华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：应用高等工程数学　　课程类别 ☑公共课 □专业课　　考核形式 □开卷 ☑闭卷

学生类别＿＿＿＿＿＿考试日期 2013.12.17　学生所在院系＿＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿任课教师＿＿＿＿＿＿

一、填空题：（1×10=10 分）

1. 给出三个线性变换的例子＿＿＿＿＿＿.

2. 矩阵的特征值的几何重数与代表重数的关系是＿＿＿＿＿.

3. 对 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 给出 A 的某一范数＿＿＿＿＿.

4. 矩阵对角化可认为是矩阵 Jordan 标准型的＿＿＿＿＿＿.

5. 三个节点的 Newton-Cotes 求积公式的代数精度为＿＿＿＿＿＿.

6. Newton-Cotes 求积公式的精确程度能否一定随着代数精度的提高而提高？＿＿＿＿

7. 用非线性方程求根的 Newton 迭代法，写出求 $\sqrt{3}$ 的近似值的一种计算格式＿＿＿＿.

8. 若 $f(x)=2x^7+x^5+1$，则 $f[0,1,\cdots,7]=$＿＿＿＿.

9. 设 $(X_1,\cdots X_n)$ 为 $X\sim N(0,1)$ 的样本，$X_{(1)}\le\cdots\le X_{(n)}$，则 $X_{(1)}{}^2+\cdots+X_{(n)}{}^2\sim$＿＿＿＿.

10. 设 $(X_1,\cdots X_n)$ 为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，μ,σ^2 均未知，μ 的置信概率为 $1-\alpha$ 的双侧区间估计为＿＿＿＿＿＿.

二、计算证明题（9×10=90 分）

11. 设 V_1,V_2 分别为齐次方程组 $x_1+\cdots+x_n=0$ 和 $x_1=\cdots=x_n$ 的解空间，问：$R^n=v_1\oplus v_2$ 是否成立？若成立给出证明，若不成立给出反例。

12. 设 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 为线性空间 V 的一个基底，T 为 V 上的一个线性变换。设 T 在

$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 下的矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，求 T 的特征值与特征向量。

13. 设 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准型.

14. 用 Gauss 列主元解法求下列方程组的解.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\ 8\\ 13\end{bmatrix}$$

15. 给出方程组 $\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ a & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$，确定 a 的范围，使方程组对应的 Jacobi 迭代收敛.

16. 求一个次数不超过 4 的多项式 $P(x)$，使它满足 $P(0)=P'(1)=1$， $P(1)=P'(0)=0$，$P(2)=1$，并写出其余项表达式.

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2\\ P(x) & 1 & 0 & 1\\ P'(x) & 0 & 1 & \end{array}$$

17. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$，$(Y_1,\cdots,Y_n)$ 为分别来自 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$ 的两个独立样本，X 与 Y 独立，求 μ_1,μ_2,σ^2 的极大似然估计.

18. （1）叙述某一非参数假设检验方法.

（2）设有甲、乙两赌徒，他们将一正四面体的四面分别涂为红、黄、蓝、白四种不同颜色，作抛掷试验，任意抛掷四面体，直到白色一面与地面接触为止。记录下抛掷次数，作如此试验 200 次，结果如下：

抛掷次数	1	2	3	4	≥ 5
频数	56	48	32	28	56

甲赌此四面体均匀，乙赌不均匀，找到一位统计学家，（统计学家取 $\alpha=0.05$）判决，问统计学家判断谁输？（$\chi^2_{0.95}(4)=9.488$）

19. （1）叙述方差分析的条件.

16. 利用重节点差商公式可以做出差商表.

（2）五种粮食贮藏法，以含水量为标准，设粮食贮藏前含水量几乎无差别，贮藏后含水量如下：

贮藏法 \ 含水量% \ 试验号	1	2	3	4	5
A_1	7.3	8.3	7.6	8.4	8.3
A_2	5.4	7.4	7.1		
A_3	8.1	6.4	7.0		
A_4	7.9	9.5	9.2	8.6	
A_5	7.1	7.5	7.3		

设粮食含水量都服从正态分布，方差相同，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，问贮藏方法对粮食含水量的影响是否有显著性差异？（$F_{0.95}(4.13)=3.18$，$t_{0.975}(12)=2.1788$）

20. 叙述高斯—马尔可夫条件，给出一元线性回归模型中，模型参数最小二乘估计的算法.

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：应用高等工程数学 课程类别 ☑公共课 ☐专业课 考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别 研究生 考试日期 2014-12-16 学生所在院系 ________

学号 ________ 姓名 ________ 任课教师 ________

一、填空题（任选 10 小题，每小题 2 分，共计 20 分，多答不加分。）

1. 设 $A=\{A_{ij}\}_{3\times3}$ 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ 则与 A 相似的对角阵 $B=\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$.

