



计算方法

Ch04 方程求根的迭代法

程勇

buctcourse@163.com

<http://www.buct.edu.cn>

Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology

Mar. 4, 2020



提纲

- ① Ch01 概论
- ② Ch02 插值方法
- ③ Ch03 数值积分
- ④ Ch04 方程求根的迭代法
- ⑤ Ch05 线性方程组的迭代法
- ⑥ Ch06 线性方程组的直接法
- ⑦ Ch07 常微分方程的差分法



本章提纲

迭代法

开方法

Newton 法

改进的牛顿法

埃特金方法



迭代法

绪论中已经介绍过算法设计的校正思想。迭代法是求解方程近似根的一种方法，这种方法的关键是确定迭代函数 $\varphi(x)$ (将方程 $f(x) = 0$ 变换为 $x = \varphi(x)$)，建立迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ ，然后从给定的初值 x_0 出发迭代出一系列的近似值 $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ ，直到逼近方程的根 x^* ，直到满足精度要求 $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$ 为止。

简单迭代法又称逐次迭代法，基本思想是构造不动点方程，以求得近似根。即由方程 $f(x) = 0$ 变换为 $x = \varphi(x)$ ，然后建立迭代格式：

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

当给定初始值 x_0 后，由迭代格式可求得数列 $\{x_k\}$ 。如果 $\{x_k\}$ 收敛于 x^* ，则它就是方程的根。因为

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \varphi(x^*)$$



迭代法例子

例题：求方程

$$f(x) = x - 10^x + 2 = 0$$

的一个根，取 $x_0 = 0$ 。

解：由于

$$10^x = x + 2, \quad x = \frac{\log(x + 2)}{\log 10}, \quad \varphi(x) = \frac{\log(x + 2)}{\log 10}$$

得到迭代格式为 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

$x_1 = 0.30102999566398114$
$x_2 = 0.36192228006214167$
...
$x_6 = 0.3757965228864938$
$x_7 = 0.3758092423816728$



开方公式

对于给定的 $a > 0$, 求开方值 \sqrt{a} 就是要求解二次方程

$$x^2 - a = 0 \quad (1)$$

为此可使用校正技术从预报值生成校正值来逐步逼近方程的解。

设给定某个预报值 x_k , 希望借助于某种简单方法确定校正量 Δx , 使校正值

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x \quad (2)$$

更好的满足方程, 即:

$$x_k^2 + 2x_k\Delta x + (\Delta x)^2 \approx a \quad (3)$$

成立。设校正值 Δx 是个小量, 舍去高阶小量 $(\Delta x)^2$ 后令:

$$x_k^2 + 2x_k\Delta x = a$$



开方公式 (续)

从中解出 Δx , 得:

$$\Delta x = \frac{a - x_k^2}{2x_k}$$

代入上式, 即可求出开方公式:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

上述演绎过程表明开方法的设计思想是逐步线性化, 即将二次方程的求解化归为一次方程求解过程的重复。



开方算法

开方算法

任给初值 $x_0 > 0$ ，反复利用迭代公式即可获得满足精度要求的开方值：

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right) \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

直到 $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ (ε 为给定的精度) 为止， x_{k+1} 即为所求。



开方法例子

例题：用开方算法求 $\sqrt{2}$ ，取 $x_0 = 1$ ， $\varepsilon = 10^{-6}$

解：求解过程如下：

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 1.5, \quad x_2 = 1.41666667, \quad \dots$$

k	x_k
1	1.500000
2	1.416667
3	1.414216
4	1.414214
5	1.414214

因此， $\sqrt{2} \approx 1.414214$ ，精确值为 1.41421356。



开方公式的收敛性

开方公式收敛性定理

开方公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

对于任意给定的初值 $x_0 > 0$ 均收敛，即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \rightarrow \sqrt{a}$$

或表示为迭代误差

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \sqrt{a}| \rightarrow 0$$



开方公式的收敛性证明

证明：由

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right)$$

可得

$$x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k} (x_k - \sqrt{a})^2$$

同理

$$x_{k+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k} (x_k + \sqrt{a})^2$$

两式相除

$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{x_{k+1} + \sqrt{a}} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^2}{(x_k + \sqrt{a})^2} = \left(\frac{x_k - \sqrt{a}}{x_k + \sqrt{a}} \right)^2$$

开方公式的收敛性证明 (续)

这样有：

$$\begin{aligned}\frac{x_k - \sqrt{a}}{x_k + \sqrt{a}} &= \left(\frac{x_{k-1} - \sqrt{a}}{x_{k-1} + \sqrt{a}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{x_{k-2} - \sqrt{a}}{x_{k-2} + \sqrt{a}} \right)^{2^2} = \cdots = \left(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^k}\end{aligned}$$

令 $q = \left| \frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}} \right|$ ，显然当 $x_0 > 0$ 时，有 $0 < q < 1$ ，

