

Modelska analiza I

Naloga 101

14. 10. 2021



1. naloga – Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Varčno vožnjo lahko definiramo s pogojem, da je pospeševanja in zaviranja čim manj. To lahko dosežemo z minimizacijo kumulativnega kvadrata pospeška. Iščemo optimalni režim vožnje v situaciji, ko poskušamo razdaljo do semaforja prevoziti ravno v trenutku, ko se prižge zelena luč.

1. Prepiši problem v brezdimenzijsko obliko.
2. Variacijski račun daje možnost, da določimo ekstrem tudi brez (enega) robnega pogoja: temu je ekvivalentna zahteva $d\mathcal{L}/dy = 0$ v drugi robni točki. Kakšna je torej optimalna vožnja pri poljubni končni hitrosti?
3. Kaj dajejo še druge možnosti izbire funkcionala, na primer višje potence absolutne vrednosti pospeška? Zanimiv praktični pomen ima limita, ko gre eksponent proti neskončnosti.
4. Kakšna je pa optimalna vožnja, če poleg pospeška tudi velikost hitrosti omejimo s kvadratičnim členom v funkcionalu? Koliko je zdaj prostih parametrov problema?
5. Zanimivo je tudi iskanje rešitve za zaporedne semaforje. Kako bi zagotovili zveznost pospeška ob prehodu semaforja?

6.



Slika 1. Avtomobil vozi z začetno hitrostjo v_0 . Od semaforja je oddaljen za l .

Ama Štempar

Naloga 1 im 2:

Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Modelska Analiza 1

Domača naloga 1

Avtor: Maj Mejak

Vpisna številka: 28212027

9. oktober 2021

1 Formulacija problema

Pri domači nalogi sem z variacijskim računom poiskal najbolj *varčno vožnjo* skozi za l_0 oddaljen semafor, čigar zelena luč se prižge v znanem času t_0 . Varčno vožnjo sem v svojem modelu matematično definiral na različne načine; z besedami pa jo najbolje opišemo z vožnjo, kjer je pospeševanja ter zaviranja čim manj.

Vožnjo do semaforja opišem z odvedljivo funkcijo hitrosti $v(t)$, za katero veljajo sledeče omejitve:

1. V času t_0 , ko se prižge na semaforju zelena luč, bo avto ravno prevozil razdaljo do semaforja:

$$l_0 = \int_0^{t_0} v(t) dt. \quad (1)$$

2. Na začetku ima avto neko začetno hitrost v_1 :

$$v(t=0) = v_1. \quad (2)$$

Varčnost vožnje definiramo s funkcionalom $F(v) : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$, ki slika iz prostora funkcij hitrosti $v \in \mathcal{W}$, ki ustreza zgornjim omejitvam (1), (2), v realna števila:

$$F(v) = \int_0^{t_0} \mathcal{L}(v, \dot{v}, t) dt. \quad (3)$$

\mathcal{L} predstavlja *Lagrangevo funkcijo*, ki zajema matematični pogoj za varčno vožnjo. Optimalna vožnja za izbran \mathcal{L} ustreza minimumu funkcionala na prostoru funkcij \mathcal{W} :

$$F(v) = \min.$$

Optimalno udobno vožnjo s čim manj pospeševanja lahko definiramo kot vožnjo, ki minimizira kumulativni kvadrat pospeška. V \mathcal{L} moramo dodati še člen s prostim *Lagrangevim multiplikatorjem*, saj smo omejeni z **vezjo** (1).

$$\mathcal{L} = \dot{v}^2 - \lambda v. \quad (4)$$

1.1 Brezdimenzijska oblika (naloge 1)

Prepišimo problem v **brezdimenzijsko obliko**, kjer hitrost normiramo s hitrostjo $v_0 = l_0/t_0$, s katero bi enakomerno prevozili razdaljo do semaforja včasu t_0 :

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = t/t_0, \\ x &\rightarrow x' = x/l_0, \\ v &\rightarrow v' = v/v_0. \end{aligned}$$

Pogoj, da prevozimo semafor ravno ob času $t' = 1$ (1), prepišemo kot:

$$\int_0^1 v'(t') dt' = 1. \quad (5)$$

V brezdimenzijski obliki v funkcional (3) vpeljemo novo spremenljivko $t' = t/t_0$:

$$\tilde{F}(v') = \int_0^1 \mathcal{L}(v', \dot{v}', t') dt'. \quad (6)$$

V Lagrangevi funkciji (4) nadomestimo časovni odvod $\partial_t \rightarrow \partial_{t'}$ ter dobimo analogen izraz (skalarni faktor zaradi zamenjave spremenljivk $\frac{v_0^2}{t_0^2}$ ne vpliva na rezultat minimizacije):

$$\mathcal{L} = \frac{v_0^2}{t_0^2} \dot{v}'^2 - v_0 \lambda v' \rightarrow \mathcal{L}' = \dot{v}'^2 - \lambda' v' \quad (7)$$

V nadaljevanju poročila **uporabljam le brezdimenzijsko obliko** ter za oznakami brezdimenzijskih količin **izpustim simbol'**.

1.2 Euler-Lagrangeve enačbe

Za funkcijo hitrosti $v \in \mathcal{W}$, ki pripada minimumu funkcionala (6) velja *Euler Lagrangeva enačba* (1):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0. \quad (8)$$

Pri nalogi smo zaenkrat specificirali le en robni pogoj (2), medtem ko na drugem krajišču intervala še nismo določili robnega pogoja, saj bomo v nadaljevanju preučili različne situacije. Lahko pa robni pogoj povsem izpustimo ter iščemo optimalno hitrostno odvisnost pri poljubni končni hitrosti. V tem primeru mora za $t = 1$ veljati (1):

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right|_{t=1} = 0. \quad (9)$$

To dejstvo sledi iz izpeljave Euler-Lagrangevih enačb, kjer optimalno funkcijo v_* variiramo s poljubno funkcijo η : $v = v_* + \epsilon\eta$, ki ustreza robnim pogojem:

$$\frac{dF(v_* + \epsilon\eta)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \eta \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right|_0^1 - \int_0^1 \eta \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \right] dt = 0, \quad \text{za poljubno funkcijo } \eta. \quad (10)$$

Za Lagrangevo funkcijo (7) dobimo diferencialno enačbo:

$$\ddot{v} = -\frac{\lambda}{2},$$

s splošno rešitvijo:

$$v(t) = -\frac{\lambda}{4}t^2 + At + B, \quad (11)$$

kjer sta A in B konstanti, ki ju določim z robnimi pogoji, multiplikator pa izvrednotimo s pomočjo vezi (5).

2 Rešitve problema (naloge 2)

Vsem rešitvam je skupen robni pogoj (2), ki definira konstanto $B = v'_1 = v_1/v_0$. Za različne robne pogoje na drugem krajišču si oglejmo rešitve problema:

1. **Poljubna končna hitrost** na semaforju. Konstanta A je določena s pogojem (9):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \Big|_{t=1} = 2 \dot{v}|_{t=1} = 0.$$

Temu je ekvivalentno, da na semaforju dosežemo ekstremno hitrost, posledično je $A = \lambda/2$, multiplikator pa določen z vezjo (5):

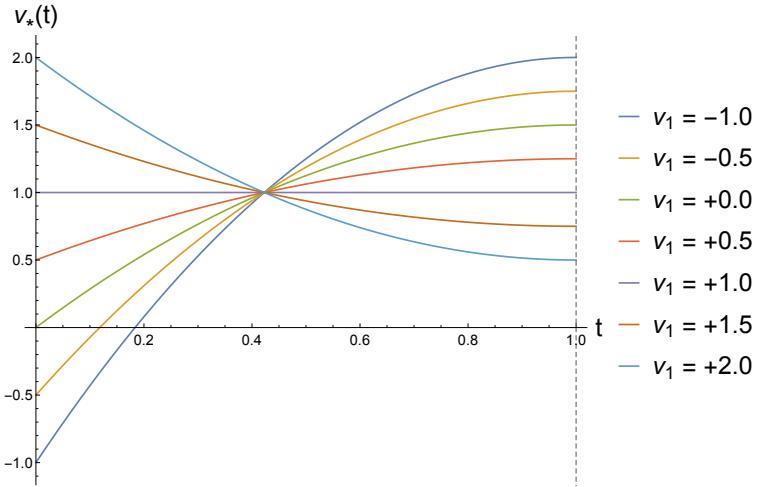
$$\int_0^1 -\frac{\lambda}{4}t^2 + \frac{\lambda}{2}t + v_1 dt = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda = 6(1 - v_1).$$

Dobimo odvisnost hitrosti, kjer je edini prost parameter začetna hitrost v_1 :

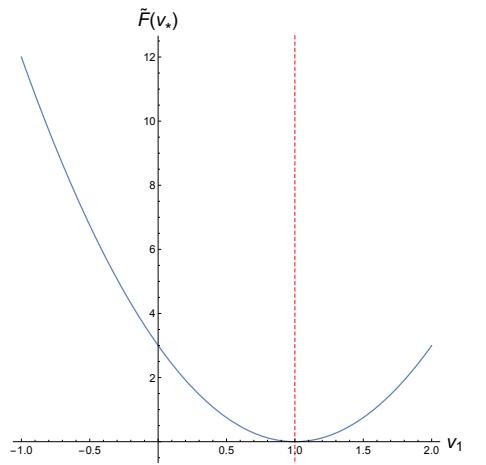
$$v_*(t) = -\frac{3}{2}(1 - v_1)t^2 + 3(1 - v_1)t + v_1 \quad (12)$$

Rešitve za različne začetne hitrosti sem prikazal na sliki 1.

(a)



(b)



Slika 1: (a): Časovne odvisnosti optimalnih funkcij hitrosti $v_*(t)$ (12), za različne vrednosti robnega pogoja v_1 . (b): Odvisnost kumulativnega kvadrata pospeška $\tilde{F}(v_*) = \int_0^1 v_* dt$ od robnega pogoja v_1 , ki določa optimalno odvisnost hitrosti. Opazimo optimalno vrednost za primer, ko se gibljemo s konstantno hitrostjo 1.

Izračunamo lahko odvisnost vrednosti kumulativnega kvadrata pospeška optimalnih rešitev $v_*(t)$ od začetne hitrosti v_1 , kar sem prikazal na sliki 1.

$$\int_0^1 {v_*}^2(t) dt = 3v_1^2 - 6v_1 + 3.$$

2. Na semaforju dosežemo **točno določeno hitrost** (naprimer želimo semafor prevoziti z maksimalno dovoljeno hitrostjo v_2):

$$v(t=1) = v_2.$$

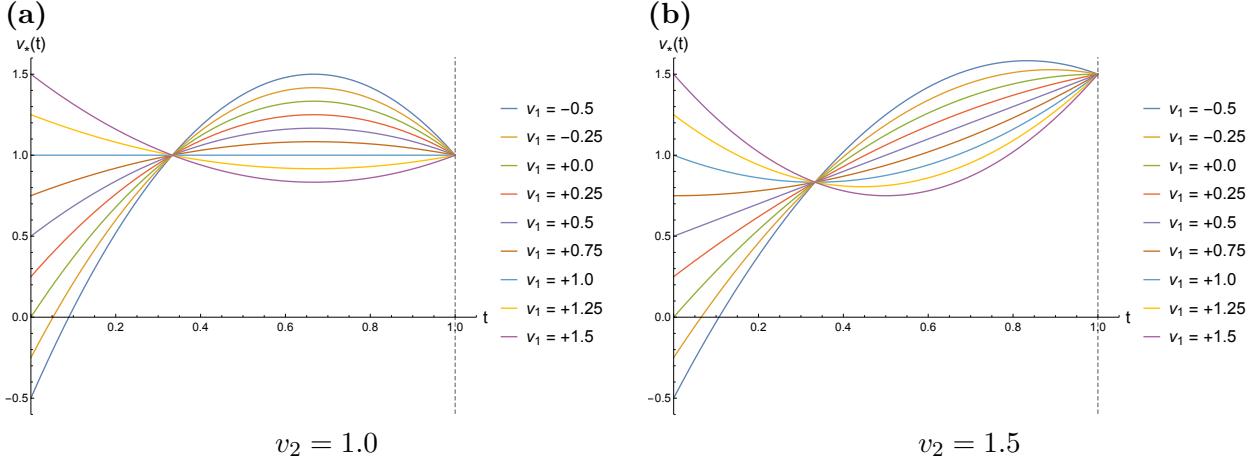
Posledično velja: $A = v_2 - v_1 + \frac{\lambda}{4}$. Analogno kot v prejšnjem primeru upoštevamo vez (5) ter dobimo vrednost multiplikatorja:

$$\lambda = 12(2 - v_1 - v_2) \quad (13)$$

Iz enačbe vidimo, da je funkcija $v(t)$ konveksna na celotnem intervalu $[0, 1]$, če je $\lambda < 0$ ozziroma $v_1 + v_2 > 2$:

$$v_*(t) = 3(v_1 + v_2 - 2)t^2 - 2(2v_1 + v_2 - 3)t + v_1. \quad (14)$$

Rešitve sem prikazal na sliki 2.

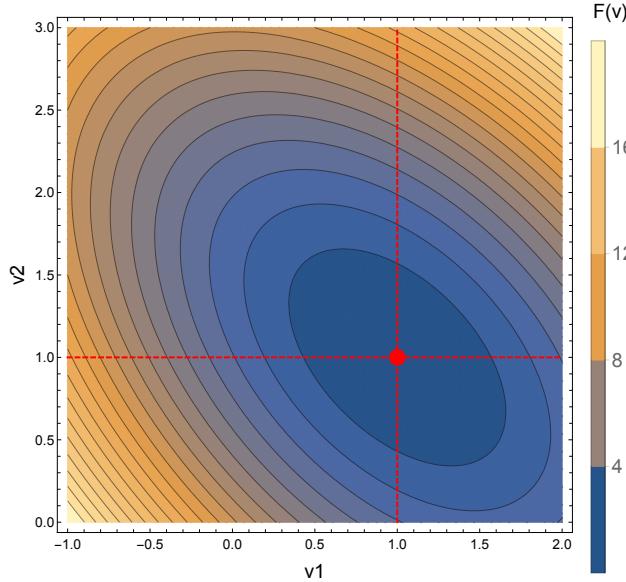


Slika 2: Časovne odvisnosti optimalnih funkcij hitrosti $v_*(t)$ (13), za različne vrednosti robnega pogoja v_1 pri fiksni robni pogoju $v_2 = 1$ (a) in $v_2 = 1.5$ (b). Opazimo, da vodilni koeficient parabole spremeni predznak pri $v_1 + v_2 = 2$ ter, da imajo vse odvisnosti dva skupna vozla.

Oglejmo si še dodatno, kako se spreminja vrednost kumulativnega kvadrata pospeška optimalnih rešitev kot funkcija obeh robnih pogojev:

$$\int_0^1 v_*^2 dt = 4v_1^2 + 4v_2 v_1 + 4v_2^2 - 12(v_1 + v_2) + 12. \quad (15)$$

Odvisnost (15) je prikazana na sliki 3.



Slika 3: Odvisnost kumulativnega kvadrata optimalnih rešitev (15) od robnih pogojev. Z rdečo točko je prikazana optimalna vrednost, ki najbolj minimizira funkcional $v_1 = v_2 = 1$.

3 Alternativne definicije funkcionala

Oglejmo si še splošne rešitve za alternativne definicije funkcionala, pri čemer ohranjamo vez (5).

1.naloga: Model vožnje skozi semafor: Variacijska metoda

Sebastjan Skrbinšek, 28151092

Oktober 2021

1 Uvod

Pri iskanju optimalnega režima vožnje do semaforja si lahko pomagamo z variacijsko metodo. Varčno vožnjo lahko definiramo s pogojem, da je pospeševanja in zaviranja čim manj. To lahko dosežemo z minimizacijo kumulativnega kvadrata pospeška. Iščemo optimalni režim vožnje v situaciji, ko poskušamo razdaljo do semaforja prevoziti ravno v trenutku, ko se prižge zelena luč.

2 Minimizacija kumulativnega kvadrata pospeška

Pri iskanju rešitev moramo upoštevati par pogojev:

$$\int_0^{t_0} v(t) dt \leq l$$
$$\int_0^{t_0} a^2(t) dt = MIN = \int_0^{t_0} \dot{v}^2(t) dt$$

Prvi pogoj nam zagotavlja, da ne bomo prevozili rdeče luči. Drugi pogoj pa nam da "udobnost" vožnje. Problem rešujemo z Lagr. multiplikatorji:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v, \dot{v}) = \dot{v}^2 - \lambda v$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0$$

Rešitev zgornje enačbe je:

$$v(t) = \frac{-\lambda}{4} t^2 + At + B$$

2.1 Ekstrem brez enega robnega pogoja

Variacijski račun daje možnost, da določimo ekstrem tudi brez (enega) robnega pogoja: temu je ekvivalentna zahteva $d\mathcal{L}/dv = 0$ v drugi robni točki. Imamo torej naslednja dva robna pogoja:

$$v(0) = v_0 \quad \dot{v}(t_0) = 0$$

iz katerih dobimo končno enačbo za hitrost:

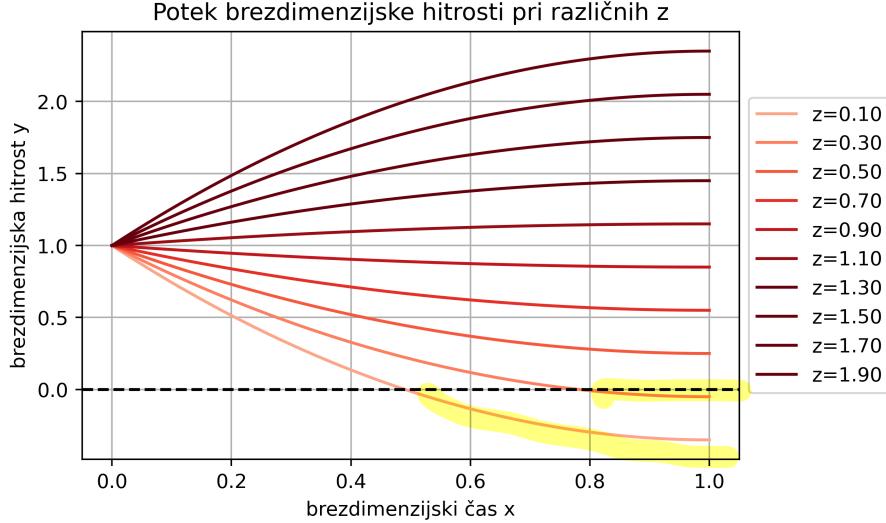
$$v(t) = v_0 + \frac{3(l - v_0 t_0)}{2t_0^3} (2t_0 t - t^2),$$

ki pa jo lahko preoblikujemo v brezdimenzijsko obliko:

$$y(x) = 1 + \frac{3(z-1)}{2} (2x - x^2),$$

kjer je $y(x) = \frac{v(t)}{v_0}$, $x = \frac{t}{t_0}$, $z = \frac{l}{v_0 t_0}$.

Pri risanju brezdimenzijske rešitve bo brezdimenzijska količina $y = v(t)/v_0$ vedno imela začetek pri 1. Povečanje začetne hitrosti v_0 se bo poznalo le v brezdimenzijskem parametru $z = 1/v_0 t_0$. Rešitve pri različnih začetnih pogojih lahko vidimo na naslednjem grafu:



Slika 1: Odvisnost brezdimenzijske hitrosti od brezdimenzijskega časa pri različnih v_0 oz $z = 1/v_0 t_0$

Opazimo lahko da nas želja po udobni vožnji pripelje v nekaterih primerih do nesmiselnih rešitev (slika 1), kot so negativna hitrost. To bi namreč pomenilo da smo prevozili semafor pri rdeči luči, nato se ustavili in vrnili nazaj preko semaforja ob trenutku, ko se prižge zelena luč.

Za majhne vrednosti z dobimo torej negativne hitrosti. Kakšna pa je torej mejna vrednost z , da je rešitev smiselna? Hitrost more biti vedno pozitivna:

$$y = 1 + \frac{3(z-1)}{2}(2x - x^2) \geq 0$$

$$z \geq \frac{-2}{3(2x - x^2)} + 1$$

Ker želimo da je to res dokler je $x \leq 1$:

$$z \geq \frac{1}{3}$$

kar se ujema z slike 1.

