

Modelska analiza I

Naloga 102

21. 10. 2021



2
in



0.5 kg



0.5 L

2. naloga – Linearno programiranje

Med tipične primere, ki jih lahko učinkovito rešimo z metodami linearnega programiranja, sodi se stavljanje diet za hujšanje, zdravljenje ali športne aktivnosti. Za dani nabor živil določamo njihove količine, pri čemer moramo zadostiti različnim omejitvam. Med drugim moramo zagotoviti priporočene dnevne odmerke mineralov, vitaminov in hranilnih snovi, omejiti pri vnos maščob, ogljikovih hidratov ter telesu škodljivih snovi, hkrati pa zagotoviti, da energijska vrednost ustreza zahtevam posameznika. Vnos vsake izmed hranilnih snovi je linearna funkcija količin živil in je natanko določena z njihovo sestavo. Od vrste diete pa je odvisno, katere parametre omejimo in katere minimiziramo.

Datoteka `tabela-zivil.dat`¹ vsebuje podatke o energijski vrednosti ter vsebnosti maščob, ogljikovih hidratov, proteinov, kalcija in železa v nekaj živilih, skupaj z okvirnimi podatki o njihovi ceni.

1. Minimiziraj količino kalorij, če je priporočen minimalni dnevni vnos 70 g maščob, 310 g ogljikovih hidratov, 50 g proteinov, 1000 mg kalcija ter 18 mg železa. Dnevni obroki naj količinsko ne presežejo dveh kilogramov hrane. Upoštevate lahko še minimalne vnose za vitamin C (60 mg), kalij (3500 mg) in sprejemljiv interval za natrij (500 mg – 2400 mg), ki so tudi na voljo v tabeli.
2. Kako se rezultat razlikuje, če zahtevamo minimalno 2000 kcal in namesto energije minimiziramo vnos maščob?
3. Namesto kalorij minimiziraj še ceno. Kako se varčevanje odraža na zdravi prehrani?
4. Ker rešujemo poenostavljen problem z malo parametri na živilo, so lahko rezultati nerealistični. Lahko z omejitvijo količine posameznih živil v obroku izboljšaš uravnovešenost prehrane?

Poskušlahko tudi poiskati podatke o drugih mineralih in hranilih in s tem izboljšati model.

Linearno programiranje: Linearni optimizacijski problem formuliramo kot optimizacijo funkcije

$$f(x_j) = \sum_j a_{0j}x_j = \text{ekstrem}$$

pod pogoji

$$\sum_j a_{ij}x_j \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} b_i.$$

Iskane spremenljivke x_j so v večini paketov privzeto omejene na pozitivne vrednosti.

Rutine za linearne programiranje so v različnih zbirkah med drugim na voljo pod imeni `simplx` (*Numerical Recipes*), `LinearProgramming` (*Mathematica*), `linprog` (*matlab*), `scipy.optimize.linprog` (*Python*) in v knjižnici `GLPK`, ki pride tudi s samostojnim programom `glpsol`. Slednji sprevema vrsto različnih formatov za deklaracijo linearnih problemov (na primer `CPLEX LP`).

¹dostopno na strani <http://predmeti.fmf.uni-lj.si/modelska/podatki>

Opambe:

- Parte na návrhového posudku: Ocenjuje se celkový posudok, ne le ročník!
- + praktický rezultát
- + interpretacejí rezultátov
 - ↳ metodologická analýza vs. fiktívna analýza.
- + koda na posudku!
- + rozvoj a modernizace osenných modelov/idey.

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
UNIVERZA V LJUBLJANI

MODELSKA ANALIZA I

2. naloga – Linearno programiranje

Avtor

Linda Bitenc

Profesor

prof. dr. Simon Širca

Asistent

doc. dr. Miha Mihovilovič

20. oktober 2021

Kazalo

1	Uvod	1
1.1	Linearno programiranje	1
1.2	Primer načrtovanja diete	2
2	Naloga	2
2.1	Minimizacija kalorij	2
2.2	Minimizacija maščob	4
2.3	Minimizacija cene	7
2.4	Tedenski jedilnik	8
2.5	Jedilnik za pomembne goste	11
3	Zaključek	13
4	Priloga	13

1 Uvod

1.1 Linearno programiranje

Linearno programiranje oz. linearna optimizacija je matematična metoda, s katero ob danih zahtevah, ki so predstavljene v obliki linearnih enačb in neenačb, iščemo minimum ali maksimum linearne objektivne (strokovne) funkcije. Objektivno funkcijo lahko v splošnem zapišemo kot,

$$\zeta = \sum_{i=1}^N c_i x_i = ekstrem, \quad (1)$$

vezi oz. omejitve pa kot,

$$\sum_{i=1}^{M_k} a_{ki} x_i \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} b_k, \quad (2)$$

pri čemer so z x_i označeni iskani parametri, c_i in a_{ki} pa predstavljajo koeficiente, ki jih določa izbran problem. Omejimo se tudi na nenegativne vrednosti parametrov,

$$x_i \geq 0, \quad \forall i. \quad (3)$$

Sistem enačb in neenačb lahko izrazimo tudi v vektorski obliki,

$$\vec{c}^T \vec{x} = min, \quad (4)$$

$$A \vec{x} \leq \vec{b}, \quad (5)$$

pri čemer je A matrika koeficientov.

1.2 Primer načrtovanja diete

Primer problema, katerega lahko rešujemo s pomočjo metode linearnega programiranja, je načrtovanje diete. Zamislimo si, da poznamo za nek nabor živil (za čim boljši rezultat seveda potrebujemo čim več živil), koliko hranilnih snovi (ogljikovih hidratov, maščob, beljakovin), vitaminov in mineralov vsebujejo. V okviru naših želja in priporočenih vrednosti hranilnih snovi, ki naj bi jih človek zaužil na dan, lahko sedaj zapišemo vezi. Izrazimo jih kot minimalni ali maksimalni priporočen dnevni vnos posamezne hranilne snovi. Poleg tega pa si izberemo še količino, ki jo želimo minimizirati (ali maksimizirati) na primer minimiziramo lahko dnevni vnos kalorij.

2 Naloga

2.1 Minimizacija kalorij

V okviru naloge nam je bila dana že pripravljena tabela 50 živil in njihova vsebnost energije v kilokalorijah, maščob, ogljikovih hidratov, proteinov, kalcija, železa, vitamina C, kalija in natrija v gramih oz. miligramih na 100g živila ter njihova cena na 100g živila.

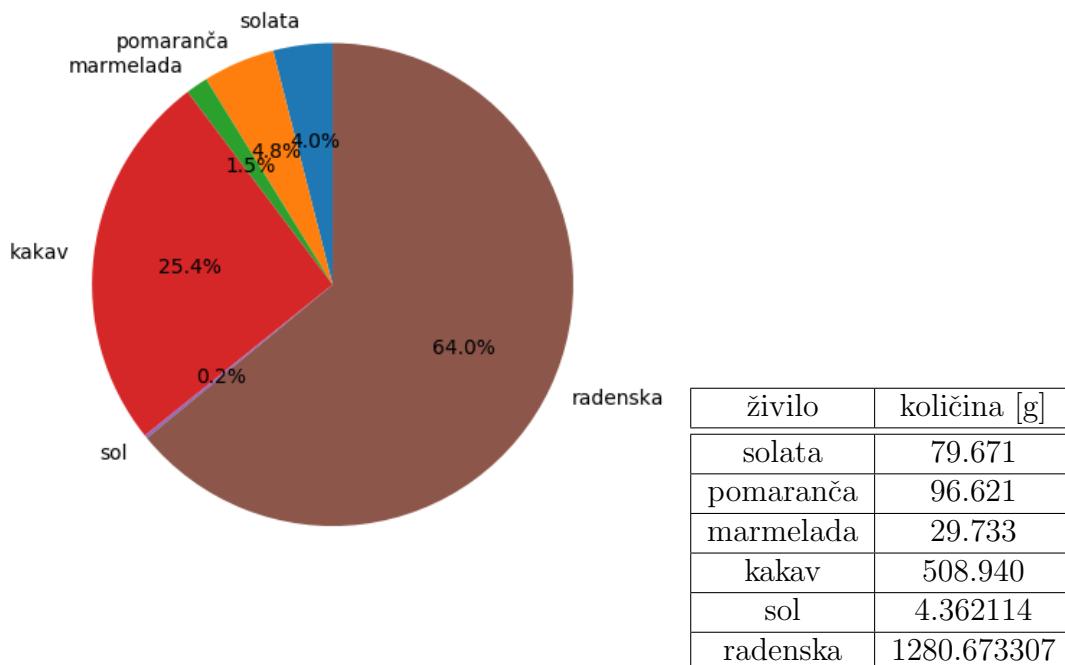
V prvem delu naloge smo želeli minimizirati vnos kalorij ob danih zahtevah o minimalnem dnevнем vnosu hranilnih snovi, ki so predstavljene v Tabeli 1. Poleg tega smo zahtevali še, da je maksimalna skupna količina zaužitih živil 2kg na dan ter da količina posameznega zaužitega živila seveda ne more biti negativna.

Reševanja sem se lotila v programskejem jeziku Python s pomočjo `scipy.optimize.linprog`. Minimizirati želimo kalorije zato za koeficiente c_i , ki jih lahko izrazimo tudi v obliki vektorja, vzamemo energijske vrednosti posameznih živil, vektor \vec{x} oz. spremenljivke x_i pa so količine živil, ki jih iščemo. Na enak način izrazimo tudi posamezne zahteve o vnosu hranilnih snovi. Na primer za koeficiente a_{ki} (za nek k) vzamemo vsebnost maščob danih živil, parametri x_i pa tudi tu predstavljajo količine posameznih živil. Pri delu s pomočjo `scipy.optimize.linprog` moramo biti pozorni na to, da izrazimo enačbe (2) le z manjše ali enako (\leq), zato v nasprotnem primeru celotno enačbo pomnožimo z -1 , z namenom da prevedemo problem na zahtevano obliko. Pri natriju, kjer imamo podan interval pa izrazimo zahtevo z dvema neenačbama.

hranilna snov	minimalni priporočen dnevni vnos
maščobe	70 g
ogljikovi hidrati	310 g
protein	50 g
kalcij	1000mg
železo	18 mg
vitamin C	60 mg
kalij	3500 mg
natrij	od 500 mg do 2400 mg

Tabela 1: Minimalni priporočen dnevni vnos posameznih hranilnih snovi.

S pomočjo linearne optimizacije dobimo sledeče rezultate. Minimalna vrednost dnevno zaužitih kalorij ob upoštevanih zahtevah je 1297.273 kcal. Optimalne količine živil so predstavljene na sliki 1. Cena dnevno zaužitih živil je **4.21 €**, skupna količina pa **2000.0 g**.



Slika 1: Prikaz sestave dnevnega jedilnika ob minimizaciji kalorij.

Opazimo, da kot rezultat ne dobimo zelo raznolikega jedilnika, poleg tega pa kar 64% predstavlja radenska in 25.4% kakav (Slika 1), kar vsekakor ni smiseln jedilnik. Model lahko poskusimo izboljšati z razširjenim seznamom živil. V nabor sem dodala bučke, jogurt, grah, temno čokolado in čičeriko. Poleg tega pa sem zbrala podatke o vsebnosti vlaknin za vsa živila, saj so tudi vlaknine pomemben del zdrave prehrane in pričakovala sem, da bodo dodale dodatno utež na sadje in zelenjavu. Vsebnosti vlaknin posameznih živil so predstavljene v poglavju Priloga.

Izkazalo se je, da dodatna živila in obravnava vlaknin v tem primeru niso spremenila rezultata. Zaužite snovi in njihov priporočen dnevni vnos pa so prikazane v Tabeli 2 (kot prvi primer).

Pri naslednjem koraku izboljšave modela sem omejila maksimalno količino vsakega živila in s tem zagotovila večjo raznolikost živil v jedilniku. Za največjo dovoljeno količino sem izbrala 200 g. Gre za nekoliko poenostavljen zahtevo, saj 200 g seveda ni optimalna količina za vsa obravnavana živila.

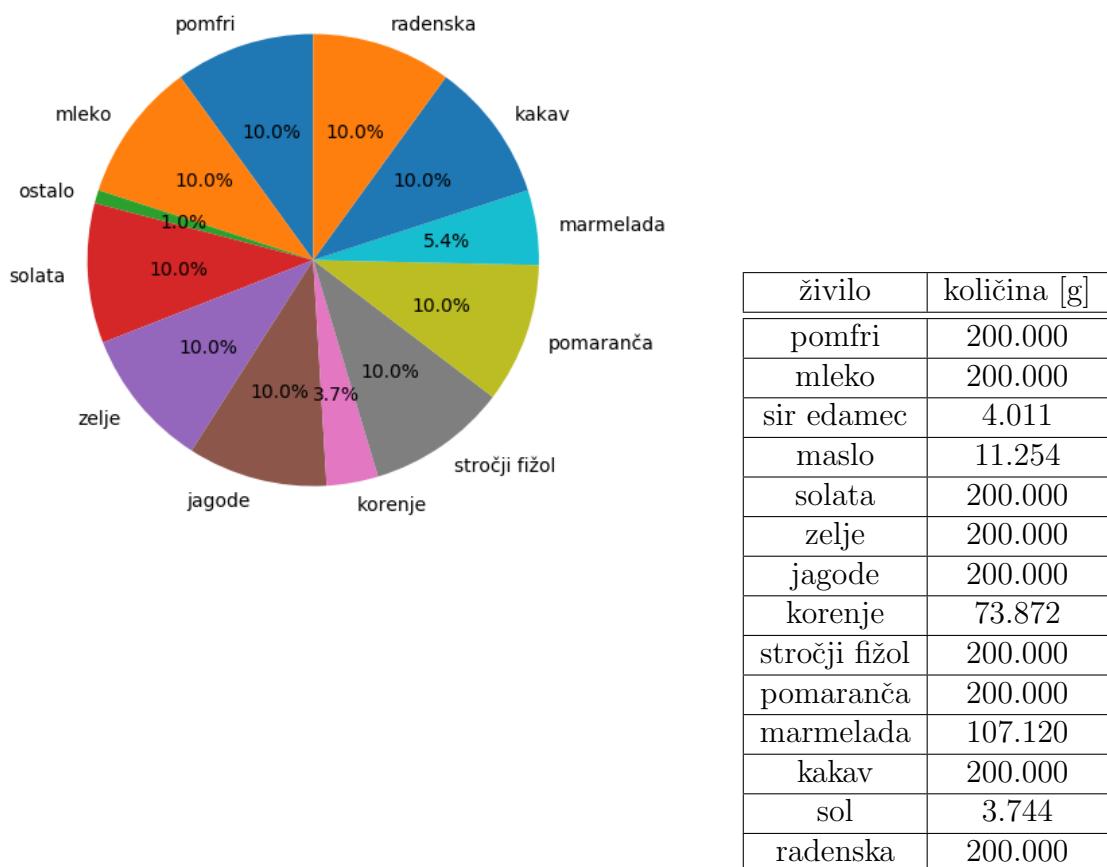
Izboljšan jedilnik vsebuje **1455.736 kcal**. Vidimo, da s pestrostjo živil dobimo večjo minimalno vrednost dnevno zaužitih kalorij ob ustreznem vnosu hranilnih snovi. Cena živil pa je **6.04 evra**. Količine posameznih živil prikazuje Slika 2.

Čeprav obe možnosti izpolnjujeta zahteve o vsebnosti hranilnih snovi in sta s tega vidika torej obe ustrezni, je druga možnost veliko bolj sprejemljiva za realizacijo. Z dodatnimi zahtevami smo dobili veliko prestrejsi jedilnik z živili, s katerimi lahko oblikujemo smiselne obroke.

Tabela 2 prikazuje primerjavo priporočene vrednosti dnevno zaužitih hranilnih snovi in dejanskim vnosom v primeru minimizacije kalorij ter vnosom ob upoštevanju dodatnih zahtev (maksimalna količina zaužitega posameznega živila in minimalni vnos vlaknin).

hranilna snov	minimalni priporočen dnevni vnos	dejanski dnevni vnos v prvem primeru	dejanski dnevni vnos v drugem primeru
maščobe	70 g	70.000 g	70.000 g
ogljkovi hidrati	310 g	310.000 g	310.000 g
proteini	50 g	101.745 g	63.586
kalcij	1000 mg	1000.000 mg	1000.000 mg
železo	18 mg	72.635 mg	34.793 mg
vitamin C	60 mg	60.000 mg	382.900 mg
kalij	3500 mg	8199.488 mg	6172.565 mg
natrij	od 500 mg do 2400 mg	2400.000 mg	2400.000 mg
vlaknine*	30 g	171.632 g	97.047 g

Tabela 2: Primerjava priporočene vrednosti minimalnega dnevnega vnosa hranilnih snovi z dejansko količino vnosa pri minimizaciji kalorij (prvi primer) ter ob upoštevanju dodatnih zahteve o maksimalni količini posameznega živila (drugi primer).



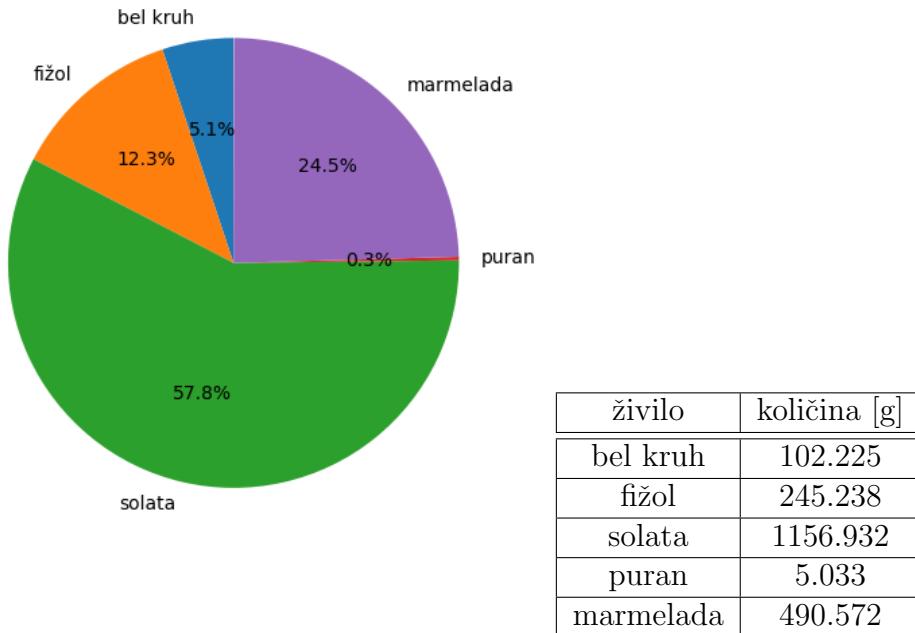
Slika 2: Prikaz sestave dnevnega jedilnika ob minimizaciji kalorij in dodatni zahtevi o omejitvi maksimalne količine posameznega živila ter zahteve po ustreznem vnosu vlaknin.

2.2 Minimizacija maščob

V drugem delu naloge smo namesto kalorij minimizirali maščobe ter za kalorije določili minimalno vrednost 2000 kcal na dan. Ostale zahteve o minimalnem dnevнем vnosu hranilnih

snovi pa so tudi v tem delu naloge enake kot prej.

Minimalna količina zaužitih maščob je **7.438 g**. Za dnevni obrok obravnavane diete bi plačali **4.81 €**, dnevno bi zaužili 2000 g hrane in 2000 kcal. Optimalne količine živil vidimo na sliki 3.



Slika 3: Grafični prikaz deležev posameznih živil vključenih v jedilnik pri minimizaciji maščob.

Če v tem primeru dodamo tudi zahtevo po minimalnem vnosu vlaknin, program vrne success: False in sporoči, da ni uspel najti primernih ("feasible") začetnih točk. To pomeni, da smo prostor vektorjev \vec{x} z vezmi tako omejili, da rešitev v tem primeru ne obstaja, zato bomo nadaljevali brez obravnave vlaknin.

Tudi v tem primeru lahko omejimo maksimalno količino posameznega živila. Tokrat sem za maksimum izbrala 150 g živila. Poleg tega spet uporabimo razširjen seznam živil.

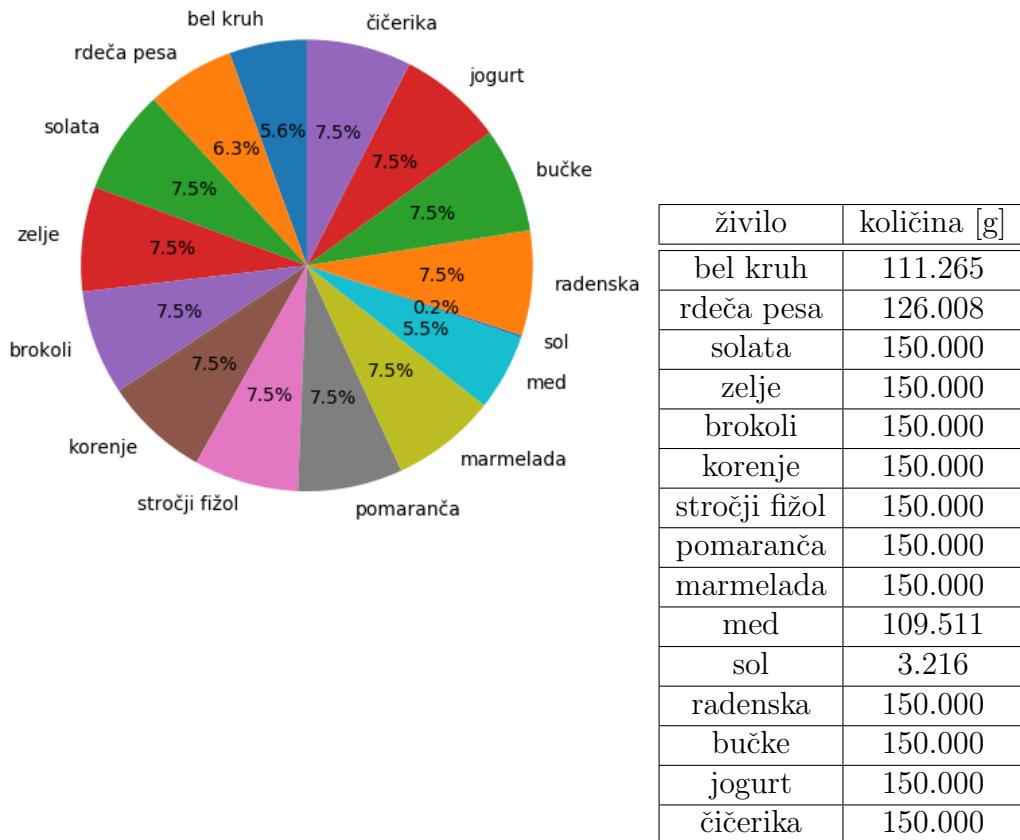
Dobljena minimalna vrednost zaužitih maščob enaka **7.275 g**, kar se ne razlikuje bistveno od primera pred omejitvijo količine posameznega živila. Cena živil je **5.32 €** in zaužili bi 2000 kcal. Količine živil prikazuje Slika 4.

