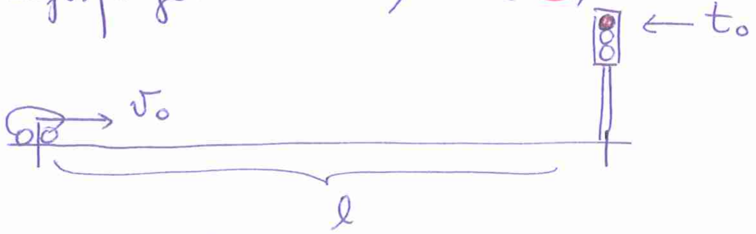
Semafor — VARIACIJSKA METODA

Analizirali bi radi vožnjo avtomobila skozi semafor, ki se pred voznikom pojavi na znani razdalji (l). Poleg tega naj voznik ve, kolikšna je njegova trenutna hitrost (v_0) in tudi to, koliko časa na semaforju gori rdeča luč (t_0).



Kriterijev za to, kako do semaforja voziti optimalno, je poljubno mnogo. Pod "optimalno" mi razumemo:

- vožnja naj bo čim bolj "ekološka", "gladka", "mehka" → čim manj pospeševanja in zaviranja oz. porabe bencina: $v(t)$ "gladek".
- skozi semafor bi radi zapeljali s čim večjo hitrostjo ravno v trenutku, ko se na njem prižge rdeča luč.

Pripogoj: do semaforja moramo priti natanko tedaj, ko se prižge zelena:

$$\boxed{\int_0^{t_0} v(t)\,dt \leq l} \qquad (1)$$

(enačaj = natanko tedaj)
(neenačaj = ne smemo zapeljati v rdečo)

Pogoj za udobnost vožnje: imamo več možnosti:

$$\int_0^{t_0} a(t)\,dt = \min. \quad \ldots$$

ni dobro, ker lahko pospeški kompenzirajo pojemke ("zavora" in "plin") se odštevata oz. uničita.

alternative:

$$\int_0^{t_0} |a(t)|\,dt = \min. \quad \ldots$$

$|\cdot|$ ni najboljše za integracijo (problem)

$$\int_0^{t_0} a^2(t)\,dt = \min. \quad \ldots \quad \text{OK} \oplus \text{pogoj (1)}$$

oz.
$$\boxed{\int_0^{t_0} \dot{v}^2(t)\,dt = \min.} \qquad (2)$$

Opravka imamo z izoperimetričnim problemom variacijskega računa, ki ga rešujemo z Lagrangeevimi multiplikatorji:

Zapišemo zdaj funkcional z Lagrangeevo funkcijo

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}(v, \dot{v}) = \dot{v}^2 - \lambda v} \quad , \quad \boxed{F = \int_0^{t_0} \mathcal{L}\, dt = \text{ekstremno}}$$

$\uparrow$ ni eksplicitne odvisnosti od t

Uporabimo Euler-Lagrangeeve enačbe ie. iščemo stacionarnost funkcionala:
→ glej na posebnem listu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(2\dot{v}) + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\ddot{v} = -\frac{\lambda}{2}}$$

To dvakrat integriramo:
$$\dot{v}(t) = -\frac{\lambda}{2}t + A$$
$$\boxed{v(t) = -\frac{\lambda}{4}t^2 + At + B}$$

- začetni pogoj je $v(0) = v_0 \Rightarrow \underline{B = v_0}$ (znana hitrost ob $t=0$)
- semafor si želimo prevoziti pri ekstremalni hitrosti, to je nov pogoj!

to je isto kot $\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{v}} = 0$ v drugi robni točki, saj $\frac{d\mathcal{L}}{d\dot{v}} = 2\dot{v} \equiv 0$

$$\boxed{\dot{v}(t_0) = 0} \quad \text{i.e.} \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=t_0} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{A = \frac{\lambda}{2}t_0}$$

namenoma ne rečemo "maksimalni" ali "minimalni", ker še ne vemo, kaj bo prišlo ven!