Čeprav brezdimenzijske spremenljivke služijo svojemu namenu in nam jasno prikažejo da edini parameter, ki se v tem primeru pravzaprav spreminja, je v_0 in posledično z , si jaz lažje predstavljam in razlagam rezultate, če imam opravka z dimenzijskimi količinami. Nadaljnjo bom torej obravnaval enačbe z dimenzijskimi količinami, torej v tem primeru

$$v(t) = v_0 + \frac{3(l - v_0 t_0)}{2t_0^3} (2t_0 t - t^2),$$

kjer bom vedno postavil $t_0 = 10\text{s}$ ter $l = 100\text{m}$ in spremenjal vrednosti v_0 . Da bom dobil le pozitivne hitrosti bom upošteval pogoj

$$\frac{3l}{t_0} \geq v_0,$$

pri upoštevanju $t_0 = 10\text{s}$ ter $l = 100\text{m}$ dobimo

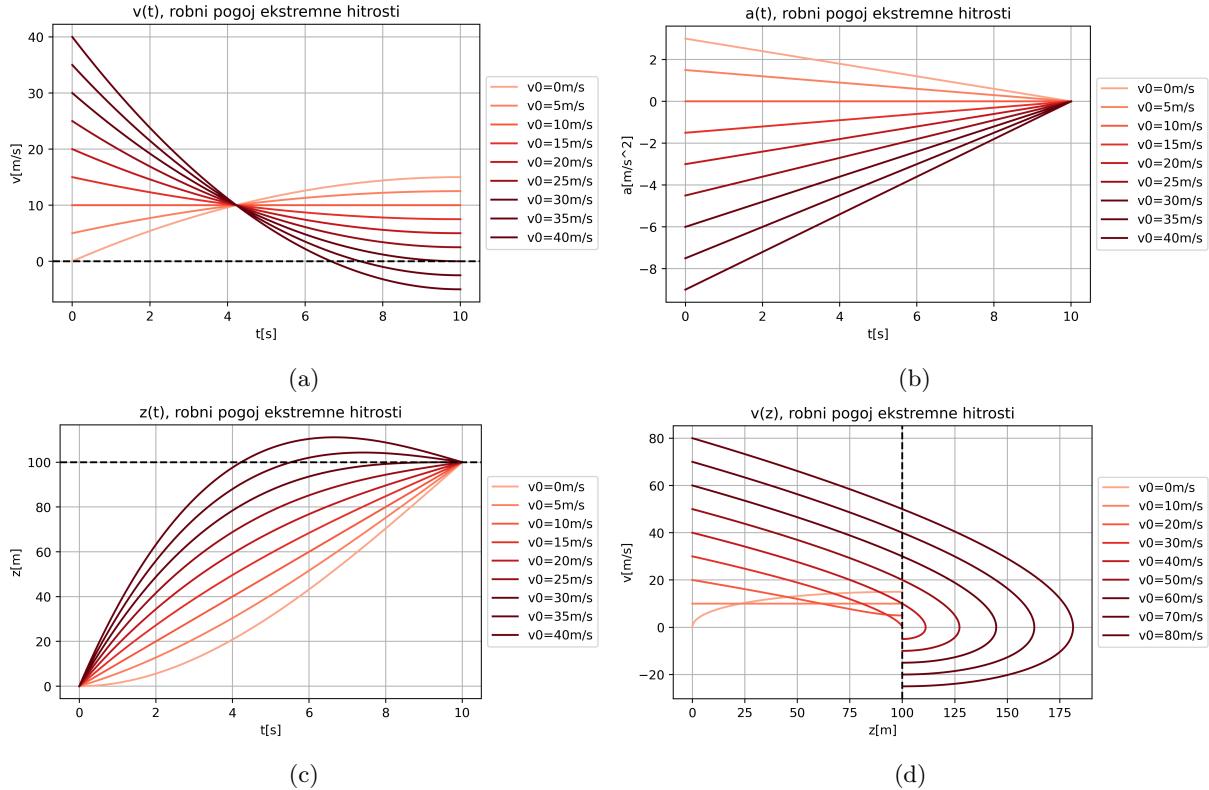
$$v_0 \leq 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Iz časovne odvisnosti hitrosti lahko dobimo tudi časovno odvisnost pospeška $a(t)$ kot tudi trenutne pozicije avta $z(t)$:

$$a(t) = \frac{3(l - v_0 t_0)}{2t_0^3} (2t_0 - 2t)$$

$$z(t) = v_0 t + \frac{3(l - v_0 t_0)}{2t_0^3} (t_0 t^2 - \frac{t^3}{3}),$$

torej imamo zaradi potrebe po ekstremalni vrednosti hitrosti pri semaforju, ter minimizacije kumulativnega kvadrata pospeška, linearno odvisnost pospeška od časa (slika 2b).



Slika 2: Odvisnosti hitrosti(a) , pospeška(b) ter lokacije avta(c) z od časa. Svetlejše barve predstavljajo manjše začetne hitrosti. Črna linija predstavlja mejo nezaželenega režima, torej negativne hitrosti ali prehoda čez semafor. Parametri: $l_0 = 100\text{m}$, $t_0 = 10\text{s}$

Pri naših parametrih za vse začetne hitrosti v_0 nad 30m/s dobimo negativno hitrost pri prečkanju semaforja (2a). Če na začetku vozimo hitreje/počasneje od 10m/s bo potrebno zaviranje/pospeševanje, ki pa bo imelo zaradi pogojev na pospešek linearno obliko (2b). Bolj smiselno bi bilo postaviti tudi robni pogoj za pospešek na začetku $a_0 = 0$, vendar bi imeli preveč enačb in premalo prostih parametrov. Opazimo lahko, da čeprav včasih že prečkamo semafor, se zaradi oblike našega pospeška še nekaj časa vozimo naprej preden se začnemo vračati. Tudi če policaj spregleda prevoženo rdečo luč ter nas opazi šele ko prevozimo zeleno, bomo to storili v vzvratni smeri in nam kazen ne uide.

2.2 Radar-končni robni pogoj

Poglejmo zdaj situacijo, kjer imamo končni robni pogoj. Predstavljamo si, da se želimo udobno voziti, a nas hkrati za križiščem čaka radar, tam pa je omejitev hitrosti v_r . Uporabimo enačbo:

$$v(t) = \frac{-\lambda}{4}t^2 + At + B$$

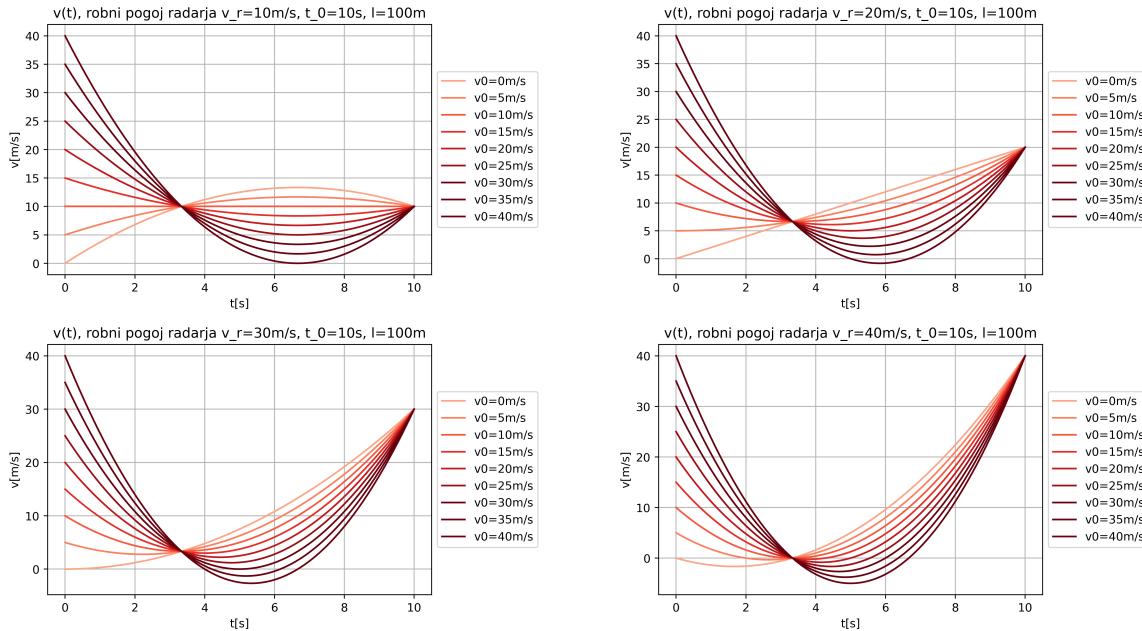
ter upoštevamo robna pogoja:

$$v(0) = v_0 \quad v(t_0) = v_r$$

Rešitev, ki jo dobimo, je sledeča:

$$v(t) = \frac{3(2l - v_0 t_0 - v_r t_0)}{t_0^3} (t_0 t - t^2) + \frac{v_r - v_0}{t_0} t + v_0$$

njeno grafični prikaz pa lahko vidimo na spodnjih grafih:



Slika 3: Prikaz $v(t)$ v odvisnosti od različnih začetnih hitrosti s robnim pogojem radarja

Opazimo lahko, da se vse krivulje hitrosti z različnimi začetnimi hitrostmi sekajo v isti točki ($t = t_0/3$), katere vrednost je odvisna le od končne dovoljene hitrosti. Če ta čas vstavimo v enačbo za potek hitrosti dobimo

$$v\left(\frac{t_0}{3}\right) = \frac{4l}{3t_0} - \frac{v_r}{3}$$

in res vidimo le linearno odvisnost od končne dovoljene hitrosti.

Pospešek je tudi v tem primeru zaradi iste minimizacije kumulativnega pospeška linearen:

$$a(t) = \frac{3(2l - v_0 t_0 - v_r t_0)}{t_0^3} (t_0 - 2t) + \frac{v_r - v_0}{t_0},$$

le da na semaforju ni ničeln.

3 Višje potence pospeška

V prejšnjem poglavju smo udobnost vožnje definirali z minimizacijo kumulativnega kvadrata pospeška. Zanimivo pa je pogledati, kakšne rešitve dobimo za višje potence pospeška, pri čemer se torej spremeni potenza \dot{v} v \mathcal{L} . Izpeljimo torej novo rešitev:

Nalogyer 3 :

3 Minimizacija višjih potenc absolutne vrednosti pospeška

Poslošimo sedaj pogoj iz poglavja 2 na poljubne potence absolutne vrednosti pospeška. Dobimo Lagrangevo funkcijo

$$\mathcal{L} = |\dot{\nu}|^p - \lambda \nu \quad (34)$$

in EL enačbo

$$p \frac{d}{dt} (|\dot{\nu}|^{p-2} \dot{\nu}) + \lambda = 0, \quad (35)$$

$$\Rightarrow \ddot{\nu} |\dot{\nu}|^{p-2} = -\frac{\lambda}{p(p-1)}. \quad (36)$$

Ob upoštevanju

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{|x|^n}{x} \right) = (n-1)|x|^{n-2} \iff \int |x|^{n-2} dx = \frac{1}{n-1} \frac{|x|^n}{x} + C \quad (37)$$

lahko enačbo (36) z zamenjavo spremenljivke $u = \dot{\nu}$, $du = \ddot{\nu} d\tau$ enkrat integriramo in dobimo

$$\frac{|\dot{\nu}|^p}{\dot{\nu}} = -\frac{\lambda}{p} \tau + A, \quad (38)$$

kjer je A neka konstanta. Reševanje za splošne potence je naprej komplikirano, zato se zaenkrat omejimo na sode potence $p = 2k$. V teh primerih lahko absolutne vrednosti spustimo in enačbo še enkrat integriramo

$$\nu = \int \left(-\frac{\lambda}{2k} \tau + A \right)^{\frac{1}{2k-1}} = -\frac{2k-1}{\lambda} \left(-\frac{\lambda}{2k} \tau + A \right)^{\frac{2k}{2k-1}} + B. \quad (39)$$

Pri lihih potencah $p = 2l+1$ pa ob upoštevanju $|x|^{2l+1} = x^{2l}|x|$ dobimo enačbo

$$\dot{\nu}^{2l} \frac{|\dot{\nu}|}{\dot{\nu}} = -\frac{\lambda}{2l+1} \tau + A. \quad (40)$$

V tej enačbi reševanje otežuje člen $\frac{|\dot{\nu}|}{\dot{\nu}} = \operatorname{sgn} \dot{\nu}$. V poglavju 2.1 smo videli, da je pri poljubni končni hitrosti predznak $\dot{\nu}$ na celi krivulji enak. Ker bomo tak robni pogoj uporabili tudi tukaj, predpostavimo torej $\operatorname{sgn} \dot{\nu} = \text{const.} = \pm 1$. Seveda moramo na koncu preveriti, da je naša predpostavka pravilna. Z integriranjem enačbe (40) v obeh primerih dobimo

$$\nu = \begin{cases} -\frac{2l}{\lambda} \left(-\frac{\lambda}{2l+1} \tau + A \right)^{\frac{2l+1}{2l}} + B; & \operatorname{sgn} \dot{\nu} = 1 \\ \frac{2l}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2l+1} \tau - A \right)^{\frac{2l+1}{2l}} + B; & \operatorname{sgn} \dot{\nu} = -1 \end{cases} \quad (41)$$

Opazimo lahko, da je v prvem primeru ob prehodu nazaj na p , rešitev povsem enaka kot pri sodih p , pri drugem primer pa prav tako, če še dodatno spremenimo predznake konstant $\lambda \mapsto -\lambda$, $A \mapsto -A$. Iz tega smo torej zaključili, da je rešitev za poljubne potence absolutne vrednosti pospeška ne glede na njihovo parnost enaka

$$\nu = -\frac{p-1}{\lambda} \left(-\frac{\lambda}{p} \tau + A \right)^{\frac{p}{p-1}} + B. \quad (42)$$

Definirajmo sedaj robne pogoje za poljubno končno hitrost

$$\nu(0) = \nu_0, \quad (43)$$

$$\implies \nu(0) = -\frac{p-1}{\lambda} A^{\frac{p}{p-1}} + B = \nu_0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\nu}} \Big|_{\tau=1} = |\dot{\nu}|^{p-2} \dot{\nu} \Big|_{\tau=1} = 0 \quad (45)$$

$$\implies \dot{\nu}(1) = 0, \quad (46)$$

$$\implies \dot{\nu}(1) = \left(-\frac{\lambda}{p} \tau + A \right)^{\frac{1}{p-1}} = 0, \quad (47)$$

$$\int_0^1 \nu d\tau = 1, \quad (48)$$

$$\implies \int_0^1 \nu d\tau = \frac{p-1}{2p-1} p^{-\frac{1}{p-1}} \lambda^{\frac{1}{p-1}} + \nu_0 = 1. \quad (49)$$

Po nekaj algebraične manipulacije dobimo končno rešitev

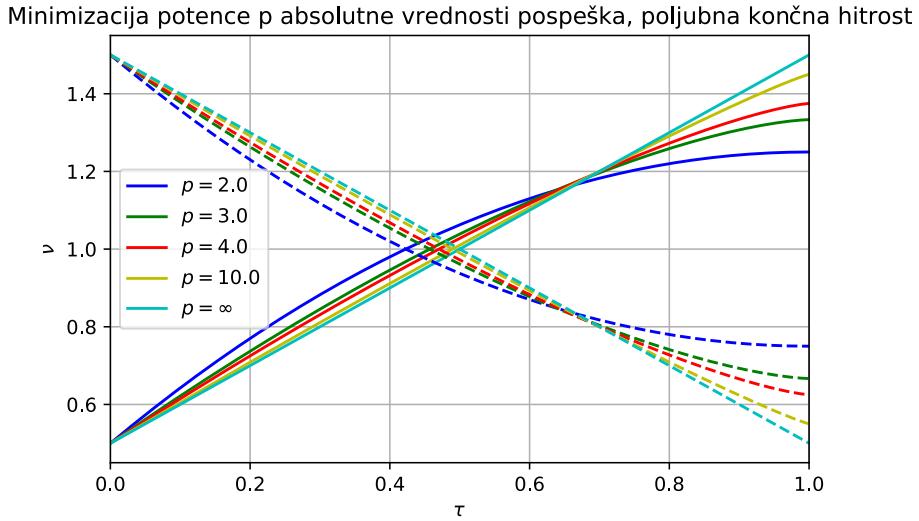
$$\nu = \nu_0 + \frac{2p-1}{p} (1-\nu_0) \left[1 - (1-\tau)^{\frac{p}{p-1}} \right], \quad (50)$$

ki smo jo ponovno zapisali v obliki, ki nakazuje, da popravek potrebujemo samo, ko je $\nu_0 \neq 1$. Prav tako bi lahko sedaj tudi algebraično preverili, da velja naša predpostavka $\operatorname{sgn} \dot{\nu} = \operatorname{const.}$, vendar se zadovoljimo z grafi na sliki 4. Zaradi tega je obnašanje rešitve ponovno v dveh režimih, samo zaviranje za $\nu_0 > 1$ in samo pospeševanje za $\nu_0 < 1$. Pri $\nu_0 = 1$ dobimo konstantno rešitev $\nu = 1$, ki je tokrat nismo narisali.

Zanimiva je tudi limita $p \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \nu &= \nu_0 + (1-\nu_0) \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{p} \right) \right) \left[1 - (1-\tau)^{\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}} \right] = \\ &= \nu + 2(1-\nu_0)\tau, \end{aligned} \quad (51)$$

torej linearna funkcija, kar smo omenili tudi na predavanjih. Na sliki 4 opazimo, da je konvergenca precej hitra, pri $p = 10$ se že precej približamo premici.



Slika 4: Načini vožnje z minimalno kumulativnim potenco p absolutne vrednosti pospeška pri poljubni hitrosti pri semaforju. Krivulje z enakimi p imajo enake barve, z enakimi začetnimi hitrostmi pa enak stil krivulje.

3.1 Minimizacija absolutne vrednosti pospeška

V prejšnjem poglavju smo izpeljali splošno rešitev za minimizacijo poljubne potence p absolutne vrednosti pospeška, vendar dobljena rešitev ni dobra za $p = 1$, torej minimizacijo samo absolutne vrednosti pospeška. Probleme nam povzroča člen $(1 - \tau)^{\frac{p}{p-1}}$ v enačbi (50), kjer gre eksponent proti neskončno. Za vse $\tau \in (0, 1]$ je $1 - \tau < 1$, torej v tem primeru $(1 - \tau)^{\frac{p}{p-1}} \rightarrow 0$. Za $\tau = 0$ pa je $1 - \tau = 1$. Ker vemo, da je 1 na poljubno veliko potenco še vedno 1, nam celotna oblika ν gre proti stopničasti funkciji

$$\lim_{p \rightarrow 1} \nu = \begin{cases} \nu_0; & \tau = 0 \\ 1; & \tau \in (0, 1] \end{cases} = \nu_0 + (1 - \nu_0)H(\tau), \quad (52)$$

kjer je H Heavisidova funkcija. Bližanje $\nu(\tau)$ stopničasti funkciji je prikazano na sliki 5.

4 Dodatni člen s hitrostjo

V model želimo vključiti še, da optimalna vožnja ne vključuje prevelikih hitrosti. Lagrangian zapišemo kot

$$\mathcal{L} = \dot{\nu}^2 + C\nu^2 - \lambda\nu, \quad (53)$$

Nalogen 4:

Urban Zelenznik

4 Minimizacija kvadrata pospeška in kvadrata hitrosti

Nekateri potniki zaradi velikih hitrosti postanejo omotični, kar znatno vpliva na njihovo udobje, zato Lagrangeian obtežimo še s kvadratnim členom v hitrosti,

$$\mathcal{L} = \dot{v}^2 + Cv^2 - \lambda v, \quad (16)$$

kjer koeficientu C lahko rečemo kar jakost omotice. Iz Euler-Lagrangeeve enačbe sledi diferencialna enačba

$$\ddot{v} - Cv + \frac{\lambda}{2} = 0, \quad (17)$$

katere rešitev je hitrost oblike

$$v(t) = \frac{\lambda}{2C} + Ae^{\sqrt{C}t} + Be^{-\sqrt{C}t}. \quad (18)$$

Uporaba prvega robnega pogoja nam da

$$v(0) = v_0 \quad \rightarrow \quad B = v_0 - \frac{\lambda}{2C} - A,$$

s pomočjo vezi pa dobimo

$$\int_0^{t_0} v(t) dt = l \quad \rightarrow \quad A = \frac{2C^{\frac{3}{2}}le^{\sqrt{C}t_0} - 2C(e^{\sqrt{C}t_0} - 1)v_0 + (e^{\sqrt{C}t_0} - 1)\lambda - \sqrt{C}e^{\sqrt{C}t_0}t_0\lambda}{2C(e^{\sqrt{C}t_0} - 1)^2}.$$

Spet lahko ločimo primera za dva različna robna pogoja na drugem koncu.

Ničeln pospešek pri semaforju

S pomočjo pogoja za ničeln pospešek ob prehodu semaforja,

$$\dot{v}(t_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{B}{A} = e^{2\sqrt{C}t_0},$$

lahko izrazimo

$$\lambda = \frac{2C \left[l\sqrt{C} (e^{2\sqrt{C}t_0} + 1) + v_0 - e^{2\sqrt{C}t_0}v_0 \right]}{1 + \sqrt{C}t_0 + e^{2\sqrt{C}t_0} (\sqrt{C}t_0 - 1)}.$$

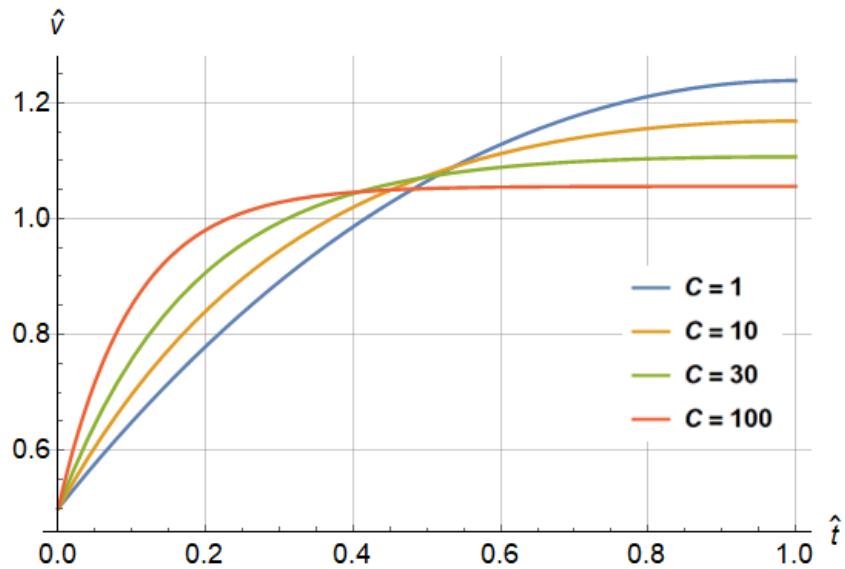
Rezultat za hitrost sedaj lahko skiciramo na grafu (slika 6 in slika 7). Pri tem lahko upoštevamo različne začetne hitrosti \hat{v}_0 in različne jakosti omotice C .

