第三章　矩阵的分解

Matrix Factorization and Decomposition

矩阵分解的概述

- 矩阵的分解：两种常见的形式
  - $A=A_1+A_2+\ldots+A_k$ 矩阵的和
  - $A=A_1A_2\ldots A_m$ 矩阵的乘积，如FFT
- 矩阵分解的原则与意义：
  - 实际应用的需要
  - 显示原矩阵的某些特性
  - 矩阵化简的方法与矩阵技术

理论上的需要

计算上的需要

- 主要技巧：
  - 各种标准形的理论和计算方法
  - 矩阵的分块运算和初等变换

常见的矩阵标准形与分解

- 等价标准形 $A_{m\times n}=P_{m\times m}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q_{n\times n}$

- 本章分解：
  - 满秩分解

    等价标准形

    Schmidt正交化方法
  - 可逆矩阵的UR（列满秩矩阵的QR、 方阵的 Schur ）分解
  - 奇异值分解

§3.1 矩阵的满秩分解

列满秩

- **定义3.2** （*P.66*）

对秩为*r* 的矩阵A∈F$^{m\times n}$，若存在秩为r的矩阵 B ∈F$^{m\times r}$，C∈F$^{r\times n}$，使得A=BC，则称此式为A 的满秩分解。

行满秩

定理3.2：任何非零矩阵A∈F$^{m\times n}$都有满秩分解。

证明：等价标准型求法（行列变换）

设通过行及列的初等变换把A变为等价标准型，即存在可逆矩阵P，Q，使得

令

$$A_{m\times n}=P_{m\times m}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q_{n\times n}$$

$$P=(B,B_2),Q=\begin{pmatrix} C \\ C_2 \end{pmatrix}$$ 得 $$A=(B,O)\begin{pmatrix} C \\ C_2 \end{pmatrix}=BC$$

B，C满足要求。证毕。

满秩分解的求法：初等变换

- 方法1：等价标准型求法（行列变换）：求两个逆矩阵！
- 方法2：阶梯型求法（行变换）：只求一个逆矩阵！

例题1（P.68，eg4）

- 方法3：求列的极大无关组及表示（行变换）：不用求逆

例题2 （P.69，eg5）例题3（P.70，eg6）

法2

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} C & P \\ O & \end{pmatrix} r\text{行}，\quad \operatorname{rank}(C) = r = \operatorname{rank}(A)$$

$$PA = \begin{pmatrix} C \\ \mathrm{O} \end{pmatrix} \Rightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} C \\ \mathrm{O} \end{pmatrix} = (B, B_2)\begin{pmatrix} C \\ \mathrm{O} \end{pmatrix} = BC$$

满秩分解的求法：初等变换

- 方法1：等价标准型求法（行列变换）：求两个逆矩阵！
- 方法2：阶梯型求法（行变换）：只求一个逆矩阵！
- 方法3：求列的极大无关组及表示（行变换）：不用求逆

法3

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} I_r & S \\ O & O \end{pmatrix}, PA = \begin{pmatrix} I_r & S \\ O & O \end{pmatrix}, \Rightarrow A = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r & S \\ O & O \end{pmatrix},$$

$$A = (B, B_2) \begin{pmatrix} I_r & S \\ O & O \end{pmatrix} = (B, BS) = B(I_r, S) = BC$$

$$B = ?? \qquad A = (A_1, A_2) \Rightarrow B = A_1$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{bmatrix}$$

满秩分解的求法：初等变换

例题1-2（P.68-69，例4-5,）**法2，法3：求A的满秩分解**

$$(A|\,I)=\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\0&-1&-1&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\0&0&0&-1&1/2&1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1/2&1\end{bmatrix},\ P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1/2&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1/2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=BC=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\end{bmatrix}$$

与书上的不同！

少了一步计算。

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{bmatrix}$$

满秩分解的求法：初等变换

例题1-2（P.68-69，例4-5,）**法2，法3：求A的满秩分解**

$$(A\,|\,I)=\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\0&-1&-1&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\0&0&0&-1&1/2&1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1/2&1\end{bmatrix},\ P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1/2&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1/2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=BC=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{bmatrix}$$

满秩分解的求法：初等变换

例题1-2（P.68-69，例4-5,）法2，法3：求A的满秩分解

$$(A|\,I)=\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\0&-1&-1&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\0&0&0&-1&1/2&1\end{bmatrix}$$

法3

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+\frac{1}{2}r_2]{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=A_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\\1&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow A=BC=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{bmatrix}$$

满秩分解的求法：初等变换

例题1-2（P.68-69，例4-5,）**法2，法3：求A的满秩分解**

$$(A\,|\,I)=\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\0&-1&-1&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\0&0&0&-1&1/2&1\end{bmatrix}$$

法3

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+\frac{1}{2}r_2]{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}1&2\\0&2\\1&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow A=BC=\begin{bmatrix}1&2\\0&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$