Tabela 3 prikazuje primerjavo priporočenega in dejanskega vnosa živil. Kot pričakovano je vnos maščob veliko manjši od priporočenega, saj smo količino maščob minimizirali.

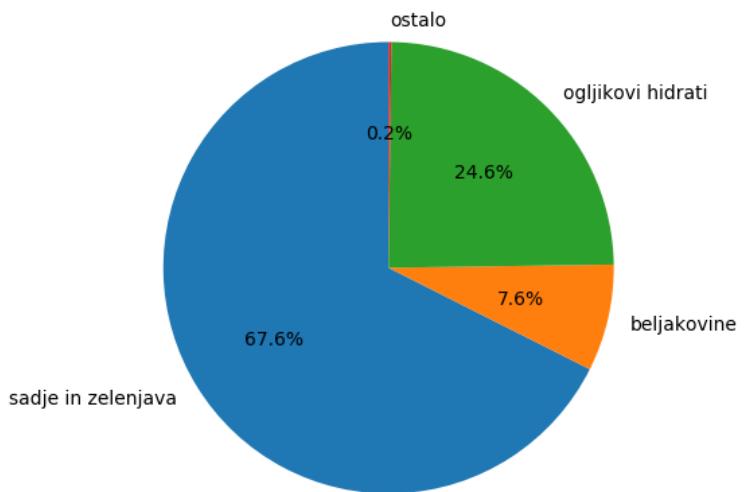
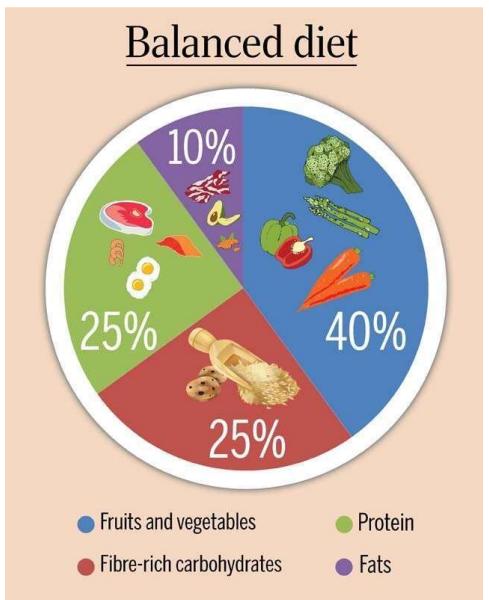
Opazimo lahko, da smo z dodatno omejitvijo dobili veliko bolj raznoliko dieto (sliki 3 in 4). Sestavo naše diete lahko primerjamo z enostavnim prikazom uravnotežene prehrane, ki ga vidimo na sliki 5. Naša dieta vsebuje večji delež sadja in zelenjave ter manjši delež beljakovinske hrane. Seveda v naši dieti ne opazimo hrane z veliko vsebnostjo maščob, saj smo jih minimizirali. Zavedati se moramo, da gre na sliki 5 le za shemo, saj vseh živil ne moremo strogo razvrstiti v prikazane skupine (V tem prikazu smo v skupine razvrščali živila, torej beljakovine predstavljajo hrano bogato z beljakovinami itd.).

hranilna snov	minimalni priporočen dnevni vnos	dejanski dnevni vnos	dejanski dnevni vnos ob omejitvi količin živil
maščobe	70 g	7.438 g	7.275 g
ogljikovi hidrati	310 g	469.248 g	421.769 g
proteinii	50 g	50.000 g	74.073 g
kalcij	1000 mg	1000.000 mg	1000.000 mg
železo	18 mg	19.085 mg	21.005 mg
vitamin C	60 mg	127.876 mg	354.218 mg
kalij	3500 mg	3500.000 mg	4680.956 mg
natrij	od 500 mg do 2400 mg	1136.878 mg	2400 mg

Tabela 3: Primerjava priporočene vrednosti minimalnega dnevnega vnosa hranilnih snovi z dejansko količino vnosa pri minimizaciji maščob.



Slika 4: Grafični prikaz deležev posameznih živil vključenih v jedilnik ob minimizaciji maščob in omejitvi količin živil ter razširitvi seznama živil.



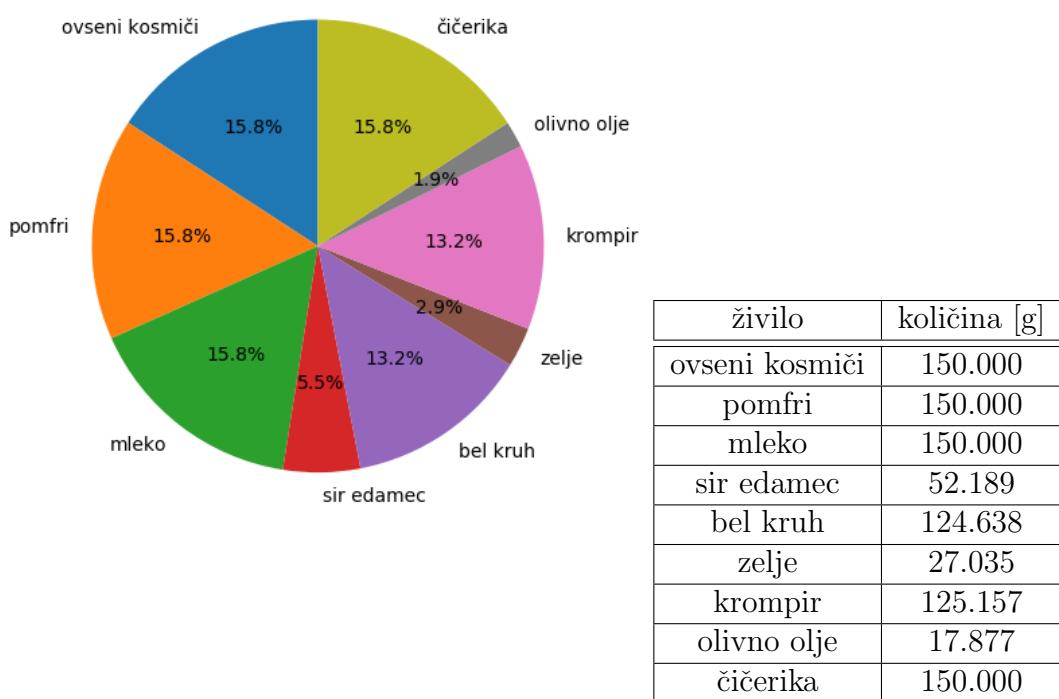
Slika 5: Primerjava uravnotežene prehrane in našo dieto (v tem prikazu beljakovine predstavljajo hrano bogato z beljakovinami itd.).

2.3 Minimizacija cene

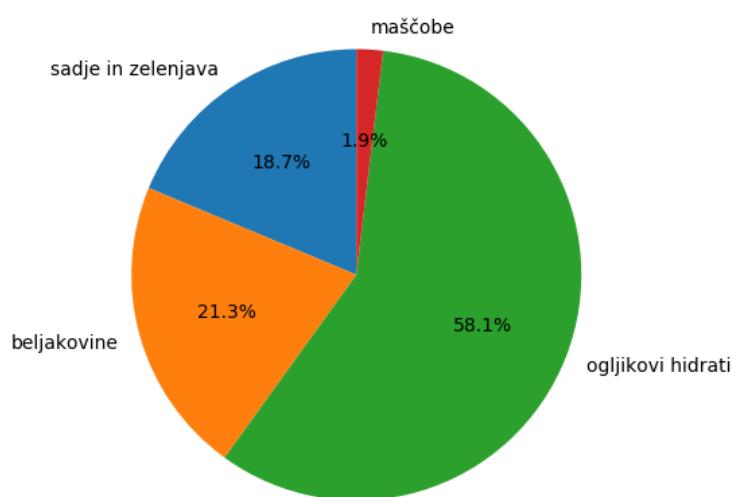
Uporabimo sedaj razširjen seznam živil in dodatno zahtevo, da lahko v dnevni nabor živil vključimo največ 150 g vsakega živila, kajti videli smo, da se s tem bolj približamo raznoliki in uravnoteženi dieti. Zanima pa nas, kako minimizacija cene dnevnih obrokov vpliva na zdravo prehrano.

V tem primeru bi za živila plačali le **1.72 €** na dan, kar je občutnoceneje kot pri prejšnjih primerih. Energijska vrednost obrokov je **2120.5 kcal**, skupna količina živil pa le **946.9 g**. Optimalne količine živil prikazuje Tabela 4. Na sliki 6 in sliki 7 pa vidimo še grafični prikaz.

Opazimo lahko, da če uživamo več ogljikovih hidratov in beljakovin lahko pojemo količinsko manj hrane in hkrati še vedno zadostimo dnevnim priporočenim vnosom hrani. Dieta je tudi cenejša v primerjavi s prej obravnavanimi primeri. Vidimo, da je v tem primeru delež sadja in zelenjave manjši in delež ogljikovih hidratov veliko večji kot pri primeru minimizacije maščob.



Slika 6: Prikaz deleža posameznih živil, ki sestavljajo dieto ob minimizaciji cene.



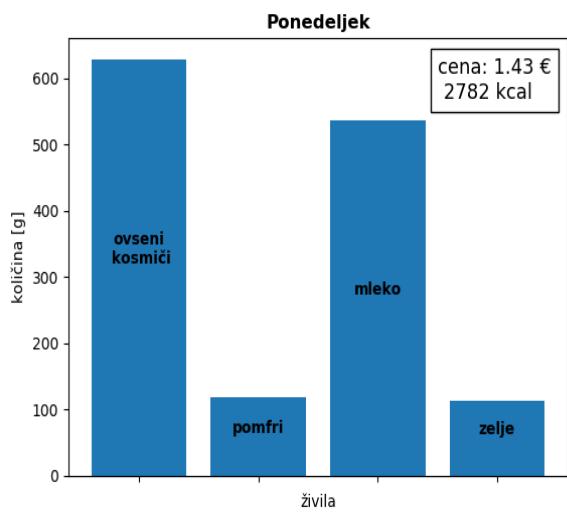
Slika 7: Grafični prikaz deleža skupin živil, ki sestavljajo dieto ob minimizaciji cene (v tem prikazu beljakovine predstavljajo hrano bogato z beljakovinami itd.).

2.4 Tedenski jedilnik

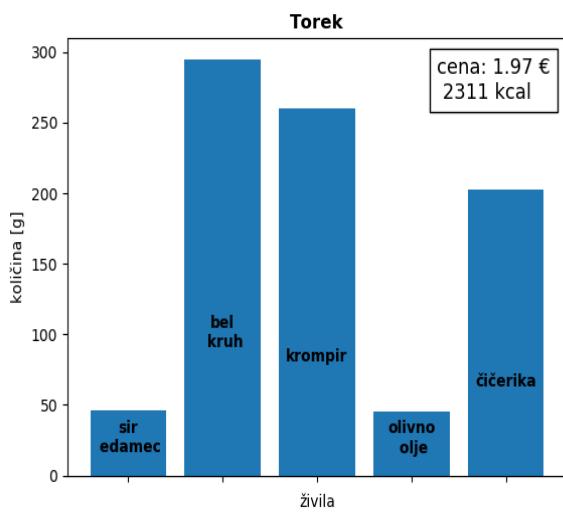
Tokrat ne upoštevamo omejitev količine posameznega živila in poglejmo primer, ko želimo jesti čim ceneje, a hrati vsak dan v tednu nekaj drugega. Sestaviti želimo torej jedilnik od ponedelka do petka tako, da se nobeno živilo ne ponovi dvakrat v tednu, čez vikend pa recimo, da nam hrano skuha babica.

Najcenejši je seveda ponedeljkov jedilnik, in sicer stane **1.43 €**, kot vidimo na sliki 8 (a), saj imamo takrat na voljo še vsa živila s seznama. Čez teden pa cena dnevnega jedilnika raste in v petek znaša **5.95 €**. Za živila čez cel teden bi tako zapravili **16.69 €**. Če nam raznolikost živil ni pomembna in bi vsak dan upoštevali najcenejšo možnost, pa bi porabili le **7.15 €**, kar je več kot pol manj.

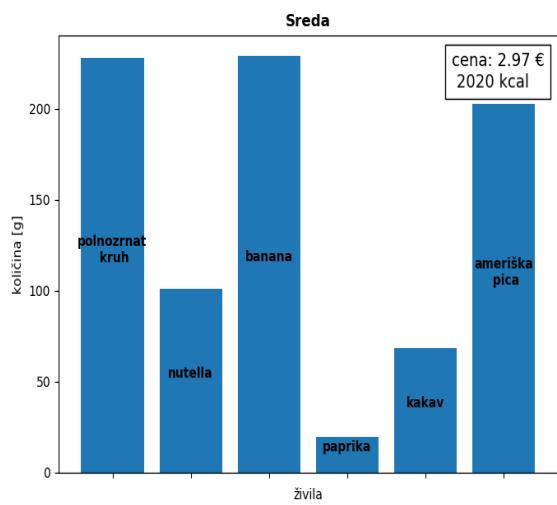
Kot opombo moram omeniti, da za primer torkovega jedilnika program ni našel rešitve, če sem upotevala tudi vlaknine, brez zahteve po vsaj 25 g vlaknin pa dobimo rešitev na sliki 8 (b). Za ostale dni je zahteva upoštevana.



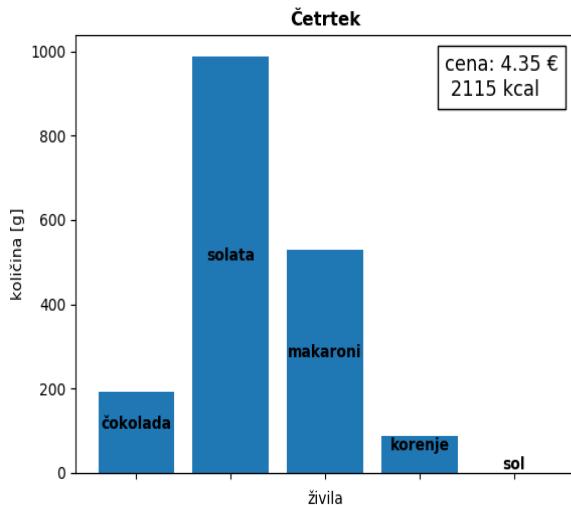
(a)



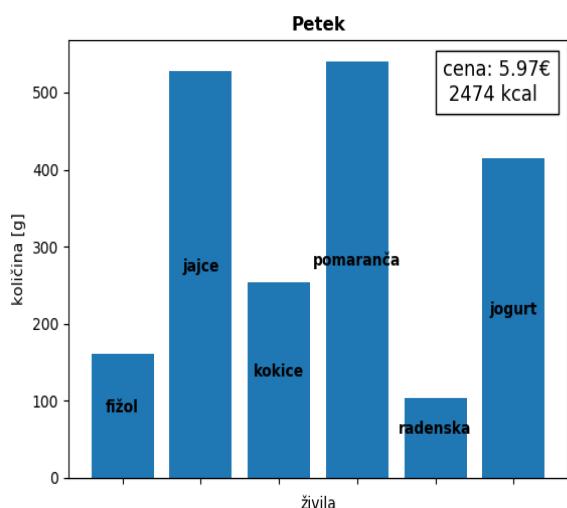
(b)



(c)

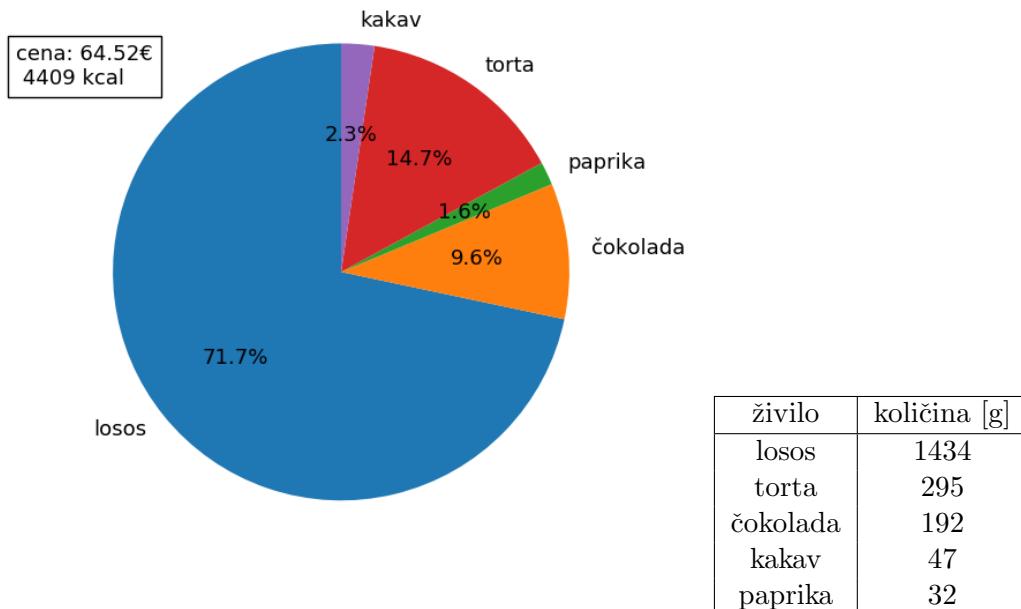


(d)



(e)

Slika 8: Tedenski jedilnik, pri katerem minimiziramo ceno in upoštevamo, da se nobeno živilo dvakrat ne ponovi.



Slika 9: Maksimizacija cene. Cena jedilnika: 64.52 €.

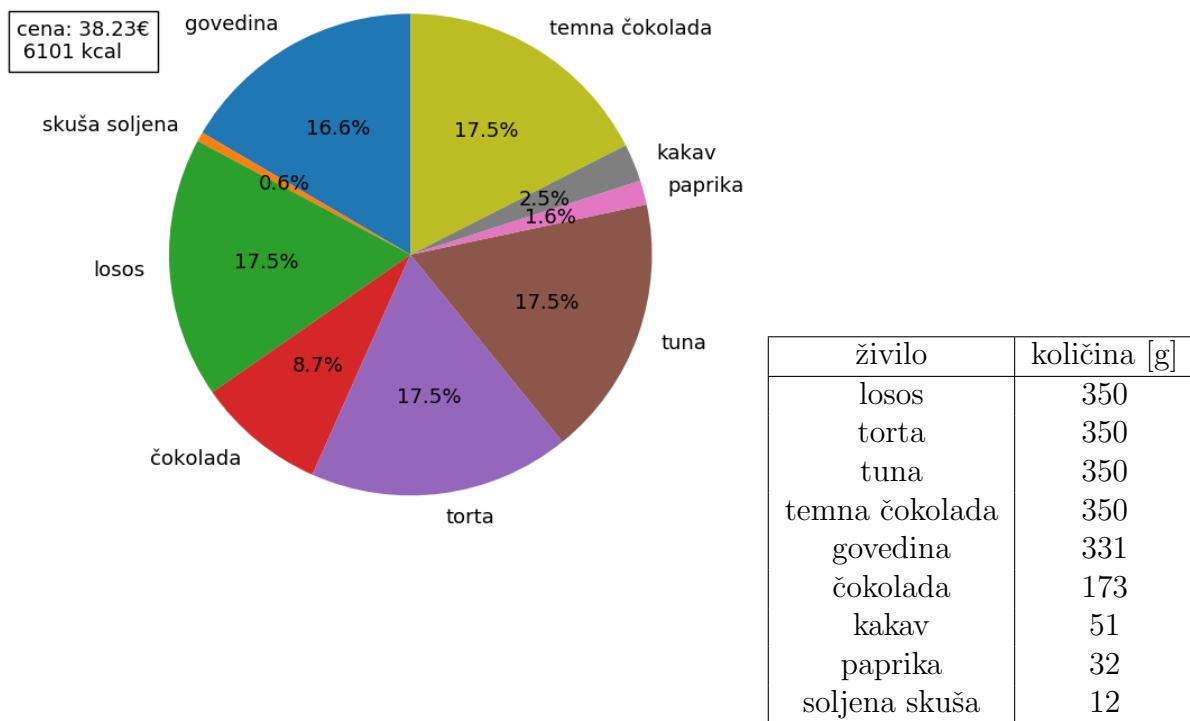
2.5 Jedilnik za pomembne goste

Zamislimo si sedaj, da bomo čez cel dan gostili pomembne goste, ki jih moramo navdušiti s čim boljšim jedilnikom. Poceni študentska dieta v tem primeru ni najboljša možnost, zato sem tokrat ceno namesto minimizirala, maksimizirala. Menimo torej, da bo dražji jedilnik goste bolj impresioniral.