Radar tik za semaforjem

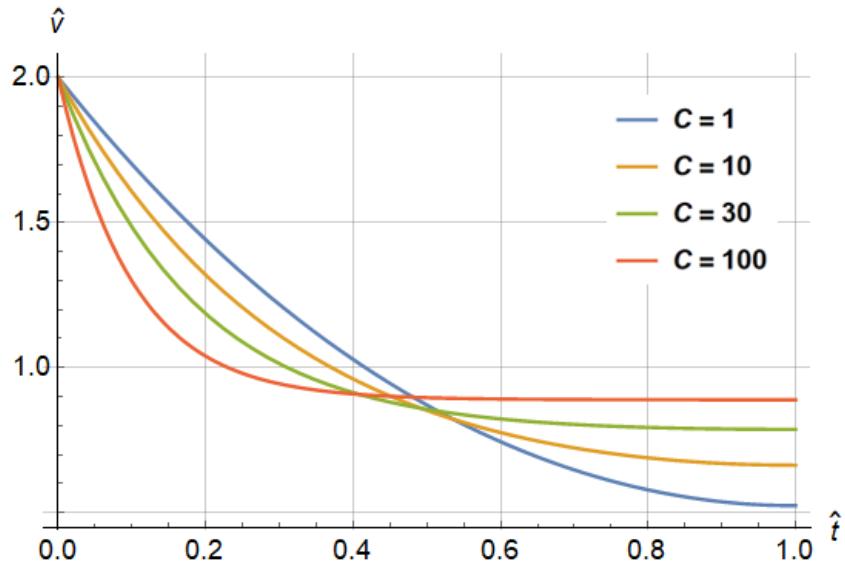
Tudi v tem primeru nam λ določi drugi robni pogoj,

$$v(t_0) = v_{\max} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2C \left[l\sqrt{C} (e^{\sqrt{C}t_0} + 1) - (e^{\sqrt{C}t_0} - 1)(v_0 + v_{\max}) \right]}{2 + \sqrt{C}t_0 + e^{\sqrt{C}t_0} (\sqrt{C}t_0 - 2)}.$$

Rezultat za hitrost v primeru radarja grafično prikažemo na slikah 8 in 9.

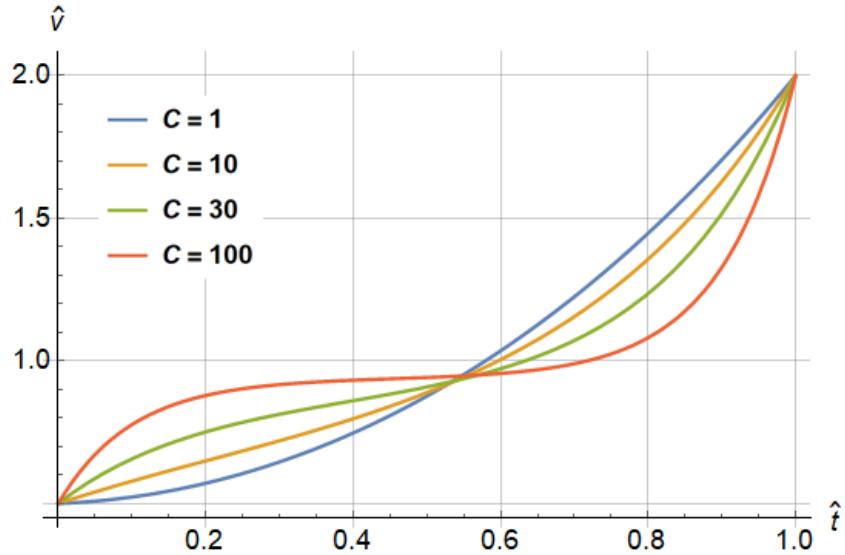


Slika 6: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa \hat{t} pri $\hat{v}_0 = 0.5$ za različne vrednosti brezdimenzijske jakosti omotice C .

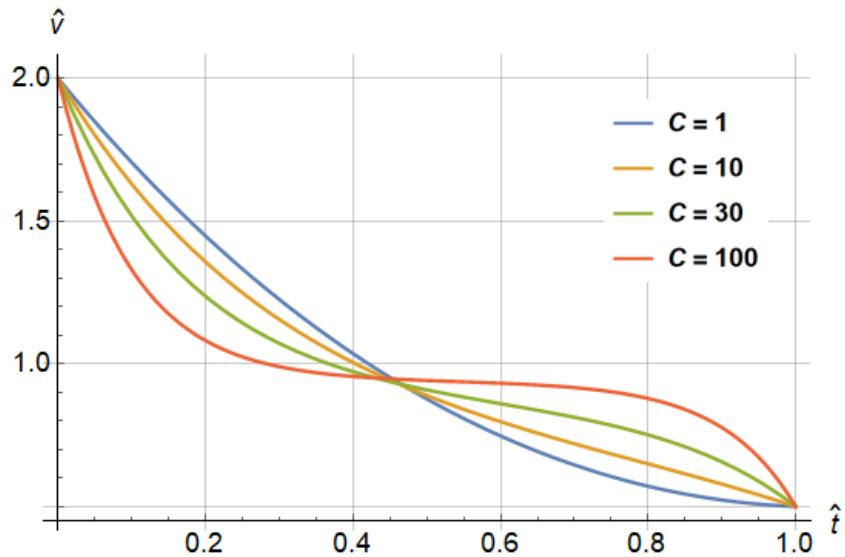


Slika 7: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa \hat{t} pri $\hat{v}_0 = 2$ za različne vrednosti brezdimenzijske jakosti omotice C .

S slik 6, 7, 8 in 9 lahko razberemo, da potniki, ki so nagnjeni k močni omotici ($C \sim 100$), raje prenašajo velike pospeške na račun manjše hitrosti. Potniki, ki občutijo le šibko omotičnost ($C \sim 1$), pa imajo vseeno raje vožnjo z manjšimi pospeški, saj lažje prenašajo velike hitrosti.



Slika 8: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa \hat{t} pri $\hat{v}_0 = 0.5$ in $\hat{v}_{\max} = 2$ za različne brezdimenzijske vrednosti jakosti omotice C .



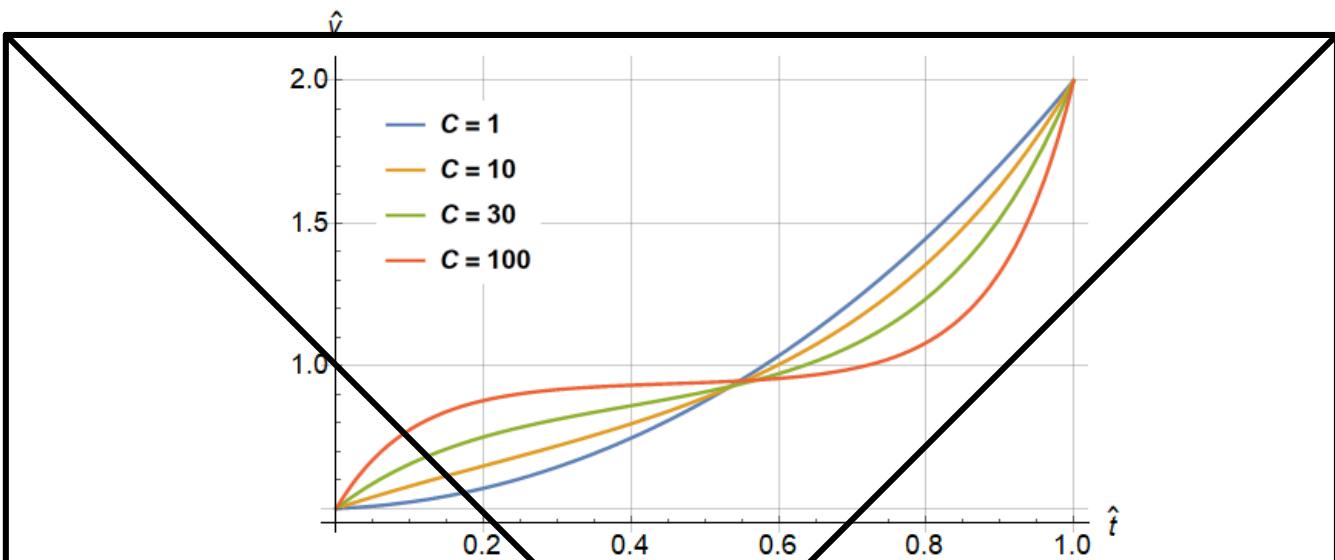
Slika 9: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa \hat{t} pri $\hat{v}_0 = 2$ in $\hat{v}_{\max} = 0.5$ za različne brezdimenzijske vrednosti jakosti omotice C .

5 Zaporedni semaforji

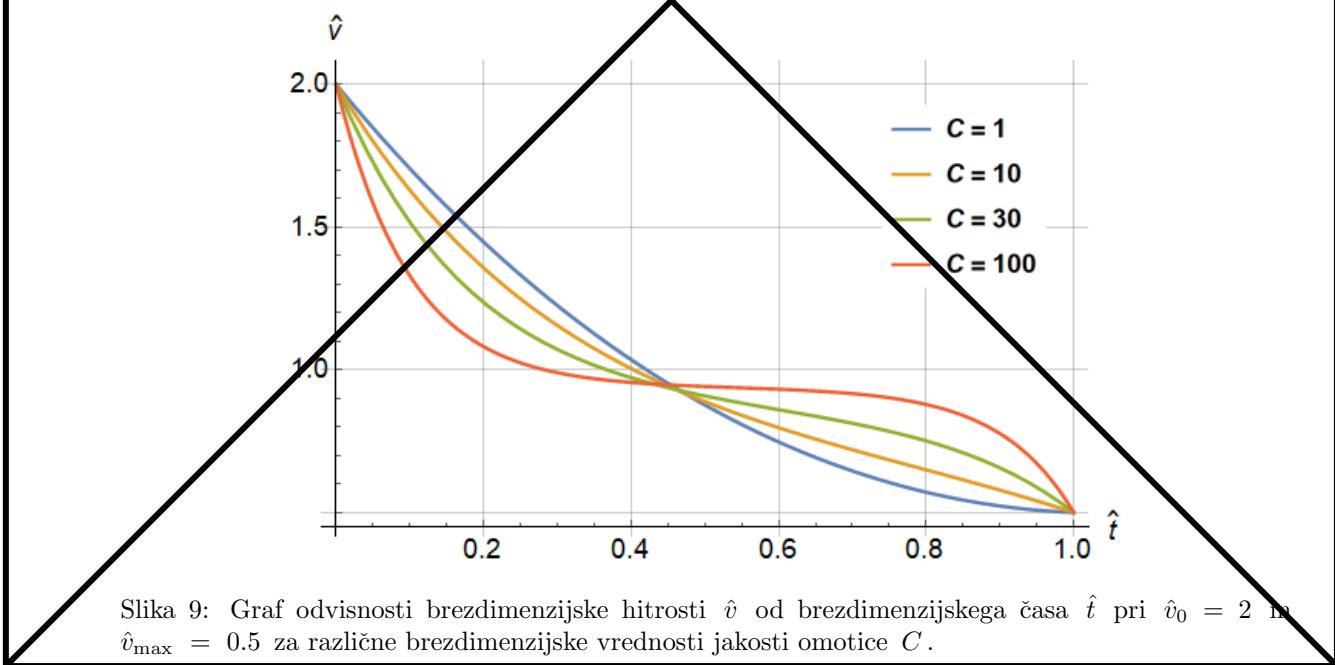
Obravnavajmo vožnjo skozi več zaporednih semaforjev. Vsak semafor naj se nahaja na razdalji l od prejšnjega, zelena luč pa naj se na semaforju prižge ob času t_0 po prižigu zelene luči na prejšnjem semaforju. Voznik bo v tem primeru vozil tako, da bo ujel t.i. "zeleni val", torej bo vsak semafor prečkal ravno tedaj, ko se bo na njem prižgala zelena luč, hkrati pa bo še vedno skrbel za udobje potnikov in varčno vožnjo.

Naloga 5:

Urban Železnik



Slika 8: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa \hat{t} pri $\hat{v}_0 = 0.5$ in $\hat{v}_{\max} = 2$ za različne brezdimenzijske vrednosti jakosti omotice C .



Slika 9: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa \hat{t} pri $\hat{v}_0 = 2$ in $\hat{v}_{\max} = 0.5$ za različne brezdimenzijske vrednosti jakosti omotice C .

5 Zaporedni semaforji

Obravnavajmo vožnjo skozi več zaporednih semaforjev. Vsak semafor naj se nahaja na razdalji l od prejšnjega, zelena luč pa naj se na semaforju prižge ob času t_0 po prižigu zelene luči na prejšnjem semaforju. Voznik bo v tem primeru vozil tako, da bo ujel t.i. "zeleni val", torej bo vsak semafor prečkal ravno tedaj, ko se bo na njem prižgala zelena luč, hkrati pa bo še vedno skrbel za udobje potnikov in varčno vožnjo.

Znova se vrnimo k najpreprostejšem primeru in hitrosti iz enačbe (5). Še vedno bosta veljala prvi robni pogoj (6) in vez (7), hkrati pa želimo, da je vožnja periodična, zato mora veljati tudi

$$v(0) = v(t_0) = v_0 , \quad (19)$$

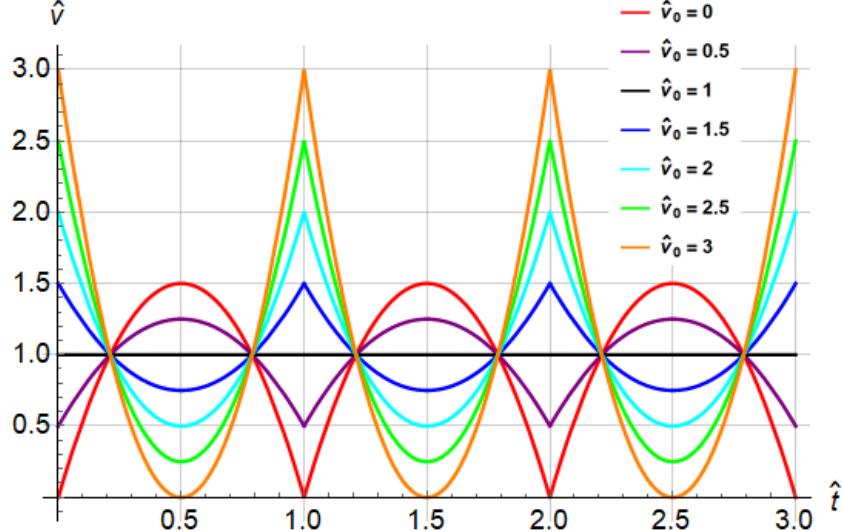
kjer iz druge enakosti sledi

$$v(t_0) = v_0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{24}{t_0^3} (l - v_0 t_0) .$$

Sedaj lahko hitrost prepišemo v brezdimenzijsko obliko,

$$\hat{v} = -6(1 - \hat{v}_0)\hat{t}^2 + 6(1 - \hat{v}_0)\hat{t} + \hat{v}_0 , \quad (20)$$

in našo periodično rešitev skiciramo na intervalu $\hat{t} \in [0, 3]$ (slika 10). Na sliki hitro opazimo, da hitrost pri semaforjih ni gladka funkcija časa, zato je tam pospešek nezveznen. V nadaljevanju poskusimo odpraviti to nezveznost.



Slika 10: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa $\hat{t} \in [0, 3]$ za različne vrednosti \hat{v}_0 .

Spremembe v pospešku ali še huje, njegova nezveznost, vzbudijo v nekaterih potnikih velik strah. Iz tega razloga sedaj obtežimo Lagrangeian še s kvadratnim členom v časovnem odvodu pospeška,

$$\mathcal{L} = G\ddot{v}^2 + \dot{v}^2 - \lambda v , \quad (21)$$

kjer koeficient G predstavlja utež novega člena. Ker se v Lagrangeianu pojavi tudi člen z drugim odvodom po času, moramo uporabiti splošnejšo obliko Euler-Lagrangeeve enačbe,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{v}} = 0 , \quad (22)$$

od koder sledi diferencialna enačba

$$Gv^{(IV)} - \ddot{v} - \frac{\lambda}{2} = 0 , \quad (23)$$

ki jo reši hitrost oblike

$$v(t) = -\frac{\lambda}{4}t^2 + At + B + Ce^{\frac{t}{\sqrt{G}}} + De^{-\frac{t}{\sqrt{G}}}. \quad (24)$$

Pridobiti želimo vrednosti petih neznanih konstant, za kar bomo uporabili dva robna pogoja na začetku definicijskega območja,

$$v(0) = v_0 \quad \rightarrow \quad v_0 = B + C + D,$$

$$\dot{v}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A + \frac{C}{\sqrt{G}} - \frac{D}{\sqrt{G}} = 0,$$

eno vez,

$$\int_0^{t_0} v(t) dt = l \quad \rightarrow \quad -\frac{\lambda t_0^3}{12} + \frac{At_0^2}{2} + Bt_0 + C\sqrt{G} \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right) + D\sqrt{G} \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\sqrt{G}}} \right) = l,$$

in dva robna pogoja na koncu definicijskega območja,

$$v(t_0) = v_0 \quad \rightarrow \quad v_0 = -\frac{\lambda t_0^2}{4} + At_0 + B + Ce^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} + De^{-\frac{t_0}{\sqrt{G}}},$$

$$\dot{v}(t_0) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\lambda t_0}{2} + A + \frac{C}{\sqrt{G}}e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - \frac{D}{\sqrt{G}}e^{-\frac{t_0}{\sqrt{G}}} = 0.$$

Z izbiro enakih vrednosti pospeškov na obeh koncih definicijskega območja zadostimo tudi zveznosti pospeška ob periodični vožnji skozi več semaforjev, ki so enako oddaljeni eden od drugega. Ko rešimo dani sistem enačb, dobimo sledeče izraze:

$$\lambda = \frac{24 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right) (l - v_0 t_0)}{t_0 \left[12G \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right) - 6\sqrt{G}t_0 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} + 1 \right) + t_0^2 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right) \right]},$$

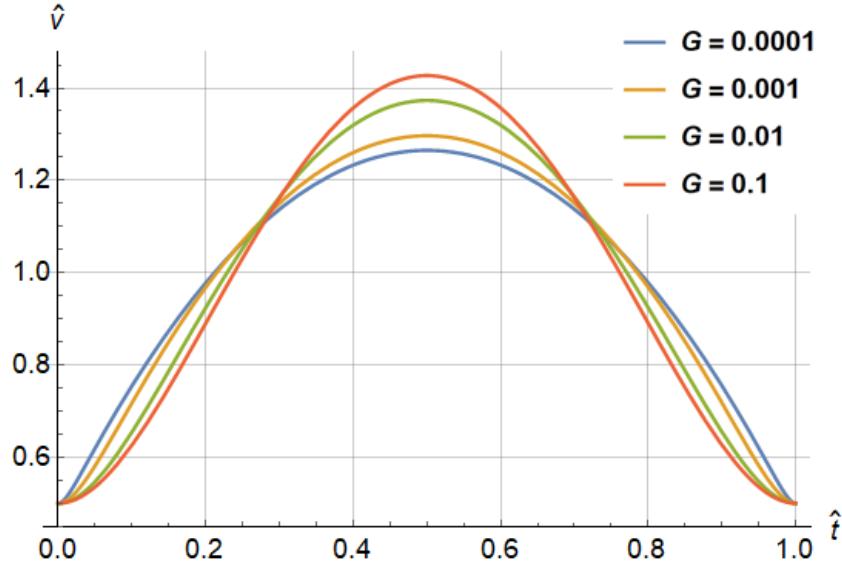
$$A = \frac{6 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right) (l - v_0 t_0)}{12G \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right) - 6\sqrt{G}t_0 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} + 1 \right) + t_0^2 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right)},$$

$$B = \frac{12Gv_0 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right) - 6\sqrt{G}l \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} + 1 \right) + t_0^2 v_0 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right)}{12G \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right) - 6\sqrt{G}t_0 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} + 1 \right) + t_0^2 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right)},$$