2. 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 满足等式：$A^2+A=2I$，问 A 是否可对角化________.

3. 矩阵的谱半径是指___矩阵 A 的特征值的模的最大值.

4. 矩阵特征值的根空间维数等于__该特征值的代数重度

5. 对任何非奇异矩阵 A，都有 $cond(A)_p$ ___1，当 A 为正交矩阵时 $cond(A)_2$=___.

6. 已知 $\sqrt{5}=2.236067977499\cdots$，则其近似值 2.23607 有________位有效数字，通过四舍五入得到其有四位有效数字的近似值为__________.

7. 已知 $f(x)=2x^3-4x^2+1$，则 $f[0,1,2,3]=$ __________，$f[0,1,2,3,4]=$__________.

8. 当 n 为奇数时，等距节点的插值型 $(N-C)$ 求积公式 $I_n=(b-a)\sum_{i=1}^{n}C_if(x_i)$ 至少有____次代数精度.

9. $\varphi(x)=x+\lambda(x^2-3)$，要使迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛到 $x^*=\sqrt{3}$，则 λ 的取值范围是____________.

10. 试写出方程 $f(x)=x^3-a=0$ 的牛顿迭代格式________________.

11. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为$X\sim N(0,1)$的样本，$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$为次序统计量，则

$X_{(1)}{}^2+X_{(2)}{}^2+\cdots+X_{(n)}{}^2\sim$____________.

12. 给出点估计评价的三个标准_________.

13. 给出假设检验中显著性水平α与统计假设H_0的关系________.

14. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，μ未知，σ^2已知，μ的置信水平为$1-\alpha$的双侧区间估计为___________.

15. 使用方差分析时对数据的要求是_______.

二、计算证明题（任选4题，每小题10分，满分40分，多答不加分。）

16. 已知R^3中的两个基底$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，$B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，求从$B_1$到$B_2$的基变换矩阵。

17. 设R^4中的向量$x_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$，$x_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$x_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$x_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}$，分别张成$w_1=span\{x_1,x_2\}$，$w_2=span\{x_3,x_4\}$，求$w_1+w_2$及$w_1\cap w_2$的基底及维数。

18. 设T是线性空间V^3的线性变换，已知T在基$B=\{\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3\}$下的矩阵$A$为

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&2&2\end{bmatrix},$$

求T的特征值和对应的特征向量。

19. 设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 *P* 和 Jordan 矩阵 *J*，使 *AP=PJ*。

20. 设 $A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$，问 $\lim\limits_{k\to\infty}A^K=0$ 成立吗？若成立证明之。

21. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -2 & -1\\ -2 & -4 & 2 & -2\end{bmatrix}$，求 A 的满秩分解。

22. 设有微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=2x_1(t)+e^{2t}\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+e^{2t}\\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}=x_1(t)-x_2(t)+3x_3(t)\end{cases}$

$x(0)=\left[-1,1,0\right]^T$，求满足初始条件的特解。

23. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，求 A 的奇异值分解。

三、计算证明题（任选 4 题，每小题 10 分，满分 40 份，多答不加分。）

24. 对函数 $f(0)=-1$， $f'(0)=-2$，$f(1)=0$， $f'(1)=10$， 试求过这 2 点的三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$，并写出插值余项的表达式。

25. 试构造两点 Gauss-Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

并由此计算积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{\dfrac{3+2x^2}{1-x^2}}dx$ 。

26. 设有常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'(x)=f(x,y)\\ y(0)=a\end{cases}$ 的隐式中点公式

$y_{n+1}=y_n+hf\left(x_{n+\frac{h}{2}},\dfrac{y_n+y_{n+1}}{2}\right)$，证明该方法是无条件稳定的。

27. 方程 $Ax=b$ 的系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix} a & 5 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$，问 a 取何值时，Jacobi 迭代收敛？

28. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为总体 X 的一个样本，$\mathrm{E}X=\mu$，μ 未知。

（1）$\overline{X}$ 是否为 μ 的无偏估计？

（2）由 $(X_1,\cdots,X_n)$ 构造 μ 的 n 个无偏估计.

（3）设 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$, $a_i>0, i=1,\cdots,n$.