则有 $\frac{x_k - \sqrt{a}}{x_k + \sqrt{a}} = q^{2^k}$ ，因此：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{1 + q^{2^k}}{1 - q^{2^k}} \sqrt{a} = \sqrt{a}$$



Newton 法

Newton 牛顿迭代公式构建的基本思想是通过 Taylor 展开将非线性方程线性化。

设 x_k 是 $f(x) = 0$ 的一个近似根, 把 $f(x)$ 在 x_k 处作泰勒展开

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 + \cdots +$$

若取前两项来近似代替 $f(x)$ (称为 $f(x)$ 的线性化), 则得近似的线性方程:

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$$

设 $f'(x_k) \neq 0$, 令其解为 x_{k+1} , 得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



Newton 法 (续)

这称为 $f(x) = 0$ 的牛顿迭代公式。它的迭代函数为：

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

显然是 $f(x) = 0$ 的同解方程，故其迭代函数为：

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (f'(x) \neq 0)$$

由

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

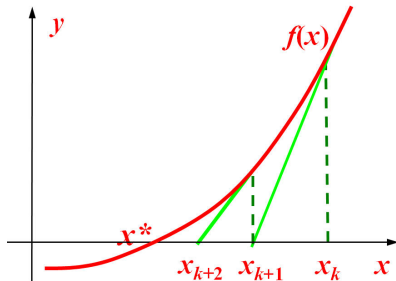
知 x_{k+1} 是点 $(x_k, f(x_k))$ 处 $y = f(x)$ 的切线：

$$\frac{y - f(x_k)}{x - x_k} = f'(x_k)$$

与 x 轴的交点的横坐标，如下图所示。



Newton 的几何解释



也就是说，新的近似值 x_{k+1} 是用曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_k, f(x_k))$ 的切线与 x 轴相交得到的。

继续取点 $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ ，再做切线与 x 轴相交，又可得 x_{k+2}, \dots 。由图可见，只要初值取的充分靠近根 x^* ，这个序列就会很快收敛于根 x^* 。Newton 迭代法又称切线法。



牛顿法的收敛性

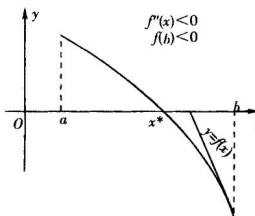
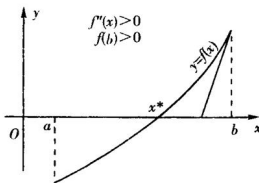
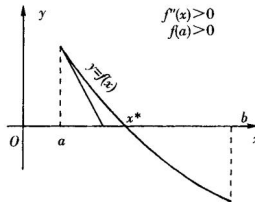
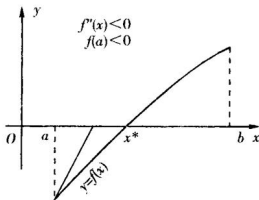
定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足下列条件:

- $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- $f'(x) \neq 0$;
- $f''(x)$ 存在且不变号;
- 取 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f''(x) \cdot f(x_0) > 0$;

则由迭代公式确定的牛顿迭代法序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的唯一根 x^* 。

牛顿法的收敛性 (续)



Newton 迭代法的收敛性依赖于 x_0 的选取。



牛顿法例子

例题：用牛顿法求下面方程的根：

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

解：因

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$$

所以迭代公式为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{x_k^3 + 2x_k^2 + 10x_k - 20}{3x_k^2 + 4x_k + 10} \end{aligned}$$

取 $x_0 = 1$,

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + 2x_0^2 + 10x_0 - 20}{3x_0^2 + 4x_0 + 10}$$



牛顿法例子 (续)

接上

$$x_1 = 1 - \frac{1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 20}{3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 10} = 1.411764706$$

同理, 可求 x_2, x_3, \dots , 计算结果列于下表。

k	x_k
1	1.411764706
2	1.369336471
3	1.368808189
4	1.368808108

从计算结果可以看出, 牛顿法的收敛速度是很快的, 进行了四次迭代就得到了较满意的结果, 精度为 10^{-7} 。

迭代过程的收敛速度

定义： p 阶收敛

如果迭代误差 $e_k = x^* - x_k$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时成立：

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} \rightarrow c \quad (c \neq 0 \text{ 的常数})$$

则称迭代过程是 p 阶收敛的。当 $p = 1$ 时称线性收敛，当 $p = 2$ 时称平方收敛，当 $1 < p < 2$ 时称方法为超线性收敛。

定理

Newton 迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

在 $f(x) = 0$ 的单根 x^* 临近为平方收敛。



Newton 迭代法分析

Newton 迭代法优缺点:

Newton 迭代法逻辑结构简单、收敛速度很快 (平方收敛), 但它通常依赖初值 x_0 的选取, 如果初值 x_0 选择不当, 将导致迭代发散或产生无限循环; 此外, 每一步迭代都需要计算导数值 $f'(x)$, 有时计算 $f'(x)$ 是不方便的。

