选项 A，显然错误；
对于选项 B，根据向量的运算，

得到 $\vec{b}=\vec{0}$，显然，与题目条件矛盾，

故选项 B 错误；
对于选项 C，

∵ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，

∴ $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$，

∴ $|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$，

∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

∴ $\vec{a}\perp\vec{b}$．



故选项 C 正确；
对于选项 D，得到

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$．

故选项 D 错误，
故选：C．
点评：　本题考查向量垂直的充要条件、向量的运算法则、向量的运算律．属于中档题，但也是易错题．

16.（3 分）设{$a_n$}是各项为正数的无穷数列，$A_i$是边长为$a_i$，$a_{i+1}$的矩形的面积（i=1，2，…），则{$A_n$}为等比数列的充要条件是（）

A．{$a_n$}是等比数列

B．$a_1$，$a_3$，…，$a_{2n-1}$，…或$a_2$，$a_4$，…，$a_{2n}$，…是等比数列

C．$a_1$，$a_3$，…，$a_{2n-1}$，…和$a_2$，$a_4$，…，$a_{2n}$，…均是等比数列

D．$a_1$，$a_3$，…，$a_{2n-1}$，…和$a_2$，$a_4$，…，$a_{2n}$，…均是等比数列，且公比相同

考点：　等比数列的性质．

专题：　压轴题．

分析：　根据题意可表示$A_i$，先看必要性，{$A_n$}为等比数列推断出$\frac{a_{i+2}}{a_i}$为常数，可推断出$a_1$，$a_3$，…，$a_{2n-1}$，…和$a_2$，$a_4$，…，$a_{2n}$，…均是等比数列，且公比相同；再看充分性，要使题设成立，需要$\frac{a_{i+2}}{a_i}$为常数，即$a_1$，$a_3$，…，$a_{2n-1}$，…和$a_2$，$a_4$，…，$a_{2n}$，…均是等比数列，且公比相等，答案可得．

解答：　解：依题意可知$A_i=a_i\bullet a_{i+1}$，

∴ $A_{i+1}=a_{i+1}\bullet a_{i+2}$，

若{$A_n$}为等比数列则$\frac{A_{i+1}}{A_i}=\frac{a_{i+2}}{a_i}=q$（q 为常数），则$a_1$，$a_3$，…，$a_{2n-1}$，…和$a_2$，$a_4$，…，$a_{2n}$，…均是等比数列，且公比均为 q；

反之要想{$A_n$}为等比数列则$\frac{A_{i+1}}{A_i}=\frac{a_{i+2}}{a_i}$需为常数，即需要$a_1$，$a_3$，…，$a_{2n-1}$，…和$a_2$，$a_4$，…，$a_{2n}$，…均是等比数列，且公比相等；



故{$A_n$}为等比数列的充要条件是$a_1$，$a_3$，…，$a_{2n-1}$，…和$a_2$，$a_4$，…，$a_{2n}$，…均是等比数列，且公比相同．

故选 D

点评：　本题主要考查了等比数列的性质，充分条件，必要条件和充分必要条件的判定．考查了学生分析问题和基本的推理能力．

**三、解答题（本大题共 5 题，共 52 分，姐答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）**

17.　(1)|AB|=2　　(2) $|F_1M|=\frac{\sqrt{6}}{3}$

18.（10 分）若$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，且$\vec{a}\bullet\vec{b}=1$，求

（1）向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角θ；

（2）$|2\vec{a}+\vec{b}|$.

考点： 数量积表示两个向量的夹角；向量的模.

专题： 平面向量及应用.

分析： （1）由题意根据$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1}{2}$，求得θ的值.

（2）由条件根据$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}$，计算求得结果.

解答： 解：（1）∵ 向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角θ，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，

∴ $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1}{2\times1}=\frac{1}{2}$，∴ $\theta=\frac{\pi}{3}$.

（2）$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{4\times4+4+1}=\sqrt{21}$.

点评： 本题主要考查两个向量的数量积的定义，求向量的模的方法，属于基础题.

19.（10 分）从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业．根据规划，本年度投入 800 万元，以后每年投入将比上年减少$\frac{1}{5}$．本年度当地旅游业收入估计为 400 万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上年增加$\frac{1}{4}$.

（1）设 n 年内（本年度为第一年）总投入为 $a_n$ 万元，旅游业总收入为 $b_n$ 万元．写出 $a_n$，$b_n$ 的表达式；

（2）至少经过几年旅游业的总收入才能超过总投入？

考点： 函数模型的选择与应用.