问 $\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ 是否为 μ 的无偏估计，若是 μ 的无偏估计，确定 a_i，$i=1,\cdots,n$，使 $\hat{\mu}$ 的方差最小。

29. 某纺织厂生产的某种产品的纤度，设服从正态分布，标准差 $\sigma=0.048$，现抽取 5 根测得纤度为 1.32,1.55,1.36,1.40,1.44，问在显著性水平 $\alpha=0.10$ 下，能否认为 σ^2 无显著变化。（$\chi^2_{0.05}(4)=0.711$，$\chi^2_{0.95}(4)=9.488$）

30. 设有三个工厂生产同一种机械锻件，为比较这三个厂生产的锻件强度无显著差异，分别从每个厂随机抽 4 件，测得强度数据如下：

工厂	强度数据			
A_1	103	101	98	110
A_2	113	107	108	116
A_3	82	92	84	86

设第 i 个厂的强度服从 $N(\mu_i,\sigma^2)$，$i=1,2,3$。检验三个厂的平均强度有无显著差异？$\alpha=0.05$（$F_{0.95}(2,9)=4.26, F_{0.95}(3,12)=3.49$）

31. 已知 y 与三个自变量的观察值如下表：

x_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
x_2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
x_3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
y	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

求 y 对 x_1,x_2,x_3 的回归方程。

32. 有经过 xmin 反应之后的数据如下：

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	28.5	16.9	17.5	14.0	9.8	8.9

设 $y=\beta_0\beta_1^x\varepsilon$（$\varepsilon$ 满足回归分析条件），求 β_0,β_1 的点估计，并求 $\hat{y}=\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1^x$.

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：<u>应用高等工程数学</u>　　课程类别　☑公共课 □专业课　　考核形式　□开卷 ☑闭卷

学生类别<u>研究生</u>考试日期<u>2015-12-11</u>学生所在院系________________

学号________________姓名____________________任课教师____________________

一 、填空题(每题 3 分共 24 分)

1. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$，则$\|A\|_\infty=$__________，$\rho(A)=$__________。

2.方阵$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$的最小多项式为____________________。

3.设$A,B\in R^{n\times n}$，且$\|\cdot\|$为$R^{n\times n}$上矩阵的算子范数，则$cond(AB)$__$cond(A)cond(B)$。

4. 为避免有效数字的损失，应将$\ln(1+x)-\ln x, x>>1,$改写为____________。

5. 已知数据$(x_k,y_k)(k=1,2,\cdots,n)$，用直线$y=a+bx$拟合这$n$个点，则参数$a,b$ 满足的法方程组是____________________________。

6. 设$f(x)\in C[a,b]$，则计算$\int_a^b f(x)dx$的复化梯形公式是____阶收敛的，其代数精度为______。

7. 用显式 Euler 法解初值问题$y'=-10y,\quad y(0)=y_0$，为保证绝对稳定性，步长h应在范围 ______________ 内选取。

8. $A=\begin{bmatrix}a+1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，当$a$满足条件____时，$A$可作$LU$分解，当$a$满足条件______时，必有分解式$A=L\cdot L^T$，这种分解唯一吗？______。

二、（8 分）已知 R^4 中的两个子空间是$W_1=span\{a_1=[1\ 2\ 1\ 0]^T,a_2=[-1\ 1\ 1\ 1]^T\}$，

$$W_2=span\{a_3=[2\ -1\ 0\ 1]^T,a_4=[-1\ -1\ 3\ 7]^T\},$$

求W_1+W_2及$W_1\bigcap W_2$的基和维数。

三、（8 分）P_1(t)的线性变换的定义为：$Tp(t)=3p(t)-(t-4)\frac{d}{dt}p(t)$，求 T 的特征值与特征向量。

四、（8 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 $g(A)=A^5-4A^4+4A^3+6A^2+I$.

五、（8 分）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为 $Jordan$ 矩阵，其中：$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

六、（10 分）构造一个次数 ≤ 4 的多项式 $p(x)$，使满足下列条件 $p(1)=4,\ p'(1)=3,$ $p''(1)=2,\ p(2)=7,\ p'(2)=2$，写出其余项.并说明存在无穷多个次数 > 4 的多项式，满足上述 5 个条件.

七、（8 分）已知三点 Gauss 公式

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\frac{5}{9}f(\sqrt{0.6})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(-\sqrt{0.6})$$，用该公式估算 $\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}dx$ 的值。

八、（8 分）给定方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & w & w\\ 3w & 1 & 0\\ w & 0 & 1\end{bmatrix}$。

试确定 $w\in R$ 的取值范围，使求解该方程组的 Jacobi 迭代法均收敛。

九、（8 分）用三角分解法（Doolittle 分解）求解线性代数方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}4\\ 7\\ 9\end{bmatrix},$$

十、（10 分）设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的二重根，$f(x)$ 在 x^* 的某邻域内有二阶连续导数

（1）证明对 $f(x)=0$ 用 Newton 迭代法计算是局部线性收敛的.

（2） 将 Newton 公式变形，使其具有局部二阶收敛性.