Za zdaj smo pridelali: $$\boxed{v(t) = -\frac{\lambda}{4}t^2 + \frac{\lambda t_0}{2}t + v_0}$$

Določiti moramo še λ, kar dobimo iz pogoja (1):

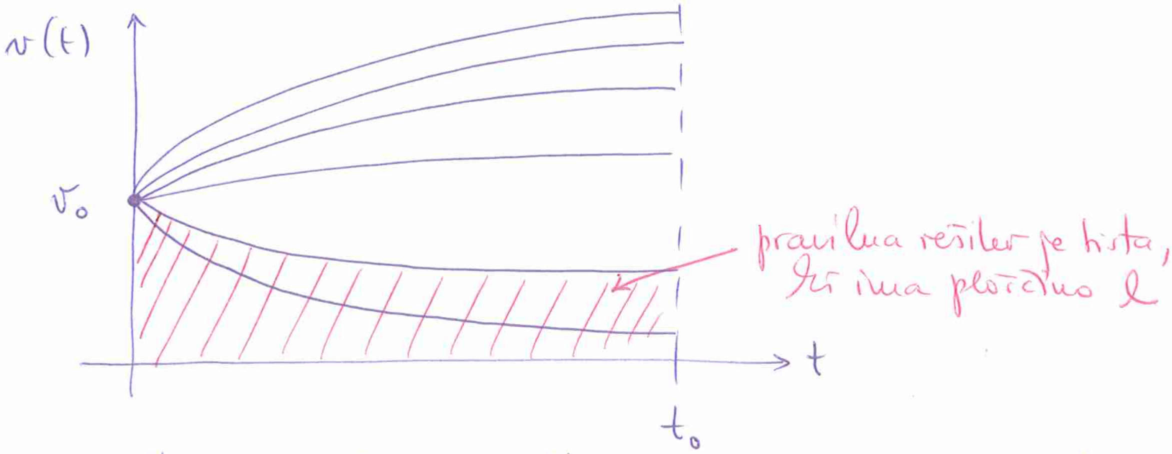
$$l = \int_0^{t_0} v(t)\,dt = -\frac{\lambda}{12}t_0^3 + \frac{\lambda t_0^3}{4} + v_0 t_0 = \frac{\lambda t_0^3}{6} + v_0 t_0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{6}{t_0^3}(l - v_0 t_0)$$

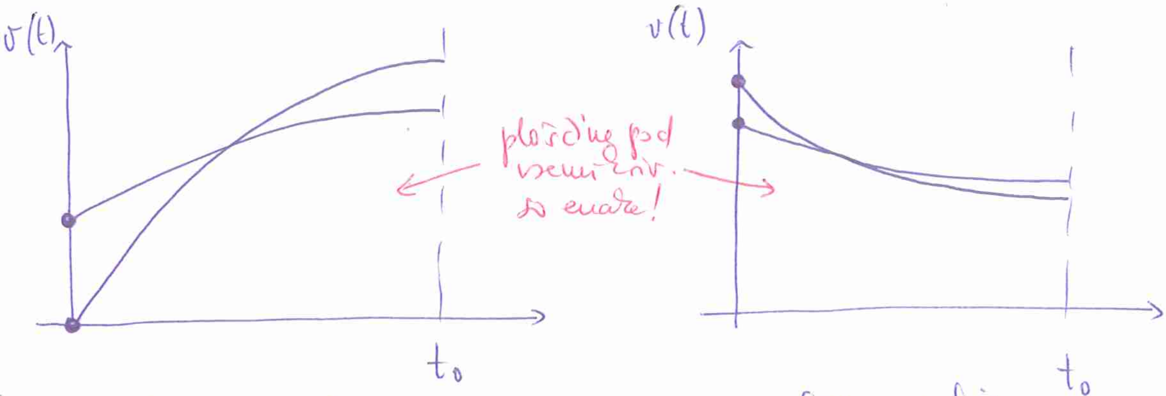
Oz. končni izraz za hitrost je

$$\boxed{v(t) = v_0 + \frac{3(l - v_0 t_0)}{2t_0^3}(2t_0 t - t^2)}$$

Torej so to parabole :



Primer rešitev za različne začetne hitrosti in znana l, t_0 :



gremo prepočasi, moramo pospešiti

gremo prehitro, moramo zavirati

$\boxed{\text{Opomba}}$ spodobi se vse prepisati v brezdimenzijske količine; brezdim. spremenljivka je vedno optimalna!