专题： 应用题；压轴题.

分析： （1）依次写出第 1 年投入量，第 2 年投入量，等等，第 n 年投入量，从而求出 n 年内的总投入量 $a_n$，再由第 1 年旅游业收入为 400 万元，第 2 年旅游业收入为 400×（$1+\frac{1}{4}$）万元，归纳出第 n 年旅游业收入为 400×（$1+\frac{1}{4}$）$^{n-1}$ 万元．从而得出 n 年内的旅游业总收入 $b_n$.

（2）先设至少经过 n 年旅游业的总收入才能超过总投入，由 $b_n-a_n>0$，解得 n 的取值范围即可．

解答： 解：（1）第 1 年投入为 800 万元，第 2 年投入为 $800\times(1-\frac{1}{5})$ 万元，第 n 年投入为 $800\times(1-\frac{1}{5})^{n-1}$ 万元．

所以，n 年内的总投入为

$a_n=800+800\times(1-\frac{1}{5})+\ldots+800\times(1-\frac{1}{5})^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}800\times(1-\frac{1}{5})^{k-1}$

$=4000\times[1-(\frac{4}{5})^n]$；（3 分）

第 1 年旅游业收入为 400 万元，第 2 年旅游业收入为 $400\times(1+\frac{1}{4})$ 万元，

第 n 年旅游业收入为 $400\times(1+\frac{1}{4})^{n-1}$ 万元．

所以，n 年内的旅游业总收入为

$b_n=400+400\times(1+\frac{1}{4})+\ldots+400\times(1+\frac{1}{4})^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}400\times(\frac{5}{4})^{k-1}$

$=1600\times[(\frac{5}{4})^n-1]$．（6 分）

（2）设至少经过 n 年旅游业的总收入才能超过总投入，由此

$b_n-a_n>0$，

即 $1600\times[(\frac{5}{4})^n-1]-4000\times[1-(\frac{4}{5})^n]>0$．

化简得 $5\times(\frac{4}{5})^n+2\times(\frac{5}{4})^n-7>0$，（9 分）

设 $x=(\frac{4}{5})^n$，代入上式得

$5x^2-7x+2>0$，

解此不等式，得 $x<\frac{2}{5}$，$x>1$（舍去）．

即 $(\frac{4}{5})^n<\frac{2}{5}$，

由此得 $n\geq5$．

答：至少经过 5 年旅游业的总收入才能超过总投入．（12 分）

点评： 本小题主要考查建立函数关系式、数列求和、不等式等基础知识；考查综合运用数学知识解决实际问题的能力．

20. 35

21.（12 分）已知$\vec{i}$、$\vec{j}$分别是与 x 轴、y 轴正方向相同的单位向量，$\overrightarrow{OB_1}=a\cdot\vec{i}+2\vec{j}$（a∈R），对任意正整数 n，$\overrightarrow{B_nB_{n+1}}=51\cdot\vec{i}+3\cdot 2^{n-1}\vec{j}$.

（1）若$\overrightarrow{OB_1}\perp\overrightarrow{B_2B_3}$，求 a 的值；

（2）求向量$\overrightarrow{OB_n}$；

（3）设向量$\overrightarrow{OB_n}=x_n\cdot\vec{i}+y_n\cdot\vec{j}$，求最大整数 a 的值，使对任意正整数 n，都有 $x_n<y_n$ 成立.

考点： 数列与向量的综合；函数恒成立问题；数量积判断两个平面向量的垂直关系.

专题： 综合题.

分析： （1）由题意$\overrightarrow{B_2B_3}=51\vec{i}+6\vec{j}$，知 51a+12=0，由此能求出 a 的值.

（2）由题意

$\overrightarrow{OB_n}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2B_3}+\cdots+\overrightarrow{B_{n-1}B_n}=$

$a\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+51(n-1)\vec{i}+(3+3\cdot2+\cdots+3\cdot 2^{n-2})\vec{j}$，由此能求出结果.

（3）$x_n=51n+a-51$，$y_n=3\cdot2^{n-1}-1$，由 $51n+a-51<3\cdot2^{n-1}-1$ 恒成立，得 $a<3\cdot2^{n-1}-51n+50$ 恒成立，令 $a_n=3\cdot2^{n-1}-51n+50$，只需求数列$\{a_n\}$得最小项. 由此能求出最大整数 a 的值，使对任意正整数 n，都有 $x_n<y_n$ 成立.