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称： 矩阵论、数值分析 **课程类别** ☑公共课 ☐专业课 **考核形式** ☐开卷 ☑闭卷

学生类别______________**考试日期** 2016-12-15 **学生所在院系**____________

学号________________**姓名**______________**任课教师**__________________

一、填空（每小题 3 分）

1、计算 $y=1000+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\cdots+\frac{1}{2000}$，给出了两种运算顺序，（A）从左到右相加，（B）从右到左相加，应选择运算顺序（　　）可使计算结果接近于真值。

2、Newton-cotes 求积公式的精确程度是否一定能随着其代数精度的提高而提高？__________

3、设 $\varphi_2(x)=x^2-x+b$ 是 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x)=1$ 的正交多项式，则 $b=$____。

4、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$，当 $a\in$____________时，必有分解式 $A=LL^T$，其中 L 为非奇异下三角矩阵，当其对角线元素 $l_{ii}(i=1,2,3)$ 满足条件_____________时，这种分解是唯一的。

5、$A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&3&6\\0&8&1\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1=$_________；$\|AX\|_\infty=$________。

6、设 $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 A 的 Jordan 标准形 $J=\begin{pmatrix}\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{pmatrix}$。

7、设 T 是线性空间 V 的线性变换，已知 V 的基 $\boldsymbol{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ 和 T 在 $\boldsymbol{B}$ 下的矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$，则 T 的特征值为 λ=________；特征向量 ξ=___________________。

8、设 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 V^3 的一个基，V^3 上的线性变换 *T* 将 a_1,a_2,a_3 分别映为

$-a_1+2a_2+a_3$，$a_1+a_2-a_3$，$2a_1-a_2+a_3$，则 *T* 在这个基下的矩阵是 $B=\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$。

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 *P* 和 Jordan 矩阵 *J*，使 *AP=PJ*。

三、（10 分）设 V_1 和 V_2 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 和 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，证明 $R^n=V_1\oplus V_2$。

四、（12 分）设函数 $f(x)$ 满足表中条件：

x_k	0	1	2
$f(x_k)$	1	0	1
$f'(x_k)$		-2	0

求一个四次插值多项式 $H_4(x)$，使其满足表中所有条件，并给出其余项表达式。

五、（10 分）试构造计算奇异积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$ 的两点求积公式，使其代数精度尽可能高；若被积函数为 $f(x)=x^3+2x^2+1$，问用所构造的求积公式计算，所产生的误差为多少？

六、（10 分）设有常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的单步法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[\,f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})],$$

证明：该方法是无条件稳定的。

七、（14 分）给定方程组 $\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ a & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$；

（1）确定 *a* 的取值范围使方程组对应的 Jacobi 迭代收敛。

（2）当 $a=2$ 时，用直接三角分解法求解方程。

八、（10 分）已知 $x=\varphi(x)$ 的 $\varphi'(x)$ 满足 $\left|\varphi'(x)-a\right|<1,(a>2)$，试问如何利用 $\varphi(x)$ 构造一个收敛的简单迭代函数 $\psi(x)$，使 $x_{k+1}=\psi(x_k)\quad k=0,1,\cdots$ 收敛？

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：__应用高等工程数学__ 课程类别 ☑公共课 ☐专业课 考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别________考试日期 2017-12____学生所在院系________

学号__________姓名________任课教师__________

二、填空（每小题 3 分）

1、若某近似值与π之间的相对误差小于0.01%，则此近似值至少有__位有效数字（$\pi=3.14159265\cdots$）。

2、设$A=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 2 & 5\end{pmatrix}$，求$A^4-9A^3+A^2-8A-4I=$_______。

3、已知方阵A的特征多项式为$f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^3$，最小多项式为$m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，则$A$的 Jordan 标准型为_________。

4、设$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$，则$\|Ax\|_\infty=$________，$cond(A)_1=$________。

5、多项式空间$P_2(t)$上的线性变换T定义为$Tp(t)=3p(t)-(t+1)\frac{d}{dt}p(t)$，则$T$在基$\{1,t,t^2\}$下的矩阵为_________。

6、用隐式 Euler 法求解初值问题

$\begin{cases}y'(x)=-5y+x\\ y(0)=1\end{cases}$，取步长$h=0.2$，则$y(0.4)=$ ______________。

7、若求解某线性方程组有迭代公式 $X^{(n+1)}=BX^{(n)}+F$，

其中$B=\begin{bmatrix}a & -\sqrt{a}\\ 3\sqrt{a} & -3\end{bmatrix}$，则该迭代公式收敛的充要条件是 ____________。

8、若求解方程的简单迭代格式$x_{k+1}=ax_k+\frac{b}{x_k}$在根$x^*=\sqrt{3}$附近平方收敛，则$a=$____________，$b=$____________。

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使 $P^{-1}AP=J$ 三、（8 分）设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 是 R^3 的一个基，$V_1=span\{2\alpha_1+3\alpha_2\}$，$V_2=span\{\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3\}$，证明：$R^3=V_1\oplus V_2$。

四、（10 分）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1,f(2)=-3,f(3)=4,f^{'}(3)=13$，试求 $f(x)$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 并算出 $f(1)$ 的近似值 $H_3(1)$；若还已知 $\left|f^{(4)}(x)\right|<1(0\le x\le 3)$，证明此近似值的绝对误差小于 0.2。