Npr. $x = t/t_0$, $y = v/v_0$, $z = l/\underbrace{v_0 t_0} = l/l_0$

če vozimo s konst. hitrostjo ves čas

$\boxed{\text{Možne nadgradnje analize problema}}$

1) Radar tik za križiščem

Prilagoditi moramo hitrost tako, da se bomo še vedno čim bolj udobno peljali, a na koncu ne presegli omejitve hitrosti $\tilde v$:

splošna rešitev je vedno parabolične oblike:
$$v(t) = -\frac{\lambda}{4} t^2 + Ct + D \,,$$

zaradi zahtevanja končnega pogoja $v(t_0) = \tilde{v}$
(ali nespremenjenega začetnega, $v(0) = v_0$) dobimo

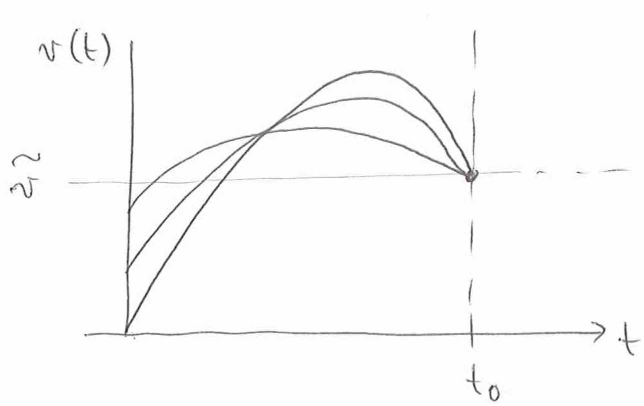
$$D = v_0\,, \qquad C = \frac{\tilde{v} - v_0}{t_0} + \frac{\lambda}{4} t_0$$

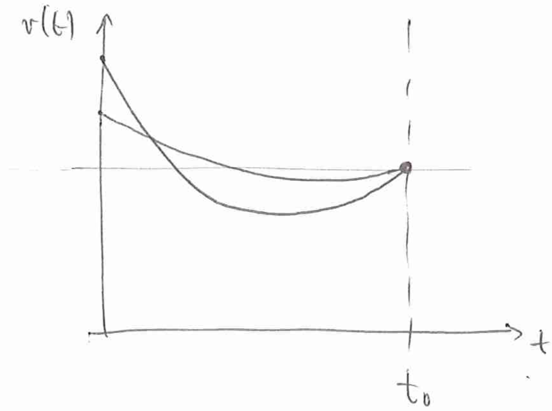
končna hitrost zdaj ni ekstremalna, pač pa v skladu s predpisi!
Določimo še λ tako kot prej,

$$\lambda = \frac{12}{t_0^3}\left(2l - v_0 t_0 - \tilde{v} t_0\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{v(t) = \frac{3(2l - v_0 t_0 - \tilde{v} t_0)}{t_0^3}\left(t_0 t - t^2\right) + \frac{\tilde{v} - v_0}{t_0} t + v_0}$$

ekstrem ni več na robu!





2) Sode potence pospeška v funkcionalu

$$F = \int_0^{t_0} \left(\dot{v}^{2p} - \lambda v \right) dt$$

s tem upeljemo nekako drugo kazen za pospeševanje
kazen nas doleti vedno, ko pospešujemo!