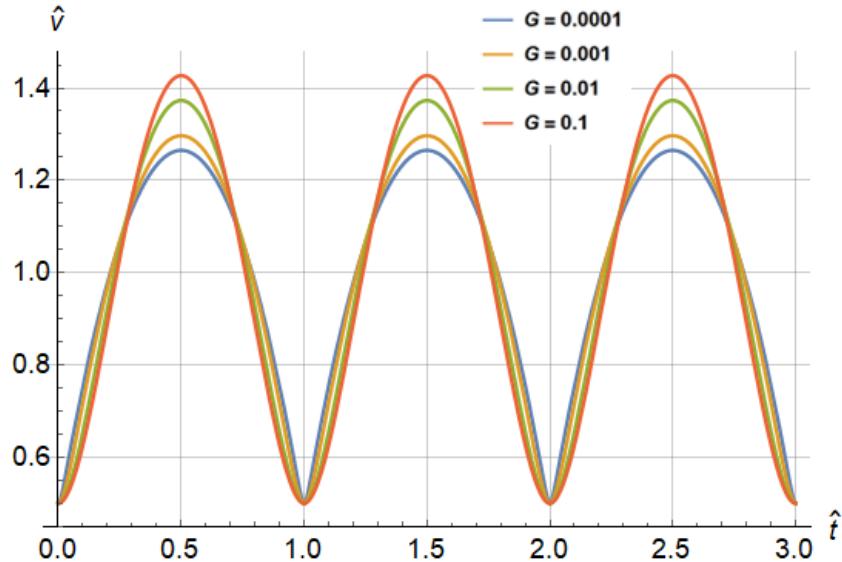
$$C = \frac{6\sqrt{G}(l - v_0 t_0)}{12G \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right) - 6\sqrt{G}t_0 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} + 1 \right) + t_0^2 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right)},$$

$$D = \frac{6\sqrt{G}(l - v_0 t_0)e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}}}{12G \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right) - 6\sqrt{G}t_0 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} + 1 \right) + t_0^2 \left(e^{\frac{t_0}{\sqrt{G}}} - 1 \right)}.$$

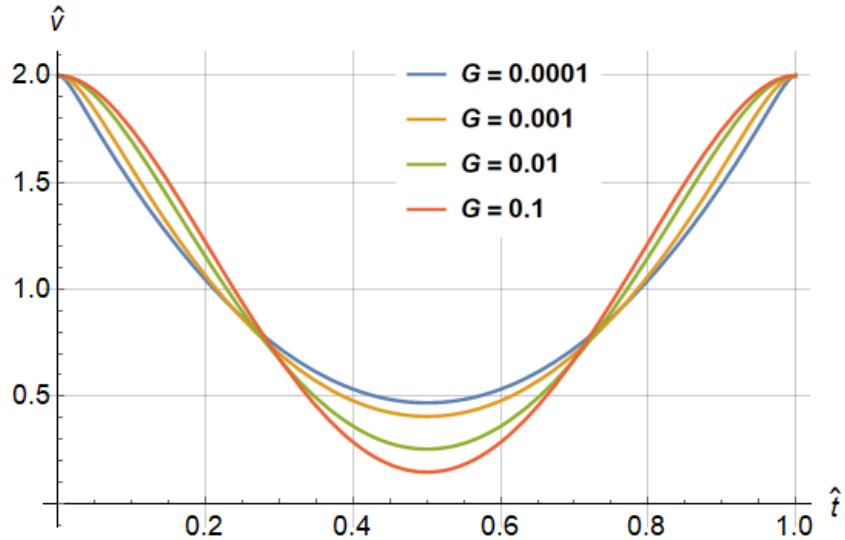
Periodično brezdimenzijsko hitrost, ki ustreza vožnji skozi več zaporednih semaforjev, sedaj grafično prikažemo za različne začetne hitrosti \hat{v}_0 in različne koeficiente G na intervalu $\hat{t} \in [0, 1]$ (slika 11 in slika 13) ter intervalu $\hat{t} \in [0, 3]$ (slika 12 in slika 14).



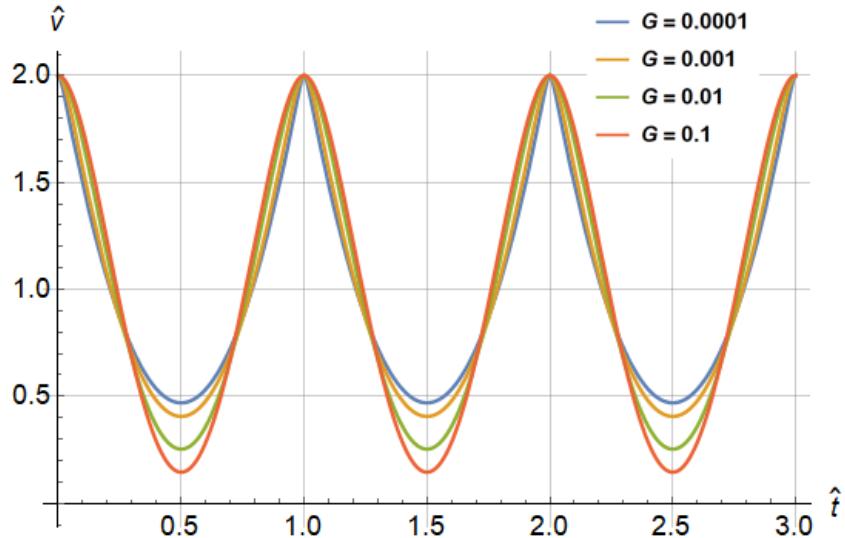
Slika 11: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa $\hat{t} \in [0, 1]$ pri $\hat{v}_0 = 0.5$ in za različne brezdimenzijske vrednosti koeficienta G .



Slika 12: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa $\hat{t} \in [0, 3]$ pri $\hat{v}_0 = 0.5$ in za različne brezdimenzijske vrednosti koeficienta G .



Slika 13: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa $\hat{t} \in [0, 1]$ pri $\hat{v}_0 = 2$ in za različne brezdimenzijske vrednosti koeficienta G .



Slika 14: Graf odvisnosti brezdimenzijske hitrosti \hat{v} od brezdimenzijskega časa $\hat{t} \in [0, 3]$ pri $\hat{v}_0 = 2$ in za različne brezdimenzijske vrednosti koeficienta G .

Potniki, ki imajo velik strah pred spremembami pospeška ($G \sim 0.1$), raje prenašajo večje spremembe v hitrosti, če to pomeni, da se bo pospešek spremenjal manj nenadno. Po drugi strani pa potniki, ki jih spremembe pospeška ne strašijo ($G \sim 0.0001$), raje prenašajo večje spremembe v pospešku na račun manjših sprememb hitrosti.

6 Zaključek

Tekom nalog smo obravnavali kar nekaj primerov vožnje skozi semafor in si ogledali vrsto vplivov na varčnost vožnje in udobje potnikov. Nadalje bi si lahko ogledali tudi primer zaporednih semaforjev, ki se prižigajo v raznovrstnih časovnih intervalih, ali pa takih, ki so različno oddaljeni eden od drugega. Upoštevali bi lahko tudi vpliv gneče na cesti, ki bi se na primer pojavila le na vsakem drugem ali tretjem semaforju. Seveda obstaja nešteto možnosti, ki bi jih lahko podrobno analizirali, a mi je za kakšen zanimiv primer take vrste zmanjkalo časa.

Sebastjan Šterblimbach

5 Zaporedni semaforji

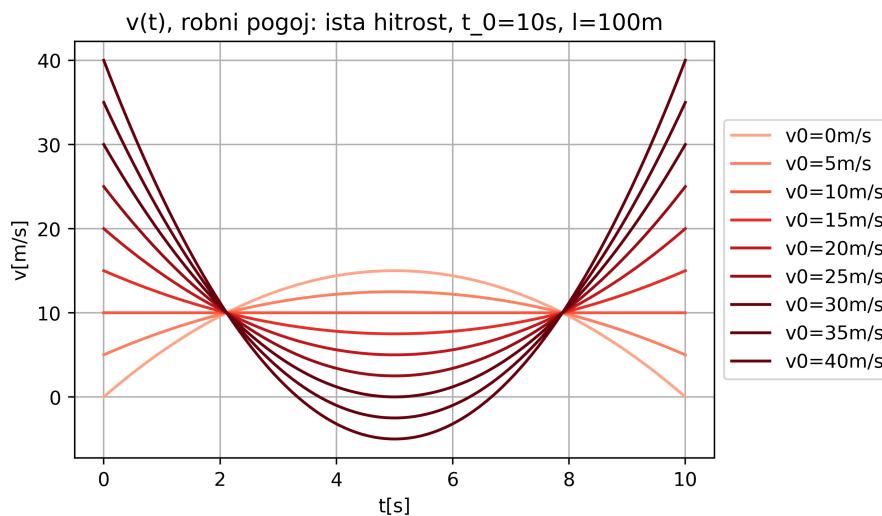
Iskanje rešitve za zaporedne semaforje lahko prevedemo na variacijsko metodo z periodičnimi robnimi pogoji. Uporabil bom minimizacijo kumulativnega kvadrata pospeška. Če želimo, da avto zapelje skozi semafor z hitrostjo, ki je enaka njegovi začetni, lahko uporabimo rešitev iz poglavja Radar-končni robni pogoj:

$$v(t) = \frac{3(2l - v_0 t_0 - v_r t_0)}{t_0^3} (t_0 t - t^2) + \frac{v_r - v_0}{t_0} t + v_0,$$

pri čemer uporabimo $v_r = v_0$:

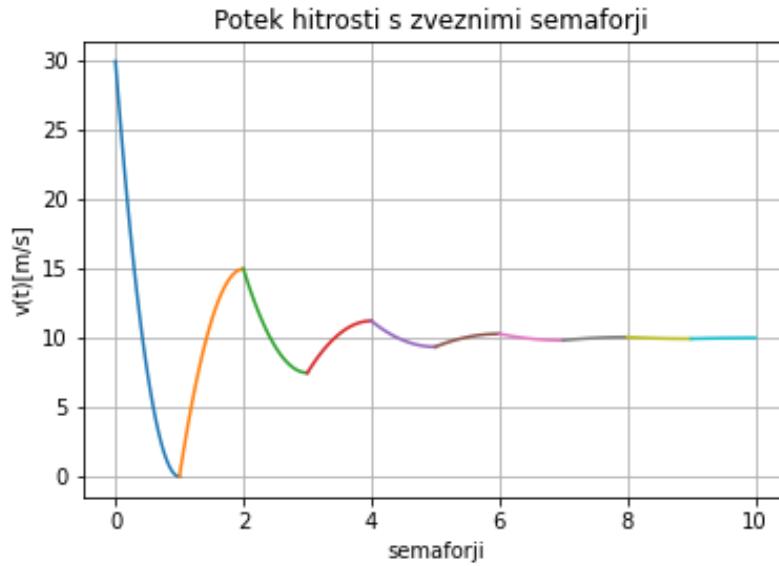
$$v(t) = 6 \frac{l - v_0 t_0}{t_0^3} (t_0 t - t^2) + v_0.$$

Dobimo naslednjo rešitev:



Slika 8: Prikaz $v(t)$ v odvisnosti od različnih začetnih hitrostih s periodičnim robnim pogojem za hitrost.

Drugi način je, da upoštevamo ekstremen pogoj za hitrost na robu, za začetno hitrost pa izberemo končno hitrost po prejšnjem semaforju ter rešitev zlepimo skupaj:



Slika 9: Prikaz $v(t)$ z lepljenem rešitev za različne semaforje.

Rešitve konvergirajo h konstantni vrednosti $v = 10 \text{ m/s}$, saj so moji parametri bili $l = 100 \text{ m}$ ter $t = 10 \text{ s}$. Vidimo pa lahko, da ima krivulja nenechte prelome - kakšni pa so torej pospeški?



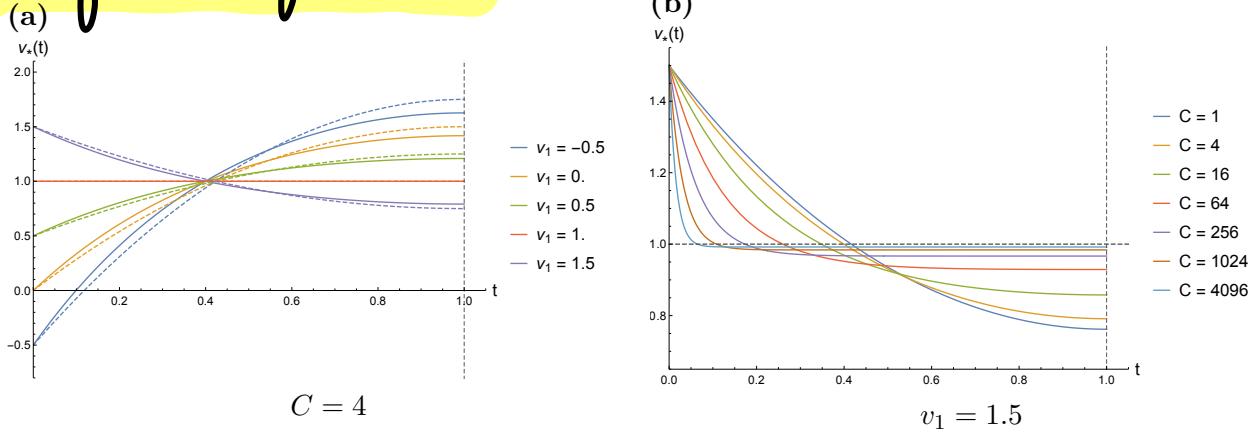
Slika 10: Prikaz $a(t)$ z lepljenjem rešitev za različne semaforje

Kot vidimo na sliki 10, je naša rešitev nefizikalna saj imamo nezvezen pospešek. Tega bi npr. lahko zagotovili z dodatnim robnim pogojem

$$a(t = 0) = a_0,$$

vendar če hočemo upoštevati te pogoja za začetno hitrost ter ekstremno hitrost na koncu, naš model minimizacije kumulativnega pospeška nima dovolj parametrov. Lahko pa uporabimo že znan model z

Maj Mejah



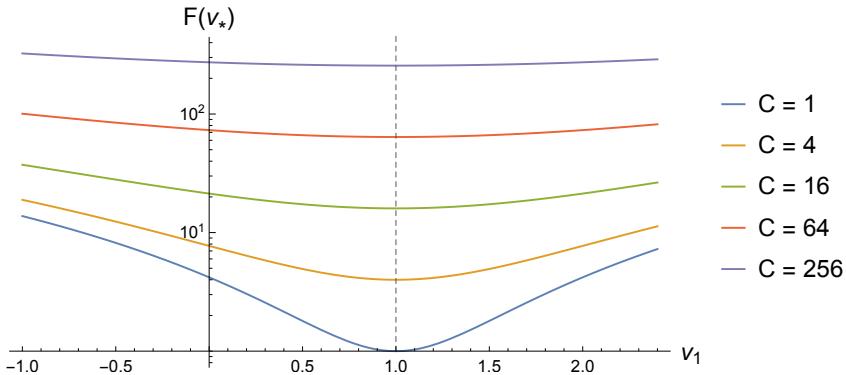
Slika 5: (a): Optimalne časovne odvisnosti (21) (z ustreznimi vrednostmi konstant) za različne vrednosti začetne hitrosti v_1 . S črtkano črto so prikazani referenčni rezultati za $C = 0$, kjer je rešitev parabola (12). (b): Pri začetni hitrosti $v_1 = 1.5$ sem prikazal optimalne odvisnosti pri različnih vrednostih parametra C v funkcionalu. Za velike vrednosti C se funkcija približuje enakomernemu gibanju.

Na sliki 5 opazimo, da za velike eksponente optimalna odvisnost **po točkah** konvergira k (nezvezni) funkciji:

$$\lim_{C \rightarrow \infty} v_*^{(C)} = \begin{cases} v_1 & t = 0, \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

Na sliki 6 je prikazan vpliv začetne hitrosti v_1 ter parametra funkcionala C na vrednost funkcionala za optimalne odvisnosti hitrosti:

$$F(v_*) = \int_0^1 \dot{v}^2 + Cv^2 dt. \quad (22)$$

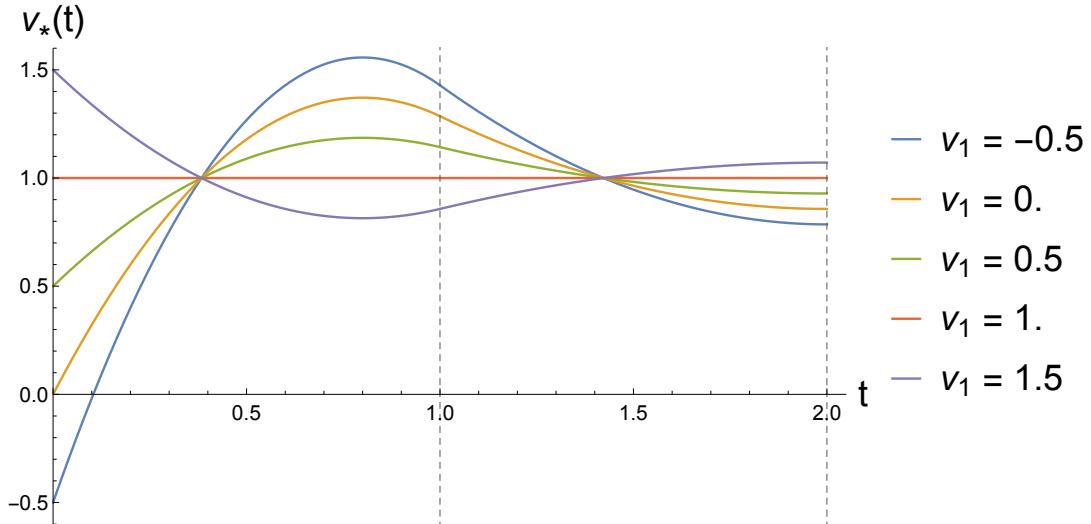


Slika 6: Odvisnost funkcionala (22) od robnega pogoja za različne vrednosti C . Opazimo, da je za vsak C optimalno enakomerno gibanje pri pogoju $v_1 = 1$.

4 Zaporedni semaforji (naloge 5)

Omejimo se na problem, kjer se semaforji prizigajo v enakomernih časovnih korakih $\Delta t = 1$ in je vsak naslednji semafor oddaljen od prejšnjega za dolžino $l = 1$. Pri formulaciji problema sem prišel do sledečih sklepov:

1. Sprva sem razmišljjal, da bi problem reševal ločeno za vsak odsek med semaforji, vendar rešitev na območju i **vpliva na začetni pogoj** na področju $i+1$, kar vpliva na minimizacijo funkcionala na drugem intervalu.



Slika 7: Optimalne časovne odvisnosti hitrosti za različni začetni pogoj v_1 ter prost robni pogoj pri $t = 2$ pri vožnji skozi $N = 2$ zaporedna semaforja. Zvezno odvedljiva rešitev je sestavljena iz dveh parabol.

4.2 N zaporednih semaforjev

Na primeru dveh semaforjev sem ponazoril, kako izpeljati enačbe, ki določajo proste parametre v rešitvi Euler-Lagrangevih enačb. Za N semaforjev je končni rezultat zelo podoben, le sistem enačb je bistveno večji. Hitrost ponovno razpišemo po intervalih:

$$v(t) = \{v_{(i)}(t); \quad t \in [i-1, i]\}, \quad (29)$$

kjer predpostavimo, da je funkcija $v(t)$ **zvezna**, saj bi drugače bil v neveznostih pospešek neskončen. Minimiziramo funkcional:

$$F_N(v) = \sum_{i=1}^N \left[\int_{i-1}^i \dot{v}_{(i)}^2 - \lambda_i v_{(i)} \, dt \right], \quad (30)$$

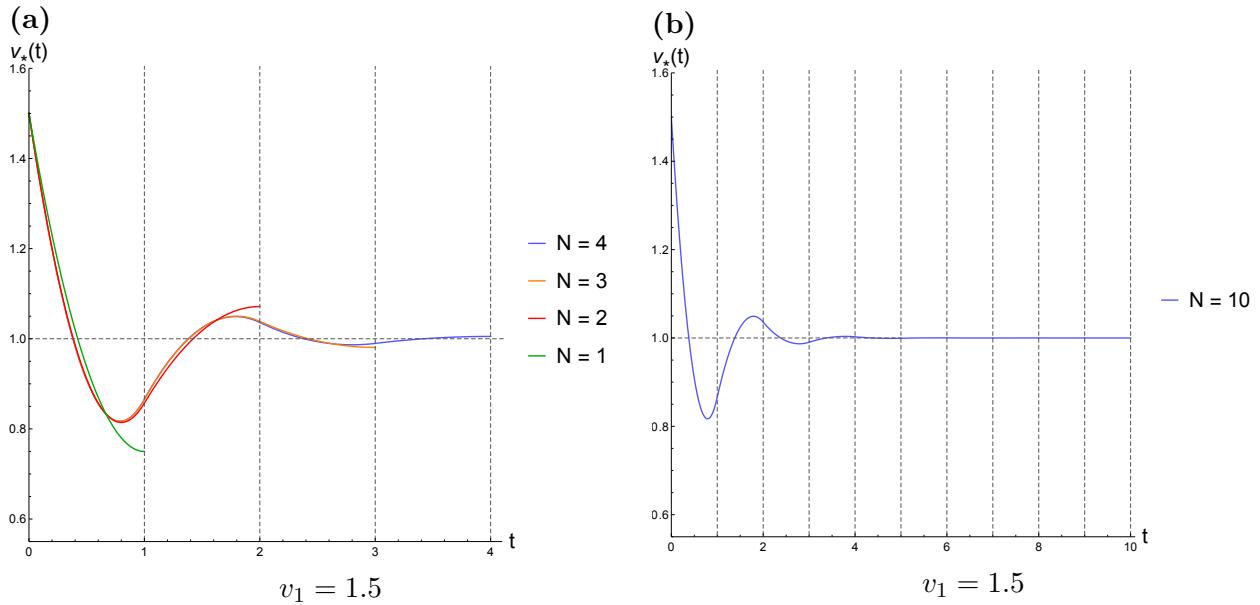
z vezmi:

$$\int_{i-1}^i v_{(i)}(t) \, dt = 1. \quad (31)$$

Analogno kot za $N = 2$ lahko izpeljemo robne pogoje:

$$\begin{aligned} v_{(1)}(0) &= v_1, \\ v_{(i+1)}(i) &= v_{(i)}(i), \\ \dot{v}_{(i+1)}(i) &= \dot{v}_{(i)}(i), \\ \dot{v}_{(N)} &= 0. \end{aligned}$$

Celotna rešitev je tako zlepiljena iz večih parabol na posameznih intervalih. Problem bi lahko posplošili, če bi predpostavili, da se semaforji prižigajo z različnimi časovni zamiki. V programu *Mathematica* sem sprogramiral funkcijo, ki poišče optimalno rešitev za poljubno število semaforjev N pri zgornjih robnih pogojih. Odvisnosti sem prikazal na sliki 8.