五、（10 分）试求实数 a,b 使 $\int_0^1(a+bx-x^2)^2dx$ 最小，并求出此最小值。

六、（10 分）利用 3 次 Chebyshev 正交多项式 $T_3(x)=4x^3-3x$ 构造三点 Gauss-Chebyshev 型求积公式：

$$\int_0^2\frac{f(x)}{\sqrt{2x-x^2}}dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$$

并问：

（1）所得求积公式的代数精度是多少？

（2）用所得求积公式计算 $\int_0^2\frac{\left(3x^5+4x^4+2x^2-1\right)}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ 时截断误差是多少？七、（12 分）给定线性方程组

$$\begin{cases}4x_1-x_2+2x_3=7\\-4x_1+7x_2-x_3=-18.5\\6x_2+10x_3=-7\end{cases}$$

(1) 试用 LU 分解法求解其方程组；

(2) 分别写出方程组的 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代矩阵，并说明这两种迭代格式的收敛性。

八、(8 分)讨论求解初值问题 $\begin{cases}y'(x)=\lambda y\ (\lambda<0)\\y(0)=a\end{cases}$ 的二阶中点公式

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f\left(x_n,y_n\right)\right)$$ 的稳定性。

九、(8 分)试证用牛顿法求方程 $f\left(x\right)=\left(x^2-a\right)^2=0\ \left(a>0\right)$ 的根 $x^*=\sqrt{a}$ 是线性收敛的，并将 Newton 公式变形，使其在 $x^*=\sqrt{a}$ 附近具有局部二阶收敛性。

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：<u> 应用高等工程数学   </u>　课程类别 ☑公共课 ☐专业课　考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别____________考试日期 <u>2018-12   </u>学生所在院系____________

学号______________姓名____________任课教师________________

三、填空（每小题 3 分）

1、向量 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 在给定的一组基 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标为 ________。

2、R^4 中的两个子空间 $W_1=\mathrm{span}\{a_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},a_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}\}$，$W_2=\mathrm{span}\{a_3=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}},a_4=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}\}$ 的交空间 $W_1\cap W_2$ 的维数是____，基是_________。

3、方阵$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$的最小多项式为__________________。

4、将多项式$2x^3+3x^2+4x+5$的计算改写成只需要 3 次乘法和 3 次加法的形式为________________。

二、（10 分）设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&4&3\\0&-2&-1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 *P* 和 Jordan 矩阵 *J*，使$P^{-1}AP=J$。

三、（10 分）多项式空间 P_1(t)的线性变换的定义为：$Tp(t)=5p(t)+(t-1)\dfrac{d}{dt}p(t)$，求 *T* 的特征值与特征向量。

四、（10 分）已知函数$f(x)$满足$f(0)=1,f(1)=1,f(2)=3,f^{'}(0)=1$，试求$f(x)$的三次插值多项式$H_3(x)$并写出误差余项。

一、填空（每小题 3 分）

1、R^3 中的两个子空间 $W_1=\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_1=x_2\}$，$W_2=\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_1=x_3\}$，则 W_1 与 W_2 的维数均为 1，$W_1 \cap W_2$ 的维数为 1，W_1+W_2 的维数为 1。

2、从多项式空间 $P_1(t)$ 到多项式空间 $P_2(t)$ 的线性变换 T 定义为

$TE=E\cdot A \Rightarrow$

$Tp(t)=3p(t)+2\int_0^1 p(t)\mathrm{d}t$，则 T 在基偶 $\{1,t\}$ 与 $\{1,t,t^2\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}5&1\\0&3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}5&1&2/3\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$?

3、设 $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&-2\end{pmatrix}$，则 $A^8-9A^6+A^4-8A^2+A-12I=$ $\begin{pmatrix}-1&5\\1&-5\end{pmatrix}$。

$g(A)=A-3I.$

4、已知 x^2+ax+b 与 1 和 x 在 $[0,2]$ 上带权 $\rho(x)=1$ 正交，则 $a=$ -2，$b=$ ~~3/2~~。2/3.

5、若求积公式 $\int_0^4 f(x) \approx A_1 f(1)+A_2 f(4)$ 有一次代数精度，则 $A_1=\frac{4}{3}$，$A_2=\frac{8}{3}$。

对1.x 准确成立.

6、对于初值问题 $\begin{cases}y'(x)=f(x,y)\\ y(0)=y_0\end{cases}$，

x_{n+1} y_{n+1} y_{n+1}

单步法 $y_{n+1}=y_n+h[\frac{1}{4}f(x_n,y_n)+af(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$ 在 $a=$_____ 时为一阶方法（即局部截断误差二阶）。 3/4? $\frac{1}{3}$?