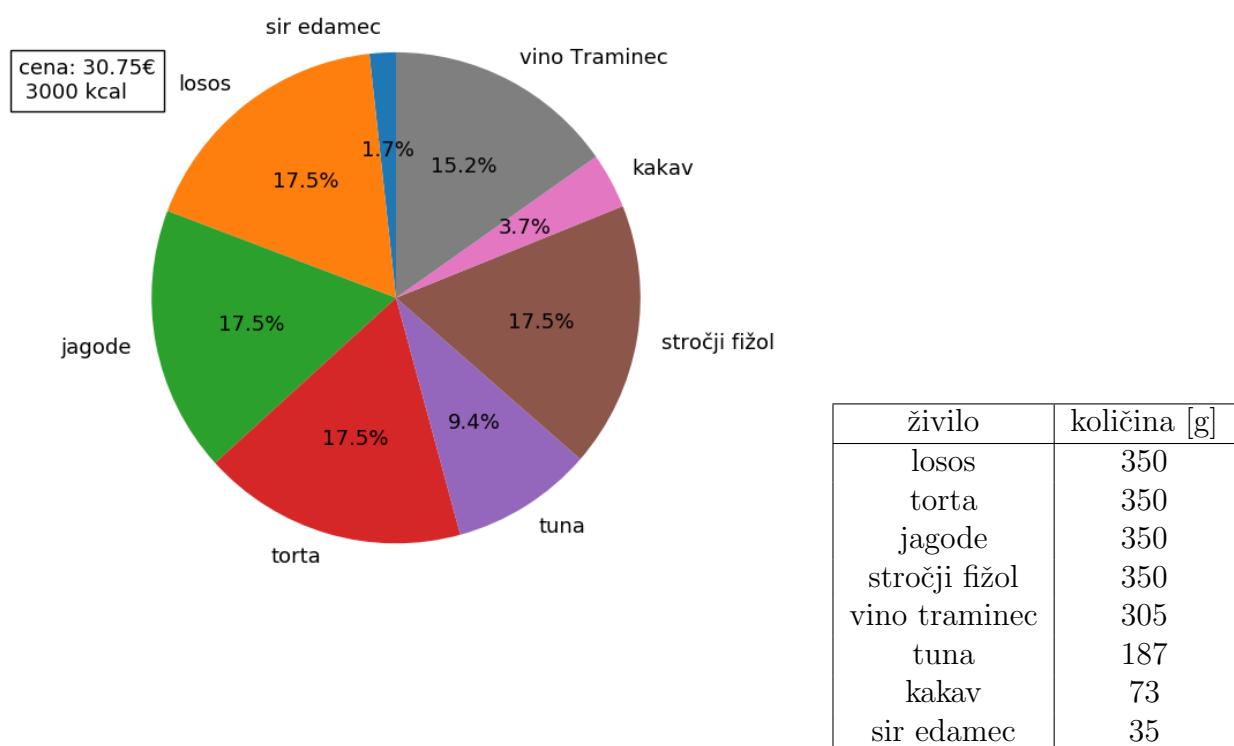
Na sliki 9 vidimo jedilnik za primer, ko ceno maksimiziramo in hkrati uporabimo vse prejšnje zahteve glede vsebnosti hrani (prikazane v Tabeli 1) vključno z minimalnim vnosom vlaknin (25 g) in maksimalno količino vseh živil (2000 g). Opazimo, da predvsem izstopa losos, katerega bi morali postreči kar 1.4 kg, za njim pa bi gostje dobili še torto, čokolado, kakav ter čisto malo paprike. Ker je zgornja meja določena le za količino hrane in ne kalorije, je v tem primeru kalorična vrednost zelo velika, in sicer kar 4409 kcal. Bi pa za enega gosta porabili kar **64.52 €**.

Na sliki 10 smo omejili maksimalno količino posameznega živila na 350 g. Tokrat dobimo bolj raznolik jedilnik, ki vključuje predvsem ribe, meso in sladke stvari kot so čokolada in torta. V tem primeru uspemo v 2 kg hrane nabратi več kot 6000 kcal, zapravili pa bi **38.23 €** na osebo.

Na sliki 11 pa lahko vidimo končno rešitev, kjer smo poskrbeli tudi za omejitev kalorij na max 3000 kcal. Osebno se mi zdi ta jedilnik tudi najbolj realističen in morda bi se s prikazanimi sestavinami resnično lahko sestavilo smiselne obroke. Je pa cena tukaj zaradi dodatnik omejitev nižja, in sicer bi plačali **30.75 €** na osebo.



Slika 10: Maksimizacija cene z omejitvijo maksimalne količine enega živila na 350 g. Cena jedilnika: 38.23 €.



Slika 11: Maksimizacija cene z omejitvijo maksimalne količine enega živila na 350 g in maksimalnega vnosa kalorij na 3000 kcal. Cena jedilnika: 30.75 €.

3 Zaključek

S pomočjo linearne optimizacije smo sestavili nekaj različnih diet. Čeprav so vse zadoščale priporočenim dnevnim vnosom hranilnih snovi, ki smo jih v nalogi obravnavali, smo kot rezultat dobili zelo različne kombinacije živil. Seveda bi model zdrave in uravnotežene prehrane lahko izboljšali še z dodatnimi zahtevami kot na primer dnevni vnos vitamina D, omejitvijo količine sladkorja, večji nabor živil itd. Poleg tega pa so potrebe o vnosu hranil odvisne tudi od posameznika.

4 Priloga

Vsebnost vlaknin obravnavanih živil v g na 100 g živila.

Ovseni_kosmici	10	Banana	2.6
Jabolko	2.4	Kokice	13
Pomfri	2.3	Brokoli	2.4
Govedina	0	Tuna	0
Svinjina	0	Paradiznik	1.2
Pisanec	0	Paprika	1.5
Mleko	0	Korenje	2.8
Sir_edamec	0	Strocji_fizol	3.4
Kruh_bel	1.9	Kumara	0.6
Kruh_polnozrnat	5	Pomaranca	2.4
Maslo	0	Puran	0
Skusa_soljena	0	Mortadela	0
Losos	0	Postrv	0
Riz	0.4	Olivno_olje	0
Cokolada	7	Marmelada	1.1
Fizol	16	Med	0.2
Rdeca_pesa	2.8	Kakav	33
Solata	1.3	Sol	0
Zelje	2.5	Radenska	0
Pivo	0	Vino_cabernet	0
Grozdje	0.9	Vino_traminec	0
Jagode	2	Ameriska_pica	2.3
Jajce	0	Bucke	1
Makaroni	2	Jogurt	0
Torta	0.2	Grah	5
Nutella	2.5	Temna_cokolada	0
Krompir	2.2	Cicerika	17

Slika 12: Živila ter njihova vsebnost vlaknin v g na 100 g živila.

Literatura

- [1] *U.S. DEPARTMENT OF AGRICULTURE.* [13. 10. 2020]. Dostopno na: <https://ndb.nal.usda.gov/ndb/search/list?qlayout=11477>
- [2] *The Perfect Balanced Diet Chart to be Healthy.* [13. 10. 2020]. Dostopno na: <https://www.femina.in/wellness/diet/the-perfect-balanced-diet-chart-to-be-healthy-111567.html>

Drugi podstavki

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko



Linearno programiranje

2. naloga pri predmetu Modelska analiza I 2021/22

Timon Grabovac

Ljubljana, oktober 2021

1 Navodilo

Med tipične primere, ki jih lahko učinkovito rešimo z metodami linearne programiranja, sodi sestavljanje diet za hujšanje, zdravljenje ali športne aktivnosti. Za dani nabor živil določamo njihove količine, pri čemer moramo zadostiti različnim omejitvam. Med drugim moramo zagotoviti priporočene dnevne odmerke mineralov, vitaminov in hranilnih snovi, omejiti pri vnos maščob, ogljikovih hidratov ter telesu škodljivih snovi, hkrati pa zagotoviti, da energijska vrednost ustrezava zahtevam posameznika. Vnos vsake izmed hranilnih snovi je linearna funkcija količin živil in je natanko določena z njihovo sestavo. Od vrste diete pa je odvisno, katere parametre omejimo in katere minimiziramo.

Datoteka **tabela-zivil.dat1** vsebuje podatke o energijski vrednosti ter vsebnosti maščob, ogljikovih hidratov, proteinov, kalcija in železa v nekaj živilih, skupaj z okvirnimi podatki o njihovi ceni.

1. Minimiziraj količino kalorij, če je priporočen minimalni dnevni vnos 70 g maščob, 310 g ogljikovih hidratov, 50 g proteinov, 1000 mg kalcija ter 18 mg železa. Dnevni obroki naj količinsko ne presežejo dveh kilogramov hrane. Upoštevate lahko še minimalne vnose za vitamin C (60 mg), kalij (3500mg) in sprejemljiv interval za natrij (500mg - 2400mg), ki so tudi na voljo v tabeli.
2. Kako se rezultat razlikuje, če zahtevamo minimalno 2000 kcal in namesto energije minimiziramo vnos maščob?
3. Namesto kalorij minimiziraj še ceno. Kako se varčevanje odraža na zdravi prehrani?
4. Ker rešujemo poenostavljen problem z malo parametri na živilo, so lahko rezultati nerealistični. Lahko z omejitvijo količine posameznih živil v obroku izboljšaš uravnovešenost prehrane? Poskusiš lahko tudi poiskati podatke o drugih mineralih in hranilih in s tem izboljšati model.

2 Uvod

Pri nalogi smo se lotili optimiziranja različnih modelov prehrane. Gre za tipični primer linearnega programiranja, pri katerem smo minimizirali različne parametre. Iz naše baze podatkov o različnih živilih, smo žeeli sestaviti dnevne obroke, ki zadoščajo nekaterim kriterijem. Kot glavni kriterij je v navodilu naloge podana zadostitev dnevnemu vnosu hranilnih vrednosti. Ker menim, da večina ljudi za odločanje o sestavi svoje prehrane ne razmišlja o količini vnesenih beljakovin in ostalih hranilnih snovi, ampak odločanje vodijo bolj abstraktne lastnosti, kot so zdravje/izgled/okus/... Izmed naštetih lastnosti se mi je najbolj zanimiva zdela mera zdravja posameznega živila. Med raziskovanjem teme sem naletel na članek, ki je kvantificiral prav ta parameter [1]. V tem članku so raziskovalci sestavili preprost model, ki je napovedal vrednost, ki, glede na hranilne vrednosti živila, opiše njegov vpliv na naše zdravje. Vrednost (Health Value oz. HV), nam tako omogoča kvantificiranje učinka posameznega živila na naše zdravje in je definirana kot:

$$\begin{aligned} HV = & 0.710 - 0.0538 \cdot fat - 0.423 \cdot sat.fat - 0.00254 \cdot Na - 0.0300 \cdot OH \\ & + 0.561 \cdot fiber - 0.0245 \cdot sug + 0.123 \cdot pr + 0.00562 \cdot VitA \quad (1) \\ & + 0.0137 \cdot VitC + 0.0685 \cdot Ca - 0.0186 \cdot Fe . \end{aligned}$$

Razlaga oznak posameznih faktorjev v enačbi je zbrana v tabeli 1:

<i>fat</i>	Maščobe [g/100 g]
<i>sat.fat</i>	Nasičene maščobe [g/100 g]
<i>Na</i>	Natrij [g/100 g]
<i>OH</i>	Ogljikovi hidrati [g/100 g]
<i>fiber</i>	Vlaknine [g/100 g]
<i>sug</i>	Sladkor [g/100 g]
<i>pr</i>	Beljakovine [g/100 g]
<i>VitA</i>	Vitamin A [g/100 g]
<i>VitC</i>	Vitamin C [g/100 g]
<i>Ca</i>	Kalcij [g/100 g]
<i>Fe</i>	Železo [g/100 g]

Tabela 1: Oznake za posamezne hranilne vrednosti in njihove enote.

Ker smo za določitev HV , potrebovali specifične podatke, sem ustvaril svojo tabelo s podatki o živilih in sicer sem izbral 61 živil iz podatkovne baze, ki je bila sestavljena iz podatkov dostopnih na: <https://fdc.nal.usda.gov/>.

Za modeliranje pri tej nalogi smo uporabili zbirkо `scipy.optimize.minimize` (Python).

3 Minimizacija kalorij

V prvem delu naloge, smo minimizirali kalorije, ki jih dnevno zaužijem tako, da ob tem še vedno zagotovim priporočen dnevni vnos (PDV) hranih vrednosti. Minimiziramo kalorije, torej želimo zagotoviti:

$$\sum_{i=1}^n m_i \text{kcal}_i \rightarrow \text{minimalno}, \quad (2)$$

kjer je m_i masa i -tega živila v gramih, n je število živil in kcal_i je količina kalorij i -tega živila v enoti $g/100\text{ g}$.

3.1 Zadostitev PDV

Najprej minimiziramo kalorije ob pogoju, da zadostimo PDV-jem in, da količina vseh obrokov ne preseže 2 kg. Te omejitve lahko zapišemo kot:

$$\sum_{i=1}^n m_i \text{fat}_i \geq PDV_{fat}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \text{Na}_i \geq PDV_{Na}, \quad (4)$$

⋮

kjer je Na_i oz. fat_i količina pripadajoče hranih vrednosti i -tega živila v enoti $g/100\text{ g}$. PDV-ji uporabljeni skozi celotno nalogo so zbrani v tabeli 2:

PDV_{fat}	70 g
PDV_{Na}	0,05 g
PDV_{pr}	50 g
PDV_{OH}	310 g
PDV_{Ca}	1,0 g
PDV_{Fe}	0,018 g
PDV_{VitC}	0,06 g

Tabela 2: Vrednosti PDV-jev za vse hranih vrednosti, ki jih omejujemo.

Zraven zgoraj prikazanih omejitev, vedno upoštevamo tudi, da količina hrane ne sme presegati 2 kg, ter zgornjo omejitev za natrij pri 2,4 g.

Živila in količina živil, ki jih naš model izbere za minimizacijo kalorij, ob omejitvah definiranih v navodilu naloge, so zbrana v tabeli 3, prikaz hranih snovi pa je predstavljen na sliki 1.

Ime živila	Masa [g]	Ime živila	Masa [g]	Ime živila	Masa [g]
Avocado	18.0	Raspberry	59.1	Blueberry	98.2
Broccoli	88.9	Macadamia Nut	18.70	Grapes	144.6
Brussels Sprouts	169.1	Walnut	58.2	Kiwifruit	89.7
Garlic	285.4	Spinach	89.5	Mango	78.2
Lemon Juice	278.1	Apple	59.7	Pear	102.1
Olive Black	65.2	Banana	223.5	Pineapple	51.1

Tabela 3: Živila, ki sestavljajo dnevni obrok z najmanj kalorijami ob vnosu PDV hraničnih snovi in manj kot 2 kg hrane.



Slika 1: Diagram hranilnih vrednosti, ki jih vnesemo z zaužitjem živil zbranih v tabeli 3. V okvirju so prikazane skupne kalorije obroka, HV in Cena.

Iz grafa 1 vidimo, da bi nam dnevni obrok sestavljen iz živil zbranih v tabeli 3 zagotovil točno PDV kalcija, ogljikovih hidratov, maščob in beljakovin. Zaužili bi nekaj več natrija, železa in kar 11-kratno količino PDV vitamina C. Tukaj je vidna manjša hiba našega podatkovnega seta in sicer večino živil predstavlja sadje in zelenjava. Živila iz teh skupin pa so pogosto bogata z vitaminom C, kar povzroči tako veliko odstopanje od PDV. V nadaljevanju bomo to poskusili popraviti z dodatkom novih omejitvev.

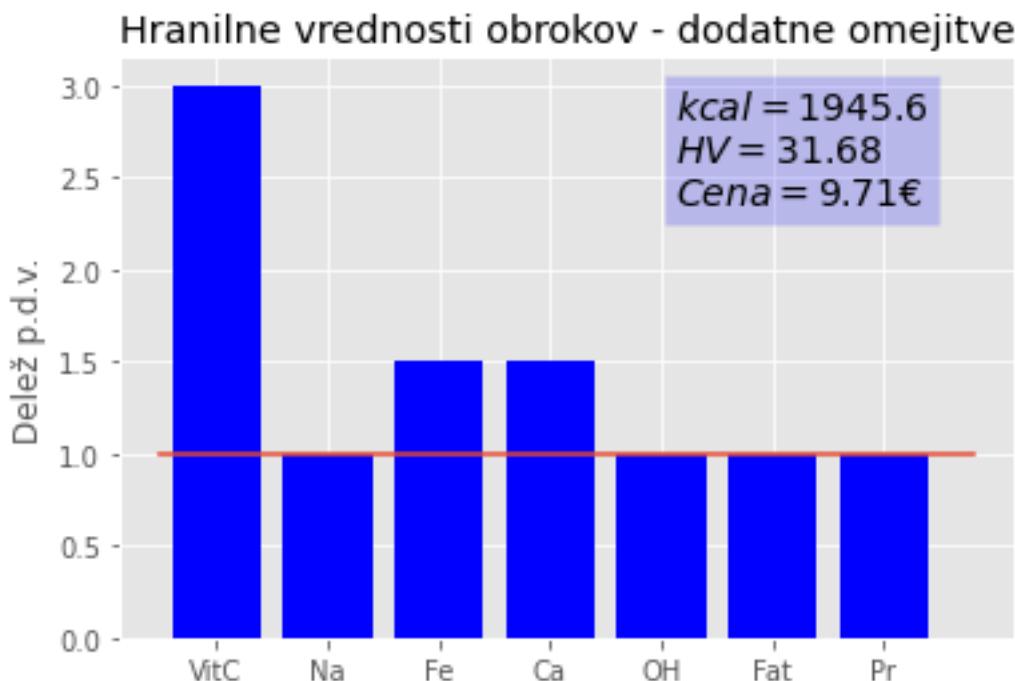
3.1 Zadostitev intervalu PDV

Kot smo opazili na grafu 1, smo dobili višek nekaterih hranilnih vrednosti. Poskusimo še, kaj se zgodi, če omejimo maksimalno vrednost le-teh in sicer omejimo maksimalno količino vseh hranilnih vrednosti na 150 % PDV (300 % PDV za vitamin C), interval za natrij ostane enak. Ker naši podatki večinoma vsebujejo sadje in zelenjavno omejimo tudi vnos teh dveh skupin in sicer pojesti želimo maksimalno 600 g živil iz vsake izmed teh skupin. Izkaže se, da je česen

zelo učinkovit v našem modelu in ga priporoča v nenormalno visokih količinah, zato ga omejimo pri 20 g. Z upoštevanjem teh novih omejitv dobimo nov dnevni obrok sestavljen z živil v tabeli 4, prikaz hranilnih snovi pa je predstavljen na sliki 2.

Ime živila	Masa [g]	Ime živila	Masa [g]
Garlic	20,0	Banana	317,9
Lemon Juice	82,3	Blueberry	282,1
Olive Black	19,8	Strawberry	46,8
Spinach	12,5	Chia Seed	197,1
Sweet Potato	456,3	Peanut Butter	9,8

Tabela 4: Živila, ki sestavljajo dnevni obrok z najmanj kalorijami ob vnosu hranilnih snovi na intervalu PDV, manj kot 2 kg hrane ter omejitvami za sadje, zelenjavno in česen.

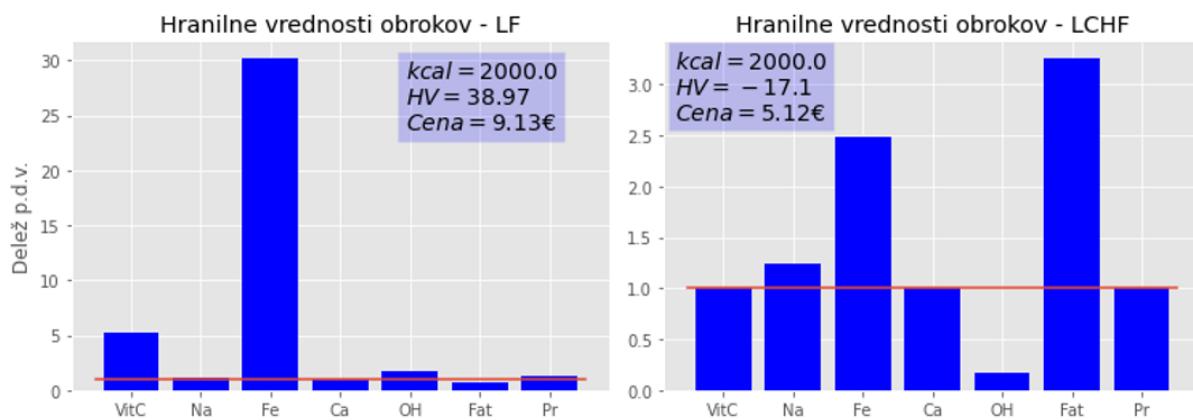


Slika 2: Diagram hranilnih vrednosti, ki jih vnesemo z zaužitjem živil zbranih v tabeli 4. V okvirju so prikazane skupne kalorije obroka, HV in Cena.

Iz primerjave grafov 1 in 2 ter tabel 3 in 4 vidimo, da nam dodatne omejitve podajo bolj realne in optimalne dnevne obroke. Čeprav so kalorije ob dodatnih omejitvah nekoliko višje, je ta možnost bolj zdrava in cenejša (prav tako pa ni treba pojesti 285 g česna ☺). V nadaljevanju naloge bomo upoštevali omejitev za sadje, zelenjavno in česen. Zgornje omejitve za intervale hranilne snovi pa bomo opustili, saj bomo opazovali različne diete. Tako bomo lahko spremljali, kakšna je npr. nevarnost zaužitja prevelike količine določenih hranilnih snovi.

4 Primerjava LF in LCHF diet

V nadaljevanju (slika 3) primerjamo hranilne vrednosti, ki jih dobimo ob upoštevanju diete, ki minimizira vnos maščob (Low Fat = LF) in diete, ki zniža vnos ogljikovih hidratov (maksimalno 50 g) in maksimizira vnos maščob (Low Carb, High Fat = LCHF). Tukaj izpustimo tabelo z živili, zaradi njihovega števila. Določili smo, da želimo 2000 kcal in manj kot 2 kg hrane.



Slika 3: Diagrama hranilnih vrednosti, ki jih zaužijemo pri LF dieti (levo) in pri LCHF dieti (desno).

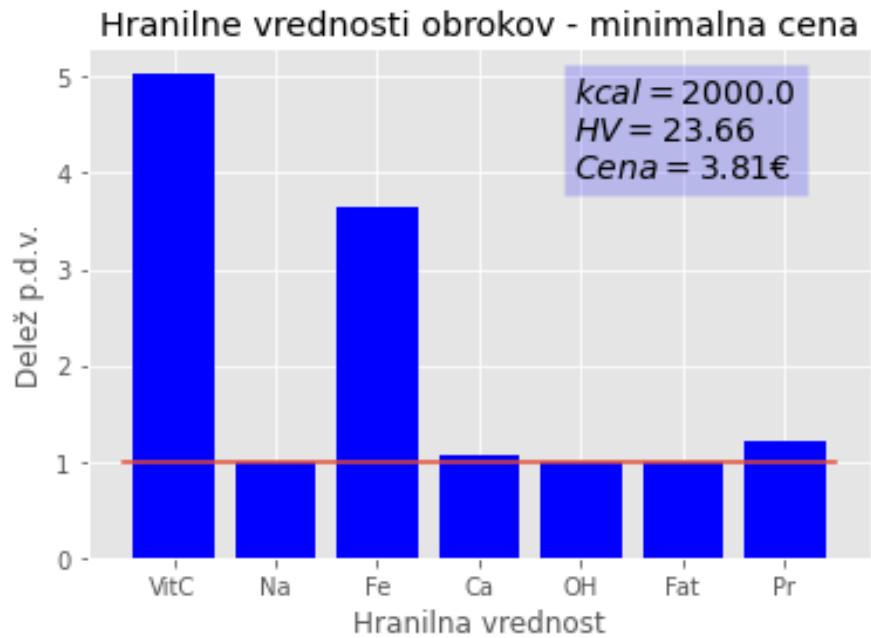
Na sliki 3 opazimo, da pri LF dieti zaužijemo veliko preveč železa (kar 30 krat PDV), čeprav je glede na posamezna živila HV te diete veliko večja kot diete LCHF, je višek železa vseeno zaskrbljujoč in je pri tej dieti potrebno paziti nanj.