Euler-Lagrange nam zdaj da enačbo (diferencialno):

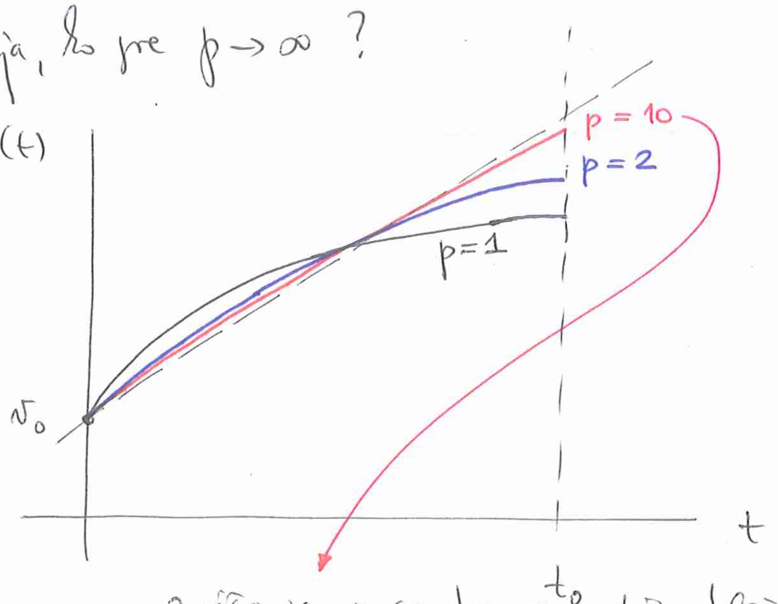
$$2p(2p-1)\left(\dot{v}\right)^{2p-2} \ddot{v} + \lambda = 0$$

2x integriramo

$$\boxed{v(t) = -\frac{(2p-1)}{\lambda}\left(C - \frac{\lambda t}{2p}\right)^{\frac{2p}{2p-1}} + D}$$

C, D spet dobimo iz robnih pogojev, naloži!

Kaj se dogaja, ko gre $p \to \infty$?



z višanjem p se stvar zelo hitro bliža ravni črti, i.e. povsem enakomerno pospešenemu gibanju!

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} v(t) = v_0 + at}$$

Bottom-line: čim bolj enakomerno pospeševanje!
To se upošteva v raketni tehniki: pospešuješ, kolikor moreš, pač krajši čas, kolikor je goriva (space shuttle boosters); vse ostalo je suboptimalno!

Razmisli: kaj se zgodi pri $|\dot{v}|^p$ v funkcionalu $(p=1,2,3,\dots)$ v primerjavi z $|\dot{v}|^{2p}$ $(p=1,2,3,\dots)$

i.e. **2') Potence $|\dot{v}|^p$ v funkcionalu (ali pa samo $|\dot{v}|$)**

$(\mathcal{L} = |\dot{y}| - \lambda v)$

⇝ uporabi rezultate prejšnje naloge.
⇝ kaj se zgodi to pot pri $p \to \infty$? (Heaviside)

3) Funkcional s kvadratičnim členom v pospešku in hitrosti

$$(\mathcal{L} = \dot{v}^2 + C v^2 - \lambda v)$$

⇝ problem postane dvoparametričen
(C samo meri pomembnost člena v^2 proti $\dot{v}^2$).

⇝ ODE

4) Periodične rešitve

i.e. $v(0) = v(t_0) = v_0$ → spet samo enoparam. druž. rešitev

Splošna končna pripomba

Vedno poskušamo nekako minimizirati pričakovano vrednost funkcionala, ne glede na predpis / pogoj. Pravzaprav ves čas počnemo nekaj takega:

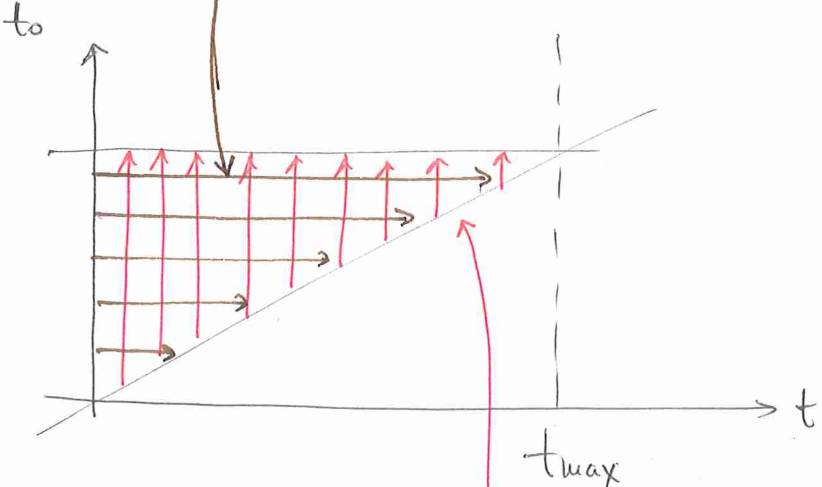
$$\int_0^{t_{max}} f(t_0)\,dt_0 \int_0^{t_0} \mathcal{L}(t)\,dt$$