7、对于线性方程组 $\begin{cases}x_1+0.5x_2=3\\ 3x_1+x_2=7\end{cases}$，写出 Gauss-Seidel 迭代法的迭代公式 $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\frac{1}{2}x_2^{(k)}+3\\ x_2^{(k+1)}=-3x_1^{(k+1)}+7\end{cases}$，Gauss-Seidel 迭代法是否收敛 否。

8、若求解方程的迭代公式 $x_{k+1}=ax_k+\sin(x_k)$ 在根 $x^*=0$ 附近收敛，则 a 满足 $-2<a<0$。若 $a=0.5$，初值 $x_0\in[-\pi/2,\pi/2]$，则以上迭代公式是否保证收敛 不保证收敛.

二、（8 分）设 T_1 是 V^n 到 V^m 的线性变换，T_2 是 V^m 到 V^r 的线性变换，定义 V^n 到 V^r 的变换 $T_2 \bullet T_1$ 为 $(T_2 \bullet T_1)\alpha=T_2(T_1\alpha), \forall \alpha \in V^n$。证明，$T_2 \bullet T_1$ 是线性变换。

证明：$\because$ T_2 和 T_1 均为线性变换

$\therefore (T_2\cdot T_1)(\alpha+\beta)=T_2(T_1(\alpha+\beta))$

$=T_2(T_1\alpha+T_1\beta)=T_2(T_1\alpha)+T_2(T_1\beta)$

$=(T_2\cdot T_1)\alpha+(T_2\cdot T_1)\beta.$

$(T_2\cdot T_1)\cdot(k\alpha)=T_2(T_1(k\alpha))$

$=T_2(k\cdot(T_1\alpha))=kT_2(T_1\alpha)$

$=k(T_2\cdot T_1)\alpha.$

$\therefore T_2\cdot T_1$ 是线性变换.

$P=\begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $J=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 4 & 1\\ & & 4\end{bmatrix}$

三、(10分)设 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 3\\ -1 & 0 & 5\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使 $P^{-1}AP=J$。

(1) 插值函数基选 $\{1, x, x^2, \cdots x^n\}$

$f(x)=x^2+2x+3$.

四、(10分)

(1) 求二次多项式 $f(x)$ 使得 $f(-1)=2, f(0)=3, f(1)=6$。

(2) 求三次多项式 $g(x)$ 使得 $g(-1)=2, g(0)=3, g(1)=6, g'(1)=0$。

(2) $f(x)=-2x^3+x^2+4x+3$

五、(8分) 求出一次多项式 $P_1(x)$ 使 $\int_0^2 (x^3-P_1(x))^2\,dx$ 的值达到最小（即 $P_1(x)$ 为 x^3 在 $(0,2)$ 上的一次最佳平方逼近）。 $P_1(x)=-\frac{8}{5}+\frac{18}{5}x$.

六、(10分)

(1) 给出两点求积公式 $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$ 使其关于 $f(x)$ 有最高的代数精度，并问此代数精度是多少。 x_0, x_1. $n=1$. 高斯型 $2n+1=3$ 阶.

(2) 求出 $\int_0^4 \frac{2f(x)}{\sqrt{4x-x^2}}dx$ 的关于 $f(x)$ 具有最高代数精度的两点求积公式。

七、(10分) 对于初值问题 $\begin{cases} y'(x)=-10y \\ y(0)=y_0 \end{cases}$

(1) 写出显式欧拉法的迭代格式，并求出这种方法的绝对稳定区间和稳定步长范围；

(2) 求出改进欧拉法 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$ 的绝对稳定区间和稳定步长范围。 $y'=\lambda y$ $\lambda=-10$

八、(10分) 对于线性方程组 $\begin{cases} 3x_1-x_2=0 \\ -x_1+7x_2+3x_3=1 \\ 3x_2-6x_3=0 \end{cases}$

(1) 使用三角分解（LU分解）法求解；

(2) 若以上方程组的矩阵表示为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，求矩阵 A 的条件数 $cond_2(A)$；当 $\boldsymbol{b}$ 具有相对误差 $\frac{\|\delta \boldsymbol{b}\|_2}{\|\boldsymbol{b}\|_2}$ 时，给出解 $\boldsymbol{x}$ 的相对误差 $\frac{\|\delta \boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}$ 的一个上界。 $\|A^{-1}\|_2\|A\|_2$ $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2}\leq\|A\|_2\|A^{-1}\|_2\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}$

九、(10分) 对于非线性方程 $x^3-5x^2+7x-3=0$，

$f(x)=x^3-5x^2+7x-3$

(1) 写出牛顿法的迭代公式；

(2) 说明牛顿法在根 $x^*=1$ 附近线性收敛； 令 $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. $\varphi'(x)\neq 0$ (求极限) 则线性收敛.

(3) 对以上的牛顿法进行改进，并说明改进后的迭代法在根 $x^*=1$ 附近平方收敛。 $x=1$ 是2重根. $m=2$.