基于这两点, 产生了几种 Newton 迭代法的变形形式。

- ① 牛顿下山法;
- ② 弦截法;
- ③ 快速弦截法;



牛顿法例子

一般地说, Newton 法的收敛性依赖于初值 x_0 的选取, 如果 x_0 偏离解 x^* 较远, 则 Newton 法可能发散或产生无限循环。

例题: 用 Newton 求方程

$$x^3 - x - 1 = 0$$

在 $x = 1.5$ 附近的一个根。解: 因

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

可得牛顿迭代公式:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1} \end{aligned}$$



牛顿法例子 (续)

分别取 $x_0 = 1.5$ 和 $x_0 = 0.6$, 计算结果如下表。

k	x_k	x_k
0	1.5	0.6
1	1.34783	17.90000
2	1.32520	11.94680
3	1.32472	7.985519
4	1.32472	

由上表可知道, 当 $x_0 = 0.6$ 时结果偏离所求的根, 不收敛 (发散) 或收敛较慢。



Newton 下山法

为了防止迭代发散，通常对迭代过程再附加一项要求，即保证函数值单调下降：

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

满足这项要求的算法称下山法。将 Newton 法与下山法结合使用，即在下山法保证迭代函数值稳定下降的前提下，用 Newton 法加快速度，即可得到如下 Newton 下山法：

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

其中 $0 < \lambda < 1$ ，称下山因子，在迭代过程中通过适当地选取 λ 以使下山条件 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ 满足。下山因子的选择是个逐步探索的过程，从 $\lambda = 1$ 开始反复将因子 λ 的值减半进行试算，一旦单调条件 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ 满足，则称为“下山成功”。反之，如果在上述过程中找不到使下山条件 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ 成立的下山因子 λ ，则称“下山失败”，这时需另选初值 x_0 重算。



下山法例子

例题：使用下山法求方程 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 的根，取 $x_0 = 0.6$ 。

解：迭代公式如下：

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \lambda \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}$$

牛顿下山法的计算结果：

k	λ	x_k
0	1	0.6
1	$\frac{1}{2^5}$	1.14063
2	1	1.36681
3	1	1.32628
4	1	1.32472



弦截法

牛顿法要计算 $f'(x)$ ，现用 $f(x)$ 的值近似 $f'(x)$ ：
认为切线斜率近似等于割线斜率。

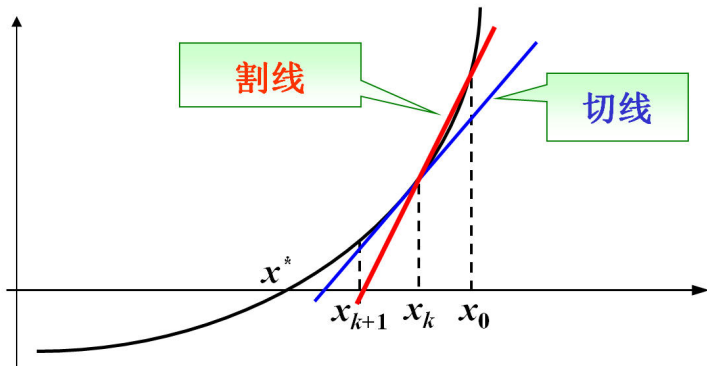
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}(x_k - x_0)$$

迭代函数为：

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0)}(x - x_0)$$

单点弦截法为线性收敛。

弦截法几何意义



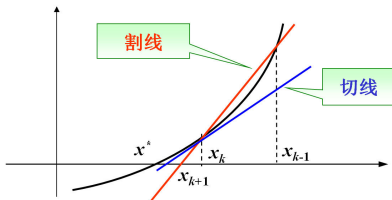
快速弦截法

快速弦截法也称为两点弦截法。
认为切线斜率近似等于割线斜率。

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

快速弦截法需要 2 个初值 x_0 和 x_1 ，其收敛阶 1.618。





快速弦截法例子

例题：使用 Newton 法和快速弦截法求方程 $xe^x - 1 = 0$ 的根。

解：使用 Newton 法和快速弦截法，迭代公式分别如下：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{e^{x_k} + x_k e^{x_k}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

k	x_k	x_k
0	0.5	0.5
1	0.57102	0.6
2	0.56716	0.565315
3	0.56714	0.567094
4	0.56714	0.567143



埃特金迭代公式

$$\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k)$$

$$\tilde{x}_{k+1} = \varphi(\bar{x}_{k+1})$$

$$x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} - \frac{(\tilde{x}_{k+1} - \bar{x}_{k+1})^2}{\tilde{x}_{k+1} - 2\bar{x}_{k+1} + x_k}$$



本章小结

- 迭代法思想;
- 开方法;
- Newton 法;
- Newton 法的改进;
- 迭代过程的加速;



练习题

- 1 编程实现开方法。
- 2 编程实现 Newton 法。

谢谢!

AUTHOR: Cheng Yong

ADDRESS: Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology
Beijing, 100029, China

EMAIL: buctcourse@163.com