to je naš funkcional

potem pa to, kar se naj bi zgodilo pri $t=t_0$, opišemo še z neko porazdelitvijo f →

→ ta je lahko nekaj tako preprostega kot $\Theta(t_0-t)$!

(od t_0 dalje vse skupaj $\equiv 0$)



vidimo je, kako integriramo (vrstni red), zato je bolje tole:

$$\int_0^{t_0} \mathcal{L}(t)\,dt \left[\int_t^{t_{max}} f(t_0)\,dt_0\right]$$

ta integral je lažje izračunati, ker f načeloma poznamo — in ta del potem dopišemo še kot utež v integralu $\int \mathcal{L}(t)dt$.

Še mini napotek

Kadar ne vemo, kaj natanko želimo, vzemimo model s čim manj parametri! Rafiniramo postopoma, od preprostega k kompleksnemu.

$\boxed{\text{Euler-Lagrange}}$ — reminder

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1(x), y_2(x), \dots, \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, x)\, dx$$

Variacijo integrala I dobimo tako, da y tolmačimo kot funkcijo parametra α, ki označuje možen nabor krivulj $y_i(x,\alpha)$. Variacija I je torej

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial \alpha}[d\alpha] = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}[d\alpha] + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha}[d\alpha]}\right) dx$$

↓

tale integral naredimo posebej: per partes

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \alpha}[d\alpha]\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}}_{u} \underbrace{\frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha \partial x} dx}_{dv} [d\alpha]$$

na tole se ne oziramo

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}}_{u} \underbrace{\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}}_{v} \Bigg|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}}_{v} \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) dx}_{du}$$

0 ker ti vse krivulje gredo skozi fiksne robne točke (tam ne smejo biti odvisne od α)

Torej

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha - \frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) d\alpha \right) dx$$

δy_i

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) d\alpha \equiv \delta y \qquad \text{oz.} \qquad \left(\frac{dI}{d\alpha}\right) d\alpha \equiv \delta I$$

δy = infinitez. odstopanje variirane poti od idealne poti $y(x)$ v točki x.

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right)\right) \delta y_i \, dx$$

%

Ker so sprem. y_i neodvisne, so tudi variacije δy_i neodvisne.
$\Rightarrow$ zahteva, da je $\delta I = 0$ pomeni, da morajo vsi koeficienti pred δy_i biti nič $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i}\right) = 0 \qquad \forall i}$$

Ni vsa ta Euler-Lagrange mašinerija doma samo v mehaniki!
$\boxed{\text{Zgled}}$ iz fizike elem. delcev: model nukleona, pri katerem imamo tri kvarke v polju mezonov ϕ in σ, obenem pa so kvarki izvor teh polj:

$$F = 3\int_0^\infty \left[\left(u\frac{\partial v}{\partial r} - v\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2uv}{r}\right) + g(f_\pi + \sigma)(u^2 - v^2) + 2guv\phi\right] r^2 dr$$
$$- 3\varepsilon \int_0^\infty (u^2+v^2) r^2 dr$$

pazi, to pride not, ko delaš d/dr!

lagr. multiplikator (enodelčna kvarkovska energija)

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial(\partial\alpha/\partial r)}\right) = 0 \qquad \alpha \in \{u, v, \sigma, \phi\}$$

$\alpha = u$: $$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{2v}{r} + [\varepsilon + g(f_\pi + \sigma)]u + gv\phi$$

$\alpha = v$: $$\frac{\partial u}{\partial r} = [\varepsilon - g(f_\pi + \sigma)]v - gu\phi$$

⋮

itd.