$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x)}{f'(x)}$. $\varphi'(x)=0$

$\varphi(x)=x_k-\frac{2f(x)}{f'(x)}$. $\varphi''(x)\neq 0$.

平方收敛.

一、填空:

1. $x_1=x_2=x_3$. $\Rightarrow \dim W_1=\dim W_2=\dim(W_1\cap W_2)=\dim(W_1+W_2)=1$.

2. $E_1=\{1.t\}$. $E_2=\{1.t.t^2\}$.

$T\cdot E_1=E_2\cdot A$

$\{5.\ 3t+1\}=\{1.t.t^2\}\cdot A$

$A=\begin{bmatrix}5&1\\0&3\\0&0\end{bmatrix}$

3. $A=\begin{bmatrix}2&5\\1&-2\end{bmatrix}$ $\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-2&-5\\-1&\lambda+2\end{bmatrix}$ $f(\lambda)=\lambda^2-9$. $\Rightarrow \lambda_1=3.\ \lambda_2=-3$.

设 $g(\lambda)=f(\lambda)\cdot r(\lambda)+a\lambda+b$.

$\begin{cases}g(3)=f(3)\cdot r(3)+3a+b=0\\ g(-3)=f(-3)\cdot r(-3)-3a+b=-6\end{cases}$. $\Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-3\end{cases}$

$g(\lambda)=f(\lambda)\cdot r(\lambda)+\lambda-3$

$g(A)=f(A)\cdot r(A)+A-3I=A-3I=\begin{pmatrix}-1&5\\1&-5\end{pmatrix}$.

4. $\begin{cases}\int_0^2(x^2+ax+b)\cdot\rho(x)\cdot 1dx=0\\ \int_0^2(x^2+ax+b)\cdot\rho(x)\cdot xdx=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a=-2\\ b=2/3\end{cases}$

5. 一次代数精度 $\Rightarrow$ 求积公式对 $f(x)=1$, $f(x)=x$ 准确成立.

$f(x)=1$ 时. $\int_0^4 1dx=A_1+A_2$.

$f(x)=x$ 时. $\int_0^4 xdx=A_1+4A_2$.

$A_2=\frac{4}{3}$ $A_1=8/3$.

6. $y_{n+1}=y_n+h[\frac{1}{4}f(x_n.y_n)+af(x_{n+1}.y_{n+1})]$

泰勒展开:

$y_n+h\cdot y_n'+\frac{h^2}{2}y_n''+\frac{h^3}{3!}y_n'''=y_n+h(\frac{1}{4}y_n'+a(y_n'+hy_n''+\frac{h^2}{2}y_n'''))$

$\frac{h^3}{6}=\frac{ah^3}{2}$ $a=1/3$.

7. 迭代公式：$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_2^{(k)}+3 \\ x_2^{(k+1)} = -3x_1^{(k+1)}+7 \end{cases}$

$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = L+D+U \quad L=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \; D=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \; U=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$B=-(D+L)^{-1}\cdot U=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. $\rho(B)=\frac{3}{2}>1$. 不收敛.

8. 令$\varphi(x)=ax+\sin x$ 则$\varphi'(x)=a+\cos x$.

$|\varphi'(0)|=|a+1|<1$. $-2<a<0$.

$a=0.5$时. $|\varphi'(x)|$在$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上可能大于1. 不保证收敛.

二. 证明. T_1, T_2 均为线性变换.

∴有 $T_1(\alpha+\beta)=T_1\alpha+T_1\beta \qquad T_1(k\alpha)=k\cdot T_1\alpha$

$T_2(\alpha+\beta)=T_2\alpha+T_2\beta. \qquad T_2(k\alpha)=k\cdot T_2\alpha.$

∴ $(T_2\cdot T_1)\cdot(\alpha+\beta)=T_2[T_1(\alpha+\beta)]=T_2[T_1\alpha+T_1\beta]=T_2(T_1\alpha)+T_2(T_1\beta)=(T_2\cdot T_1)\alpha+(T_2\cdot T_1)\beta.$

$(T_2\cdot T_1)\cdot(k\alpha)=T_2[T_1(k\alpha)]=T_2\cdot(k\cdot T_1\alpha)=k\cdot T_2(T_1\alpha)=k(T_2\cdot T_1)\alpha.$

∴ $T_2\cdot T_1$是线性变换.

三. 解: $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 2 & \lambda+4 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}$

$=(\lambda-4)^2(\lambda-3)$.

$\lambda=3$时.

$(A-3I)x_1=0$

特征向量 $x_1=(2.1.1)^T$

$\lambda=4$时.

$(A-4I)x_2=0$

特征向量 $x_2=(0.1.0)^T$

$(A-4I)x_3=x_2$.

$\therefore$特征向量 $x_3=(1.k.1)^T$

k取0. 则$x_3=(1.0.1)^T$.