Slika 8: (a): Optimalne časovne odvisnosti hitrosti $v_*(t)$ za različno število zaporednih semaforjev N ter pri začetnem pogoju $v(0) = v_1$. (b): Optimalna odvisnost hitrosti za $N = 10$ pri začetnem pogoju $v(0) = v_1$. Funkcija zelo spominja na dušeno nihanje.

Na sliki 8 opazimo:

1. Odvisnost hitrosti od časa izjemno spominja na **dušeno nihanje** okoli brezdimenzijske hitrosti $v = 1$, s katero bi vse semaforje prevozili enakomerno.
2. Zanimivo bi bilo dokazati, da funkcija konvergira k dušenem nihanju v limiti $N \rightarrow \infty$.

5 Komentar

1. Osnovni problem bi lahko razširili z alternativnimi definicijami funkcionalov. Zanimivo bi bilo v funkcionalu upoštevati tudi robne pogoje; na primer hitrost na semaforju, saj si v praksi želimo skozi zeleno luč peljati čim hitreje, da bi prej dosegli željeni cilj.
2. Za poljubni eksponent q pospeška v funkcionalu sem se omejil le na prost robni pogoj na semaforju.
3. Pri nalogi 4, kjer v funkcionalu upoštevamo še kvadrat hitrosti, bi lahko analizirali še primer $C < 0$.
4. Najbolj splošen primer zaporednih semaforjev bi bil primer, kjer so časovni zamiki ter razdalje med zaporednimi semaforji različni.

Literatura

- [1] Olver P. J., *The Calculus of Variations*, 2021.

Materijal

4 Več semaforjev

Za konec si poglejmo še primer več zaporednih semaforjev na medsebojnih razdaljah L in z medsebojnim časovnim zamikom T . Optimalno trajektorijo določimo preprosto tako, da na vsakem odseku za začetne pogoje splošne rešitve (1) vzamemo končne vrednosti prejšnjega odseka. V splošnem imamo torej na i -tem odseku parabolo

$$y_i = a_i x^2 + b_i x + c_i ,$$

robna pogoja

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= y_{i+1}(0) = y_i(1) = a_i + b_i + c_i \\ b_{i+1} &= \dot{y}_{i+1}(0) = \dot{y}_i(1) = 2a_i + b_i \end{aligned}$$

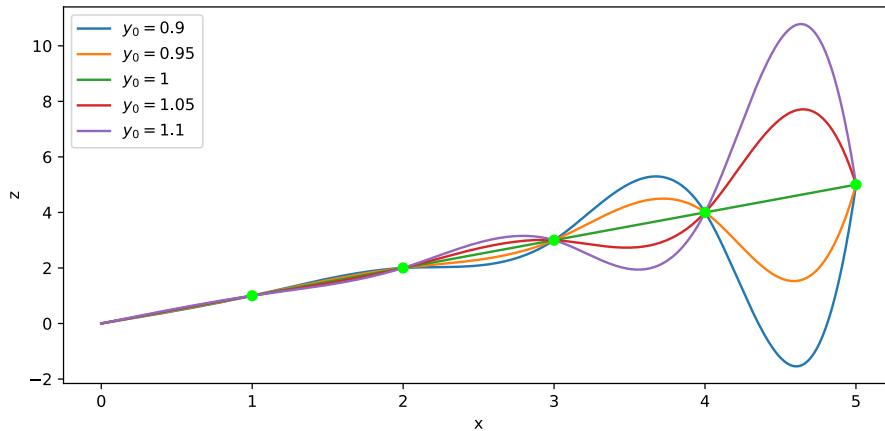
in vez

$$1 = \int_0^1 y_i \, dx = \frac{1}{3}a_i + \frac{1}{2}b_i + c_i \quad \rightarrow \quad a_i = 3\left(1 - \frac{1}{2}b_i - c_i\right) .$$

Čeprav bi morda pričakovali, da se trajektorija sčasoma izniha v stacionarno točko $(a, b, c) = (0, 0, 1)$, temu ni tako. Na sliki 4 lahko vidimo, da amplituda že pri majhnih odmikih začetnega pogoja $((a, b, c) = (0, 0, y_0))$ od stacionarnega naraste zelo hitro. Optimalna vožnja z $y_0 = 1.1$ že tretji semafor "ulovi vzvratno", nato pa z vožnjo nazaj nadaljuje celo preko drugega semaforja, preden ponovno zamenja smer, da ujame četrtega. Ker se zdi, da amplituda narašča eksponentno, bi bilo zanimivo oceniti, za kakšen faktor se poveča na vsakem odseku.

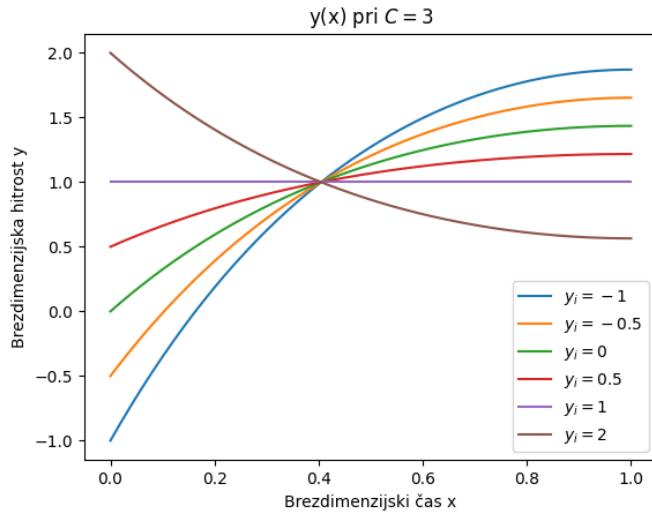
Težavo bi lahko rešili s periodično rešitvijo, za zveznost katere pa potrebujemo model z dodatnim prostim parametrom. Ponuja se rešitev (3) s prejšnjega poglavja, a bi zaradi zapletene odvisnosti v α prav vrednost tega parametra najverjetneje morali iskati numerično. Alternativno in morda najelegantnejše bi Lagrangian lahko razširili s členom s tretjim odvodom.

Navsezadnje bi manjše amplitude dobili tudi, če bi dopustili, da vmesne semaforje prevozimo prepozno. Ker je med trajektorijo, ki lovi en semafor, in tisto, ki lovi zadnjega od N semaforjev, razlika le v skali, bi tako vožnja s poljubnim $y_0 < 1$ (glej tudi sliko 1b) pri lovljenju zadnjega od semaforjev vse preostale prečkala, ko bi bili že zeleni. Uspešno jadranje na zelenem valu je torej očitno odvisno od tega, koliko časa je zelena luč prižgana; za analizo tega problema pa verjetno potrebujemo kakšno drugo metodo.

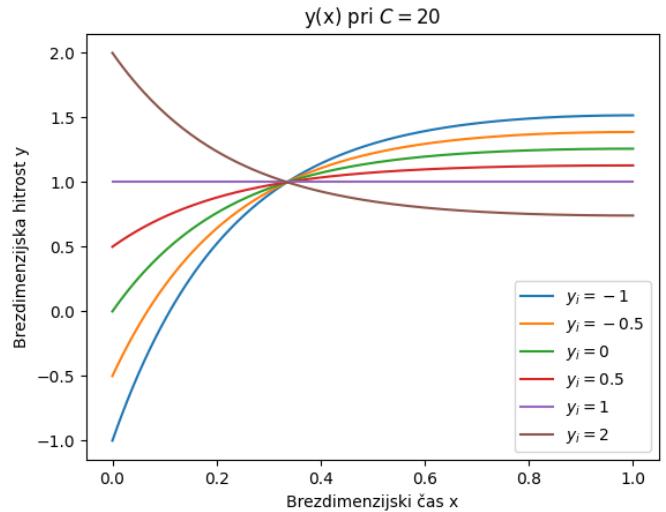


Slika 4: Optimalne trajektorije skozi 5 zaporednih semaforjev pri različnih začetnih hitrostih. Lokacije prižigov zelenih luči v prostor-času so označene z zelenimi pikami.

Gregor Humec



Slika 16: Krivulje hitrosti pri $C = 3$ in pri različnih začetnih hitrostih.



Slika 17: Krivulje hitrosti pri $C = 20$ in pri različnih začetnih hitrostih.

Na grafih lahko lepo vidimo, kako so rešitve odvisne tako od začetne hitrosti y_i kot tudi od parametra C , ki nam pove kako močno upoštevamo omejitev hitrosti. Tako vidimo, da so rešitve pri majhni vrednosti C podobe rešitvam za funkcional brez kvadrata hitrosti in poljubno končno hitrostjo. Medtem pa je pri rešitvah z večjo vrednostjo C očitno, da velike hitrosti hitro zamrejo.

2.5 Zaporedni semaforji

Poglejmo si še rešitve problema, kjer imamo zaporedne semaforje na medsebojni razdalji l in gorijo zeleno po pretečenem času t_0 . Predpostavimo še, da se v trenutku, ko začnemo opazovati, avtomobil nahaja v sredini tega zaporedja semaforjev in ravno preči semafor. Uporabimo splošno rešitev funkcionala s samo kvadratom pospeška 12. V tem primeru imamo periodičen robni pogoj $y(0) = y(1)$. Iz začetnega pogoja dobimo $B = y_i$, iz periodičnega pa:

$$-\frac{\lambda}{4} + A + y_i = y_i \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\lambda}{4}. \quad (48)$$

Uporabimo še pogoj 2:

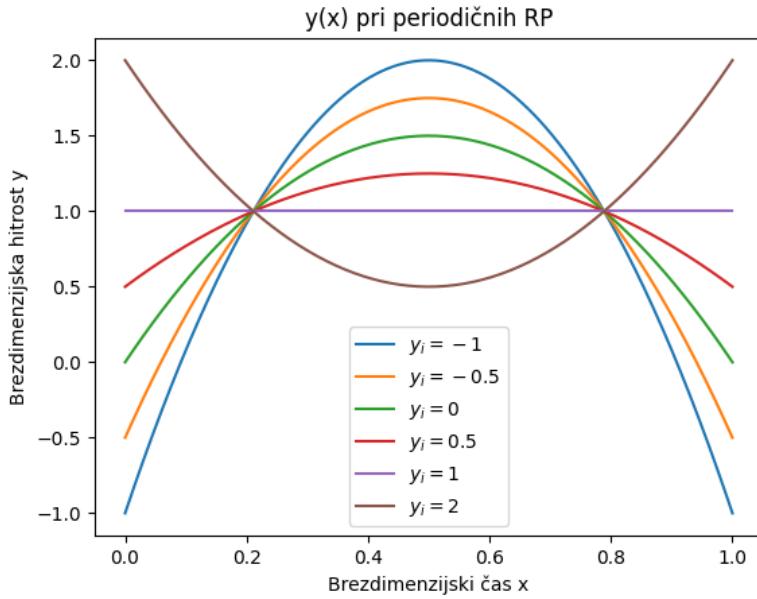
$$\int_0^1 y(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{\lambda}{4}x^2 + \frac{\lambda}{4}x + y_i \right) dx = -\frac{\lambda}{12} + \frac{\lambda}{8} + y_i = 1 \quad (49)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 24(1 - y_i) \quad (50)$$

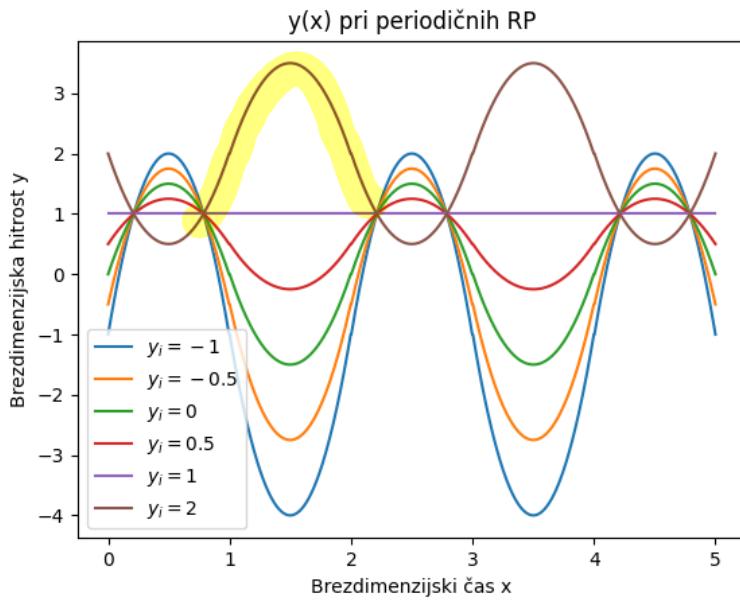
Tako imamo vse parametre za končen izraz:

$$y(x) = 6x(1 - y_i)(1 - x) + y_i \quad (51)$$

Ta izraz je veljaven na območju $x \in [0, 1]$. Da rešitev podaljšamo na zaporedne semaforje imamo pri naslednjem semaforju enak problem le z nasprotno predznačenim pospeškom. Tako lahko rešitev za območje naslednjega semaforja dobimo tako, da uporabimo rešitev 51 pomnoženo z (-1) v primerjavi z prejšnjim območjem in prištejemo $2y_i$. Tako lahko zagotovimo zveznost tako pospeška kot hitrosti. Kar počnemo v osnovi je prestavljanje parabol in popravljanje usmeritev ter pozicije teh parabol. Pogledamo si lahko rešitve na enem območju ter na večih območjih.



Slika 18: Krivulja hitrosti na enem območju semaforja pri različnih začetnih hitrostih.



Slika 19: Krivulja hitrosti čez 5 območij pri različnih začetnih hitrostih.

Opazimo lahko, da večina teh hitrosti ni fizikalno relativativnih, saj v velikem delu območja med semaforji vozijo v negativni smeri. Smiselne rešitve so tiste, pri katerih avto nikoli ne vozi vzvratno.

2.6 Eksponentni funkcional

Nazadnje si poglejmo še kako bi izgledale rešitve če si za Lagrangeovo funkcijo izberemo:

$$\mathcal{L} = a^{\dot{y}} - \lambda y \quad (52)$$

Tukaj so rešitve spet odvisne še od enega parametra a . Uporabimo Euler-Lagrangeovo enačbo ter dobimo diferencialno enačbo:

$$a^{\dot{y}} \ddot{y} = -\frac{\lambda}{ln^2 a} \quad (53)$$

Rešitev te diferencialne enačbe je:

$$y(x) = \ln^{-1} a \left(x - \frac{A \ln^2 a}{\lambda} \right) \ln \left(A \ln a - \frac{\lambda x}{\ln a} \right) - x + B \quad (54)$$

Če uporabimo pogoj za poljubno končno hitrost dobimo izraz:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \ln a a^{\dot{y}} = 0 \quad (55)$$

Vidimo lahko, da ta izraz nima rešitve. Tako smo pokazali, da za tako izbiro funkcionala nimamo rešitev za poljubno končno hitrost, razen za izbiro $a = 0$, ki pa ni smiselna.

Filip Šuhadec

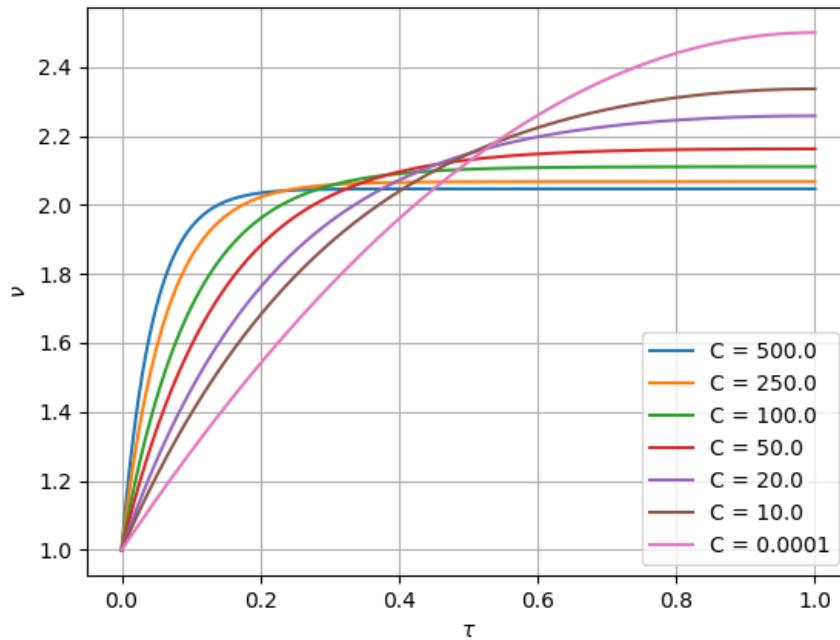
Iz pogojev $\nu(0) = 1$ in $\dot{\nu}(1) = 0$ dobimo enačbo

$$\nu(\tau) = \frac{2Cv_0 + \lambda t_0}{2Cv_0 \left(1 + \exp(-2\sqrt{C}t_0)\right)} \left[\exp\left(\sqrt{C}t_0(\tau - 2)\right) + \exp\left(-\sqrt{C}t_0\tau\right) \right] - \frac{\lambda t_0}{2Cv_0}. \quad (9)$$

Po integraciji dobimo λ kot

$$\lambda = \frac{2C \left(\sqrt{C}l_0 - v_0 \frac{1 - \exp(-2\sqrt{C}t_0)}{1 + \exp(-2\sqrt{C}t_0)} \right)}{t_0 \left(\frac{1 - \exp(-2\sqrt{C}t_0)}{1 + \exp(-2\sqrt{C}t_0)} - \sqrt{C}t_0 \right)}. \quad (10)$$

Optimalna vožnja z minimizacijo kvadrata pospeška in kvadrata hitrosti



Slika 3: Graf $\nu(\tau)$ pri različnih C . Vidimo lahko, da velikost C direktno vpliva na največjo doseženo hitrost.

Periodični semaforji

Pri tej nalogi imamo robni pogoj $v(0) = v(t_0)$. Opazimo, da smo pri četrti nalogi dobili rešitve v obliki eksponentov oziroma hiperboličnih funkcij, zato sklepamo, da bi lahko s spremembou predznaka v \mathcal{L} dobili periodične rešitve.

$$\int_0^{t_0} (\dot{v}(t)^2 - Cv(t)^2) dt = \int_0^{t_0} \mathcal{L}(\tau, \nu, \dot{\nu}) dt = \min. \quad (11)$$

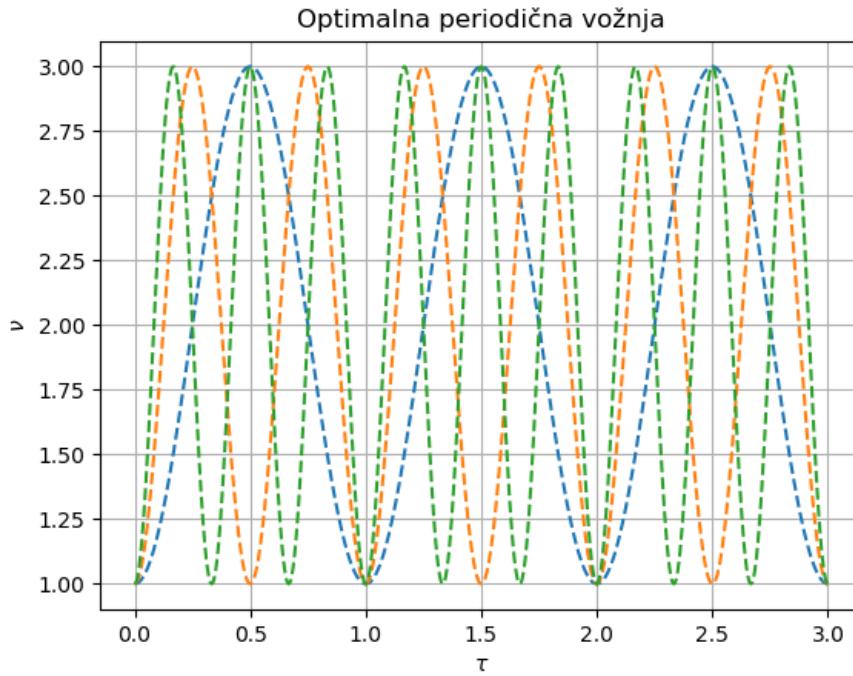
Ponovimo postopek iz prejšnjih nalog in dobimo

$$\ddot{v}(t) - Cv(t) = -\frac{\lambda t_0}{2}. \quad (12)$$

Rešitve te enačbe podamo v obliki

$$v(t) = A \sin(\sqrt{C}t) + B \cos(\sqrt{C}t) - \frac{\lambda t_0}{2C}. \quad (13)$$

Upoštevamo robna pogoja $v(0, t_0) = v_0$ in $\dot{v}(0) = \dot{v}(t_0)$ in integral po celotnem času ter s pomočjo nekaj obračanja dobimo periodične krivulje. Potrebno je omeniti, da je C v splošnem lahko enak $2\pi k/t_0$ za $k \in \mathbb{Z}$, a je vožnja v primerih, ko je k večji od ena, preveč razburljiva.