解答： 解：（1）由题意$\overrightarrow{B_2B_3}=51\vec{i}+6\vec{j}$，

所以 51a+12=0，

解得 $a=-\frac{4}{17}$.（5 分）

（2）$\overrightarrow{OB_n}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2B_3}+\cdots+\overrightarrow{B_{n-1}B_n}$

$=a\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+51(n-1)\vec{i}+(3+3\cdot2+\cdots+3\cdot 2^{n-2})\vec{j}$

$=(51n+a-51)\vec{i}+(3\cdot 2^{n-1}-1)\vec{j}$（10 分）

（3）$x_n=51n+a-51$，$y_n=3\cdot 2^{n-1}-1$，

由 $51n+a-51<3\cdot 2^{n-1}-1$ 恒成立，

得 $a<3\cdot 2^{n-1}-51n+50$ 恒成立，

令 $a_n=3\cdot 2^{n-1}-51n+50$，

只需求数列$\{a_n\}$得最小项．（13 分）

由$\begin{cases} a_n\leqslant a_{n+1} \\ a_n\leqslant a_{n-1} \end{cases}$，

得 $6\leq n\leq 6$，

即 $n=6$，

$a_6=-160$，

所以 $a=-161$．（16 分）

点评：　本题考查数列和向量的综合，解题时要认真审题，仔细解答，注意挖掘题设中的隐含条件，合理地进行等价转化．

# 上大附中高二第一学期数学寒假作业7——综合卷

一、填空题：

1．以$(1,2)$为圆心，且与直线$4x+3y-35=0$相切的圆的方程是__________.

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

2.数列$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n, n\in N^*\right\}$所有项的和为__________． 2

3. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ y & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}x & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$，则$x+y$=__________． 8

4、数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_2$和$a_{2014}$是方程$5x^2-6x+1=0$的两根，则数列$\{a_n\}$的前2015项的和为__________．1209

5. 等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$，关于$x$的不等式$dx^2+2a_1x\geq 0$的解集为$[0,9]$，则使数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$最大的正整数$n$的值是______；

答案：5

6. 圆$x^2+y^2-2x-2y+1=0$上的点到直线$x-y=2$的距离最大值是__________。

答案：$1+\sqrt{2}$

7.点P是椭圆$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$上一点，$F_1$，$F_2$是其焦点，若$\angle F_1PF_2=60°$,则$\Delta F_1PF_2$的面积是______________

答案：$\frac{64\sqrt{3}}{3}$

8.设椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点$P$到左焦点的距离为 4，$F$是该椭圆的左焦点，若点$M$满足$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF})$，则$|\overrightarrow{OM}|$=__________。

答案：3

9. 数列$1,\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\cdots$，则$\frac{8}{9}$是该数列的第__________项. 128

10. 已知直线$(1-a)x+(a+1)y-4(a+1)=0$（其中$a$为实数）过定点$P$，点$Q$在函数$y=x+\frac{1}{x}$的图像上，则$PQ$连线的斜率的取值范围是__________. $[-3,+\infty)$

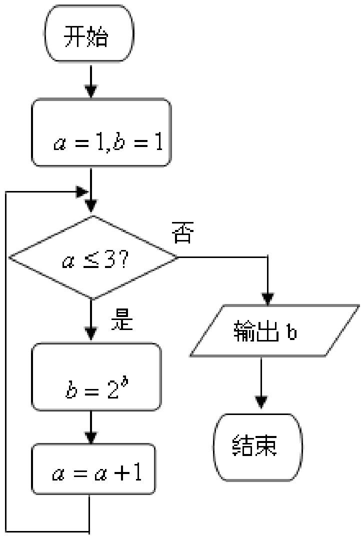
11.已知A，B，C，D四点的坐标分别为A（－1，0），B（1，0），C（0，1），D（2，0），P是线段CD上的任意一点，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$的最小值是____________． $-\frac{1}{5}$

12.记$\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$为数列{$a_n$}的调和平均值，$S_n$为自然数列{n}的前 n 项和，若 $H_n$ 为数列{$S_n$}的调和平均值，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{H_n}{n}$=____________. $\dfrac{1}{2}$

二、选择题：

13.如图，该程序运行后输出的结果为……  （　　）D

（A）1　　　（B）2　　　（C）4　　　（D）16




14. $P$是$\Delta ABC$所在平面内一点，若$\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$，其中$\lambda\in R$，则$P$点一定在……（　　）B