$\begin{cases} (A-3I)x_1=0 \Rightarrow A\cdot x_1=3x_1 \\ (A-4I)x_2=0 \Rightarrow Ax_2=4x_2 \\ (A-4I)x_3=x_2 \Rightarrow Ax_3=x_2+4x_3. \end{cases}$

$P=\{x_1.x_2.x_3\}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AP=P\cdot J. \Rightarrow J=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

四. (1).

x_i	y_i	1阶差商	2阶差商
-1	2		
0	3	1	
1	6	3	1

$f(x) = 2 + (x+1) + (x+1)\cdot x$

$= x^2 + 2x + 3$

(2). 重节点差商表:

x_i	y_i	1阶	2阶	3阶
-1	2			
0	3	1		
1	6	3	1	
1	6	0	-3	-2

$f(x) = 2 + (x+1) + (x+1)\cdot x - 2(x+1)\cdot x(x-1)$

$= -2x^3 + x^2 + 4x + 3.$

五. 解: 用 $\varphi_0 = 1$. $\varphi_1 = x$ 对 $f(x) = x^3$ 做逼近.

法方程组如下:

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0, y) \\ (\varphi_1, y) \end{bmatrix}$$

即 $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{32}{5} \end{bmatrix}$

有 $a = -\frac{8}{5}$. $b = \frac{18}{5}$.

$\therefore P_1(x) = -\frac{8}{5} + \frac{18}{5}x$.

六. 解: (1). $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

用切比雪夫正交多项式:

$T_0 = 1$. $T_1 = x$. $T_2 = 2x^2 - 1$.

进行插值求积.

求积节点 x_0. x_1 为 T_2 的根.

$x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$A_0 = A_1 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{2} f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\pi}{2} f(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

代数精度: $2n+1 = 3$阶.

(2). 令 $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t = 2+2t$.

$\int_0^4 \frac{f(x)}{\sqrt{4x-x^2}} dx = 2\int_{-1}^{1} \frac{f(2+2t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$

$\approx \pi f(2-\sqrt{2}) + \pi f(2+\sqrt{2})$.

七. 解: (1). 迭代公式: $y_{n+1} = y_n + h y_n' = y_n - 10h y_n = (1-10h) y_n$.

设 $y' = \lambda y$. 则 $y_{n+1} = (1+\lambda h) y_n$. 考虑误差存在有: $\tilde{y}_{n+1} = (1+\lambda h)\tilde{y}_n$

令 $\varepsilon_n = y_n - \tilde{y}_n$. 由迭代公式有: $\varepsilon_{n+1} = (1+\lambda h)\varepsilon_n$.

要使方法稳定: 要求 $|1+\lambda h| \le 1$.

$\therefore$ 稳定区间 $\lambda h \in [-2, 0]$ 稳定步长 $h \in [0, 1/5]$

(2). $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[y_n' + y_{n+1}']$

$= y_n + \frac{\lambda h}{2} \cancel{y_n} y_n + \frac{\lambda h}{2} y_{n+1}$

$\therefore \ y_{n+1} = \dfrac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\frac{\lambda h}{2}} y_n.$

同上. $-2 \le \lambda h \le 0$

$0 \le h \le 1/5.$

八. 解:(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

可得: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 9/20 & 1 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 20/3 & 3 \\ 0 & 0 & -147/20 \end{bmatrix}$

$LY = b = (0.1.0)^T.$ $\quad Y = (0.1.-9/20)^T$

$LUX = LY. \Rightarrow UX = Y.$

解得: $\begin{cases} x_1 = 2/49 \\ x_2 = 6/49 \\ x_3 = 3/49. \end{cases}$

(2). $\mathrm{cond}_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2.$

其中 $\|A\|_2 \le \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}.$

$\dfrac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \le \|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2 \cdot \dfrac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}.$

九.(1) 牛顿法迭代公式: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$= x_k - \dfrac{x_k^3 - 5x_k^2 + 7x_k - 3}{3x_k^2 - 10x_k + 7}$

(2) 令 $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - \dfrac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{3x^2 - 10x + 7}$

$\lim\limits_{x\to 1} \varphi'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)(6x-10)}{(3x^2 - 10x + 7)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2 \cdot (x-3)(6x-10)}{(x-1)^2 (3x-7)^2}$

$= \frac{1}{2} \ne 0.$ 线性收敛.

(3). $x=1$ 为2重根.

改进牛顿公式: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{2f(x)}{f'(x)}.$

令 $\varphi(x) = x - \dfrac{2f(x)}{f'(x)}.$

$\varphi'(x) = \dfrac{-(3x-7)^2 - 2(x-3)(6x-10)}{(3x-7)^2}$

$\therefore \varphi'(1) = 0.$

且 $\varphi''(x) \ne 0$

$\therefore$ 在 $x^*=1$ 附近平方收敛.