Slika 4: Graf $\nu(\tau)$ pri različnih C . V poštvet (mirna vožnja) pride le najmanjša perioda, torej najmanjši C .

Zaključek

Pri tej nalogi je veliko časa vzelo računanje na papir. Ideja ni kompleksna, očitno pa sem že pozabil, kako hitro se človek zmoti pri golem obračanju enačb.

Dodertne ualuge:

Materijal Jug

3 Varčna in previdna vožnja

V zgornjem modelu najbolj moti dejstvo, da nam za previsoke začetne hitrosti podaja optimalne vožnje z vzvratnim vračanjem do semaforja. Videli smo, da se "dovoljeni" interval začetnih hitrosti razširi, če povečamo potenco pospeška v Lagrangianu. Poskusili bi lahko tudi s sprostivijo začetnega pogoja $\dot{y}(0) = 0$, namesto katerega bi zahtevali recimo $\dot{y}(1) = 0$ ¹. Ker je problem simetričen na obrat časa lahko neposredno sklepamo, da bi bila v tem primeru največja dovoljena $y_0 = 3$ (glej $y_0 = 0$ primer na sliki 1a). Alternativno bi s pogojem $y(1) = 0$ prezgodnjo vožnjo čez semafor seveda povsem preprečili, a lovljenje zelene luči potem ne bi imelo zares smisla.

Da želimo trajektorijo, ki bo bliže povprečni hitrosti, lahko namignemo tudi z dodatnim členom v Lagrangianu:

$$\mathcal{L} = \dot{y}^2 + \alpha^2(y - 1)^2 + \lambda y ,$$

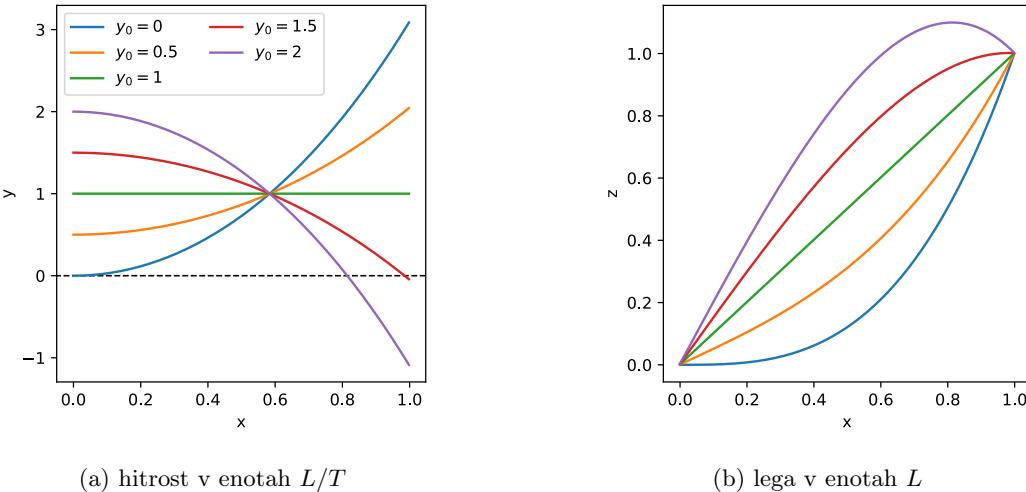
kjer parameter α določa, kako pomembno je minimiziranje odmika hitrosti v primerjavi s pospeškom. Dinamična enačba je sedaj kvalitativno drugačna

$$\ddot{y} - \alpha^2(y - 1) - \lambda/2 = 0 ,$$

njena rešitev ob enakih robnih pogojih kot na začetku pa je

$$y(x) = \frac{\alpha^2 + \alpha^2(y_0 - 1) \cosh(\alpha x) - \alpha y_0 \sinh(\alpha)}{\alpha(\alpha - \sinh(\alpha))} . \quad (3)$$

Na sliki 3 vidimo, da so trajektorije za $\alpha = 1$ precej podobne tistim na sliki 1. Presenetljivo pa so končne hitrosti bolj ekstremne, za $y_0 > 1$ torej prej negativne. Natančnejši razmislek pokaže, da je dodani člen $\alpha^2(y - 1)^2 = \alpha^2y^2 - \alpha^2y + \alpha^2$ ekvivalenten α^2y^2 , saj se linearni člen združi z vezjo, konstantni pa na minimizacijo seveda nima vpliva. Minimizirali smo torej kvadrat hitrosti sam po sebi, zato je smiselno, da so padajoče rešitve raje bliže ničli. Kako bi dejansko izvedli minimizacijo proti $y = 1$, avtorju ni znano.



Slika 3: Varčna in previdna vožnja do semaforja za $\alpha = 1$ in različne začetne hitrosti.

¹Zdi se, da mora imeti optimalna vožnja pospešek 0 na enem izmed robov intervala. Če je teme parabole nekje vmes, je del pospeševanja (zaustavljanja) nepotreben, če je izven intervala, pa je začetni pospešek (pojemek) previsok.

Urban Duš

Pogoji so

$$\int_0^1 \nu d\tau = 1, \quad (73)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \nu d\tau = -\frac{\lambda}{12} + \frac{A}{2} + B = 1, \quad (74)$$

$$\nu(0) = \nu_0, \quad (75)$$

$$\Rightarrow B = \nu_0, \quad (76)$$

$$\nu(1) = \nu_0, \quad (77)$$

$$\Rightarrow \nu(1) = -\frac{\lambda}{4} + A + B = \nu_0, \quad (78)$$

kar nam da rešitev

$$\nu = \nu_0 + 6(1 - \nu_0)(\tau - \tau^2). \quad (79)$$

Grafi za nekaj smiselnih ν_0 so na sliki 9. Vidimo, da so rešitve res periodične, vendar je skok pospeška pri semaforju zelo velik, kar ni preveč fizikalno smiselno. Edina rešitev z zveznim pospeškom v tej družini rešitev je trivialna rešitev $\nu(\tau) = 1$, ki pa ni zanimiva. Zvezno odvedljive rešitve bi lahko iskali na načine, ki sem jih nakazoval na koncu poglavja 5, vendar se s takimi modeli v tej nalogi ne bomo ukvarjali.

6 Minimizacija nepolinomske funkcije pospeška

Za konec minimizirajmo še eno nepolinomsko funkcijo pospeška. Najbolj enostavna funkcija, ki si jo lahko izberemo, je $\int_0^1 e^{\dot{\nu}} d\tau$. Vrednost te funkcije je majhna, ko zaviramo, in velika, ko pospešujemo, torej pričakujemo rešitve, ki rahlo pospešujejo in naglo zavirajo. Dobimo Lagrangevo funkcijo in EL enačbe

$$\mathcal{L} = e^{\dot{\nu}} - \lambda\nu, \quad (80)$$

$$\frac{d}{d\tau}(e^{\dot{\nu}}) = -\lambda, \quad (81)$$

$$e^{\dot{\nu}} = -\lambda\tau + A \quad (82)$$

ter rešitev

$$\nu = \int \ln(-\lambda\tau + A) d\tau = \dots = \left(\tau - \frac{A}{\lambda}\right) \ln(-\lambda\tau + A) - \tau + B, \quad (83)$$



Slika 9: Periodične rešitve pri zaporednih semaforjih, minimizacija kvadrata pospeška. Z vertikalnimi zelenimi črtkanimi črtami so označene pozicije semaforjev.

za neki konstanti A in B . Za robne pogoje bi želeli poljubno končno hitrost, vendar to ni mogoče, saj $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\nu}} = e^{\dot{\nu}} > 0$. Poleg začetne hitrosti ν_0 zato zahtevajmo še ničelni pospešek pri semaforju, torej pogoj, ki smo ga za poljubno končno hitrost dobili v prejšnjih poglavjih, da bodo rešitve bolj primerljive. Dobimo

$$\nu(0) = \nu_0, \quad (84)$$

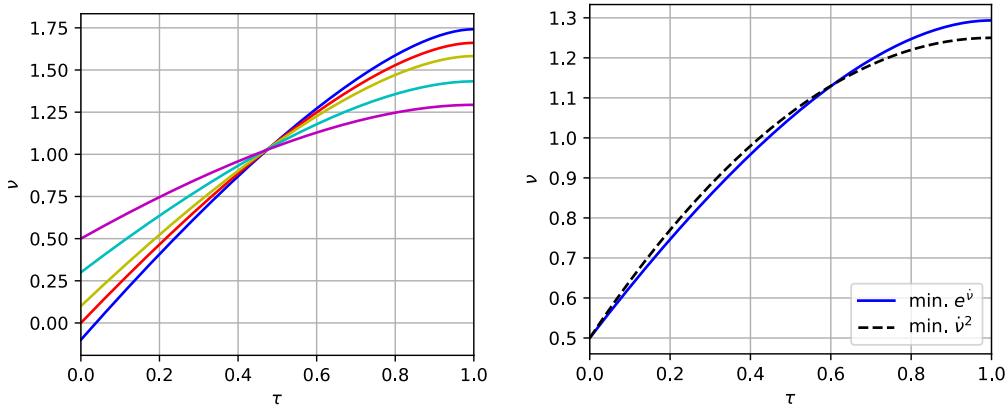
$$\implies \nu(0) = -\frac{A}{\lambda} \ln A + B = \nu_0, \quad (85)$$

$$\dot{\nu}(1) = 0, \quad (86)$$

$$\implies \dot{\nu}(1) = \ln(-\lambda + A) = 0, \quad (87)$$

$$\int_0^1 \nu \, d\tau = 1. \quad (88)$$

Zadnjega pogoja nismo natančno razpisali, saj dobimo komplikirane izraze, ki jih je na roko težko (ali pa celo nemogoče) reševati. Da prikažemo še en pristop, rešimo enačbo (88) numerično za vsak ν_0 posebej. To lahko na primer naredimo tako, da najprej A in B izrazimo z λ , nato s pomočjo Python funkcije za numerično integracijo `scipy.integrate.quad` definiramo funkcijo, ki parametru λ priredi vrednost integrala (88), nato pa s pomočjo `scipy.optimize.fsolve` poiščemo iskane λ . Izkaže se, da rešitve, ki ustrezajo našim pogojem obstajajo le za $\nu_0 \leq 0.5$, nekaj jih je prikazanih na



Slika 10: Minimizacija kumulativnega $e^{\hat{v}}$ in primerjava z minimizacijo kvadrata pospeška.

sliki 10. Na sliki 10 je prav tako prikazana primerjava rešitev, ki ju dobimo z minimizacijo eksponenta pospeška in kvadrata pospeška. Kot smo napovedali, pri minimizaciji eksponenta precej bolj rahlo pospešujemo (graf ima na začetku manjši naklon), nato pa bolj naglo zaviramo.

Izbira funkcije za minimizacijo v tem poglavju ni tako fizikalno smiselna kot prejšnje izbire, to poglavje ima večjo vrednost kot prikaz alternativnega pristopa, če bi v kakšnem drugem fizikalnem modelu želeli minimizirati funkcije, kjer bi potrebovali delno numeričen pristop. V takih primerih je sicer verjetno smiselno uporabiti povsem numerično minimizacijo funkcionala.

7 Zaključek

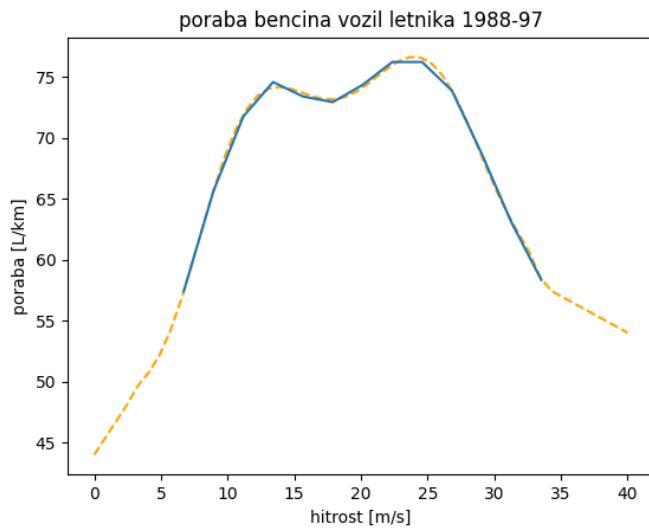
V nalogi smo analizirali različne modele vožnje skozi semafor. Najbolj splošno zanimivo je poglavje 3, zgodnejša poglavja so zanimiva zaradi analize kompleksnejših robnih pogojev, kasnejša pa zaradi kompleksnejših modelov (v njih pa uporabljam najenostavnnejše robne pogoje).

Možnosti za nadaljnje delo je še veliko. Poleg povsem novih modelov bi bila zanimiva še natančnejša obdelava zaporednih semaforjem, na primer z različnimi medsebojnimi razdaljami ali pa v poglavju 5 omenjene ideje za iskanje zvezno odvedljivih rešitev. Prav tako bi bila zanimiva širša analiza fizikalne smiselnosti rešitev, ki smo jo nakazali v poglavju 2.1.1.

Yap Plog

6 Mentalno prijetna vožnja (nedokoncana)

Morda je najbolj udobna vožnja prav tista, ki je prizanesljiva bančnemu računu. Namesto majhnega komutativnega pospeška omejimo raje porabo bencina. Uparabili bomo podatke raziskave¹ porabe osebnih avtomobilov iz leta 1999.



Na podatke raziskave fitamo polinom 8 stopnje in ga nekoliko popravimo za visoke in nizke hitrosti (črtkana črta).

$$poraba(v) = \begin{cases} \frac{5}{3}v + 44 & x < 3 \\ \text{polinom 8 st.} & 3 < x < 34 \\ -\frac{5}{3}v + 113.3 & 34 < x < 41 \\ 53.33 & 41 < x \end{cases} \quad (22)$$

Tukaj moram to raziskavo prekiniti, saj mi primankuje časa za pisanje numerične metode v PYTHONU. Morda je tu še kakšna lažja pot, ki sem jo spregledal.

¹1997 - West, B.H., R.N. McGill, J.W. Hodgson, S.S. Sluder, and D.E. Smith, Development and Verification of Light-Duty Modal Emissions and Fuel Consumption Values for Traffic Models, FHWA-RD-99-068, U.S. Department of Transportation, Federal Highway Administration, Washington, DC, March 1999.

Timon Grabovac

$$v_i(t_i) = v_{i+1}(t_i), \quad (23)$$

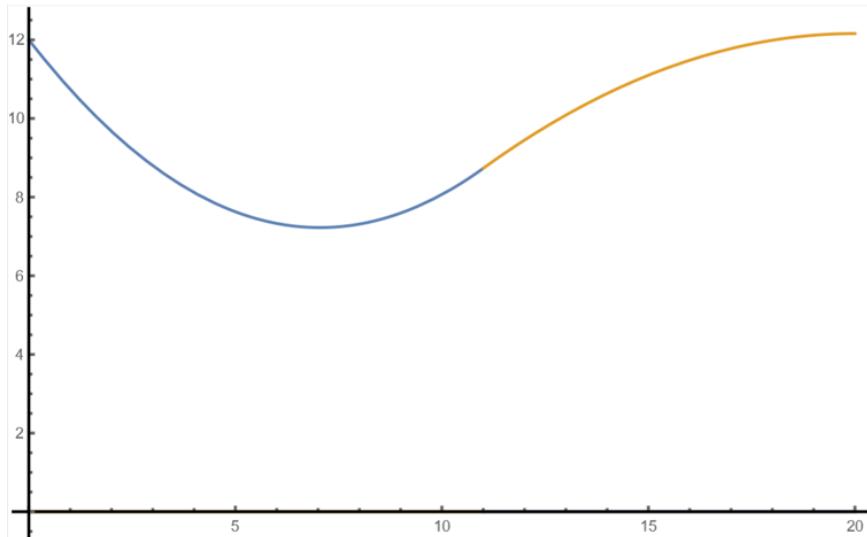
$$\dot{v}_i(t_i) = \dot{v}_{i+1}(t_i), \quad (24)$$

kjer je t_i čas ob katerem avtomobil prevozi i -ti semafor. Hitrost med i -tim in $i + 1$ -tim semaforjem je definirana kot:

$$v_i(t) = \frac{\lambda_i}{4} t^2 + A_i t + B_i, \quad (25)$$

kjer so λ_i , A_i in B_i konstante, ki jih lahko določimo s pomočjo robnih pogojev.

Problem zaporednih semaforjev sem dokončno rešil za poenostavljen primer dveh semaforjev, saj se takrat izračun konstant zelo poenostavi. Rezultati za ta primer pri parametrih $l_1 = 50$, $l_2 = 250$, $v_0 = 12$, $t_1 = 11$, $t_2 = 19$ je prikazan na sliki 5.



Slika 5: Graf hitrosti v odvisnosti od časa pri $l_1 = 50$, $l_2 = 250$, $v_0 = 12$, $t_1 = 11$, $t_2 = 19$. Avto doseže semafor pri času t_1 , kjer se zamenja barva črte na grafu.

7 Minimizacija hrupa

Drug/dodaten kriterij za udobje vožnje je lahko hrup, ki ga vozilo proizvede. S takim merilom lahko ocenimo tudi splošno kvaliteto vožnje, saj je hrup dejavnik, ki ne vpliva le na potnike v avtomobilu. Moja prva intuicija je bila, da hrup med vožnjo narašča logaritemsko s hitrostjo. Brez poglobljene analize in raziskovanja sem našel nekaj modelov in eksperimentalnih meritev, ki te predpostavke ne ovržejo popolnoma [1,2]. Ob taki predpostavki, bi lahko dopolnili kriterij za udobno vožnjo:

$$\int_0^{t_0} \dot{v}^2(t) + A \ln(v(t)) dt = \min., \quad (26)$$

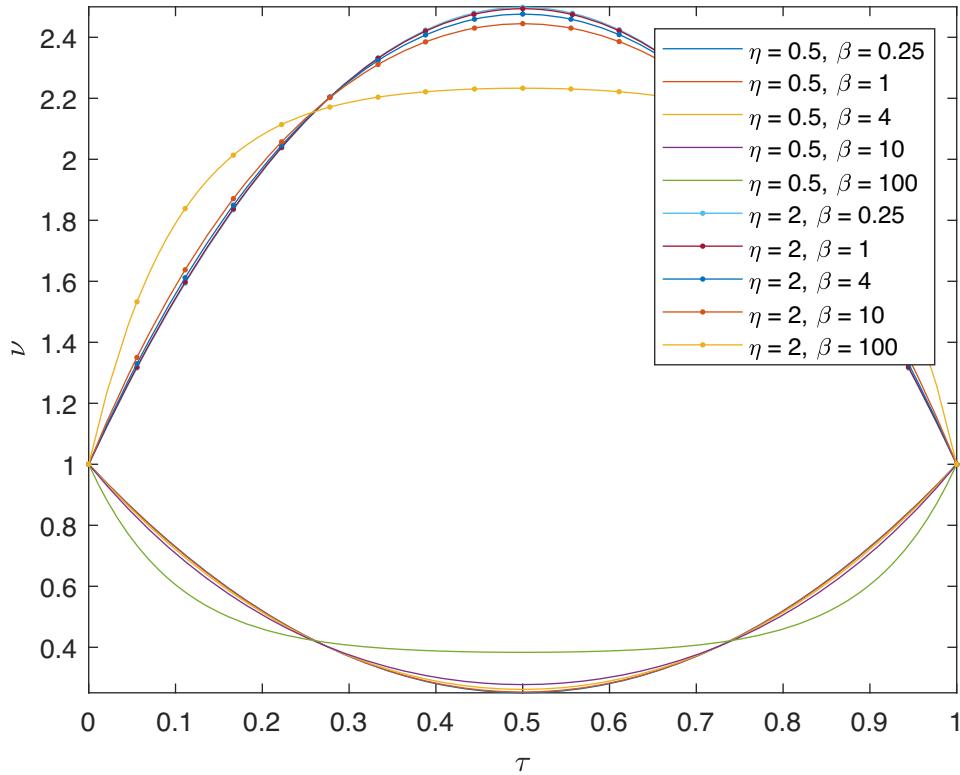
Kjer je A parameter, ki nam lahko predstavlja nivo hrupa, ki ga povzroča naš avtomobil. Po minimizaciji dobimo diferencialno enačbo:

$$2y''(x) - \frac{A}{y(x)} + \lambda = 0 . \quad (27)$$

Te diferencialne enačbe program Wolfram Mathematica ne zna rešiti, nisem pa je imel časa poskusiti rešiti z drugim orodjem, saj sem na minimizacijo hrupa pomislil šele malo pred oddajo naloge in jo vključujem bolj kot zanimivost oz. idejo za nadaljnje delo.