（A）$\Delta ABC$内部　　　（B）$AC$边所在直线上

（C）AB边所在直线上　　　（D）BC边所在直线上

15. 已知$\vec{i}$和$\vec{j}$是互相垂直的单位向量，向量$\overrightarrow{a_n}$满足：$\vec{i}\cdot\overrightarrow{a_n}=n$，$\vec{j}\cdot\overrightarrow{a_n}=2n+1$，$n\in N^*$，

设$\theta_n$为$\vec{i}$和$\overrightarrow{a_n}$的夹角，则（　　）　B

A. $\theta_n$随着$n$的增大而增大

B. $\theta_n$随着$n$的增大而减小

C. 随着$n$的增大，$\theta_n$先增大后减小

D. 随着$n$的增大，$\theta_n$先减小后增大

16、已知数列$a_n=n\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}$，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=$…………（　　　）. B

$A.\ -48$；　　$B.\ -50$；　　$C.\ -52$；　　$D.\ -49$

三、解答题：

17. 在矩形 $ABCD$中，$AB$ =2，$AD$=1，边$DC$（包含点 D、C）的动点 P 与 CB 延长线上（包含点B）的动点Q 满足$|\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{BQ}|$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}$的取值范围是什么？

$[\dfrac{3}{4},3]$

18.某市 2013 年发放汽车牌照 12 万张，其中燃油型汽车牌照 10 万张，电动型汽车 2 万张.为了节能减排和控制总量，从 2013 年开始，每年电动型汽车牌照按 50%增长，而燃油型汽车牌照每一年比上一年减少 0.5 万张，同时规定一旦某年发放的牌照超过 15 万张，以后每一年发放的电动车的牌照的数量维持在这一年的水平不变.

（1）记 2013 年为第一年，每年发放的燃油型汽车牌照数构成数列 $\{a_n\}$，每年发放的电动型汽车牌照数构成数列 $\{b_n\}$，完成下列表格，并写出这两个数列的通项公式；

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_1=10$ | $a_2=9.5$ | $a_3=$_______ | $a_4=$_______ | $\cdots$ |
| $b_1=2$ | $b_2=3$ | $b_3=$_______ | $b_4=$_______ | $\cdots$ |

（2）从 2013 年算起，累计各年发放的牌照数，哪一年开始超过 200 万张？

解：（1）

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_1=10$ | $a_2=9.5$ | $a_3=$ 9 | $a_4=$ 8.5 | $\cdots$ |
| $b_1=2$ | $b_2=3$ | $b_3=$ 4.5 | $b_4=$ 6.75 | $\cdots$ |

--------------------------------------------------------------1 分

当 $1\le n\le 20$ 且 $n\in N^*$ 时，$a_n=10+(n-1)\times(-0.5)=-\dfrac{n}{2}+\dfrac{21}{2}$；

当 $n\ge 21$ 且 $n\in N^*$ 时，$a_n=0$.

$$\therefore\ a_n=\begin{cases}-\dfrac{n}{2}+\dfrac{21}{2}, & 1\le n\le 20\text{且}n\in N^*\\ 0, & n\ge 21\text{且}n\in N^*\end{cases}$$ --------------------------------------------------------4 分

而 $a_4+b_4=15.25>15$，

$$\therefore\ b_n=\begin{cases}2\cdot(\dfrac{3}{2})^{n-1}, & 1\le n\le 4\text{且}n\in N^*\\ 6.75, & n\ge 5\text{且}n\in N^*\end{cases}$$ ------------------------------------------------------------7 分

（2）当 $n=4$ 时，$S_n=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(b_1+b_2+b_3+b_4)=53.25$. ---------------8 分

当 $5\le n\le 20$ 时，$S_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\cdots+b_n)$

$$=10n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-\frac{1}{2})+\frac{2[1-(\frac{3}{2})^4]}{1-\frac{3}{2}}+6.75(n-4)$$

$$=-\frac{1}{4}n^2+\frac{68}{4}n-\frac{43}{4}$$ ----------------------------------------------------------11 分