5 Cenejši in zdravi obroki

V tem delu naloge smo minimizirali ceno dnevnega obroka, živila so zbrana v tabeli 5. Tudi tukaj smo zahtevali 2000 kcal ter manj kot 2 kg hrane. Vidimo, da najcenejši možni dnevni obrok stane 3,81 € (slika 4).

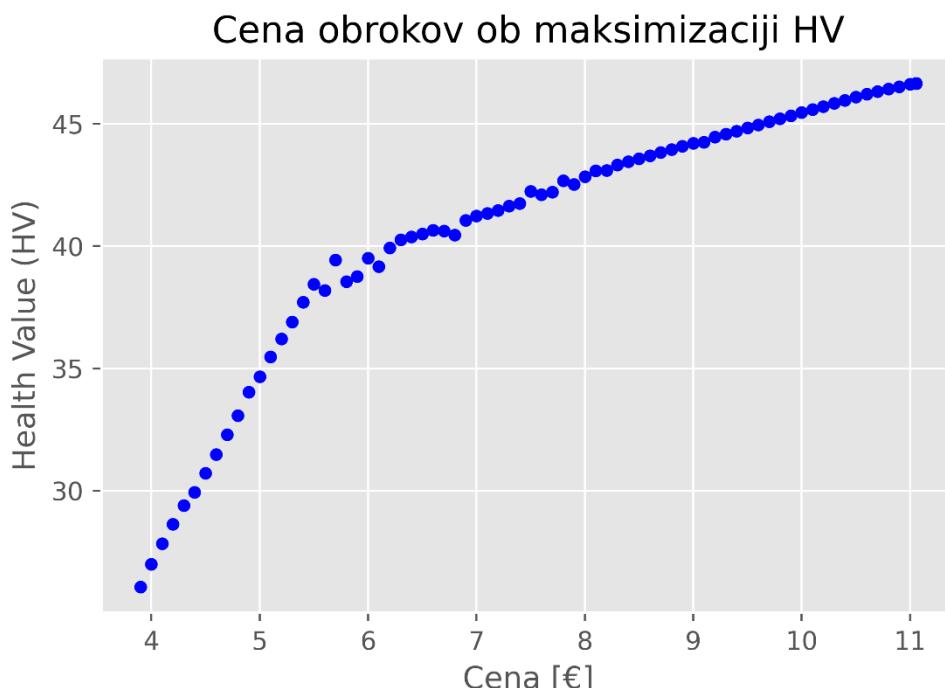
Ime živila	Masa [g]	Ime živila	Masa [g]
Garlic	20,0	Peanuts	48,1
Potato	254,4	Peanut Butter	17,9
Sweet Potato	325,6	Chicken Egg	47,6
Banana	600	Cow Milk	192,9
Chia Seed	72,5	Soy Milk	47,5
Yogurt	38,8		

Tabela 5: Živila, ki sestavljajo najcenejši dnevni obrok, ob upoštevanju omejitv.



Slika 4: Diagram hranilnih vrednosti, pri najcenejši dieti, ki še zadosti omejitvam.

V nadaljevanju nas je zanimalo, kako cena obroka vpliva na njegov vpliv na zdravje. V ta namen sem izvedel maksimizacijo faktorja HV ob različnih omejitvah za ceno (slika 5). Opazimo, da vpliv na zdravje narašča s ceno, dokler ne doseže maksimalne vrednosti in izbere najbolj zdravo konfiguracijo, ki je tudi dvig dovoljene cene ne spremeni. Zanimivo je, da je naraščanje približno linearno z dvema različnima strminama. Če pogledamo sestavo dnevnih obrokov vidimo, da se le-ti precej spreminjajo tudi po sestavinah in ne le po njihovi količini. Prav tako ne opazimo nobenega razloga za preskok strmine grafa pri ceni cca. 5,8 €.

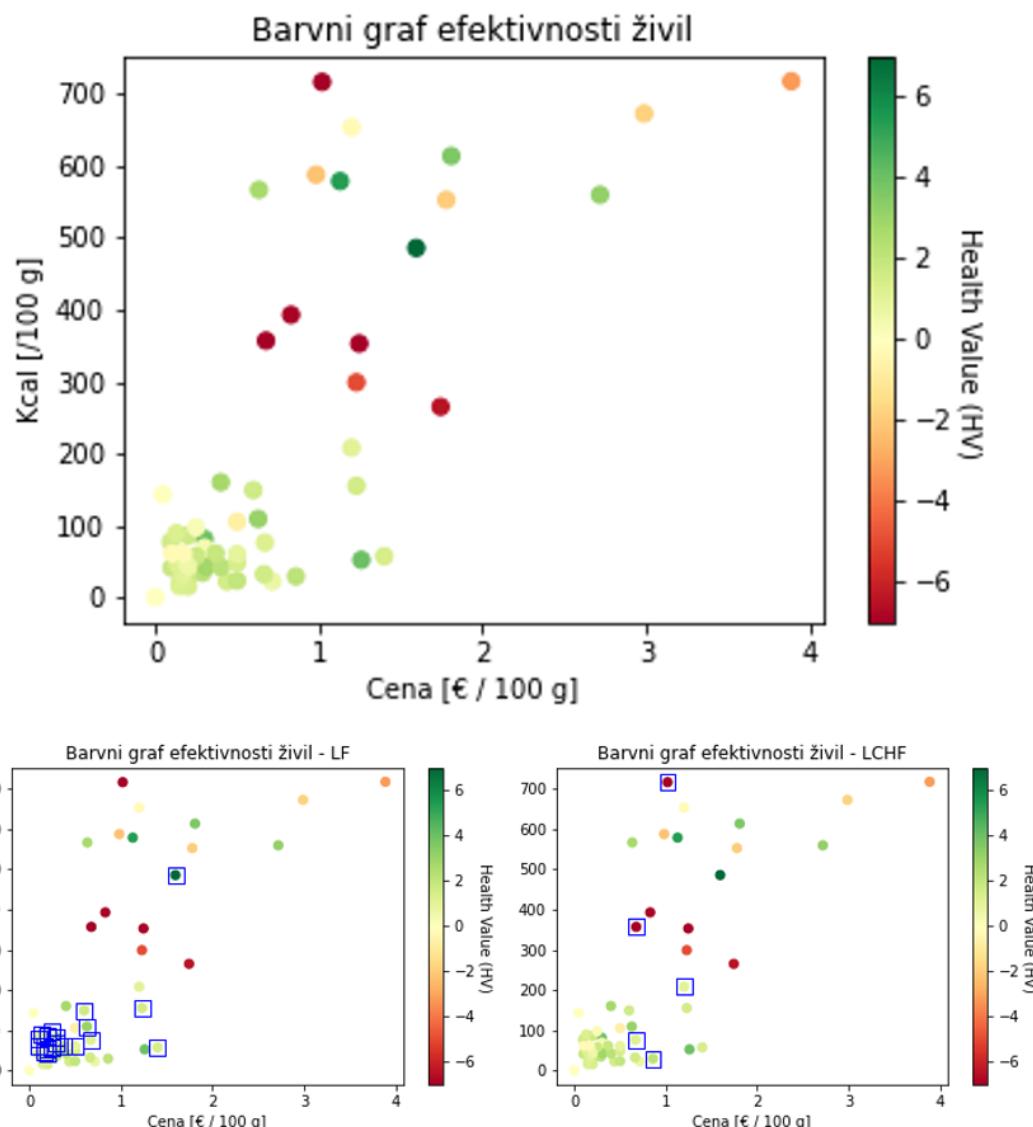


Slika 5: Graf, ki prikazuje maksimalni možen HV s večanjem maksimalne dovoljene cene dnevnega obroka.

Tukaj je potrebno omeniti, da je model za izračun HV [1], bil preizkušen in nastavljen na primerih sestavljenih jedi in ne posameznih živil. Zato lahko pride do večje napake pri določanju faktorja HV.

6 Barvni graf efektivnosti živil

V nadaljevanju sem skušal na čim bolj pregleden način prikazati lastnost, ki jo imenujem efektivnost živila. Efektivnost posameznega živila sem določil kot relacijo med njegovo ceno, kalorijami na 100 g in vrednostjo HV. Nisem računal vrednosti za posamezno živilo, za to bi bilo potrebno določiti točno povezavo med naštetimi količinami. Tako pa ugotovimo, da želimo čim manjšo ceno ter čim več kalorij ter čim višji HV. Razporeditev živil v moji podatkovni bazi je prikazana na sliki 6. Označena so tudi živila, ki jih optimizacija priporoča pri dietah LH in LCHF, tako lahko iz pozicije na grafu in barve točk ocenimo efektivnost posamezne diete.



Slika 6: Graf, ki prikazuje relacijo med ceno, kalorijami in vrednostjo HV za vsa živila v naši podatkovni bazi. Prikazana so tudi živila, ki jih program priporoča za dieti LF in LCHF.

Zaključek

Če bi želeli izboljšati napovedi modela in pridobiti bolj realen vpogled v vpliv živil na zdravje, bi bilo potrebno dobiti več podatkov o živilih, ki bi bila čim bolj raznolika. Raznolikost smo sicer lahko umetno ustvarili z omejitvami količine posameznih skupin živil, ampak zagotovo bi potrebovali več različnih živil (tudi sestavljenih in ne le sestavin). Prav tako bi bilo potrebno prilagoditi in boljše raziskati model za izračun vrednosti HV. V zadnjem poglavju je predstavljen koncept efektivnosti živil, ki bi ga prav tako bilo zanimivo podrobneje raziskati.

Literatura in viri

- [1] Martin, J.M. et al., 2009. Modeling expert opinions on Food Healthfulness: A nutrition metric. *Journal of the American Dietetic Association*, 109(6), pp.1088–1091.

Primer posameznih živil

MODELSKA ANALIZA 1

2. naloga: Linearno programiranje

VITJA BELTRAM

VPISNA ŠTEVILKA: 28212063
20.10.2021

1 Naloga

Med tipične primere, ki jih lahko učinkovito rešimo z metodami linearnega programiranja, sodi sestavljanje diet za hujšanje, zdravljenje ali športne aktivnosti. Za dani nabor živil določamo njihove količine, pri čemer moramo zadostiti različnim omejitvam. Med drugim moramo zagotoviti priporočene dnevne odmerke mineralov, vitaminov in hranilnih snovi, omejiti pri vnos maščob, ogljikovih hidratov ter telesu škodljivih snovi, hkrati pa zagotoviti, da energijska vrednost ustreza zahtevam posameznika. Vnos vsake izmed hranilnih snovi je linearna funkcija količin živil in je natanko določena z njihovo sestavo. Od vrste diete pa je odvisno, katere parametre omejimo in katere minimiziramo. Datoteka *tabela-zivil.dat1* vsebuje podatke o energijski vrednosti ter vsebnosti maščob, ogljikovih hidratov, proteinov, kalcija in železa v nekaj živilih, skupaj z okvirnimi podatki o njihovi ceni.

1. Minimiziraj količino kalorij, če je priporočen minimalni dnevni vnos 70 g maščob, 310 g ogljikovih hidratov, 50 g proteinov, 1000 mg kalcija ter 18 mg železa. Dnevni obroki naj količinsko ne presežejo dveh kilogramov hrane. Upoštevate lahko še minimalne vnoise za vitamin C (60 mg), kalij (3500 mg) in sprejemljiv interval za natrij (500 mg – 2400 mg), ki so tudi na voljo v tabeli.
2. Kako se rezultat razlikuje, če zahtevamo minimalno 2000 kcal in namesto energije minimiziramo vnos maščob?
3. Namesto kalorij minimiziraj še ceno. Kako se varčevanje odraža na zdravi prehrani?
4. Ker rešujemo poenostavljen problem z malo parametri na živilo, so lahko rezultati nerealistični. Lahko z omejitvijo količine posameznih živil v obroku izboljšaš uravnovešenost prehrane? Poskusil lahko poiskati podatke o drugih mineralih in hranilih in s tem izboljšati model.

2 Minimiziranje količine kalorij

S pomočjo linearnega programiranja bomo minimizirali količino zaužitih kalorij pri pogojih opisanih v točki 1 v poglavju 1.

Najprej še ne bom dodal pogojev na vitamin C, kalij in natrij. Če v izbor vzamem vse sestavine v tabeli, dobim štiri sestavin z neničelnimi vrednostmi teže. To so pomfri, marmelada, kakav in sol. V tabeli 1 so predstavljeni pogoji in rezultati minimizacije, na sliki 1 pa so grafično prikazani prispevki posameznih sestavin k hrani.

Pri naslednji minimizaciji kalorij pa sem dodal še pogoj, da morjo sestavine vsebovati še vsaj 60 mg vitamina C. Rezultati so prikazani na sliki 2. Glede na prejšnji rezultat je dodatna sestavina paprika, kar je pričakovano, saj vsebuje največ vitamina C od vseh naštetih živil.

Pri naslednji minimizaciji kalorij sem dodal še en pogoj, in sicer, da morjo sestavine vsebovati še vsaj 3500 mg kalija. Rezultati so prikazani na sliki 3. Glede na prejšnji rezultat ni praktično nobene razlike, saj kakav vsebuje toliko kalija, da ga je bilo že pred pogojem dovolj, kot lahko vidimo v tabeli 1 pod vrstico rezultat 1.3.

Na koncu sem omejil še natrij na interval med 500 in 2400 mg. Rezultati so prikazani na sliki 4 in se precej razlikujejo od prejšnjih. Dobili smo nove tri sestavine, ki imajo neničelne teže, to so solata, pomaranča in radenska. Po teži prevladuje radenska, saj jo potrebujemo, da zadostimo potrebam po natriju in kaliju. Skupne količine posameznih hrani so prikazane v tabeli 1.

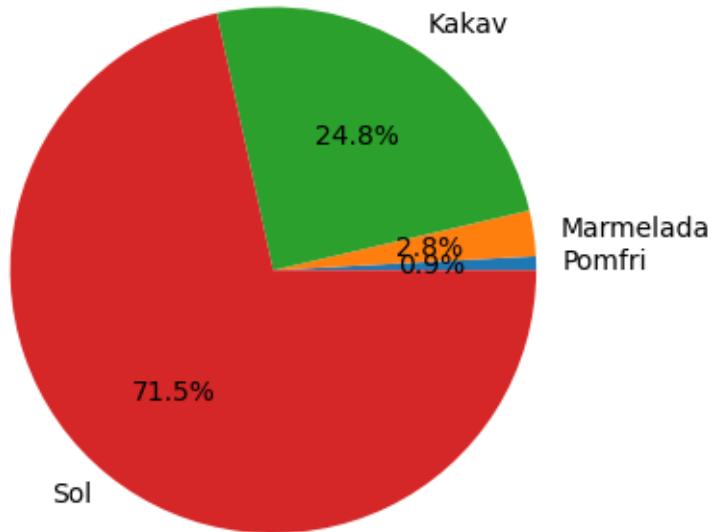
	kcal	maš. [g]	OH [g]	proteini [g]	Ca [mg]	Fe [g]	VitC [mg]	K [mg]	Na [mg]	teza [kg]
pogoj 1.1		70	310	50	1000	18				2
rezultat 1.1	1288	70	310	97.7	1000.4	73.2				2.00
pogoj 1.2		70	310	50	1000	18	60			2
rezultat 1.2	1290	70	310	98.5	1000	73.6	60			2.00
pogoj 1.3		70	310	50	1000	18	60	3500		2
rezultat 1.3	1290	70	310	98.5	1000	73.6	60	7854		2.00
pogoj 1.4		70	310	50	1000	18	60	3500	500-2400	2
rezultat 1.4	1297	70	310	101.7	1000	72.6	60	8200	2400	2.00
pogoj 1.5		70	310	50	1000	18	60	3500	sol $\in [0,1.4]g$	2
rezultat 1.5	1297	70	310	101.7	1000	72.6	60	8200		2.00
pogoj 1.6		70	310	50	1000	18	60	3500	brez soli in radenske	2
rezultat 1.6	1308	70	310	60.5	1000	38.4	170	6841		2.00

Tabela 1: V tabeli so predstavljeni rezultati in pogoji štirih minimizacij. Vse vsebnosti so morale biti nad napisano vrednostjo, teža pa pod. Tudi v tabeli lahko vidimo, da med rezultatom 1.2 in 1.3 ni razlike. So pa vse dobljene minimalne vrednosti kalorij podobne, nobeno ne odstopa.

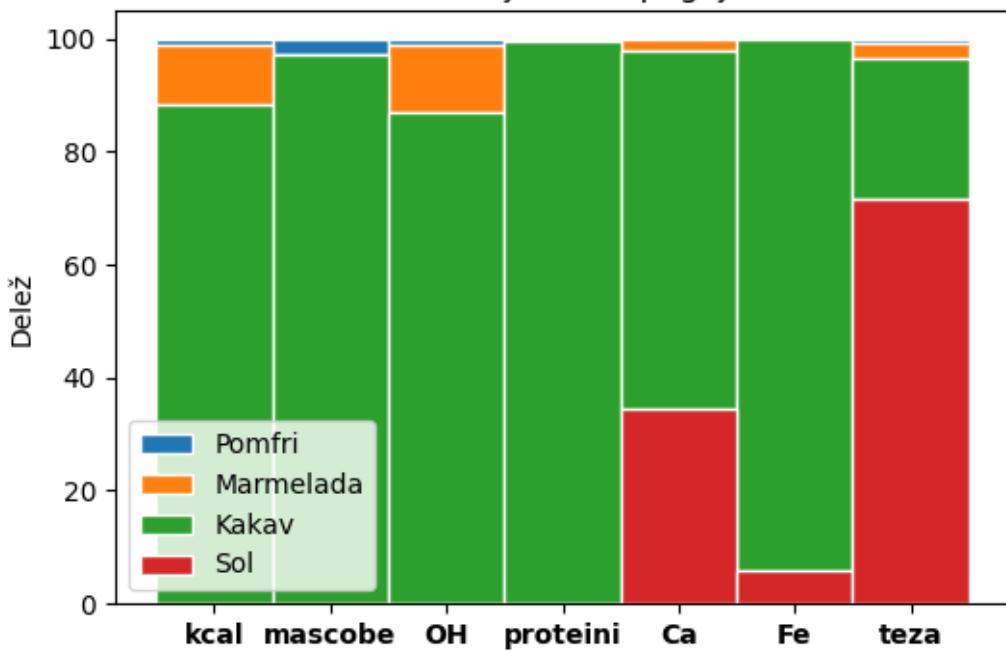
Pri pogoju 1.5 je dodatno omejena še količina soli na interval med 0 in 1.4g. Dobljen rezultat se ne razlikuje znatno od rezultata 1.4. Pri pogoju 1.6 lahko vidimo, da se je minimalna količina kalorij povečala, kar je pričakovano, saj smo sestavini brez kalorij odstanili iz nabora.

Ker se mi je zdelo nesmiselno, da je v rezultatu toliko soli, sem sol omejil na interval med 0 in 1.4 g (priporočen dnevni vnos [1]) in ponovil minimizacijo pri pogoju 1.3. Ker se mi je zdelo nesmiselno tudi to, da na dan popiješ toliko radenske kot v primeru 1.5 (glej sliko 5), sem iz nabora sestavin izločil tako sol kot radensko. Rezultat je bolj smiseln od ostalih in je prikazan na sliki 6.

Minimizacija kcal - pogoj 1.1
 $100 \% = 2.00 \text{ kg}$

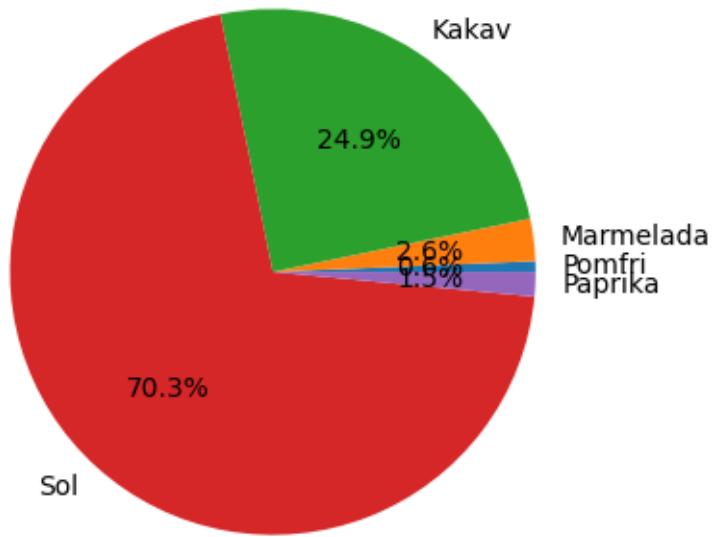


Minimizacija kcal - pogoj 1.1

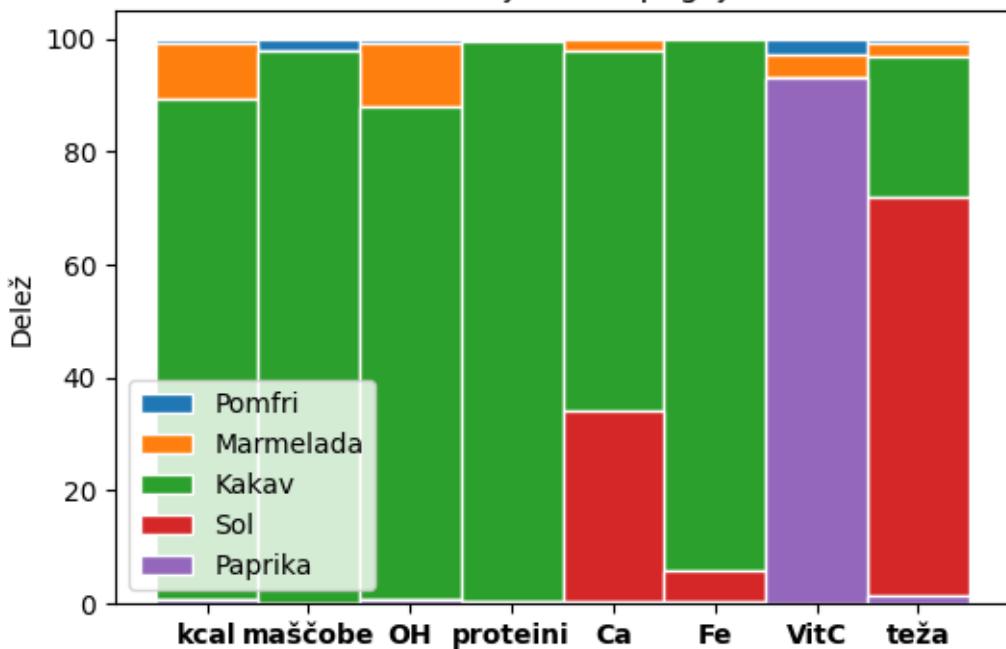


Slika 1: Na zgornjem, tortnem diagramu je predstavljen rezultat minimizacije kalorij pri pogoju 1.1, ki je prestavljen v tabeli 1. Sto odstotkov predstavlja skupna teža sestavin. V tem rezultatu po teži močno prevladuje sol, kar je nepričakovano, a razumljivo, saj ne prinese nič k energiji. Na stolpičnem diagramu so prikazani prispevki sestavin k vsebnostim. Sto odstotkov oz. skupna vrednost za posamezno hranilo je prikazana v tabeli 1 pod vrstico rezultat 1.1. Na tem diagramu opazimo, da pri vseh hranilih največ prispeva kakav.