Literatura in viri

- [1] Berge, T. et al., 2017. Reduction of road traffic noise by source measures – present and future strategies. Noise Control Engineering Journal, 65(6), pp.549–559.
- [2] Eisele, G. et al., 2005. Application of vehicle interior noise simulation (VINS) for NVH analysis of a passenger car. SAE Technical Paper Series.



Slika 6: Graf $\nu(\tau)$ za različne parametre β in η z $\nu' = 1$.

Lastna opažanja

Minimizacija moči

Zamislimo si, da želimo v lagrangianu kaznovati preveliko moč delovanja. To lahko dosežemo z uvedbo člena $\tilde{\mathcal{L}} = \nu\dot{\nu}$. Uporabimo Euler-Lagrangevo funkcijo:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\nu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu} = \frac{d}{d\tau} \nu - \dot{\nu} = 0. \quad (18)$$

Razvidno je, da tak člen nima prispevka, saj se nanaša na ohranitev energije.

Periodične rešitve znotraj razdalje

Znotraj podpoglavja 4 lahko opazimo, da z izborom $\beta < 0$ dobimo set rešitev s kompleksnimi eksponenti. Za pogoj $\nu' = 1$ lahko dobimo množico novih rešitev, ki so periodične še na razdalji l . Tem rešitvam zadoščajo $\beta = -2\pi n$ za $n = 1, 2, \dots$.

MOC

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{Fd\sigma}{dt} = m \cdot \dot{v}(t) \cdot v(t) \leq P_{max}$$

To muss wiederum reichen
zu noch das!

$$v(t) = -\frac{\lambda t^2}{4} + At + v_0$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{\lambda}{4} 2t + A$$

Damit v brezdimenziöler abhängt:

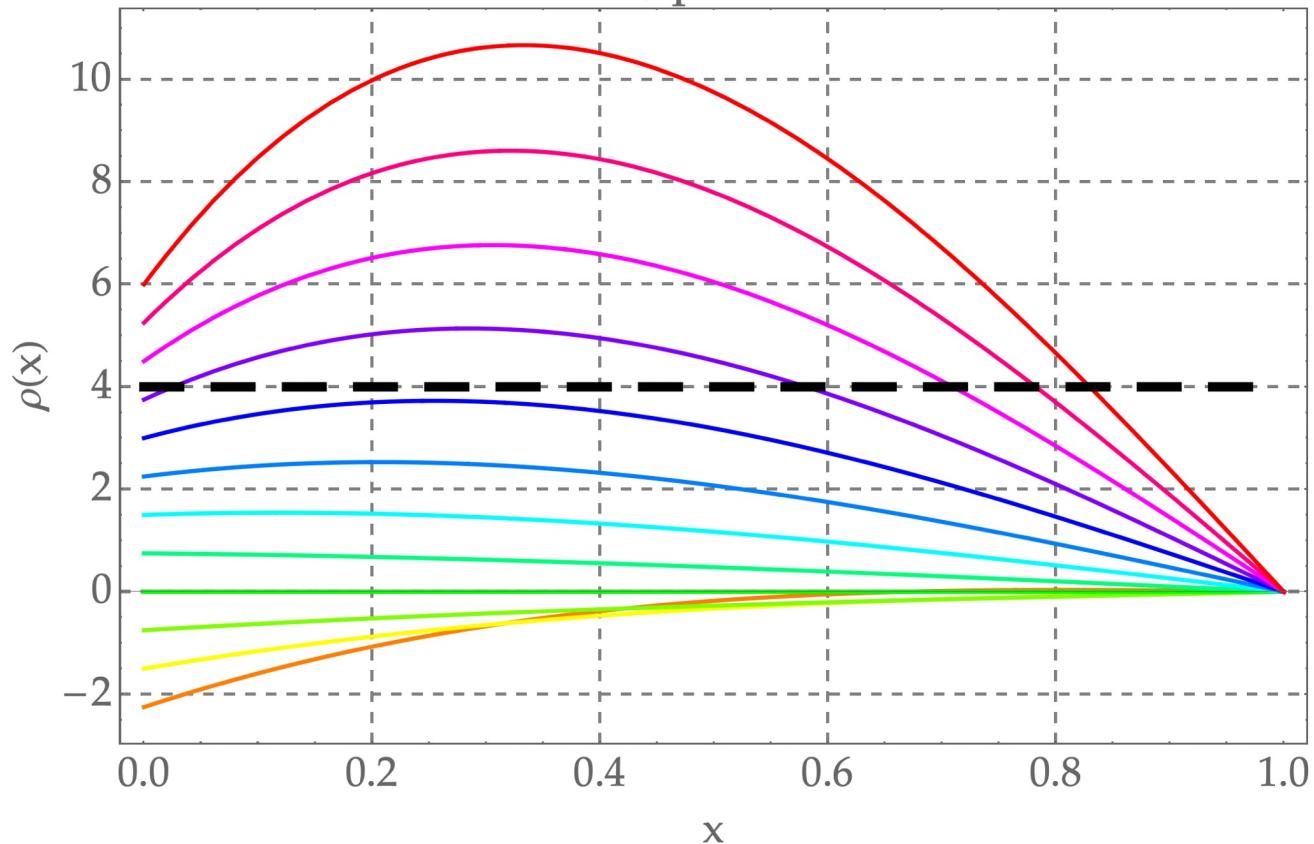
$$y(x) = -\frac{\lambda}{4} x^2 + Ax + 1$$

$$\dot{y}(x) = -\frac{\lambda}{2} x + A$$

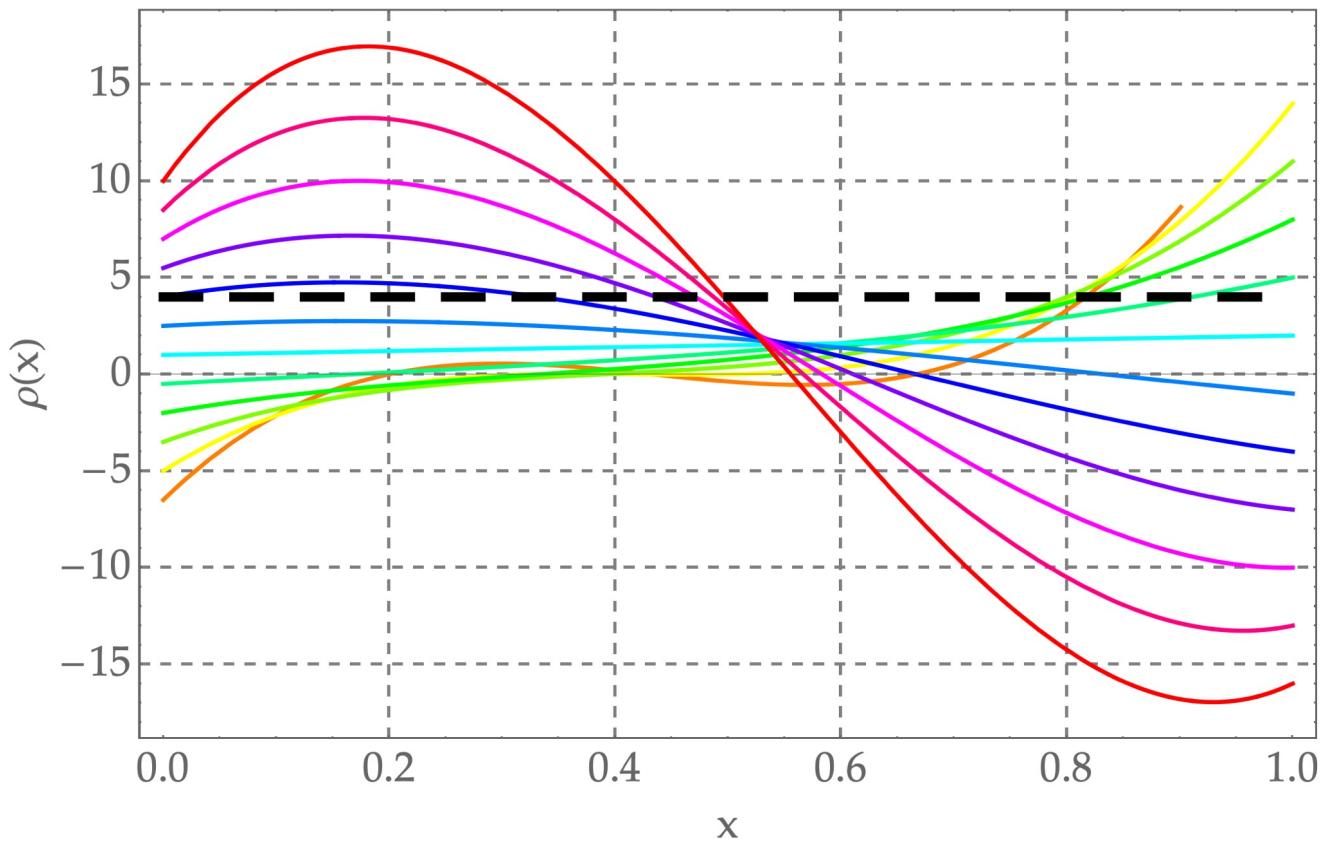
$$P = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v = m \cdot \frac{dy}{dx} \cdot y \cdot \frac{v_0^2}{t_0} = P_0 \cdot \dot{y} y$$

$$\frac{P}{P_0} = g = \dot{y}(x) y(x)$$

Osnovna rešitev, prosta končna hitrost



Fiksna končna hitrost



Male spomenimo da su poj'm dolozili
z integralskom pogojem:

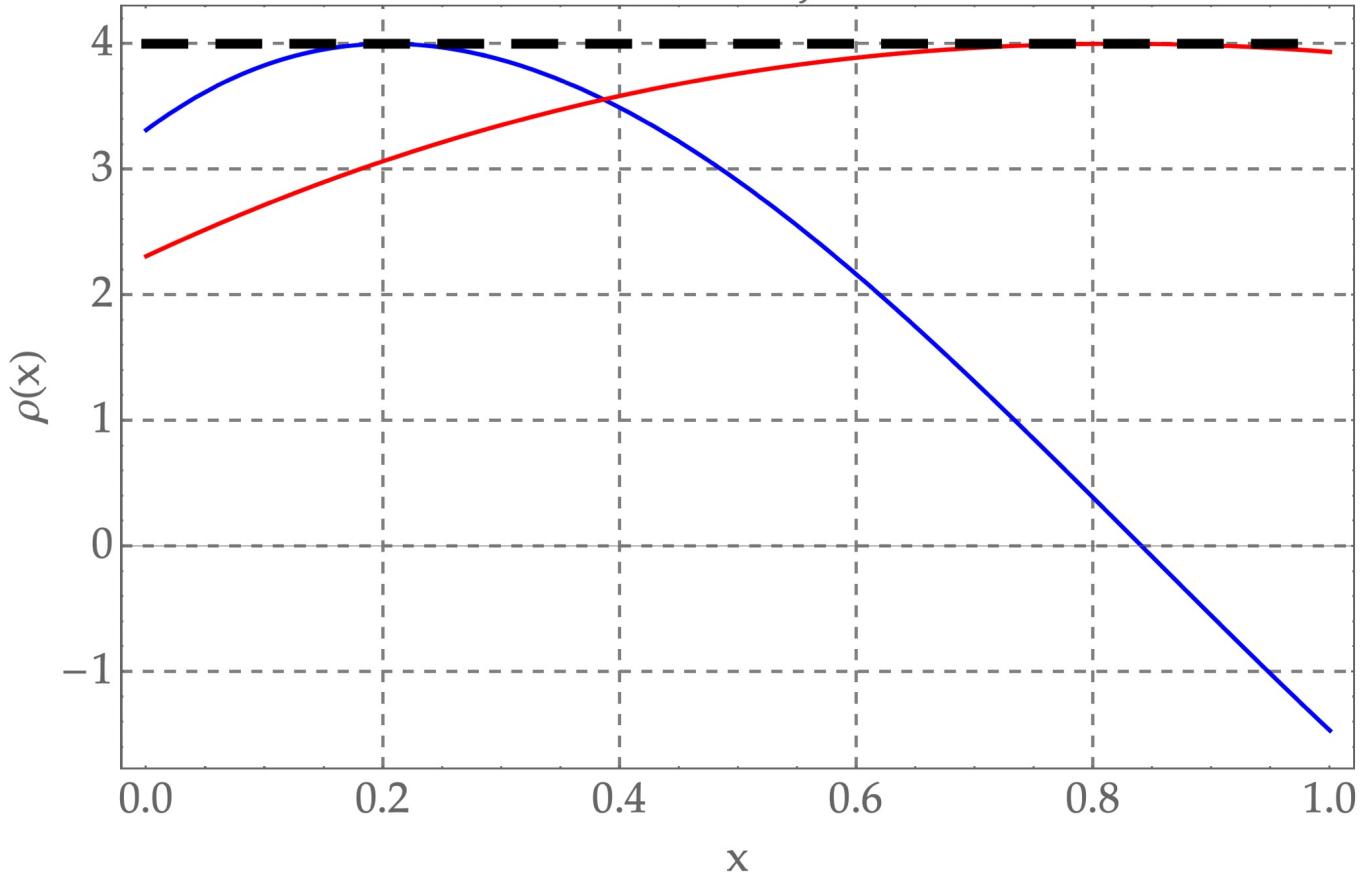
$$\int_0^1 y(x) dx = 2 \Rightarrow \lambda = 6(A - 2z + 2)$$

$$y(x) = -\frac{3}{2}(\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{z}} + 2)x^2 + \underline{\underline{A}}x + 1$$

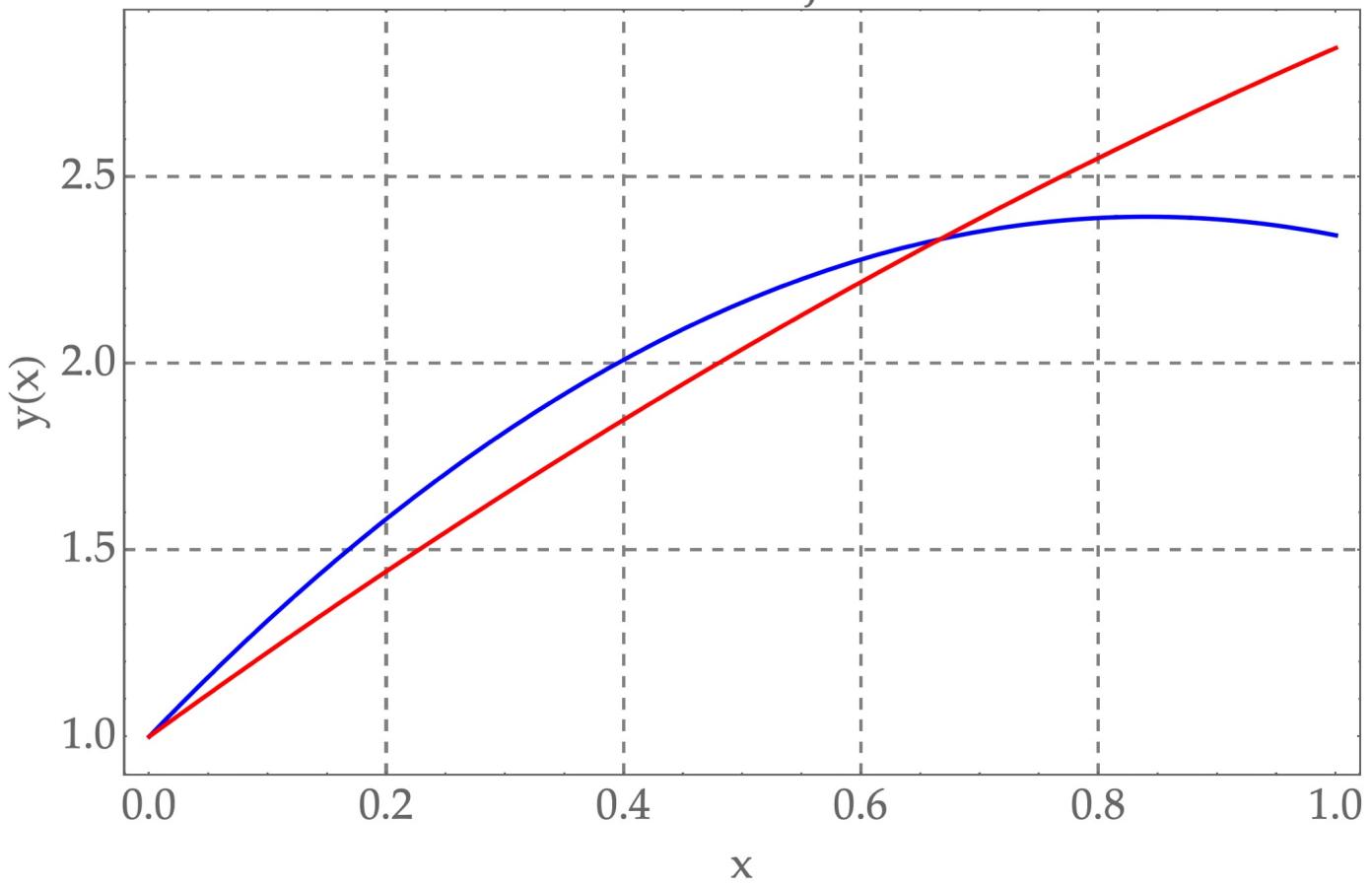


Parametar A sedaj predstavlja faktor, da
opisujejo $S(x)$. Povsem, tje. da funkcija
extrem. A nastavlja faktor, da je vrednost $S(x_e)$
matematički P_{max}/P_0 . Ko uzmemo A doloden
potem prenimo, da je x_e između $[0, 1]$.
Preverimo se, da je x_e globalni ekstrem.
Ko to potrdimo, lako ćemo opisujemo nase
rezultate!

Maximalna moč je določena



Maximalna moč je določena



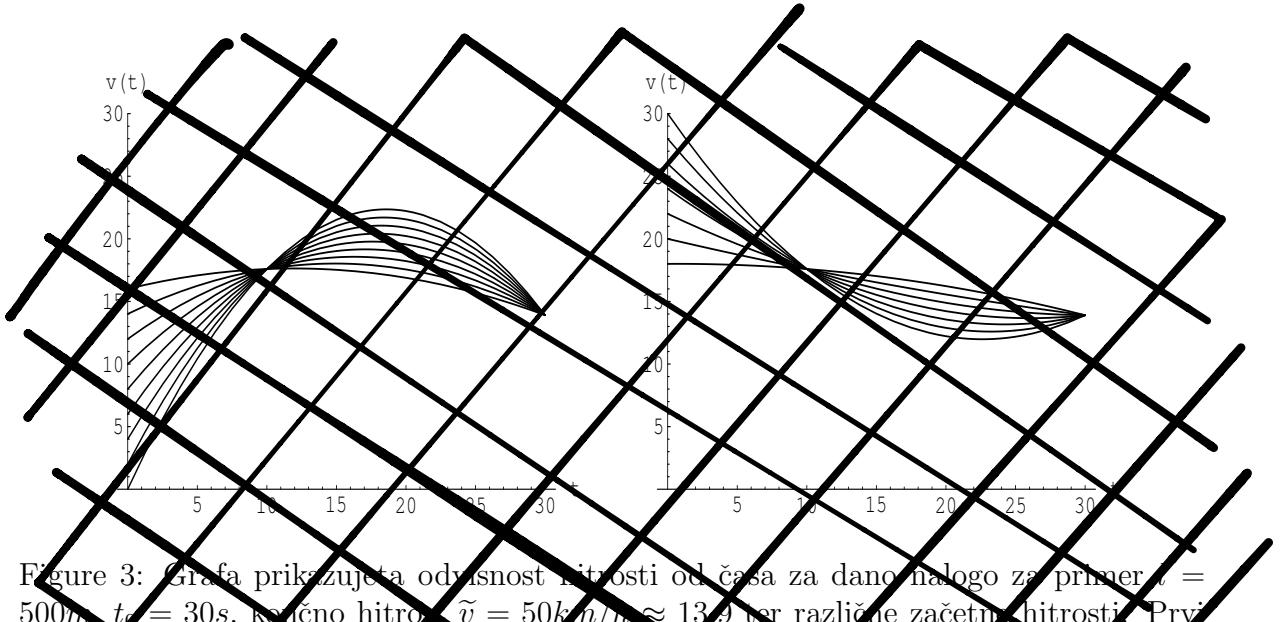


Figure 3: Grafa prikazujejoča odvisnost hitrosti od časa za dano nalogo za primer $a = 500m$, $t_c = 30s$, končno hitro $\tilde{v} = 50km/h \approx 13.9$ ter različne začetne hitrosti. Prvi graf prikazuje hitrostni profili za $v_0 = 0\dots 16m/s$, drugi pa za $v_0 = 17\dots 30m/s$. Iz slik vidimo, da je končna hitrost pri $t = t_0$ vedno fiksna.