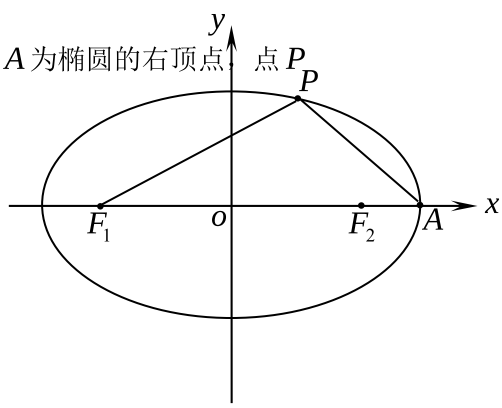
由 $S_n\geq 200$ 得 $-\frac{1}{4}n^2+\frac{68}{4}n-\frac{43}{4}\geq 200$，即 $n^2-68n+843\leq 0$，

解得 n=$34-\sqrt{313}\approx 16.30\leq 21$ ----------------------------------------------------------13 分

$\therefore$ 到2029年累积发放汽车牌照超过200万张-----------------------------------------------14分

19.（本题满分 12 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 6 分。

如图，椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右两个焦点分别为 $F_1$、$F_2$，$A$ 为椭圆的右顶点，点 $P$ 在椭圆上且 $\cos\angle PF_1F_2=\frac{7}{8}$，




（1）计算 $|PF_1|$ 的值；（2）求△ $PF_1A$ 的面积

【解】（1）由椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 得，$a=5$，$c=4$，……2 分

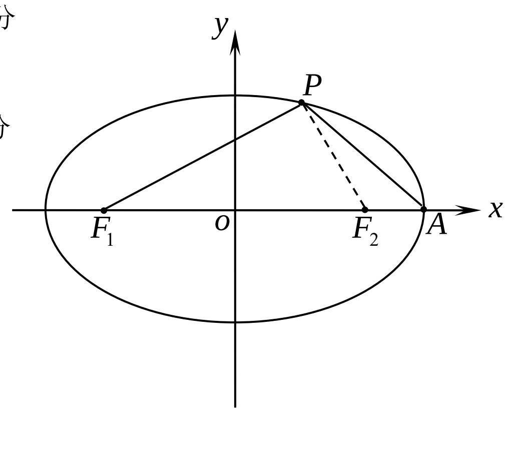
$|F_1F_2|=2\sqrt{25-9}=8$

连接 $PF_2$，设 $|PF_1|=m>0$，则 $|PF_2|=10-m>0$……3 分

在△ $PF_1F_2$ 中，由余弦定理得，$(10-m)^2=m^2+64-2\times m\times 8\times\frac{7}{8}$（$0<m<10$）……5 分

整理得 $6m=36$，解得 $m=6$，故 $|PF_1|=6$.……6 分

（2）在△ $PF_1A$ 中，$|PF_1|=6$，$|F_1A|=a+c=9$……7 分




$\cos\angle PF_1F_2=\frac{7}{8}$，所以 $\sin\angle PF_1F_2=\frac{\sqrt{15}}{8}$……9 分

故 $S_{\Delta PF_1A}=\frac{1}{2}\times|PF_1|\times|F_1A|\times\sin\angle PF_1F_2$……11 分

$=\frac{27\sqrt{15}}{8}$……12 分

20. 已知$n\in N^*$，数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且$2a_n-S_n=1$.

（1）求证：数列$\{a_n\}$是等比数列，并求出通项公式；

（2）对于任意$a_i$、$a_j\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$（其中$1\le i\le n$，$1\le j\le n$，$i$、$j$均为正整数），若$a_i$和$a_j$的所有乘积$a_i\cdot a_j$的和记为$T_n$，试求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{T_n}{4^n}$的值；

解：

**22. （本题满分 16 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题 4 分，第 2 小题 6 分，第 3 小题 6 分。**

**【解】**（1）当$n=1$时，$2a_1-a_1=1$，故$a_1=1$……1 分

$2a_n-S_n=1$……①，当$n\ge 2$时，$2a_{n-1}-S_{n-1}=1$……②

两式相减得，$2(a_n-a_{n-1})=S_n-S_{n-1}$，即$2(a_n-a_{n-1})=a_n$……2 分

所以$a_n=2a_{n-1}$即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2$，所以数列$\{a_n\}$是首项$a_1=1$，公比$q=2$的等比数列，

其中$a_n=2^{n-1}$（$n\in N^*$）……4 分

（2）$T_n=(1+2+\cdots+2^{n-1})\cdot(1+2+\cdots+2^{n-1})$……6 分

$=\dfrac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}\times\dfrac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}=(2^n-1)^2=4^n-2\cdot 2^n+1$……8 分

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{4^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-2\cdot 2^n+1}{4^n}=1$……10 分

21．已知函数$f(x)=\log_k x$（$k$为常数，$k>0$且$k\ne 1$），且数列$\{f(a_n)\}$是首项为 4，公差为 2 的等差数列.