Minimizacija kcal - pogoj 1.2
 $100\% = 2.00 \text{ kg}$



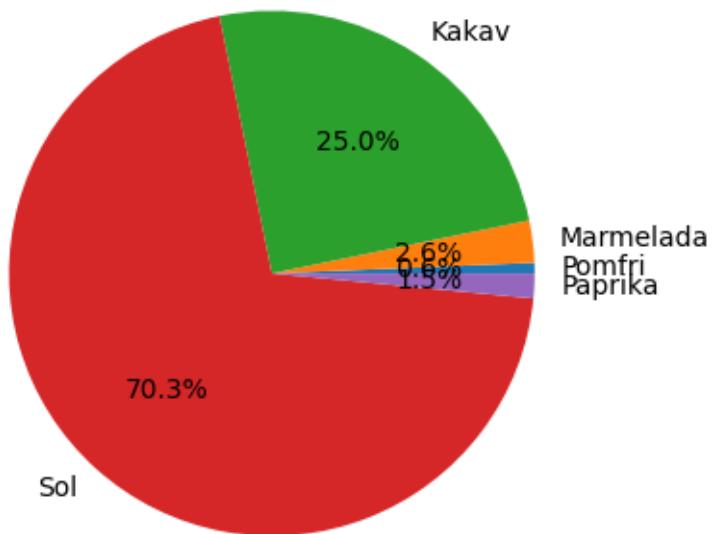
Minimizacija kcal - pogoj 1.2



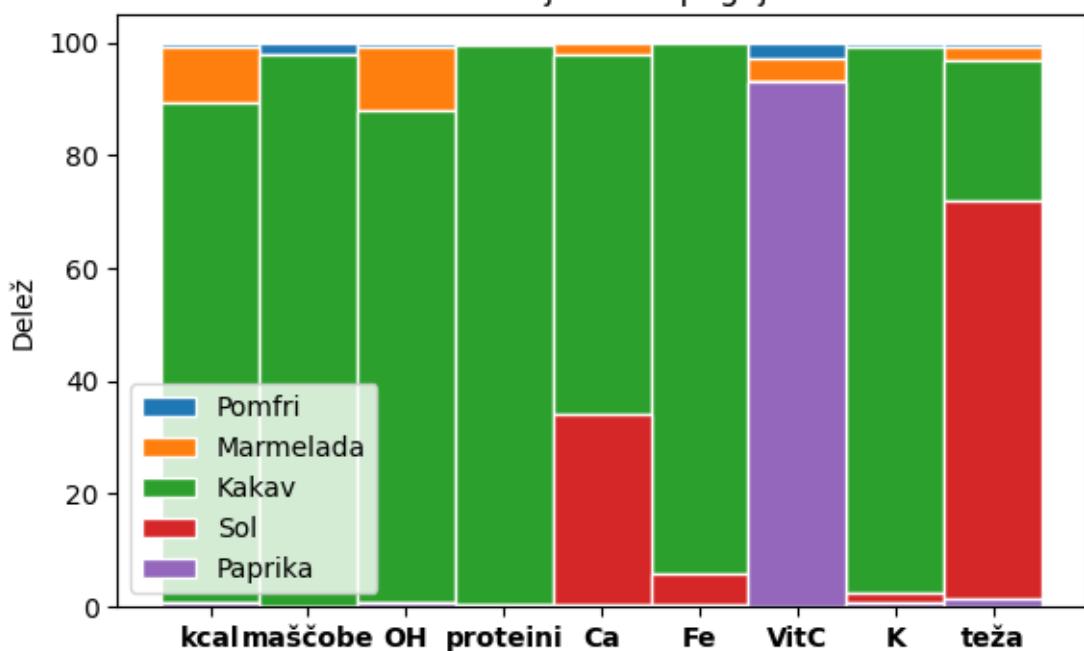
Slika 2: Na zgornjem, tortnem diagramu je predstavljen rezultat minimizacije kalorij pri pogoju 1.2, ki je prestavljen v tabeli 1. Sto odstotkov predstavlja skupna teža sestavin. V tem rezultatu po teži močno prevladuje sol, kar je nepričakovano, a razumljivo, saj ne prinese nič k energiji.

Na stolpičnem diagramu so prikazani prispevki sestavin k vsebnostim. Sto odstotkov oz. skupna vrednost za posamezno hranilo je prikazana v tabeli 1 pod vrstico rezultat 1.2. Tudi na tem diagramu opazimo, da pri skoraj vseh hranilih največ prispeva kakav. Izjema je ravno vitamin C, ki ga v tem primeru skoraj v celoti dobimo od paprike.

Minimizacija kcal - pogoj 1.3
 $100\% = 2.00 \text{ kg}$

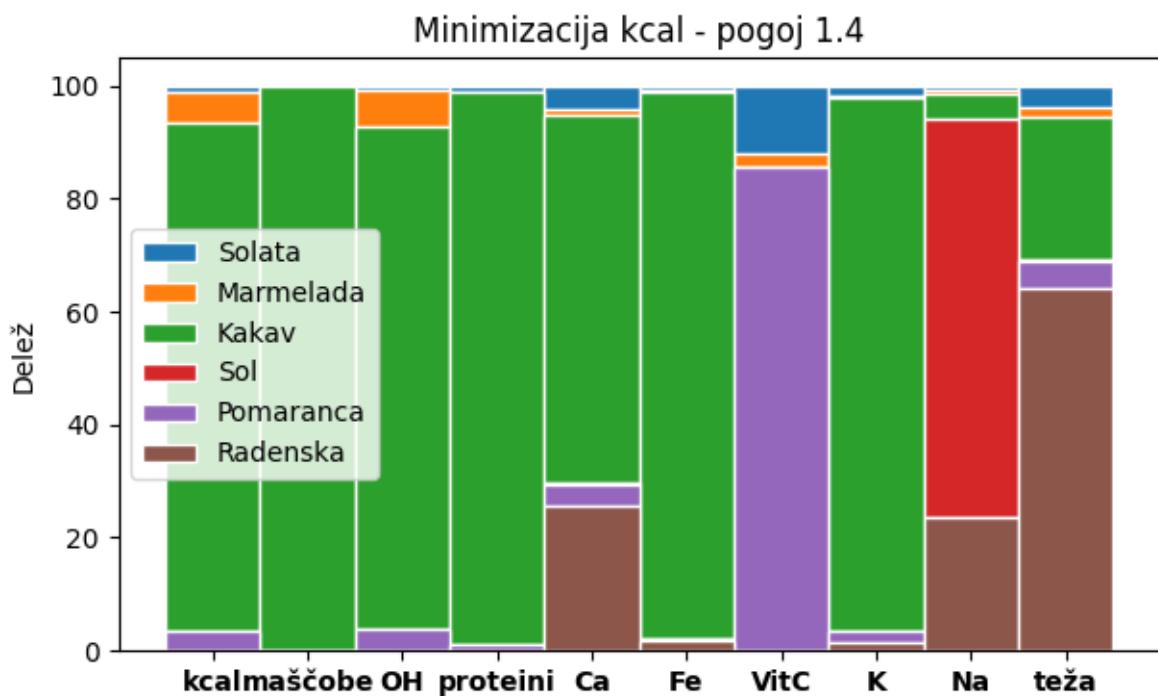
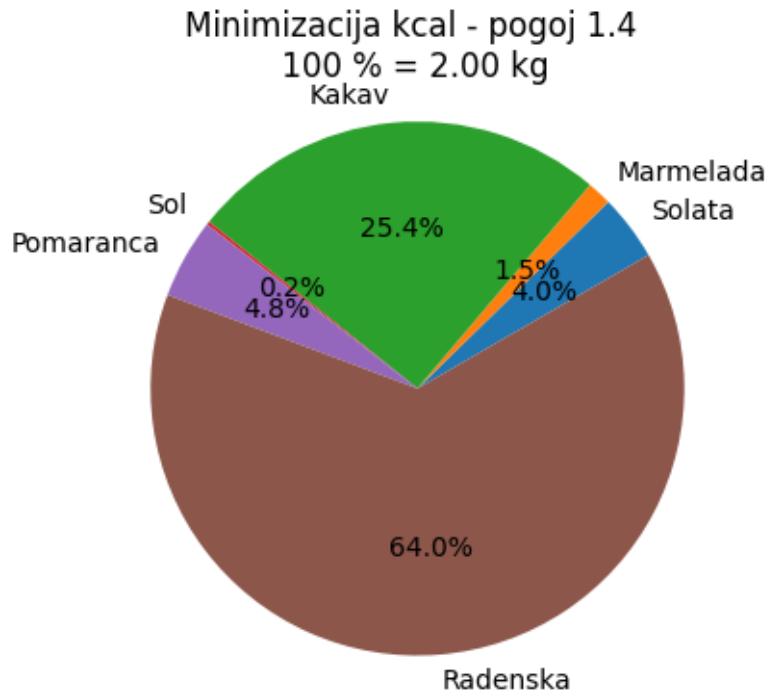


Minimizacija kcal - pogoj 1.3



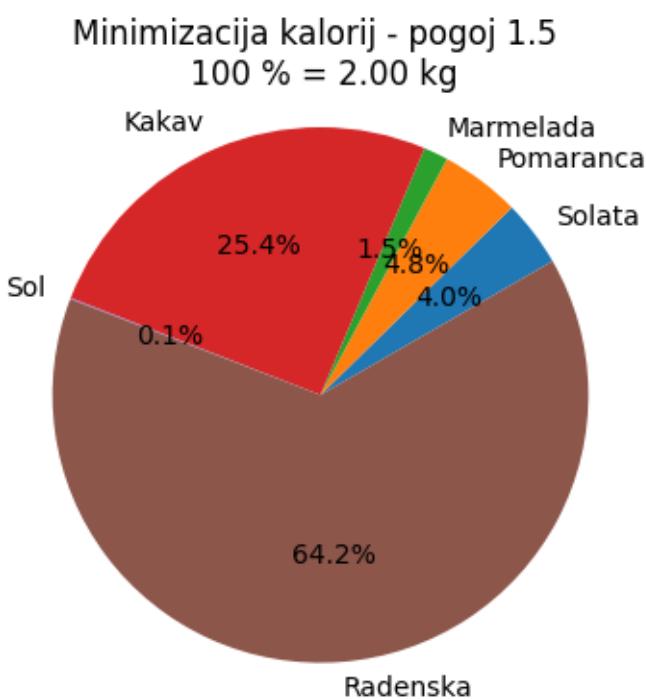
Slika 3: Na zgornjem, tortnem diagramu je predstavljen rezultat minimizacije kalorij pri pogoju 1.3, ki je prestavljen v tabeli 1. Sto odstotkov predstavlja skupna teža sestavin. V tem rezultatu po teži močno prevladuje sol, kar je nepričakovano, a razumljivo, saj ne prinese nič k energiji.

Na stolpičnem diagramu so prikazani prispevki sestavin k vsebnostim. Sto odstotkov oz. skupna vrednost za posamezno hranilo je prikazana v tabeli 1 pod vrstico rezultat 1.3. Tudi na tem diagramu opazimo, da pri vseh hranilih razen vitaminu C največ prispeva kakav. Delež posameznih sestavin se ne spremeni glede na prejšnji rezultat, saj kakav vsebuje veliko kalija in ga je tako veliko prinesel že prej, kar se vidi tudi v omenjeni tabeli.



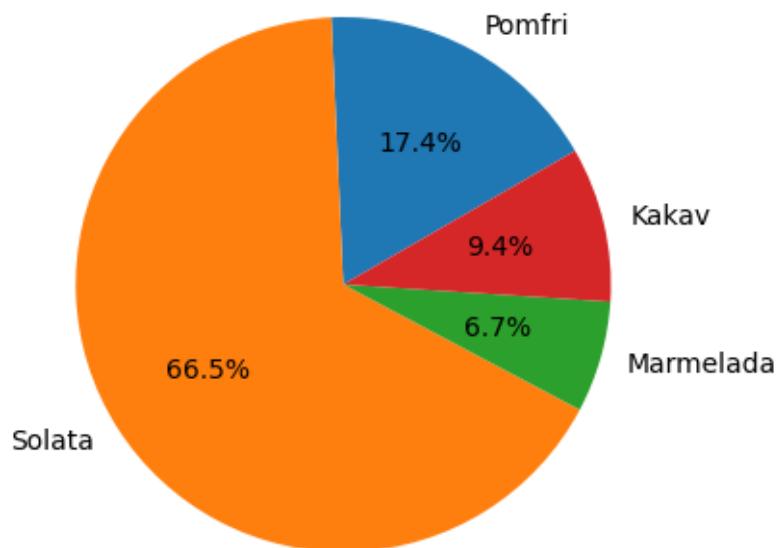
Slika 4: Na zgornjem, tortnem diagramu je predstavljen rezultat minimizacije kalorij pri pogoju 1.4 ,ki je prestavljen v tabeli 1. Sto odstotkov predstavlja skupna teža sestavin. V tem rezultatu po teži močno prevladuje radenska.

Na stolpičnem diagramu so prikazani prispevki sestavin k hranilom. Sto odstotkov oz. skupna vrednost za posamezno hranilo je prikazana v tabeli 1 pod vrstico rezultat 1.4. Tudi na tem diagramu opazimo, da pri skoraj vseh hranilih največ prispeva kakav. Le pri vitaminu C in natriju največ prispevata pomaranča in sol, ki ga je po teži sicer zelo malo a vsebuje z naskokom največ natrija.

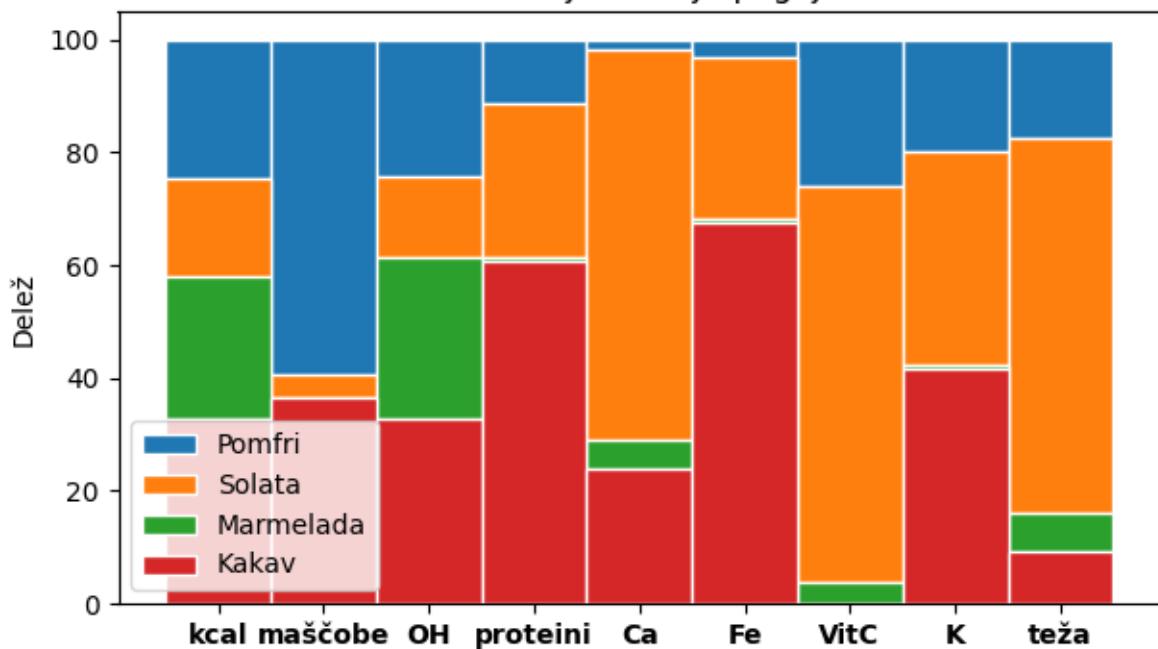


Slika 5: Na diagramu je prikazan delež teže sestavin pri minimizaciji kalorij pri pogojih 1.5, predstavljenih v tabeli 1. Rezultat se ne razlikuje znatno od rezultata pri pogoju 1.4.

Minimizacija kalorij - pogoj 1.6
 $100\% = 2.00 \text{ kg}$



Minimizacija kalorij - pogoj 1.6



Slika 6: Na diagramih so prikazani rezultati minimizacije kalorij pri pogoju 1.6, ki je enak kot 1.5, le da sem iz nabora sestavin izločil sol in radensko. V tem primeru ni sestavine, ki bi prevladovala pri vseh hraniilih.

Prihvat podatkov:

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



LINEARNO PROGRAMIRANJE

2. naloga pri predmetu Modelska analiza 1

Študent: Jon Vehovar
Vpisna številka: 28212060

Predavatelj: prof. dr. Simon Širca

Akademsko leto 2021/2022

0 Uvod

Med tipične primere, ki jih lahko učinkovito rešimo z metodami linearne programiranja, sodi sestavljanje diet za hujšanje, zdravljenje ali športne aktivnosti. Za dani nabor živil določamo njihove količine, pri čemer moramo zadostiti različnim omejitvam. Med drugim moramo zagotoviti priporočene dnevne odmerke mineralov, vitaminov in hranih snovi, hkrati pa zagotoviti, da energijska vrednost ustreza zahtevam posameznika.

Vnos vsake izmed hranih snovi je linearne funkcija količin živil in je natanko določena z njihovo sestavo. Od vrste diete je odvisno, ketere parametre omejimo in katere minimiziramo.

Linearni optimizacijski problem formuliramo kot optimizacijo funkcije

$$f(x_j) = \sum_j c_j x_j = \text{ekstrem}$$

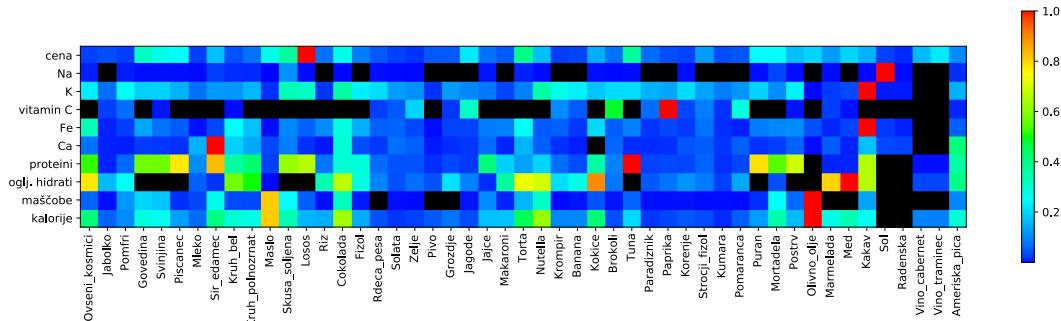
pod pogoji

$$\sum_j a_{ij} x_j \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} b_i.$$

Metode linearnega programiranja so implementirane v PYTHON-ovi funkciji `scipy.optimize.linprog`, ki vzame (za to naloge pomembne) argumente c_j , A_{ub} , b_{ub} ter spodne in zgornje meje x_j . Iz datoteke živil je preprosto sestaviti matriko A_{ub} , ki v vrsticah hrani koeficiente linearne neenakosti x . Vrstice matrike so v našem primeru pravzprav stolpci datoteke z živili, kar pomeni, da jo dobimo s transponiranjem. Še prej moramo paziti, da izločimo stolpec c_j , ki se bo uporabljal za določanje ekstrema stroškovne funkcije. b_{ub} določa zgornjo mejo neenakosti tako da moramo njegov i -ti element in i -t vrstico A_{ub} pomnožiti z -1 v kolikor želimo določiti spodnjo mejo.

Edina vrstica, ki je nisem našel že v datoteki z živili je ta, ki ima le enice, saj predstavlja metodo za omejitev mase.

Ker je A_{ub} že podan, je za ustrezni opis potrebno b_{ub} zapisati v enakih enotah, kot so uporabljeni v posamezni vrstici matrike. Iz nadaljnatega razmisleka je razvidno, da ima x_j enote 100 g.

