1. 已知$f(x)=5x^2(3x-2)(2x+1)$,设$x_i(i=0,1,2,3,4)$为互异节点，$l_i(x)$为对应的 4 次 Lagrange 插值基函数，分别求$\sum_{i=0}^4 l_i(x)$，$\sum_{i=0}^4 f(x_i)l_i(x)$，$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$。

解：①已知 $l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

故 $\sum_{i=0}^{4} l_i(x)=1$

② $\sum_{i=0}^{4} f(x_i)l_i(x)=L_4(x)$ $\quad f(x)=L_4(x)+R_4(x)$

$R_4(x)=\frac{f^5(\xi)}{5!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=0$

$\therefore L_4(x)=f(x)=5x^2(3x-2)(2x+1)$

$\therefore \sum_{i=0}^{4} f(x_i)l_i(x)=5x^2(3x-2)(2x+1)$

③ $f[x_0.x_1.x_2.x_3.x_4]=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$

$f(x)=5x^2(3x-2)(2x+1)=30x^4-5x^3-10x^2$

$f'(x)=120x^3-15x^2-20x$

$f''(x)=360x^2-30x-20$

$f'''(x)=720x-30$

$f^{(4)}(x)=720$

$\therefore f[x_0.x_1.x_2.x_3.x_4]=\frac{720}{4!}=30$

2. 给定$f(x)$在如下节点处的值，试计算$f(x)$的 3 次 Lagrange 和 Newton 插值多项式。

x	1	3/2	0	2
$f(x)$	3	13/4	3	5/3

解：f(x)的3次Lagrange插值多项式

$$L_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

$$=\frac{(x-\frac{3}{2})x(x-2)}{(1-\frac{3}{2})(1-0)(1-2)}\times 3+\frac{(x-1)x(x-2)}{(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-0)(\frac{3}{2}-2)}\times\frac{13}{4}$$

$$+\frac{(x-1)(x-\frac{3}{2})(x-2)}{(0-1)(0-\frac{3}{2})(0-2)}\times 3+\frac{(x-1)(x-\frac{3}{2})x}{(2-1)(2-\frac{3}{2})(2-0)}\times\frac{5}{3}$$

$$=6(x^3-\frac{7}{2}x^2+3x)-\frac{26}{3}(x^3-3x^2+2x)-(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{13}{2}x-3)$$

$$+\frac{5}{3}(x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}x)$$

$$=-2x^3+\frac{16}{3}x^2-\frac{10}{3}x+3$$

f(x)的3次Newton插值多项式

x_k	$f(x_k)$	一阶	二阶	三阶
1	3			
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{1}{2}$		
0	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	
2	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-2

$$N_3(x)=3+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{3}(x-1)(x-\frac{3}{2})-2(x-1)(x-\frac{3}{2})x$$

$$=3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2})-2(x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}x)$$

$$=-2x^3+\frac{16}{3}x^2-\frac{10}{3}x+3$$

3. 若$p(x)$是$f(x)=e^{x-2}$在节点 0，0.1，0.2, … , 0.9, 1 处的 10 次插值多项式，试估计该插值多项式在[0,1]上的插值误差。

解：$L_{10}(x)=\sum_{i=0}^{10}y_i l_i(x)$ $\quad p(x)=L_{10}(x)$

$R_{10}(x)=f(x)-L_{10}(x)=\frac{f^{(11)}(\xi)}{11!}\cdot\prod_{i=0}^{10}(x-x_i)=\frac{e^{\xi-2}}{11!}(x-0)(x-0.1)\cdots(x-1)$ $\quad(0<\xi<1)$

$|R_{10}(x)|\le\frac{M_{11}}{11!}\left|\prod_{i=0}^{10}(x-x_i)\right|$

$M_{11}=\max_{0\le x\le 1}|f^{(11)}(x)|=e^{-1}$

误差：$|R_{10}(x)|\le\frac{e^{-1}}{11!}|W_{n+1}(x)|$ $\quad x\in[0,1]$

$W_{n+1}(x)=x(x-0.1)(x-0.2)\cdots(x-1)$

4. 若$h(x)$是$f(x)=e^{x-2}$在节点 0，0.1，0.2, … , 0.9, 1 处的**分段线性**插值多项式，试估计该插值多项式在[0,1]上的插值误差。

解：对$x\in[0,1]$，当$x\in[x_k,x_{k+1}]$时

$R(x)=f(x)-I_h(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_k)(x-x_{k+1})$

$|R(x)|\le\frac{h^2}{8}M$ $\quad\begin{cases}h=\max_{0\le i\le n+1}|x_{i+1}-x_i|=0.1\\ M=\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|=e^{-1}\end{cases}$

$\therefore$ 误差：$|R(x)|\le\frac{e^{-1}}{800}$

5. 若给定 $f(0)=0, f(1)=1, f(0.5)=1, f'(0.5)=2$，求 $f(x)$ 的 3 次 Hermite 插值多项式。若又知道 $f'(1)=-3$, 求 $f(x)$的 4 次 Hermite 插值多项式。

解：① 设 f(x) 的 3 次 Hermite 插值多项式为

$$H_3(x) = 0 + f[0,\tfrac{1}{2}](x-0) + f[0,\tfrac{1}{2},1](x-0)(x-\tfrac{1}{2}) + k(x-0)(x-\tfrac{1}{2})(x-1)$$

其中 $H_3'(0.5) = f[0,\tfrac{1}{2}] + f[0,\tfrac{1}{2},1](\tfrac{1}{2}-0) + k(\tfrac{1}{2}-0)(\tfrac{1}{2}-1) = 2$

$$k = \frac{2 - f[0,\tfrac{1}{2}] - f[0,\tfrac{1}{2},1](\tfrac{1}{2}-0)}{(\tfrac{1}{2}-0)(\tfrac{1}{2}-1)}$$

差商表如下

x_k	$f(x_k)$	一阶	二阶
0	0		
$\frac{1}{2}$	1	2	
1	1	0	-2

$f[0,\tfrac{1}{2}]=2$, $f[\tfrac{1}{2},1]=0$, $f[0,\tfrac{1}{2},1]=-2$

故 $k = \dfrac{2-2-(-2)\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})} = \dfrac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$

$$H_3(x) = 2x - 2x(x-\tfrac{1}{2}) - 4x(x-\tfrac{1}{2})(x-1)$$
$$= -4x^3 + 4x^2 + x$$

② 若 $f'(1)=3$, 则

x_k	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x_k)$	0	1	1
$f'(x_k)$		2	-3

设 4 次 Hermite 插值多项式为

$$H_4(x) = y_0 + a(x-x_0) + b(x-x_0)(x-x_1) + c(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + d(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

由差商与微商的关系式：$f[x_0 \cdots x_{n-1}, x] = \dfrac{f^{(n)}(3)}{n!}$

知重点差商公式 $f[\underbrace{x, x \cdots x}_{k+1}] = \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}$

差商表如下：

	x_i	f_i	一阶	二阶	三阶	四阶
0	0	0				
1	$\frac{1}{2}$	1	2			
2	$\frac{1}{2}$	1	2	0		
3	1	1	0	-4	-4	
4	1	1	-3	-6	-4	0

故 $H_4(x) = 0 + 2(x-0) - 4(x-0)(x-\tfrac{1}{2})^2$

$$= 2x - 4x(x - x + \tfrac{1}{4})$$
$$= -4x^3 + 4x^2 + x$$