(1)求证：数列$\{a_n\}$是等比数列；

(2) 若$b_n=a_n+f(a_n)$，当$k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$的最小值；

（3）若$c_n=a_n\lg a_n$，问是否存在实数$k$，使得$\{c_n\}$是递增数列？若存在，求出$k$的范围；若不存在，说明理由.

21． 解：(1) 证：由题意$f(a_n)=4+(n-1)\times 2=2n+2$，即$\log_k a_n=2n+2$，

$\therefore a_n=k^{2n+2}$ ------------------------------------------2 分

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{k^{2(n+1)+2}}{k^{2n+2}}=k^2$.

$\because$ 常数 $k>0$ 且 $k\neq 1$，$\therefore k^2$ 为非零常数，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 $k^4$ 为首项，$k^2$ 为公比的等比数列. ----------------------4 分

(2) 当 $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}$ ，$f(a_n)=2n+2$，----------------------6 分

所以 $S_n=\dfrac{2n+2+4}{2}n+\dfrac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=n^2+3n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+1}}$ ------------------8 分

因为 $n\geq 1$, 所以，$n^2+3n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+1}}$ 是递增数列，

因而最小值为 $S_1=1+3+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$。---------------------10 分

(3) 由(1)知，$c_n=a_n\lg a_n=(2n+2)\cdot k^{2n+2}\lg k$，要使 $c_n<c_{n+1}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，

即 $(n+1)\lg k<(n+2)\cdot k^2\cdot\lg k$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立. ----------------------12 分

当 $k>1$ 时，$\lg k>0$，$n+1<(n+2)k^2$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立；---------------14 分

当 $0<k<1$ 时，$\lg k<0$，$n+1>(n+2)k^2$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，

只需 $k^2<\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)_{\min}$，----------------------------------------------16 分

$\because \dfrac{n+1}{n+2}=1-\dfrac{1}{n+2}$ 单调递增，

$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)_{\min}=\dfrac{2}{3}$. -----------------------------------17 分

$\therefore k^2<\dfrac{2}{3}$，且 $0<k<1$，$\therefore 0<k<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

综上所述，存在实数 $k\in(0,\dfrac{\sqrt{6}}{3})\cup(1,+\infty)$ 满足条件. -----------------18 分

# 宝山区2015学年度第一学期期末高二年级数学学科教学质量监测试卷

## 参考答案

**一、填空题（本大题共有14题，满分56分）**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | 4 | $\frac{\pi}{4}$ | 215 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 8 | $x+y-2=0$ |
| 题号 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 答案 | 1 | 15 | 7 | $-4$ | 19 | $[3,15]$ | 2 |

（14题详答见最后）

**二、选择题（本大题共有4题，满分20分）**

| 题号 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | $D$ | $B$ | $C$ | $D$ |

**三、解答题（本大题共有5题，满分74分）**

**19．解：**方法一：

依题意得直线$l$：$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$，……（$3'$）

即直线$l$：$x-2y+4=0$．……（$6'$）

由题设可知$\frac{|a-2\times 2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，……（$10'$）

$\because a>0$，解得$a=1$（$a=-1$舍去）．……（$12'$）

方法二：

依题意可设直线$l$：$x-2y+t=0$（$t$为常数），$\because$点$(2,3)$在$l$上，$\therefore 2-2\cdot 3+t=0$，……（$3'$）

即$t=4$，故直线$l$：$x-2y+4=0$．……（$6'$）

由题设可知$\frac{|a-2\times 2+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，……（$10'$）

$\because a>0$，解得$a=1$（$a=-1$舍去）．……（$12'$）

（注：若学生给出的直线方程是其它形式，则相应给分）

**20．解：**（1）将$(\vec{x}-2\vec{y})(2\vec{x}-\vec{y})=5$展开，并整理得$2\left|\vec{x}\right|^2-5\vec{x}\cdot\vec{y}+2\left|\vec{y}\right|^2=5$，……（$2'$）

$\because \left|\vec{x}\right|=1$，$\left|\vec{y}\right|=2$，$\therefore 2\cdot 1^2-5\vec{x}\cdot\vec{y}+2\cdot 2^2=5$，

