二、(12分) 对函数 $y=f(x)$，已知 $f(1)=0, f'(1)=-2, f(2)=1, f'(2)=0$.

（1） 试求过这2点的三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$，并写出余项表达式;

（2）如果还已知 $f(0)=1$，求次数不超过4的插值多项式 $H_4(x)$。

三、(8分)求 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 在[-1, 1]上的三次最佳平方逼近多项式 $S_3(x)$。

四、(10分) 利用2次 Chebyshev 正交多项式 $T_2(x)=2x^2-1$ 构造两点 Gauss-Chebyshev 型求积公式 $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$，并计算奇异积分 $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

五、(12分) $\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ a & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

（1）确定 a 的取值范围，使方程组对应的 Jacobi 迭代收敛;

（2）当 $a=5$ 时，用列选主元法求方程组的解。

六、(12分) 设步长为h, $f(x,y)=\lambda y(x)$，隐式中点公式 $y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\frac{h}{2},\frac{y_n+y_{n+1}}{2}\right)$，

（1）已知 $y(0)=1$，求 $y(x)$ 在节点 $x_n=nh$ 处的数值解 y_n；

（2）若 $\lambda<0$，证明公式是无条件稳定的。

七、(14分) 应用牛顿法于方程 $f(x)=\left(x^3-a\right)^2=0$，

（1）导出求立方根 $x^*=\sqrt[3]{a}$ 的 Newton 迭代格式;

（2）证明此迭代格式是线性收敛的;

（3）试构造至少具有二阶收敛速度的迭代公式。

八、(8分) 对于 Gauss 求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，证明:

（1）求积系数 $A_k>0, k=0,1,2,\cdots n$ 且 $\sum_{k=0}^{n} A_k=b-a$；

（2）设 $l_k(x)$ 是 x_k 处对应的 Lagrange 基函数，则 $\int_a^b l_k^2(x)dx=\int_a^b l_k(x)dx$, $k=0,1,\cdots n$。