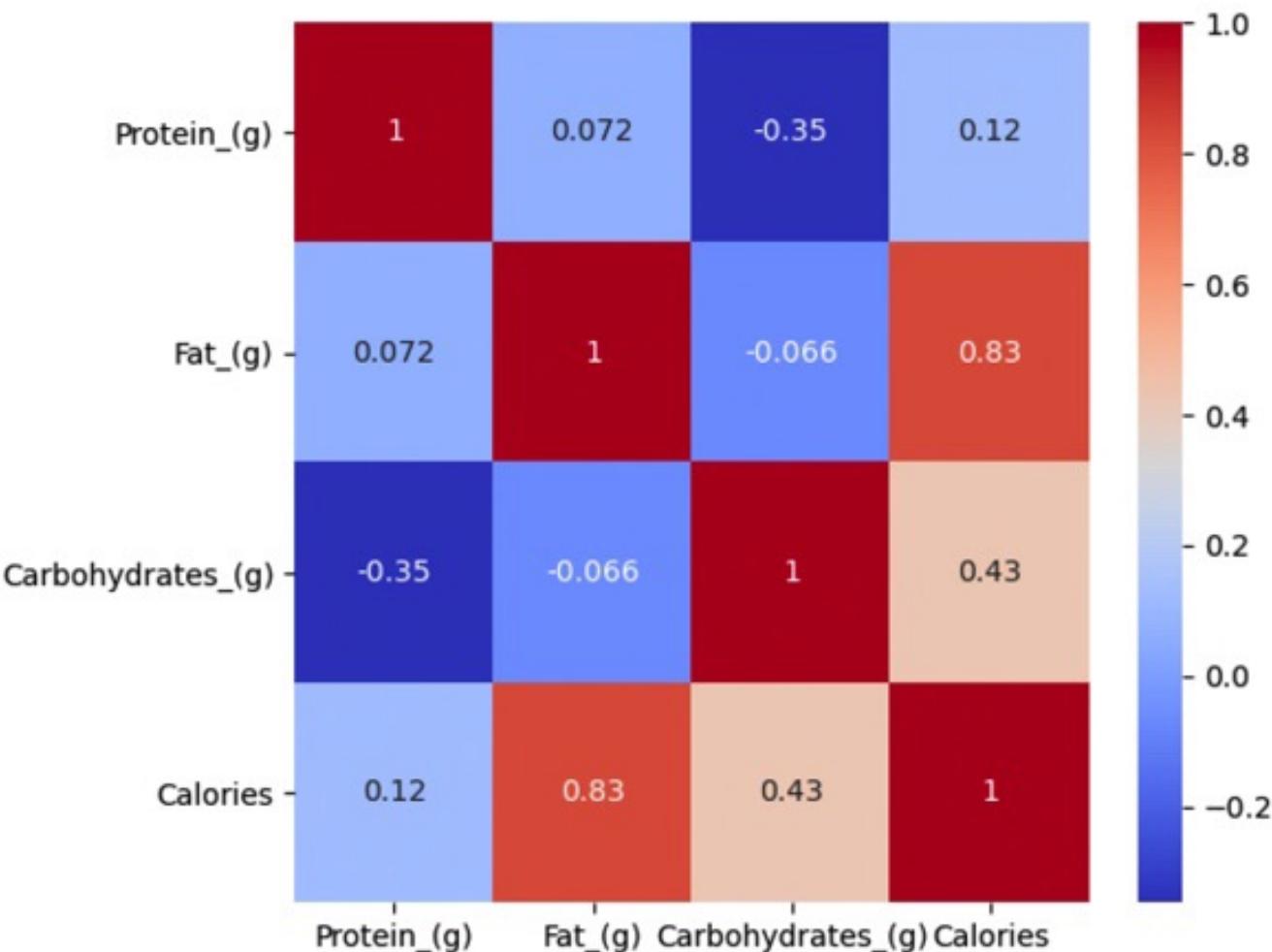


Slika 1: Grafičen prikaz komponent A_{ub} . Zaradi preglednosti je normirana po vrsticah, da se spravi vrednosti na enako velikostno skalo.

1 Minimizacija kalorij

V prvem delu naloge sem minimiziral količino kalorij z omejitvami priporočenega dnevnega vnosa prikazanih v tabeli 1. Najprej sem to počel le z omejitvami za maščobe, ogljikove hidrate, proteine, kalcij ter železo (slika 2) nato pa dodal še vitamin C, kalij ter natrij. Vedno sem uporabljal še pogoj, da masa dnevnega vnosa ne sme presegati 2 kg. V rezultatih količine hrane sem v tem poglavju in vseh naslednjih prikazal le te x_j , za katere velja $x_j \geq 10^{-3}$.

Sebastijan Škrbljnik: Korelacija.



Slika 10: Izračunane korelacijsne med posameznimi lastnostmi hrane. Ko naraščata obe količini hkrati, je med njima pozitivna korelacija. Če ena količina pada, in druga narašča, je med njima negativna korelacija.



MODELSKA ANALIZA 1

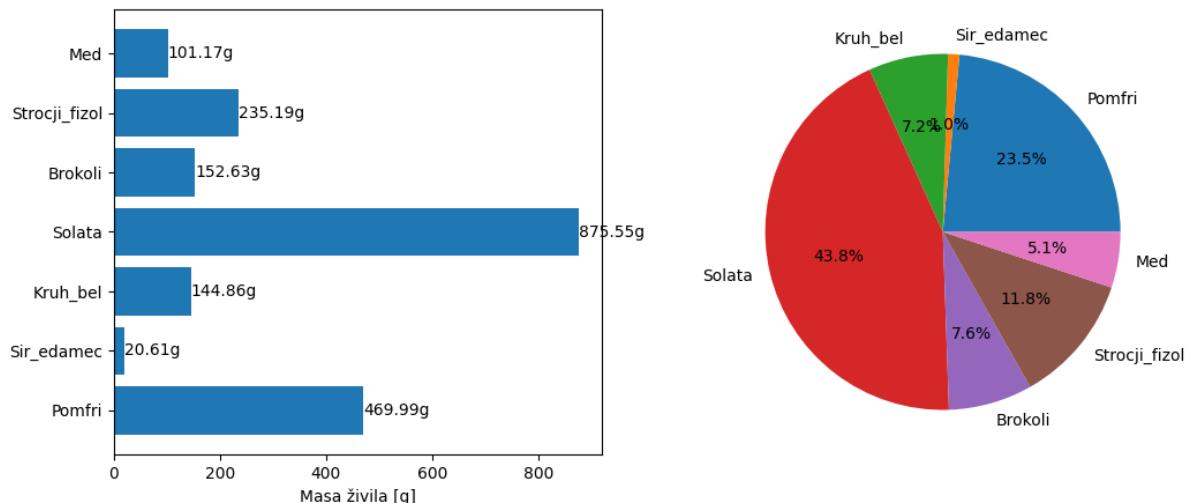
2. naloga - Linearno programiranje

Gregor Humar

Predavatelj: prof. dr. Simon Širca
Asistent: doc. dr. Miha Mihovilovič

2.5 Ogljični odtis

Nazadnje pa si poglejmo še nekaj drugega. V sedanjem času je poleg same prehrambene vrednosti živil pomemben tudi ogljični odtis, ki go povzroči pridelava posameznih živil. Za analizo tega problema osnovnemu naboru živil dodamo podatke o emisiji CO₂ pri pridelavi živil [1]. Na žalost se ti podatki ne ujemamo povsem z danim naborom podatkov, zato so nekateri vnesi izločeni, za nekatere vnose pa ni bilo točnih vrednosti zato so bile vzete povezane vrednosti za emisije CO₂. Vse spremembe so zabeležene v tabeli 10. Za začetek si poglejmo kako se spremeni dieta pri kateri minimiziramo kalorije pri minimalnih dnevnih vnosih hrani pri tem malce drugačnem naboru podatkov.

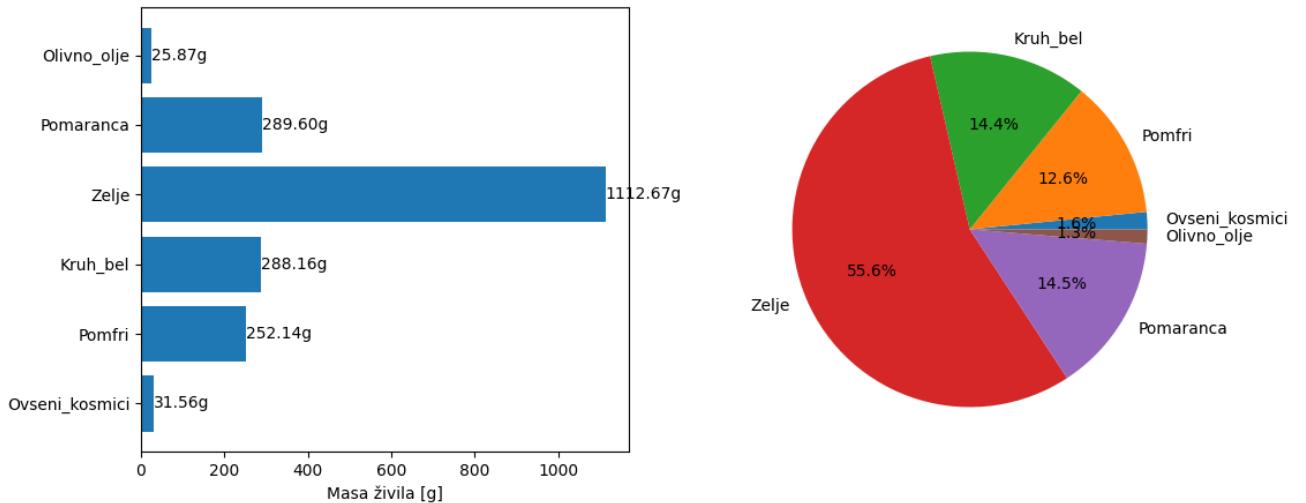


Slika 7: Dnevni nabor živil pri minimizaciji kalorij pri novem naboru živil.

Energija	1477.22kcal
Masa	2000.00g
Cena [EUR]	4.27€
Emisije CO ₂	1164.00g
Maščobe	70.00g
Ogljikovi hidrati	310.00g
Proteini	50.00g
Kalcij	1000.00mg
Železo	18.00mg
Vitamin C	314.24mg
Kalij	4867.98mg
Natrij	2400.00mg

Tabela 7: Podrobnosti diete pri minimizaciji kalorij pri novem naboru živil.

Dobljen jedilnik je precej drugačen zaradi izločitve nekaterih živil. Ostali jedilniki, ki smo jih že obravnavali, se pri novem naboru ne spremenijo tako dramatično. Ta dobljeni jedilnik lahko sedaj primerjamo, ko pri enakih pogojih minimiziramo emisije CO₂ namesto kalorij.



Slika 8: Dnevni nabor živil pri minimizaciji emisij CO₂.

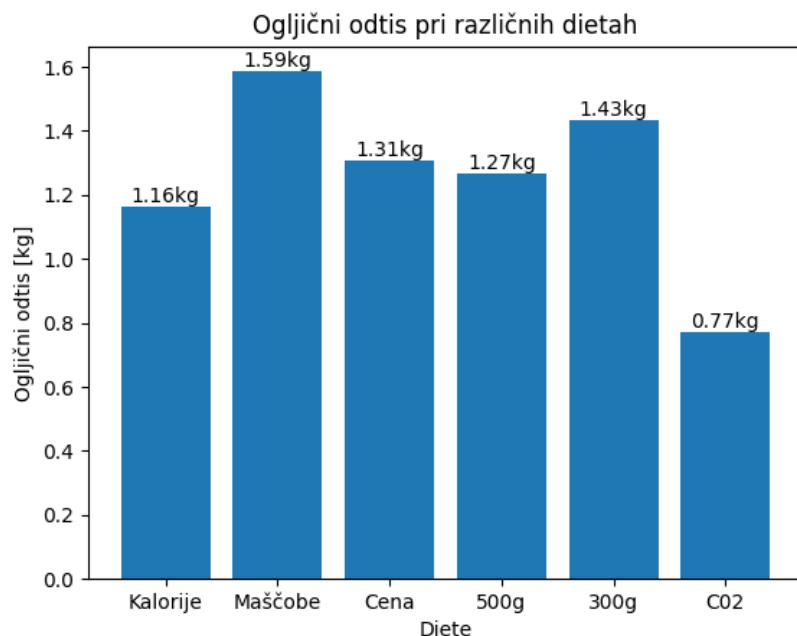
Energija	1760.40kcal
Masa	2000.00g
Cena	2.28€
Emisije CO ₂	772.00g

Maščobe	70.00g
Ogljikovi hidrati	310.00g
Proteini	58.24g
Kalcij	1000.00mg
Železo	18.00mg
Vitamin C	594.16mg
Kalij	4043.77mg
Natrij	2400.00mg

Tabela 8: Podrobnosti diete pri minimizaciji emisij CO₂.

Najbolj okolju prijazen jedilnik ima za skoraj tretjino manj emisij CO₂, pri tem pa pridobimo 283kcal. Dobeljen jedilnik vključuje morda nenavadno vključitev pomfrija, ki pa je najverjetneje posledica tega, da smo za pomfri vzeli enake vrednosti za emisije, kot za navaden krompir, nismo pa upoštevali olja uporabljenega v procesu priprave, ki pa ima nekoliko večji ogljični odtis.

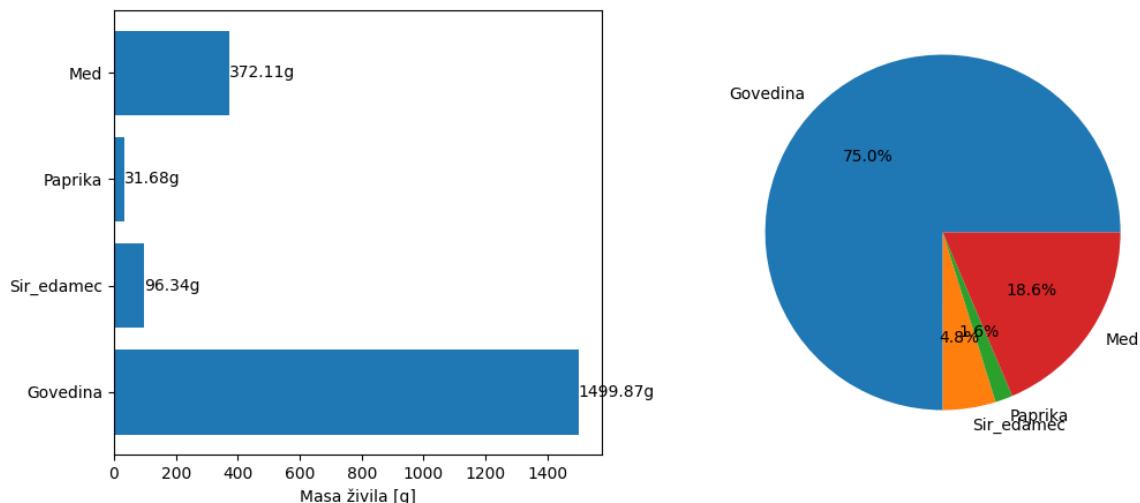
Po ogljičen odtisu lahko primerjamo vse diete, ki smo jih obravnavali.



Slika 9: Emisije CO₂ pri različnih dietah. Na x osi imamo navedeno, kaj miniziramo pri tej dieti. Tako pri "Kalorije"miniziramo število kalorij. Pri oznakah "300g"in "500g"prav tako minimiziramo kalorije, vendar omejimo posamezna živila na 300g oz. 500g.

Pričakovano je daleč najbolj okolju prijazna dieta, kjer minimiziramo emisije CO₂. Ostale diete so dokaj podobne druge drugi v tem pogledu.

Za konec si lahko pogledamo, kakšna dieta bi bila najbolj primerna za posameznika, ki želi, da njegove prehrambene navade povzročijo čim več emisij CO₂, pri tem pa upoštevamo minimalne dnevne vnose in pa seveda omejitev 2kg hrane dnevno.



Slika 10: Dnevni nabor živil pri maksimizaciji emisij CO₂.

Energija[kcal]	5293.36kcal
Masa	1999.99g
Cena	23.20€
Emisije CO ₂	40123.00g
Mascobe	326.82g
Ogljikovi hidrati	310.00g
Proteini	283.03g
Kalcij	1000.00mg
Železo	31.23mg
Vitamin C	60.00mg
Kalij	4866.39mg
Natrij	1935.07mg

Tabela 9: Podrobnosti diete pri maksimizaciji emisij CO₂.

Dobljena dieta močno poveča emisije na kar 40kg CO₂, hkrati pa se poveča tudi vnos kalorij, kar pa ni preveliko presenečenje, saj dieta predvideva kar ~ 1.5kg govedine na dan. Vsi, ki bi želeli s tako dieto škodovati okolju, bi tako najverjetneje kmalu naleteli na zdravstvene težave, na dobro vseh nas ostalih.

Literatura

- [1] A multilevel carbon and water footprint dataset of food commodities, <https://www.nature.com/articles/s41597-021-00909-8#Sec15>, (dostopano 17. 10. 2021)

A Tabela sprememb

Živilo	Zaznamek
Pomfri	Vzamemo vrednost za krompir
Edamec	Vzamemo vrednost za poltrdi sir
Nutella	Ni podatka
Kokice	Ni podatka
Ameriška pica	Ni podatka
Vsa zelenjava	Vzamemo podatke za zelenjavko, ki je zrasla na prostem (ne npr. v rastlinjaku)
Mortadela	Ni podatka
Marmelada	Ni podatka
Kakav	Ni podatka
Sol	Ni podatka
Radenska	Vzamemo vrednost za mineralno vodo
Traminec	Vzamemo vrednost za belo vino
Cabernet	Vzamemo vrednost za rdeče vino

Tabela 10: Tabela vseh sprememb v naboru živil, ki vključuje podatke o ogljičnem odtisu posameznih živil. Živila, za katera nimamo podatka o emisiji, izločimo iz nabora.

RCEB in literaturje

Modelska Analiza 1

2. naloga – Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Jure Pirman

20.10.2021

Linearni optimizacijski problem lahko v splošnem zapišemo kot m pogojev v obliki linearnih neenačb oz enačb z n spremenljivkami:

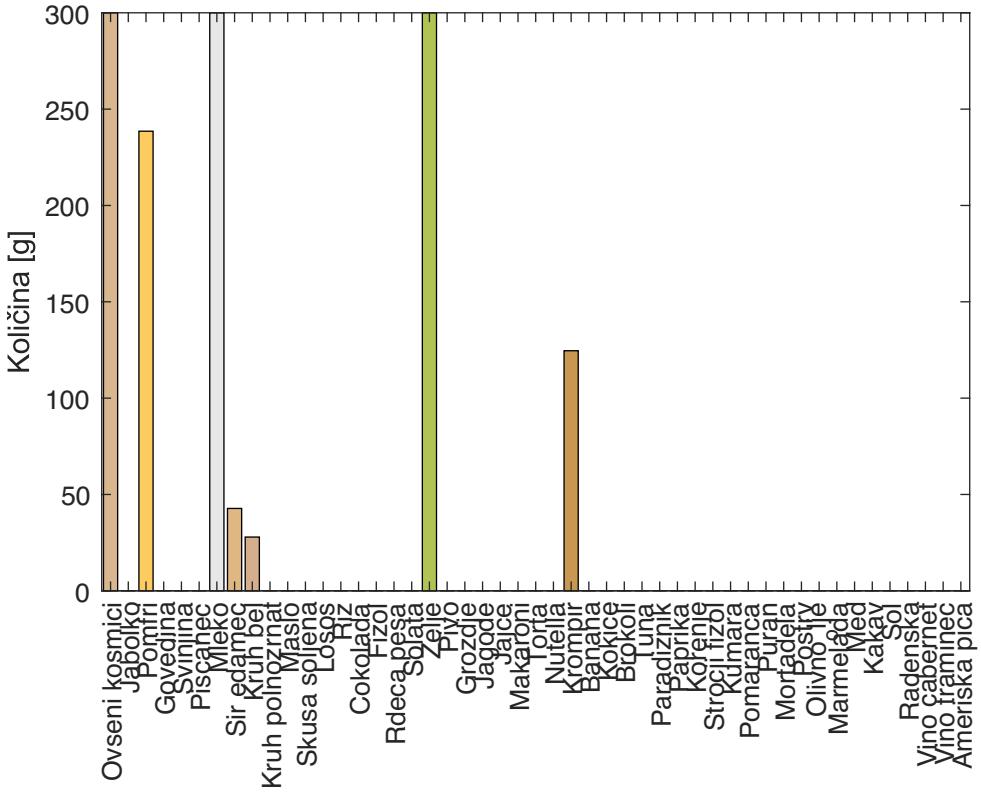
$$\sum_{i=1}^n a_{j,i}x_i \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} b_m, \quad (1)$$

ter funkcijo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, za katero iščemo ekstrem, ki ustreza izbranim pogojem.

Tekom celotne naloge veljajo splošni pogoji:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &\leq 2000\text{g}, \\ \sum_{i=1}^n q_{i,OgljikoviHidrati}x_i &\geq 310\text{g}, \\ \sum_{i=1}^n q_{i,Proteini}x_i &\geq 50\text{g}, \\ \sum_{i=1}^n q_{i,VitaminC}x_i &\geq 60\text{mg}, \\ \sum_{i=1}^n q_{i,Fe}x_i &\geq 18\text{mg}, \\ \sum_{i=1}^n q_{i,K}x_i &\geq 3500\text{mg}, \\ \sum_{i=1}^n q_{i,Na}x_i &\geq 500\text{mg}, \\ \sum_{i=1}^n q_{i,Fe}x_i &\leq 2400\text{mg}. \end{aligned} \quad (2)$$

Tu so $q_{i,u}$ mase snovi u na 100g hrane na i -tem mestu znotraj seznama hran. Naloga je reševana za vseh 49 hran na seznamu.



Slika 4: Rezultat za minimizacijo cene pri omejenih količinah na posamezno vrsto hrane

Dobimo rezultat, ki bi imel 1919kCal in bi stal 1.56€.

Združevanje povezanih omejitev

Zamislimo si problem v katerem obravnavamo več odvisnih parametrov. Oglejmo si najprej dva nasprotujuča parametrov. Tak problem je trivialen, ker lahko količine, ki jih optimiziramo razporedimo na lestvico od -1 do 1 . V kontekstu hrane bi lahko tako obravnavali npr. sladek in kisel okus, kjer bi se zelo sladke stvari nahajale na eni strani lestvice, zelo kisle pa na drugi strani. Večji problem je, ko nastopa večje število parametrov. Za primer sem se odločil, da bomo uvedli omejitev barve.