即　$\vec{x}\cdot\vec{y}=1$，……（$4'$）

故 $cos\theta=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}=\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$，……………………………………………………………………（$6'$）

$\because \theta\in[0,\pi]$，$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$．……………………………………………………………………………（$8'$）

（2）$\because (\vec{x}-m\vec{y})\perp\vec{y}$，

$\therefore (\vec{x}-m\vec{y})\cdot\vec{y}=0$，……………………………………………………………………………（$10'$）

展开得 $\vec{x}\cdot\vec{y}-m\cdot|\vec{y}|^2=0$，即 $1-m\cdot 2^2=0$，………………………………………………（$12'$）

解得 $m=\dfrac{1}{4}$．……………………………………………………………………………………………（$14'$）

**21．解：**（1）由题意得 $2\cdot 6x_3=16x_1+2x_5$，则 $6q^2=8+q^4$，　……………………………………………（$2'$）

解得 $q^2=4$ 或 $q^2=2$．因为 $q\in N^*$，则 $q=2$．……………………………………………………（$4'$）

又 $x_1=2$，则 $x_n=2^n$，即数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n=2^n$（$n\in N^*$）．………………………………（$6'$）

（2）当 $n=1$ 时，$y_1=S_1=1$；…………………………………………………………………………（$7'$）

当 $n\geq 2$ 时，$y_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，………………………………………………………（$8'$）

当 $n=1$ 时也符合，故 $y_n=2n-1$（$n\in N^*$）．……………………………………………………………（$9'$）

不等式 $\lambda x_n y_n-3x_{n+1}\leq n^2\cdot 2^n$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立，即 $\lambda(2n-1)-6\leq n^2$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立，……（$10'$）

亦即 $\lambda\leq\dfrac{n^2+6}{2n-1}$ 对一切 $n\in N^*$ 恒成立．……………………………………………………………（$11'$）

注意到 $\dfrac{n^2+6}{2n-1}=\dfrac{1}{4}[(2n-1)+\dfrac{25}{2n-1}+2]\geq\dfrac{1}{4}[2\sqrt{(2n-1)\cdot\dfrac{25}{2n-1}}+2]=3$，……………………（$12'$）

当且仅当 $2n-1=\dfrac{25}{2n-1}(n\in N^*)$ 即 $n=3$ 时等号成立，………………………………………………（$13'$）

从而 $\lambda\leq 3$，即实数 $\lambda$ 的取值范围是 $(-\infty,3]$．…………………………………………………………（$14'$）

**22．解：**（1）依题意可得：曲线 $C$ 为椭圆，……………………………………………………………（$1'$）

其中心在原点，长轴的长 $2a=4$，半焦距 $c=\sqrt{3}$，故 $b^2=4-3=1$，………………………………………（$3'$）

因此，曲线 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．………………………………………………………………………（$4'$）

（2）不妨设直线$l$：$x=t$与椭圆的交点为$A(t,-y)$、$B(t,y)$（$y>0$），由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\x=t\end{cases}$得$y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$……（$6'$）

则$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot|t|\cdot\sqrt{4-t^2}$…………（$7'$）

$\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t^2+(4-t^2)}{2}=1$，…………（$8'$）

当且仅当$|t|=\sqrt{4-t^2}$即$t=\pm\sqrt{2}$，亦即$D(\pm\sqrt{2},0)$时取等号，…………（$9'$）

综上可得，$\Delta OAB$面积的最大值为$1$.…………（$10'$）

（3）设直线$l$与椭圆的交点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.

方法一：依题意，可设直线$l$：$x=\lambda y+1$（$\lambda\in R$），由$\begin{cases}x=\lambda y+1\\\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$消去$x$并整理得

$(\lambda^2+4)y^2+2\lambda y-3=0$，则$\Delta=16(\lambda^2+3)>0$，…………（※）

且$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-2\lambda}{\lambda^2+4}\\y_1y_2=\dfrac{-3}{\lambda^2+4}\end{cases}$，…………①

又$\begin{cases}x_1=\lambda y_1+1\\x_2=\lambda y_2+1\end{cases}$，…………②

若存在定点$E(m,0)$符合题意，且$k_{AE}\cdot k_{BE}=s$（$s$为非零常数），则

$k_{AE}k_{BE}=\dfrac{y_1y_2}{(x_1-m)(x_2-m)}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2}=s$，…………（$12'$）