3 Druga Naloga

Sedaj ko vemo, kakšna je najbolj optimalna vožnja se vprašajmo, kako bi upoštevali ciklično delovanje semaforja. Vemo, da će smo dovolj oddaljeni se bo bolj splačalo, da počakamo na drugo, morda tretjo zeleno luč in ne divjati za prvo. Kako to upoštevati?

Zaradi enostavnosti predpostavimo, da ima semafor le rdečo in zeleno luč. Rdeča luč naj na semaforju gori t_1 , zelena pa r_2 . Cikel na semaforju traja tako $\tau = t_1 + t_2$. Vedenje našega soferja se še ni spremenilo, kar pomeni, da ne bo šel čez križišče kadarkoli, pač pa le tedaj, ko semafor preklopi iz rdeče v zeleno luč. Recimo, da voznik v daljavi l zagleda rdeč semafor s cikлом τ in ve, da ima do prve zelene še t_0 časa. Glej sliko 4. Na kateri zeleni semafor za povrstjo se mu splača počakati, da bo vožnja čim bolj optimalna.

Čas čakanja na preklop zelene luči lahko v našem primeru zapišemo kot

$$t_c = t_0 + n\tau; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Križišče bomo prepeljali po času t_c . Ker hočemo, da je vožnja še vedno optimalna lahko uporabimo rezultat iz prve naloge in za t_c zapišemo

$$v(t) = \frac{3}{2t_c^3}(l - v_0 t_c)(2t_c t - t^2) \quad (24)$$

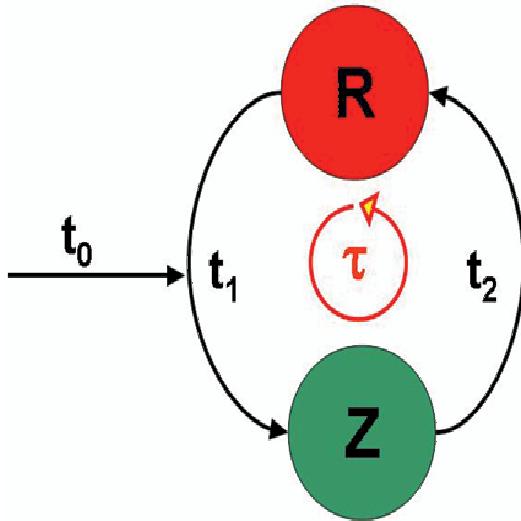


Figure 4: Na sliki je označen cikel semaforja, ki ga obravnavamo. Zelena luč traja t_2 časa, rdeča luč pa t_1 . Celoten cikel semaforja je tako dolg $\tau = t_1 + t_2$. Z ravno puščico je označen trenutek, ko zagleda šofer semafor in ugotovi, da ima še t_0 časa do prve zelene.

Hitrost $v(t)$ je odvisna od l, v_0, t_c . Fiksirajmo l in v_0 . Vemo, da će bo t_c zelo dolg, potem bomo verjetno morali zavirati, če pa je t_c kratek, pa bomo verjetno pospeševali. Nas pa sedaj zanima, kakšen naj bo t_c , da bo vožnja najbolj udobna. To ugotovimo tako, da pogledamo, pri katerem t_c bo funkcional

$$F(t_c; v_0, l) = \int_0^{t_c} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dt = \min. \quad (25)$$

Naj opomnim, da je pri izbranih, fiksnih parametrih t_c, v_0, l za dano gibanje F vedno minimalen, saj smo izbrali tako gibanje. Ampak funkcional je odvisen od svojih parametrov in se z njimi spreminja. Mi si ta funkcional oglejmo sedaj kot funkcijo časa $F(t_c)$ in poglejmo kje ima minimum. Iščemo:

$$\left(\frac{dF}{dt_c} \right)_{v_0, l} = 0 \quad (26)$$

Najprej izračunajmo funkcional 25 tako, da vanj vstavimo izraz 24. Dobimo

$$\int_0^{t_c} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dt = \int_0^{t_c} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2t_c^3} (l - v_0 t_c) (2t_c t - t^2) \right) \right]^2 dt = \frac{9}{t_c^3} (l - v_c t_c)^2. \quad (27)$$

Da bi dobili ekstrem, zgornji izraz sedaj odvajamo, izenačimo z nič in dobimo

$$\frac{dF}{dt_c} = -\frac{(l - v_c t_c)^2}{t_c^4} \left(27 + 18 \frac{v_c t_c}{(l - v_c t_c)} \right) = 0. \quad (28)$$

Od tod ven dobimo dva pogoja za lokalni ekstrem.

$$1. t_c = \frac{l}{v_0} \quad (29)$$

$$2. t_c = 3 \frac{l}{v_c} \quad (30)$$

Če si dobljeno funkcijo (odvod) narišemo (glej sliko 5), vidimo, da je v prvi točki minimum, kar seveda že vemo iz prvega dela naloge, v drugi točki pa je lokalni maksimum.

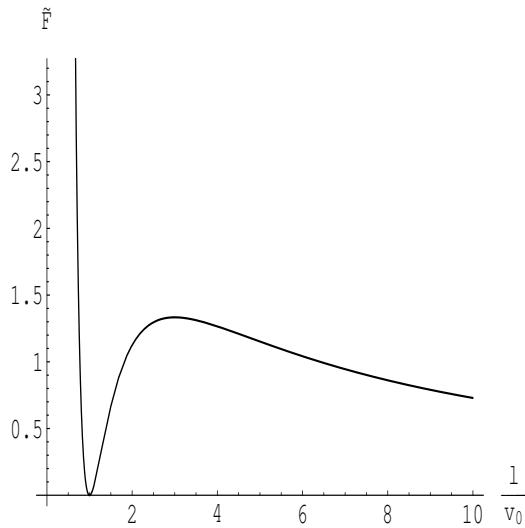


Figure 5: To je slika brezdimenzijskega funkcionala \tilde{F} v odvisnosti od časa t_c . Na sliki je dobro viden miminum pri $\frac{l}{v_0} = 1$ in maksimum pri $\frac{l}{v_0} = 3$

Sedaj ko vemo, pri katerem času t_c bo vožnja najbolj prijetna in pri katerem najmanj, lahko izračunamo na kateri semafor se nam splača čakati in na katerega ne. To storimo tako, da dobljeni zvezi vstavimo v izraz 23. Dobimo

$$n_{min} = \left[\frac{l}{v_0 \tau} - \frac{t_0}{\tau} \right]_{CeliDel} \quad (31)$$

$$n_{max} = \left[\frac{3l}{v_0 \tau} - \frac{t_0}{\tau} \right]_{CeliDel} \quad (32)$$

$$(33)$$

Dobljena izraza za n nam povesta, na kateri semafor se nam najbolj splača počakati, in na katerega najmanj. Naredimo primer. Vzemimo, da je začetna hitrost $v_0 = 36km/h =$

Sedaj na tem izrazu poskušajmo narediti limito $n \rightarrow \frac{1}{2}$. Edini člen pri katerem je potrebeno biti pozljiv je

$$(1 - \frac{t}{t_0})^{\frac{2n}{2n-1}} \quad (8)$$

Ker je t vedno manjši od t_0 , je okepanje $(1 - \frac{t}{t_0})$ vedno manjši od ena. Ko gre $n \rightarrow \frac{1}{2}$, in gre eksponent tega člena $\frac{2n}{2n-1} \rightarrow \infty$ gre celoten člen proti nič.

$$\lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} (1 - \frac{t}{t_0})^{\frac{2n}{2n-1}} = 0 \quad (79)$$

Tako v limiti dobimo

$$v(t) = \frac{l}{t_0} - v_0 \cdot \frac{4 \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} [1 - 1] + v_0 = \frac{l}{t_0} \quad (80)$$

Vidimo, da smo prišli ravno do rešitve ki je isčemo. Hitro, t je v limiti kar $v(t) = \frac{l}{t_0}$, kar smo prej pokazali že grafično.

6 Peta Naloga

Vse do sedaj smo reševali primere, kjer je v funkcionalu F nastopala pod integralom soda pozitivno definitna funkcija. S tem smo dosegli, da so se pospeški in pojemki v računu enako kaznovali. To pomeni, da če je šofer pospeševal s pospeškom $1m/s^2$ je bilo to tako slabo, kot če je zaviral s pospeškom $1m/s^2$. Sedaj pa skušajmo rešiti problem, ko se pospeški in pojemki ne kaznujejo enako. Da bi takšno gibanje opisali, potrebujemo funkcijo, ki bo nenegativna, ki bo imela pri $a = 0$ ničlo in ki ne bo simetrična glede na y os. Ena takih funkcij je

$$f(x) = (e^{\alpha x} - 1)^2. \quad (81)$$

Zanjo je značilno, da če je koeficient $\alpha > 0$, potem se pospešek bolj kaznuje kot pojemek in obratno, kadar je $\alpha < 0$.

Sedaj uporabimo to funkcijo za zapis našega funkcionala. Dobimo

$$F = \int_0^{t_0} (e^{\alpha \frac{dv}{dt} - 1})^2 dt = \min. \quad (82)$$

$$\int_0^{t_0} v dt = l \quad (83)$$

Sedaj še enkrat uporabimo Lagrangovo metodo množikatorjev. Napišimo Lagrangovo funkcijo

$$L = (e^{\alpha \frac{dv}{dt} - 1})^2 - \lambda v \quad (84)$$

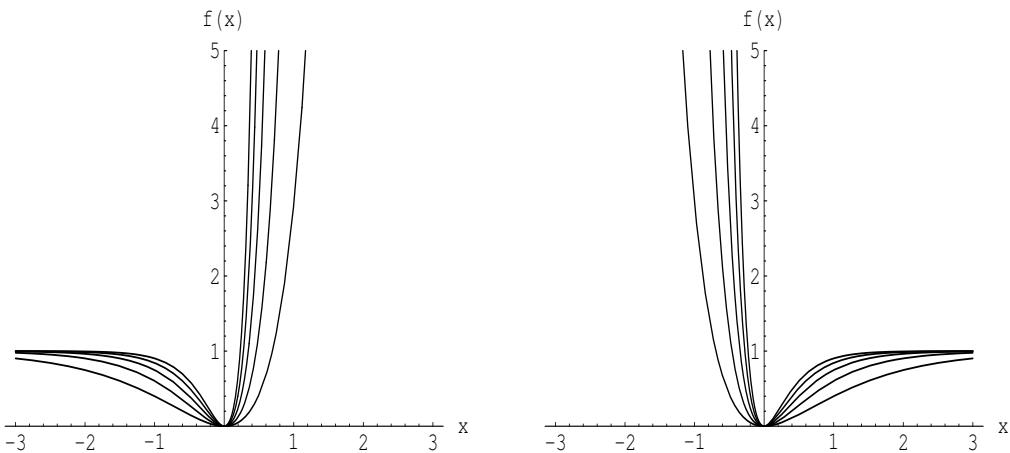


Figure 11: Slike prikazujeta grafa funkcije $f(x) = (e^{\alpha x} - 1)^2$. Prvi graf prikazuje funkcijeske odvisnosti za razlicne $\alpha > 0$, drugi graf pa prikazuje funkcijeske odvisnosti, ko je $\alpha < 0$

Ko jo vstavimo noter v Lagrangovo enačbo dobimo

$$\frac{d^2v}{dt^2} e^{\alpha \frac{dv}{dt}} [2e^{\alpha \frac{dv}{dt}} - 1] = -\frac{\lambda}{2\alpha^2} \quad (85)$$

Sedaj znova uporabimo substitucijo $\frac{dv}{dt} = x$, enačbo enkrat integrirajmo in dobimo

$$e^{2\alpha x} - e^{\alpha x} = c - \frac{\lambda t}{2\alpha} \quad (86)$$

Če nazaj noter vstavimo odvod hitrosti namesto x , dobimo enačbo

$$e^{2\alpha \frac{dv}{dt}} - e^{\alpha \frac{dv}{dt}} = c - \frac{\lambda t}{2\alpha} \quad (87)$$

Enačbo sedaj rešimo¹ in dobimo dve rešitvi za hitrost $v(t)$

$$v_1(t) = D + \frac{(2c-1)\alpha - t\lambda + \sqrt{\alpha(\alpha + 4c\alpha - 2t\lambda)} + (-4c\alpha + 2t\lambda) \ln(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha + 4c\alpha - 2t\lambda)}}{2\alpha})}{2\alpha\lambda} \quad (88)$$

$$v_2(t) = D + \frac{(2c-1)\alpha - t\lambda - \sqrt{\alpha(\alpha + 4c\alpha - 2t\lambda)} + (-4c\alpha + 2t\lambda) \ln(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha(\alpha + 4c\alpha - 2t\lambda)}}{2\alpha})}{2\alpha\lambda} \quad (89)$$

Sedaj je potrebno seveda spet določiti vse konstante. Analizo bomo napravili le za drugo rešitev. Enako bi lahko postopali tudi za prvo rešitev, vendar ne bi dobili smiselnih

¹Ti dve enačbi sem rešil s pomočjo programa Mathematica

rešitev.

Najprej določimo konstanto c . Dobimo jo tako, da upoštevamo, da je odvod funkcije $v(t)$ v točki $t = t_0$ enak nič, saj si želimo, da je, ko prečkamo križišče hitrost ekstremalna. To nam da:

$$c = \frac{t_0 \lambda}{2\alpha} \quad (90)$$

Ko to konstanto vstavimo v rezultat, se izraz za hitrost nekoliko poenostavi:

$$v(t) = D + \frac{-t\lambda - \sqrt{\alpha(\alpha - 2t\lambda_2 t_0 \lambda)} + (-4c\alpha + 2t\lambda) \ln\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - 2t\lambda + 2t_0 \lambda)}}{2\alpha}\right)}{2\alpha\lambda} \quad (91)$$

Konstanto D tako kot vedno določimo z začetnim pogojem $v(t = 0) = v_0$. To nam da:

$$D = \frac{\alpha - t_0 \lambda + 2v_0 \alpha \lambda + \sqrt{\alpha^2 + 2t_0 \alpha \lambda} + 2t_0 \lambda \ln\left[\frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha + 2t_0 \lambda)}}{2\alpha}\right]}{2\alpha\lambda} \quad (92)$$

Sedaj, ko imamo D lahko izraz za hitrost zapišemo v obliki

$$v(t) = \frac{-t\lambda - \sqrt{\alpha(\alpha - 2t\lambda_2 t_0 \lambda)} + (-4c\alpha + 2t\lambda) \ln\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha - 2t\lambda + 2t_0 \lambda)}}{2\alpha}\right)}{2\alpha\lambda} + \frac{\alpha - t_0 \lambda + 2v_0 \alpha \lambda + \sqrt{\alpha^2 + 2t_0 \alpha \lambda} + 2t_0 \lambda \ln\left[\frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha + 2t_0 \lambda)}}{2\alpha}\right]}{2\alpha\lambda} \quad (93)$$

Vidimo, da je izraz za hitrost prava grda klobasa, vendar se je potrebno še malo potruditi in določiti še koeficient λ . To storimo s pogojem 83. Ko našo hitrost integriramo in izenačimo z dolžino poti, dobimo grdo enačbo:

$$\begin{aligned} l = & \frac{1}{24\alpha\lambda^2} (2\alpha\sqrt{\alpha^2} - 3t_0^2\lambda^2 + 24t_0v_0\alpha\lambda^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha(\alpha + 2t_0\lambda)} + 2t_0\lambda\sqrt{\alpha(\alpha + 2t_0\lambda)} - \\ & - t_0^2\lambda^2 \ln[4906] + 3\alpha(\alpha + 4t_0\lambda) \ln[\alpha + \sqrt{\alpha^2}] - \\ & - 3\alpha(\alpha + 4t_0\lambda) \ln\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2}}{\alpha}\right) - 3\alpha^2 \ln(\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha + 2t_0\lambda)}}) - \\ & - 12t_0\alpha\lambda \ln(\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha + 2t_0\lambda)}) + 3\alpha^2 \ln\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha + 2t_0\lambda)}}{\alpha}\right) + \\ & + 12t_0\alpha\lambda \ln\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha + 2t_0\lambda)}}{\alpha}\right) + 12t_0^2\lambda^2 \ln\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha + 2t_0\lambda)}}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (94)$$

Ker tudi tu koeficiente λ ne moremo ven izraziti analitično, moramo dobljeno enačbo reševati numerično za vsak primer parametrov t_0, v_0, l posebaj. V tabeli ?? sem zabeležil

Naknadne dave:

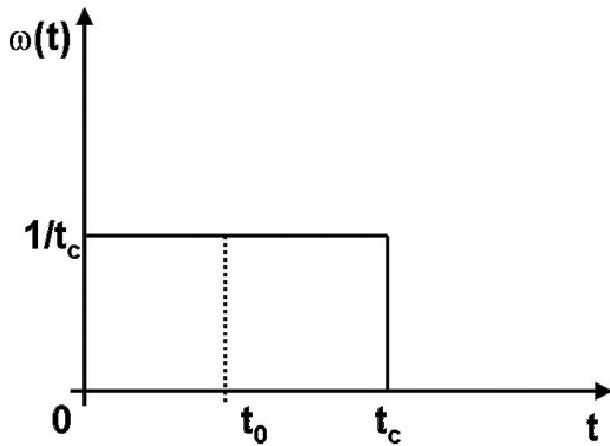


Figure 14: Čakalni časi t_0 ubogajo enakomerno porazdelitev.

Sedaj se vprašajmo, kakšna je porazdelitev po končnih hitrostih če predpostavimo, da voznik uspe zadeti tisti pravi trenutek in prepelje semafor ravno, ko se prižge zelena luč. Zanima nas torej $\frac{dw}{dv_k}$. To izračunamo kot

$$\frac{dP}{dv_k} = \frac{dP}{dt_0} \left| \frac{dt_0}{dv_k} \right| \quad (101)$$

Ker si mi še vedno želimo, da je voznikova vožnja optimalna, se pravi, da je najbolj prijetna in da ima na koncu največjo hitrost, lahko za izračun uporabimo kar rezultrat iz prve naloge:

$$v_k = v(t_0) = \frac{3}{2t_0^3} (l - v_0 t_0) (2t_0^2 - t_0^2) + v_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{l}{t_0} - v_0 \right) + v_0 \quad (102)$$

To je izraz za končno hitrost v odvisnosti od čakalnega časa t_0 . Če ven izrazimo čakalni čas, dobimo

$$t_0 = \frac{3l}{2v + v_0} \quad (103)$$

Izraz sedaj odvajajmo in vstavimo v izraz za verjetnostno porazdelitev po hitrosti:

$$\frac{dP}{dt} = w(t_0) \left| \frac{dt_0}{dv_k} \right| = \frac{A}{t_c} \Theta(t_0) \Theta(t_c - t_0) \frac{6l}{(2v_k - v_0)^2} \quad (104)$$

Sedaj nadomestimo še čase v Heavisidovih step funkcijah s hitrostmi. Zato nam prideta

prav izraza

$$v_k = \frac{3}{2} \left(\frac{l}{t_0} - v_0 \right) + v_0 \quad (105)$$

$$v_{min} = \frac{3}{2} \left(\frac{l}{t_c} - v_0 \right) + v_0, \quad (106)$$

kjer sem z v_{min} označil minimalno hitrost, ki je še dopustna. Ker ne želimo zavirati, so vse hitrosti vedno pozitivne oz. enake nič. Zato lahko prvo Heavisidovo funkcijo kar spustimo. Določiti je treba še normalizacijsko konstanto A kot

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{dv_k} dv_k, \quad (107)$$

a ko izracunamo integral vidimo, da pride $A = 1$, kar pomeni, da je naša porazdelitvena funkcija že normirana. Tako dobimo končen izraz za porazdelitev po končnih hitrostih

$$w(v_k) = \frac{1}{t_c} \Theta(v_k - (\frac{3}{2} \frac{l}{t_c} - \frac{1}{2} v_0)) \frac{6l}{(2v_k + v_0)^2} = \frac{1}{t_c} \Theta(t_c - \frac{3l}{2v_k + v_0}) \frac{6l}{(2v_k + v_0)^2} \quad (108)$$

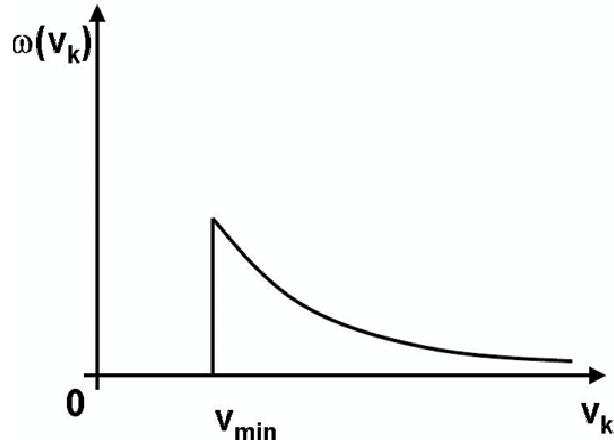


Figure 15: To je porazdelitev po končnih hitrostih v_k v primeru najbolj ugodne vožnje, če cakalni časi t_0 ubogajo enakomerno porazdelitev.

7.1 Kaj pa če dolžina semaforja ni znana?

Sedaj si nalogo še malo otežkočimo. V prejšnjem problemu nismo vedeli koliko časa bomo še čakali zeleno, vendar pa smo poznali dolžino cikla. Kaj pa če dolžine cikla t_c