V splošnem lahko poljubno neprosojno barvo opišemo s tremi glavnimi barvami. Najbolj pogost način je uporaba RGB (rdeča, modra, zelena), pogosto pa se uporablja tudi CMY (cian, magenta, rumena). Za vsako hrano iz seznama sem poiskal sliko in ji določil posamezne deleže RGB seta, ki jih bomo označili

z R za rdečo, G zeleno in B za modro. Vrednosti posamezne barve se nahajajo na intervalu med 0 in 1. Tu lahko opazimo problem, ker iz izkušenj vemo, da dodajanje ene barve negativno vpliva na preostali dve barvi. Tak problem lahko iz treh spremenljivk lahko posplošimo na dve. Začnemo tako, da vsaki barvi lahko pripisemo enotski vektor \hat{r}_c iz iste ravnine. Poljubna vektorja pa oklepata 120° . Dobimo:

$$\begin{aligned}\hat{r}_R &= (0, 1), \\ \hat{r}_G &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ \hat{r}_B &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).\end{aligned}\tag{8}$$

Posamezno barvo lahko zapišemo kot:

$$\vec{r} = R\hat{r}_R + G\hat{r}_G + B\hat{r}_B.\tag{9}$$

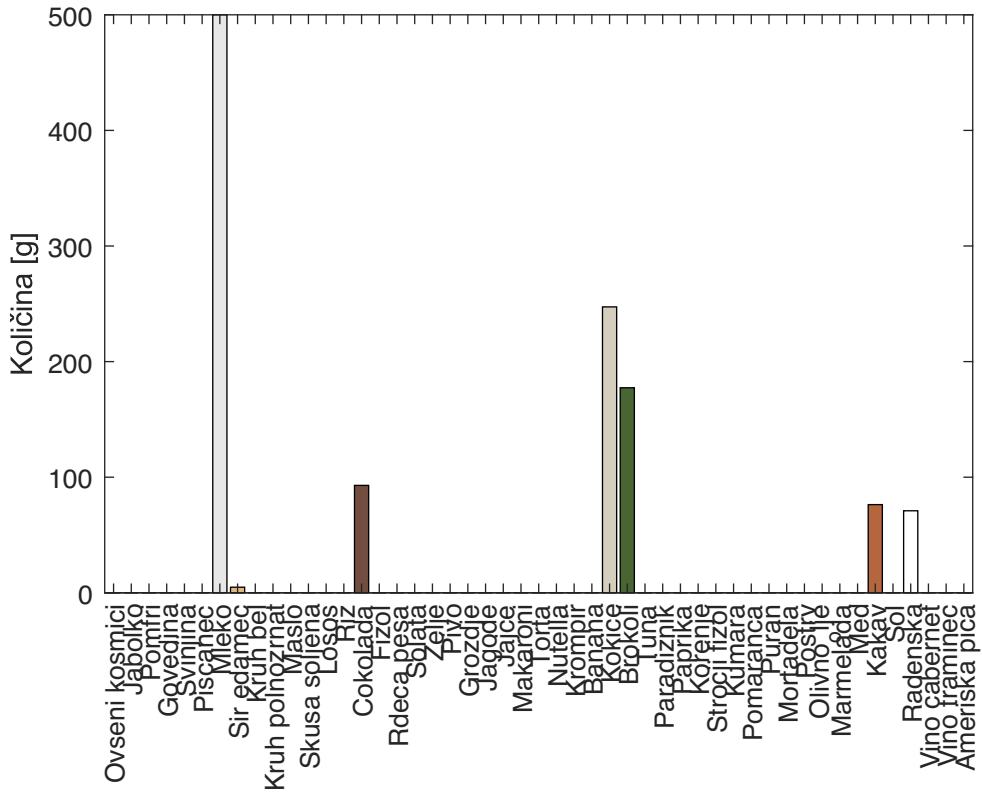
Uvedemo nova parametra u in v s katerimi opišemo barvo, za katere velja:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}.\tag{10}$$

Tu smo sicer izgubili podatek o svetlosti barve, o čemer se lahko prepričamo če izračunamo u in v za črno ($R = G = B = 0$) in za belo ($R = G = B = 1$). V obeh primerih dobimo rezultat $u = v = 0$.

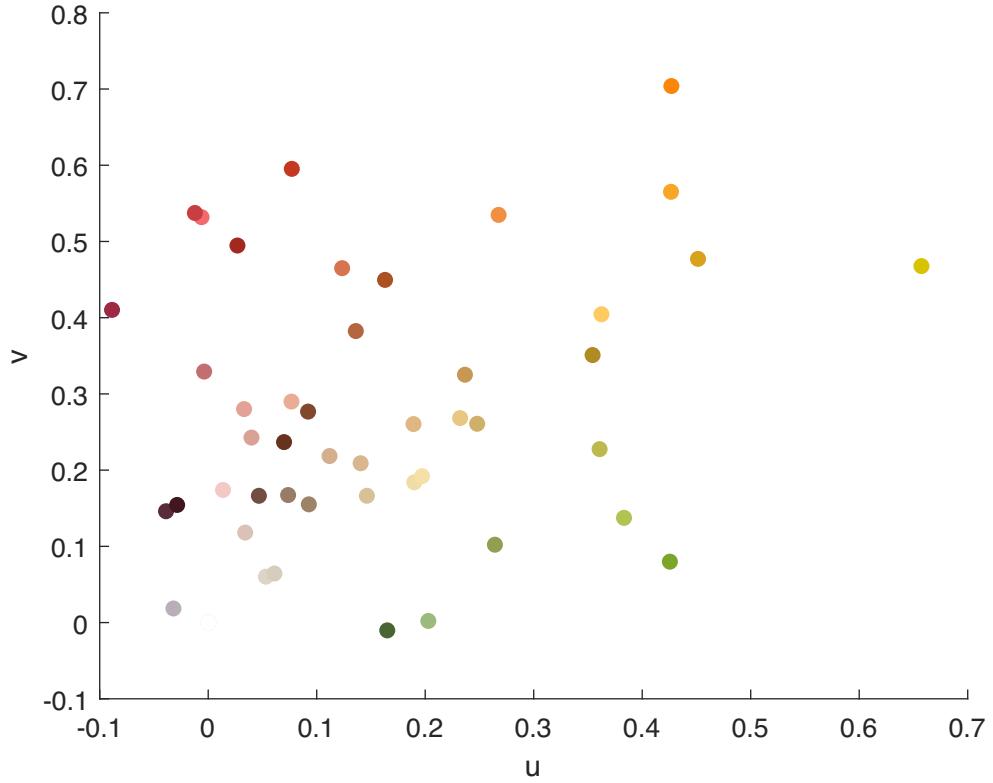
Uporabimo pogoje v enačbah (2), ter dodamo še:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n q_{i, \text{Mascobe}} x_i &\geq 70\text{g}, \\ x_i &\leq 500\text{g}, \\ 0.6 &\leq \sum_{i=1}^n u_i x_i \leq 0.6, \\ 0.6 &\leq \sum_{i=1}^n v_i x_i \leq 0.6.\end{aligned}\tag{11}$$



Slika 5: Rezultat za minimizacijo cene ter za pogoje omejitve barve

Dobimo rezultat ki ima skupno barvo . Tu je pomembno omeniti, da preozke meje u in v hitro povzročijo, da problem nima več nobene rešitve. To je posledica dejstva, da imamo malo hrane, ki je predvsem modre barve. To lahko opazimo tudi na sliki 6.



Slika 6: u in v vrednosti za vse hrane na seznamu.

Iterativno ponavljanje metode linearne programiranja

Tu sem imel idejo, da rešitev uporabimo, da popravimo oz. spremenimo vhodne parametre. Zamislim si lahko preprost "Supply-Demand" problem, v katerem si zamislimo skupino ljudi, ki se prehranjuje z najbolj cenovno optimalno hrano. Ker je povpraševanje po optimalnih hranah večje, jih tudi hitreje zmanjkuje, zaradi česar jim zraste cena. Zaradi višje cene se pojavi nova optimalna rešitev, ki ponovno vpliva na povpraševanje, ki posledično vpliva na ceno.

Problem je zastavljen tako, da začnejo vse hrane na isti ceni. Uvedemo vektor cen \vec{p}_k , tu smo s $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ označili število iteracij, kateri pripada vektor. Uvedimo še vektor rešitev \vec{x}_k , ki je dobljena za minimizacijo cene \vec{p}_k . Iterativni postopek opišemo z:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{k+1} &= \vec{p}_k + a \frac{\vec{x}_k}{|\vec{x}_k|}. \\ \vec{p}_0 &= b(1, 1, \dots, 1) \end{aligned} \tag{12}$$

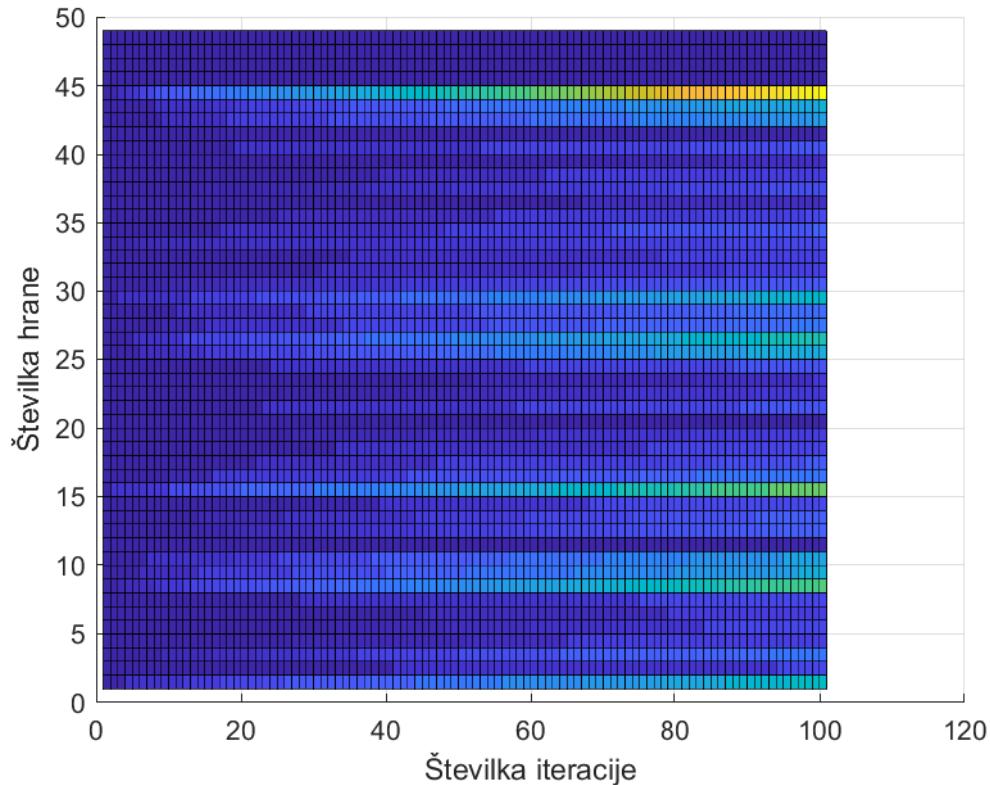
S konstantami a in b opišemo razvoj sistema.

Iteracija je reševana s pogoji navedenimi v enačbah (2), katerim so dodani še pogoji:

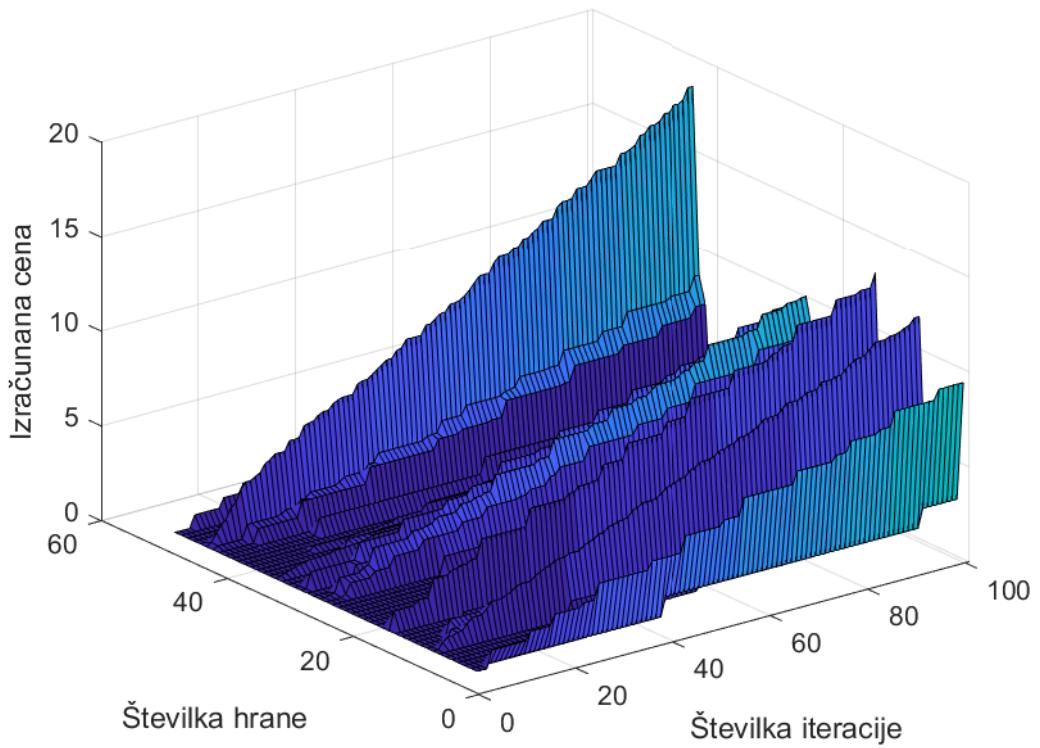
$$\sum_{i=1}^n q_{i,Mascobe} x_i \geq 70\text{g}, \quad (13)$$

$$x_i \leq 300\text{g}.$$

Za reševanje sta izbrana $a = 1$ in $b = 1$, to pomeni, da če je rešitev v neki iteraciji samo ena hrana, se tej podvoji cena. Bolj kot rezultati optimizacij nas tu zanima evolucija cene.

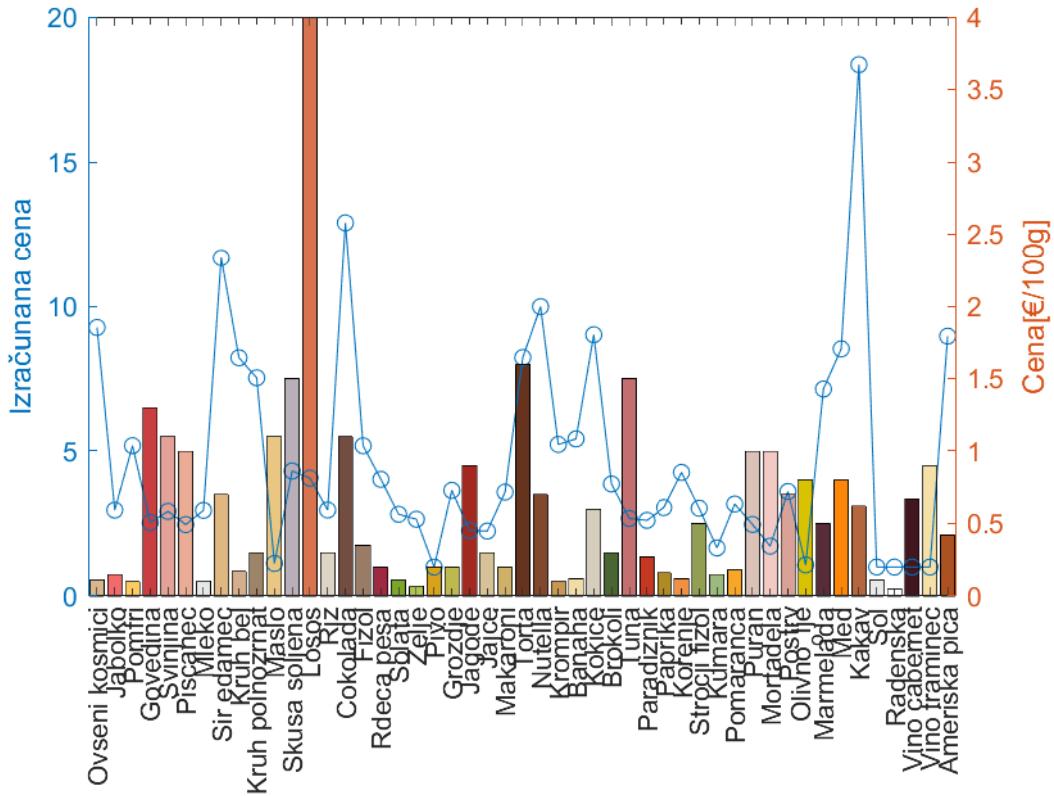


Slika 7: Barvni diagram iterativno določenih cen hrane pri različnih k .



Slika 8: 3D graf iterativno določenih cen hrane pri različnih k .

Na sliki 8 opazimo, da v grobem cena linearno narašča, ob podrobnejšem pogledu pa lahko opazimo pojave ki so dokaj periodični. Sedaj lahko pogledamo še primerjavo realnih ter izračunanih cen, ki je prikazana na sliki 9.



Slika 9: Primerjava izračunanih cen z realnimi.

Sklepamo lahko, da tak pristop ni primeren za modeliranje dokaj kompleksnega sistema kot so cene živil. Še vedno pa je rezultat take iteracije dokaj zanimiv, saj nam da vpogled, katera živila imajo v takem modelu večjo vrednost.

2. naloga – Linearno programiranje

Modelska analiza I

Kristjan Vermiglio

Oktober 2021

1 Naloga

Pri nalogi iščemo optimalno razmerje različnih živil, pri različnih robnih pogojih. Vedno želimo zaužiti priporočeno dnevno vsoto maščob, ogljikovih hidratov, proteinov, kalcija, železa, kalija, vitamina C in natrija. Vrednosti teh lastnosti nas zanimajo za čimmanj kaloričen meni, meni z malo maščobami ter najbolj poceni meni. Problem rešujemo z uporabo linearnega programiranja tako, da za vsak priporočeno vrednost definiramo vez, minimiziramo pa našo želeno vrednost.

2 Splošno reševanje

Nalogo sem se odločil reševati v python-u z knjižnico "gekko". Z funkcijo `.var` definiramo spremenljivke X_n , za nas je to količina vsakega živila $n \in 1, 2, 3, \dots, 50$. Vsako živilo ima deset lastnosti, ki jih lahko označimo z $a_{m..}$, $m \in 1, 2, 3, \dots, 10$. Definirajmo še želene robne vrednosti lastnosti b_m , npr maščob naj bo več kot 70g, sledi $b_1 = 70g$ in

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,50}x_{50} \geq b_1$$

to z knjižnico gekko definiramo kot `Equation(a1,1x1 + ... + a1,50x50 >= 70)`.

Podobno naredimo tudi za druge vezi. Nato definiramo še *cost funkcijo* oz. enačbo minimizacije z uporabo funkcije `.Minimize(c1x1 + ... + c50x50)`. Nazadnje z uporabo `.solve()` rešimo problem in z malo truda izpišemo rezultate. Nalogo se seveda z uporabo drugih funkcij, da rešiti tudi matrično,

$$A\vec{x} \geq \vec{b}$$

$$\vec{c}\vec{x} = \text{min/max}$$

3 Primer 1: Minimizacija kalorij.

Začnemo z definiranjem robnih vrednosti \vec{b}

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \text{vsota maščob} \\ \text{vsota ogljikovih hidratov} \\ \text{vsota proteinov} \\ \text{vsota kalcija} \\ \text{vsota železa} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 70g \\ 310g \\ 50g \\ 1000mg \\ 18mg \end{bmatrix} = \vec{b} \quad (1)$$

posebej je treba dodati še vez `[celotnamasa] <= 2000g`, ker ima obraten enačaj. Nato definiramo funkcijo minimizacije

$$\vec{c}\vec{x} = \text{vsota energije} = \text{min}$$

to da rešitev:

količina proteinov. Kar se tiče zdravja je hrana podobno, kot drugod zelo neraznolika, drugače meni da minimalizacija ni bistveno slabšala kvalitete hrane. Edinio živilo za katerega, bi lahko rekli, da ni zdravo je pomfri, ampak je po masi v mejah normale, (vseeno ne priporočam tega menija za vsakodnevno prehranjevanje). Osebno se mi zdi večji problem količina mleka, 0.7 litra je malo pretirano.

Količino pomfrija lahko verjetno rahlo zmanjšamo, če nazaj uvedemo vezi za Natrij, Kalij in vitamin C.

živilo	masa[kg]	en[kcal]	mascobe[g]	cena[eur]	OH[g]	prote[g]	Ca[mg]	Fe[mg]
Ovseni kosmici	0.629	2320.592	38.362	0.692	402.487	97.477	339.599	29.558
Pomfri	0.118	109.301	14.103	0.118	25.327	2.304	5.876	0.411
Mleko	0.536	321.447	17.412	0.536	24.216	17.251	605.392	0.161
Zelje	0.123	30.708	0.123	0.086	7.124	1.572	49.133	0.577
skupaj	1.406	2782.048	70.0	1.431	459.155	118.604	1000.0	30.707

Tabela 6: Minimizacija cene dodatne vezi.

Z uvedbo dodatnih vezi se celotna cena rahlo poveča. Poleg tega se poveča tudi masa hrane, energija, količina ogljikovih hidratov, proteinov in železa. Kar se tiče sestave obroka, se je bistveno povečala količina ovsenih kosmičev in kot smo predvideli zaradi vezi Natrija je količina pomfrija rahlo padla. Zaradi vezi vitamina C pa se je na meniju namesto olivnega olja pojavilo zelje.

6 Primer 4: Izboljšava uravnoteženosti prehrane:

Iz tabel nalog 1 do 3 vidimo, da navadno dobimo manj kot pet različnih živil, ter da so rezultati večinoma nesmiselni npr. 1.5 kg soli. Povečanje raznolikosti lahko poskusimo uvesti na več načinov. Prvi in najlažji je, da za vsako živilo posebej dodamo vez $a_{nm}x_n \leq b_m$. Vrednost b_m je lahko enaka za vse živila (npr. 200g) ali vsako omejimo posebej (npr. soli je že pri nekaj deset gramih preveč, medtem ko lahko krompirja ali pašte pojemo tudi rahlo več kot 200g). Poleg tega, bi lahko vsakemu živilu, kot lastnost dodali faktor zadovoljstva (npr. oceno od 1 do 5) in dodali vez $\text{zadovoljstvo} > 7$.

Druga možnost je, da nekatera živila vežemo skupaj (npr. Vedno, ko pojemo 10g nutele pojemo tudi 30g kruha, podobno z marmelado, medom in drugimi namazi).

$$x_{nutela} - \frac{1}{3}x_{kruh} < 0$$

$$x_{marmelada} - \frac{1}{3}x_{kruh} < 0$$

...

Problem s tem sistemom je, da je takih vezi poljubno veliko in je odvisno od nas v kakšnih razmerjih jih definiramo. Poleg tega če vežemo (npr. piščanec s pašto in piščanec s rižem) ter dobimo vsa tri živila v optimizirani tabeli, je razmerje med piščancem in pašta+riž zdaj napačno. Torej, bi rabili vsa tri živila vezati skupaj, kar začne predstavljati veliko pisanja in razmišljanja. Načeloma, bi lahko na internetu piskali nekaj sto receptov različnih obrokov, za vsakega preračunali procentualno razmerje živil, opravili minimizacijo po receptih, ter vrednosti nazaj prenesli na živila. A se mi je zdel ta postopek zelo zamuden, zato sem se raje odločil za tretjo rešitev.