把①、②式代入此式并整理得：$-3=s(m^2-4)\lambda^2+4s(m-1)^2$（这里$m$为常数，且$s$为非零常数）. 要使得上式对变量$\lambda$恒成立，只须$\begin{cases}s(m^2-4)=0\\-3=4s(m-1)^2\end{cases}$（注意到$s\neq0$），解得$\begin{cases}m=2\\s=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$或$\begin{cases}m=-2\\s=-\dfrac{1}{12}\end{cases}$.…………（$14'$）

即当定点$E$是椭圆的右顶点$(2,0)$时，非零常数$s=-\dfrac{3}{4}$；

当定点$E$是椭圆的左顶点$(-2,0)$时，非零常数$s=-\dfrac{1}{12}$.

综上，在$x$轴上，存在点$E(2,0)$，使直线$AE$和$BE$的斜率的乘积为非零常数$-\dfrac{3}{4}$，或存在点$E(-2,0)$，

使直线 $AE$ 和 $BE$ 的斜率的乘积为非零常数 $-\dfrac{1}{12}$．…………………………………………………………………………（16′）

方法二：当 $l$ 与 $x$ 轴不垂直时，可设直线 $l$ 方程为：$y=k(x-1)$，由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 $y$ 并整理得

$(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$，则 $\Delta=16(3k^2+1)>0$，……………………………………………………………（※）

且 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+1} \\ x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{4k^2+1} \end{cases}$，…………………………………………………………………………………①

又 $\begin{cases} y_1=k(x_1-1) \\ y_2=k(x_2-1) \end{cases}$．……………………………………………………………………………………②

若存在定点 $E(m\,,0)$ 符合题意，且 $k_{AE}\cdot k_{BE}=s$（$s$ 为非零常数），则

$k_{AE}k_{BE}=\dfrac{y_1y_2}{(x_1-m)(x_2-m)}=\dfrac{k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]}{x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2}=s$，…………………………………………………（12′）

把①、②式代入上式整理得：$k^2\left[4s(1-m)^2+3\right]+s(m^2-4)=0$（这里 $m$ 为常数，且 $s$ 为非零常数）．要使得上式对变量 $k$ 恒成立，只须 $\begin{cases} 4s(1-m)^2+3=0 \\ s(m^2-4)=0 \end{cases}$（注意到 $s\neq 0$），解得 $\begin{cases} m=2 \\ s=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=-2 \\ s=-\dfrac{1}{12} \end{cases}$．……………………（14′）

即当定点 $E$ 是椭圆的右顶点 $(2\,,0)$ 时，非零常数 $s=-\dfrac{3}{4}$；

当定点 $E$ 是椭圆的左顶点 $(-2\,,0)$ 时，非零常数 $s=-\dfrac{1}{12}$；

当 $l$ 与 $x$ 轴垂直时，由 $\begin{cases} x=1 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $A\,,B$ 的坐标为 $(1\,,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$(1\,,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，且 $k_{AE}k_{BE}=-\dfrac{3}{4}$ 或 $-\dfrac{1}{12}$．……（15′）

综上所述，在 $x$ 轴上，存在点 $E(2\,,0)$，使直线 $AE$ 和 $BE$ 的斜率的乘积为非零常数 $-\dfrac{3}{4}$，或存在点 $E(-2\,,0)$，使直线 $AE$ 和 $BE$ 的斜率的乘积为非零常数 $-\dfrac{1}{12}$．…………………………………………………………………………（16′）

**14．分析：**依题意得 $a^2$，$\sqrt{y^2-1}$，$x^2-1$ 为等比数列，则 $\left(\sqrt{y^2-1}\right)^2=a^2(x^2-1)\Rightarrow y^2=a^2x^2-a^2+1<a^2x^2$（$\because a>m>1$），即 $y^2<a^2x^2$，因为 $a\,,x\,,y$ 均大于 $1$，所以 $y<ax$，注意到 $a\,,x\,,y$ 均为正整数，进而有 $y\le ax-1$，于是 $a^2x^2-a^2+1=y^2\le(ax-1)^2\Rightarrow -a^2\le -2ax\Rightarrow a\ge 2x$（$\because a\,,x>0$），于是有 $\dfrac{a}{x}\ge 2$．显然，对任意的 $x>m$，

取$a=2x$，$y=2x^2-1$均满足条件，从而，$\dfrac{a}{x}$的最小值为$2$．