Reševanj na tretji način sem se lotil z vprašanjem. Ali se poleg optimalne rešitve, da dobiti tudi povrsti razporejene naslednje suboptimalne rešitve? V tem primeru, bi lahko generirali naslednjo rahlo slabšo rešitev, ter preverili ali število različnih živil zadovoljivo. Če ne, generiramo naslednjo najboljšo in jo ponovno preverimo. Mogoče se tak algoritom da, narediti ampak v smiselnem času brskanja po internetu nisem dobil uporabne literature, zato sem se zadovoljil z rahlo slabšo različico programa.

Ko enkrat dobimo optimalno rešitev preverimo, če ima zadovoljivo raznolikost živil. Če ne, dodamo vez, ki to rešitev prepove, ter ponovno rešimo celoten sistem. Za vez sem se odločil, da uporabimo živilo rešitve z največjo maso, ter ga pri naslednji ponovitvi omejimo par procentov pod trenutno maso. To lahko ponavljamo, dokler ne dobimo zadovoljivega števila različnih živil.

$$x_{zivilo z največjo maso} < ab_{trenutna masa tega zivila}$$

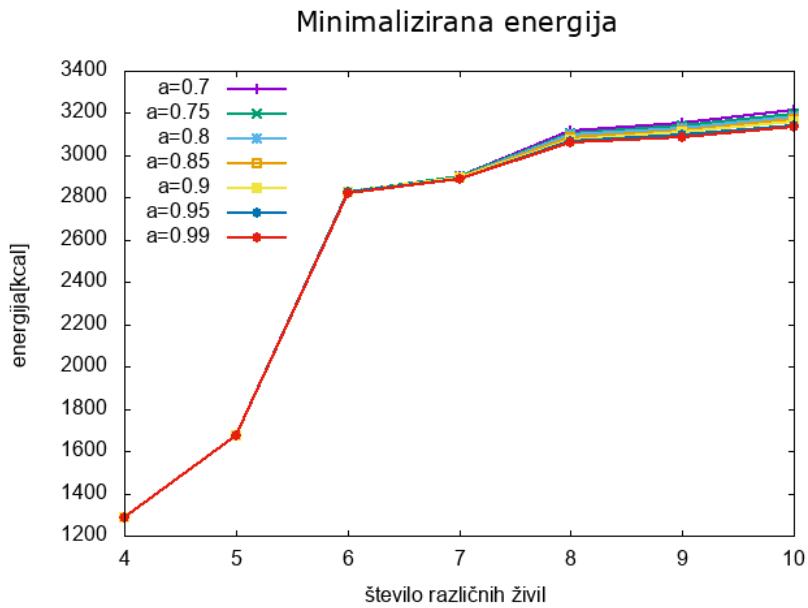
Ta princip sem uporabil na enakih robnih in minimizacijskih pogojih, kot naloga 1a. Ko določimo, da mora rešitev vsebovati vsaj 8 različnih živil za faktor $a = 0.8$ dobimo:

živilo	masa[kg]	en[kcal]	mascobe[g]	cena[eur]	OH[g]	prote[g]	Ca[mg]	Fe[mg]
Pomfri	0.146	135.516	17.486	0.146	31.402	2.856	7.286	0.51
Govedina	0.36	913.732	71.947	4.677	0.0	61.767	64.753	6.979
Cokolada	0.021	117.003	6.858	0.229	11.43	1.87	45.72	0.831
Jajce	0.116	179.218	12.268	0.347	1.295	14.546	57.812	1.376
Banana	0.774	689.104	2.555	0.929	176.844	8.44	38.714	2.013
Puran	0.197	227.063	3.08	1.974	0.0	46.518	23.693	2.35
Postrv	0.14	206.709	9.232	0.978	0.0	29.009	60.057	2.095
Med	0.015	46.773	0.0	0.123	12.678	0.046	0.923	0.065
Am pica	0.231	615.436	23.137	0.972	76.351	25.45	701.041	1.782
skupaj	2.0	3130.552	146.563	10.374	310.0	190.502	1000.0	18.0

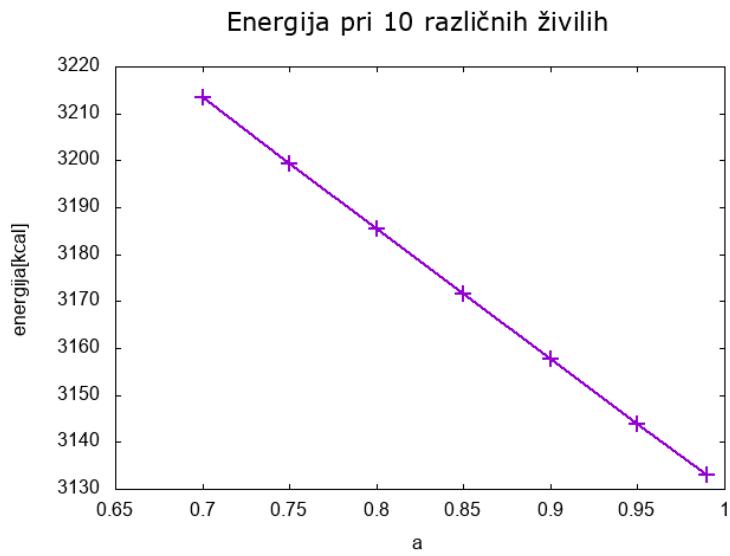
Tabela 7: Minimizacija energije z vsaj 8 različnimi živili.

Na tabeli hitro vidimo, da je minimalna energija skoraj trikrat večja, kot če dovolimo, da je meni sestavljen samo iz štirih živil. Za dvakratnik se povečajo tudi mašcobe, cena in proteini. Količina ogljikovih hidratov, kalcija in železa pa je enaka robnim pogojem.

Ker se mi je minimalna energija zdela visoka, sem preveri kako nanjo vpliva faktor a .

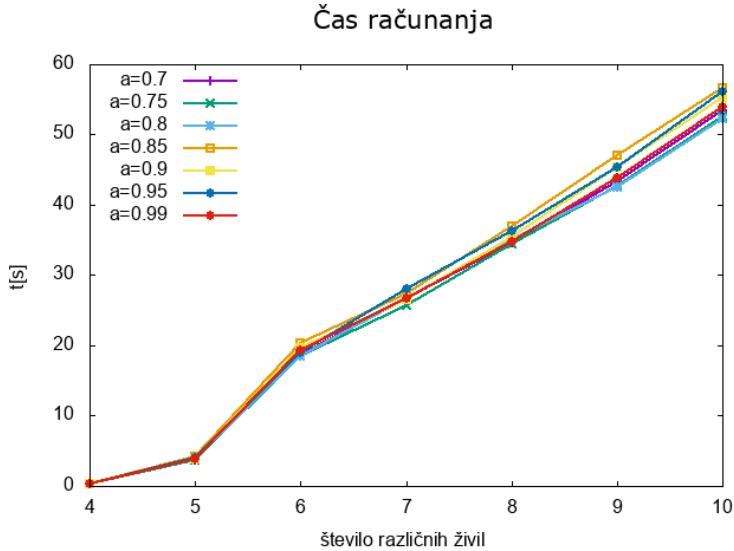


Slika 1: Na grafu vidimo, da z naraščanjem števila različnih živil, narašča tudi minimizirana energija. Poleg tega z naraščanjem števila živil, narašča tudi razlika med izračuni, z uporabo različnih faktorjev a .



Slika 2: Zanimivo se vrednost energije z večanjem faktorja a linearno približuje končni točki, pri $a = 1$ je živila skupaj predstavljajo okoli 3130kcal

Nazadnje se lahko uprašimo še po časovni zahtevnosti metode.



Slika 3: Vidimo da, z večanjem števila živil, časovna zahtevnost narašča približno linearno za vse faktorje a . To sem poskusil preveriti z izračunom za 30 različnih živil, kar je trajalo krepko čez 10 minut in s tem nakazuje, da odvisnost dejansko narašča eksponentno.



Slika 4: V nasprotju z sliko 2, čas komputacije zgleda neodvisen od faktorja a . Razlike v času lahko pripisemo ne konstantni računski moči računalnika, zaradi procesov, ki so se med računanjem dogajali v ozadju. Torej lahko brez kompromisov a nastavimo blizu vrednosti 1 in dobimo zelo natančne rezultate.

Rast iene menja

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

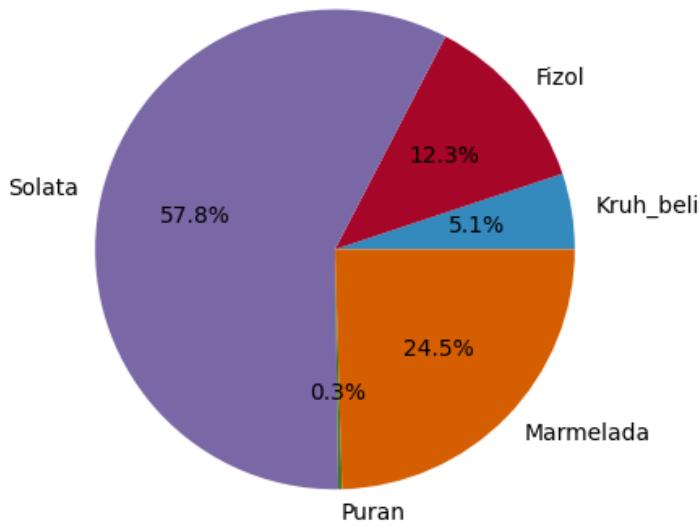
2. domača naloga

Modelska analiza 1

Bor Jamnik

AKADEMSKO LETO 2021/2022

Diagram porazdelitve mase dnevne prehrane,
skupaj 7.44 g maščob, 2.0 kg hrane, 4.81 EUR.



Slika 4: Tortni diagram hrane ob standardnih zahtevah. Minimiziramo vnos maščob.

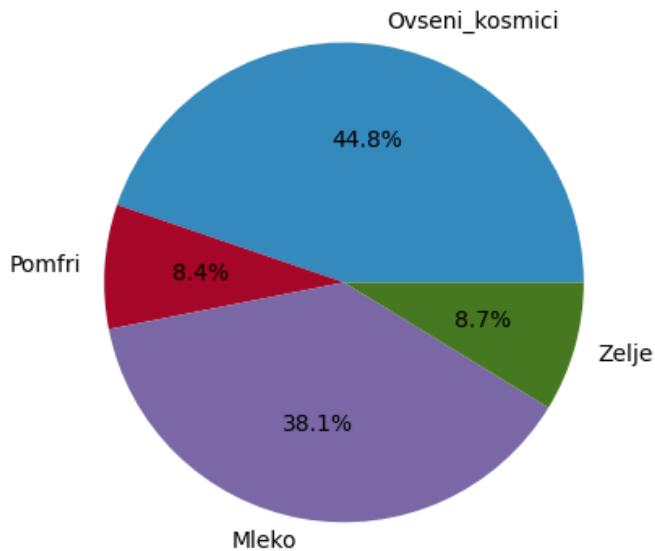
Vidimo da je, tudi ob minimizaciji vnosa maščob, solata še vedno glavni del naše prehrane. Pričakovano iz izbora izpade pomfri, pridružita pa se fižol in manjša količina purana. V tej dieti malce v oči bode skoraj 0,5 kg marmelade, kar najverjetneje ni čisto smiselno. Opazimo, da se ob minimizaciji količina maščob zniža na le 7,44 , medtem ko smo prej želeli vnos vsaj 70 g dnevno. Cena ostane skorajda enaka.

4 Minimizacija cene - tipična študentska zah-teva

Ker smo študenti pregovorno finančno slabše preskrbljeni, hkrati pa se zavedamo reka “zdrav duh v zdravem telesu,” si želimo najti seznam živil, ki bo čim cenejši, hkrati pa nam bo prinesel vse potrebne snovi za (zdravo) življenje. Minimiziramo torej ceno, hkrati pa obdržimo standardne zahteve,

v katerih želimo tako vsaj 2000 kcal in vsaj 70 g maščob. Dobljeni seznam prikažem v sliki (5) in tabeli (5).

**Diagram porazdelitve mase dnevne prehrane,
skupaj 1.43 EUR, 1.4 kg hrane.**



Slika 5: Tortni diagram hrane ob standardnih zahtevah. Minimiziramo ceno.

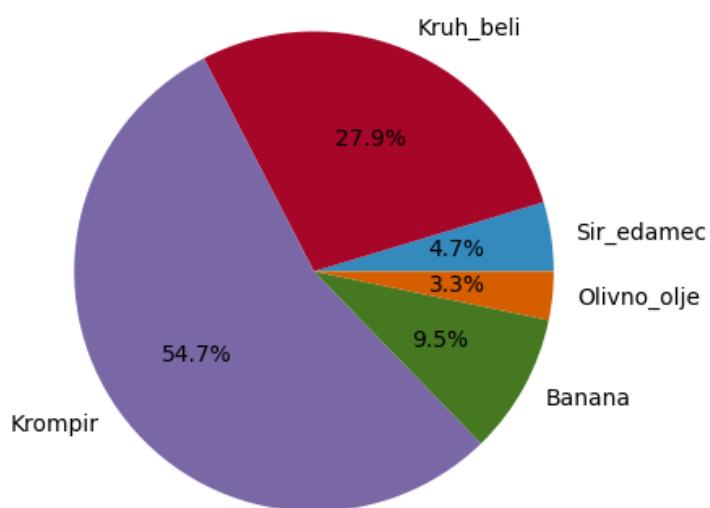
Živilo	Masa [g]
Ovseni kosmiči	628,89
Pomfri	117,53
Mleko	535,75
Zelje	112,83

Tabela 5: Optimiziran seznam števil ob standardnih zahtevah. Minimiziramo ceno.

Po naših izračunih naj bi bila študentova prehrana torej sestavljena iz zajtrka in večerje ovsenih kosmičev z mlekom, med predavanji pa bi si privoščili majhno kosilo pomfrija z zeljem. Ker pa je dnevni meni, sestavljen iz le 4 vrst

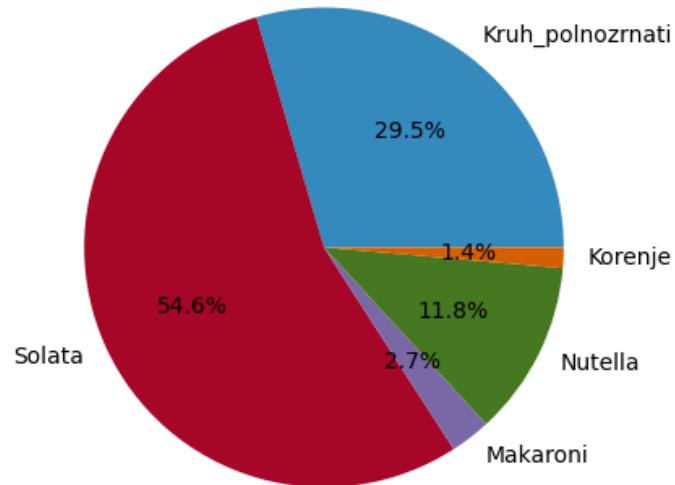
hrane malenkost monoton, nas zanima kako bi sestavili optimalne sezname hrane za vsak dan v tednu, če v istem tednu določene hrane ne želimo jesti več kot enkrat. Tako bomo za vsak nov dan iskali jedilnik z najnižjo mogočo ceno, v katerega pa ne bo mogoče vnesti jedi, ki smo jih pretekli teden že jedli. Da prihranim nekaj prostora in časa (čas je namreč denar, tega pa želimo v tem delu naloge prihraniti), bom v nadaljevanju podajal le tortne diagrama za optimizirane izbore jedi od 2. do 7. dneva v tednu.

**Diagram porazdelitve mase dnevne prehrane, drugi dan
skupaj 2.13 EUR, 1.24 kg hrane.**



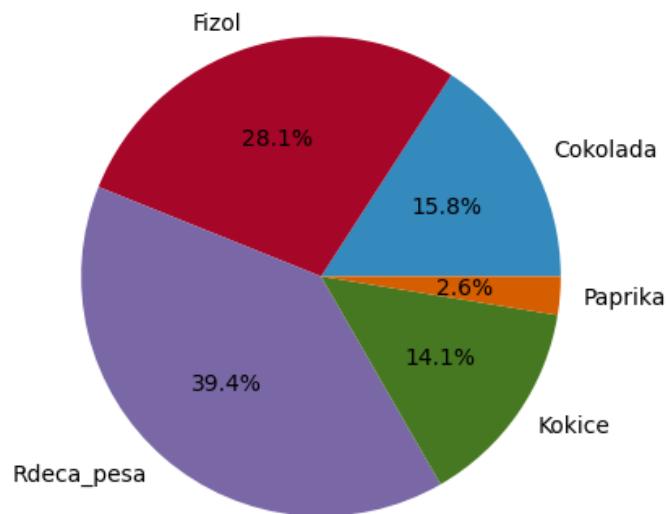
Slika 6: Tortni diagram hrane ob standardnih zahtevah. Minimiziramo ceno. Drugi dan.

Diagram porazdelitve mase dnevne prehrane, tretji dan
skupaj 3.41 EUR, 1.37 kg hrane.



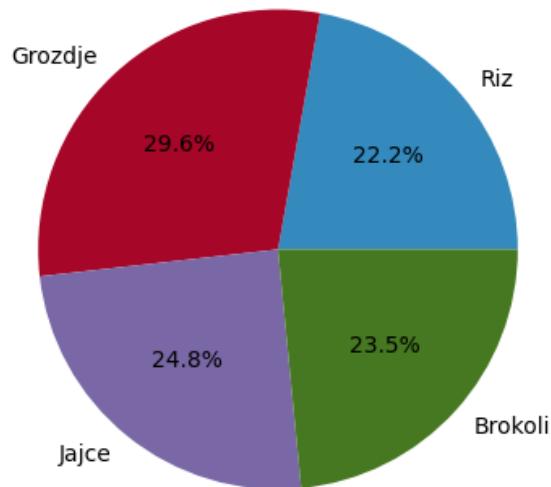
Slika 7: Tortni diagram hrane ob standardnih zahtevah. Minimiziramo ceno.
Tretji dan.

Diagram porazdelitve mase dnevne prehrane, četrti dan
skupaj 4.53 EUR, 0.85 kg hrane.



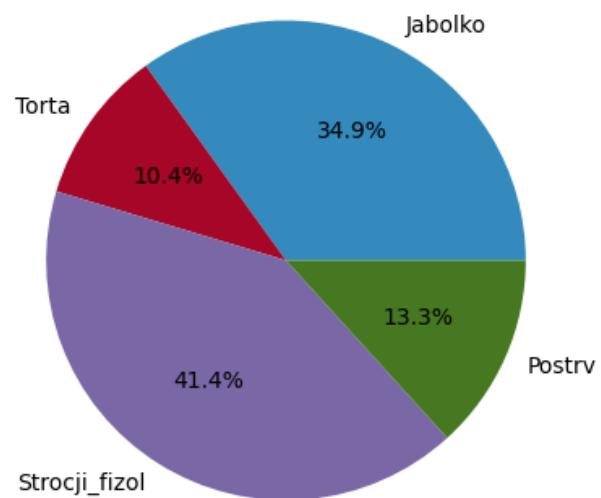
Slika 8: Tortni diagram hrane ob standardnih zahtevah. Minimiziramo ceno.
Četrti dan.

Diagram porazdelitve mase dnevne prehrane, peti dan
skupaj 5.71 EUR, 1.8 kg hrane.



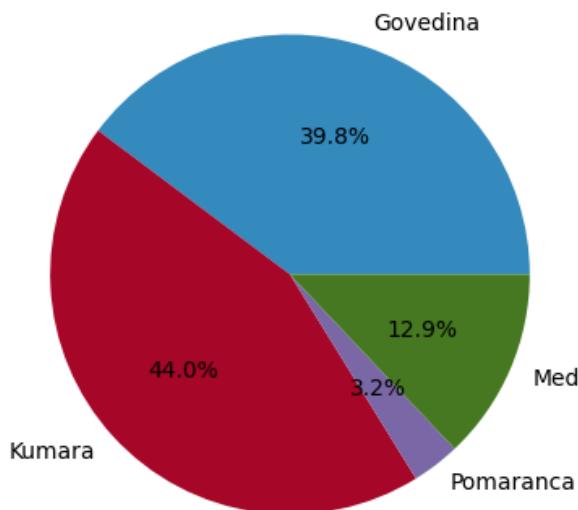
Slika 9: Tortni diagram hrane ob standardnih zahtevah. Minimiziramo ceno.
Peti dan.

**Diagram porazdelitve mase dnevne prehrane, sesti dan
skupaj 9.04 EUR, 1.5 kg hrane.**



Slika 10: Tortni diagram hrane ob standardnih zahtevah. Minimiziramo ceno. Šesti dan.

**Diagram porazdelitve mase dnevne prehrane, sedmi dan
skupaj 12.94 EUR, 1.67 kg hrane.**



Slika 11: Tortni diagram hrane ob standardnih zahtevah. Minimiziramo ceno. Sedmi dan.

Ugotovimo, da so vsi dnevni seznamni hrane smiselni, če smo pozorni le na deleže, ki pripadajo posamezni hrani. Toda četrti dan zaužijemo le $0,85 \text{ kg}$ hrane, kar nam občutka lakote verjetno ne bo potešilo, čeprav je zaužita hrana dovolj kalorična. Smiselno bi bilo tako morda uvesti dodaten parameter - npr. da želimo pojesti vsaj $1,2 \text{ kg}$ hrane, da bi dobili jedilnike, pri katerih bi zaužili večjo količino hrane.

Sicer pa je zanimivo tudi spremljanje (rasti) cene, ko izločamo cenejša živila. Vidimo, da od prvega do petega dne cena raste za približno 1 EUR na dan, nato pa šesti in sedmi dan kar močno poskoči (slika 12).



Slika 12: Rast cene skozi teden, če izločamo že uporabljenia živila. Še vedno minimiziramo ceno.

5 Minimizacija ob omejevanju količine posameznega živila

Do sedaj so imeli vsi seznamy jedi eno skupno lastnost - bili so precej monotoni. Na vsakem seznamu se je znašlo 4-6 živil, ki so skupaj doprinesla vsa potrebna hrana. Tokrat želimo, da nobeno od živil ne bo preseglo dnevne porabe 200 g.

5.1 Minimizacija zaužitih kalorij

Kot v začetku domače naloge bomo minimizirali količino kalorij. Spet rezultate predstavimo na sliki (13) in tabeli (6).