§ 2.2 Jordan标准形

定义　形式为

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{r\times r}$$

的$r\geq 1$阶方阵称为一个Jordan块，其中λ是实数或复数.

由若干个(包括单个)Jordan块所构成的对角块矩阵称为Jordan矩阵。

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & \\ & -2 & 1 \\ & & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-i & 1 & \\ & 1-i & 1 \\ & & 1-i \end{bmatrix}$$

等都是Jordan块（如果把它们看作是单个Jordan块的方阵，则它们是Jordan矩阵）. 而

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & -2 & 1 \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

也是Jordan矩阵. 并且矩阵A可以看成是由两个子Jordan矩阵

$$J_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{bmatrix},\quad J_2=\left[\begin{array}{c|cc}-2 & & \\ \hline & -2 & 1\\ & & -2\end{array}\right]$$

组成的，其中 J_1 是Jordan块，J_2 是关于-2的Jordan矩阵.

记为A=diag$\{J_1, J_2\}$.

对角矩阵就是1阶Jordan块所组成的对角块矩阵，所以Jordan矩阵包含对角矩阵。

本节的目的是论证复数域上任一 n 阶方阵都相似于一个Jordan矩阵，并且Jordan块的个数等于该方阵的线性无关特征向量的个数.

例1 方阵

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 3 & -2\\ -7 & 6 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

是不可对角化的. 事实上, A 的特征多项式是

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

故 A 有两个互异的特征值: $\lambda_1=1, \lambda_2=2$ （二重）.

关于 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量为 $x_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$ ，由于齐

次线性方程组

$$(A-2I)x=\begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -7 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}x=0$$

的系数矩阵 $A-2I$ 的秩是2，所以它的基础解系只有一个向量. $x_2=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$. 因而 $\dim E_{\lambda_2}=1<2$，故 A 不可对角化.

我们看出, A 不可对角化的原因就是特征值 $\lambda_2=2$ 的几何重数小于代数重数, 而这又是因为 $A-2I$ 的秩是2引起的.

由于矩阵乘积的秩的不等式(2. 1−10), 所以有

$$rank(A-2I)^2 \le rank(A-2I),$$

故考虑求解下述齐次线性方程组

$$(A-2I)^2 x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} x = 0.$$

因 $rank(A-2I)^2 = 1$, 故 $\dim N\left[(A-2I)^2\right] = 2$, 恰好等于 $\lambda_2 = 2$ 的代数重数, 因此方程组有两个线性无关的解, 由于 $N\left[(A-2I)\right] \subset N\left[(A-2I)^2\right]$, 所以上述的 $x_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ 是一个解，它是A 关于 $\lambda_2 = 2$ 的特征向量. 另一个与x_2 线性无关的解可取为 $x_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T$,

它满足关系式

$$(A-2I)x_3 = x_2,$$

即

$$Ax_3 = x_2 + 2x_3.$$

因此，

$$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & Ax_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 2 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right].$$

令

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

它是可逆阵，则有

$$P^{-1}AP=\left[\begin{array}{c|cc}1 & & \\ \hline & 2 & 1 \\ & & 2\end{array}\right],$$

即 A 相似于Jordan矩阵.

上面例子说明, 方阵 A 虽然不可对角化, 但相似于Jordan矩阵. 这个结论具有一般性, 即复数域上任一方阵 A, 都能找到可逆矩阵P, 使 $P^{-1}AP$是Jordan矩阵. 用线性变换的语言来说就是, 若 T 是复数域上线性空间 V 的一个线性变换, 那么在 V 中必能找到一个基, 使 T 在该基下的矩阵是Jordan矩阵.

定义 设λ_0是方阵A的特征值. 如果对于向量X, 存在一个正整数k, 使

$$(A-\lambda_0 I)^{k-1}x \neq 0, \text{但}(A-\lambda_0 I)^{K}x = 0, \qquad (2.2\text{-}1)$$

则称x为A关于λ_0的k **级根向量**(或**广义特征向量**). 简称X为λ_0的k级根向量.

按根向量的定义可知, 1级根向量为特征向量, 反之, 特征向量必为1级根向量. 而例1中的x_3是2级根向量.

定理 设λ_0是方阵A的特征值, 则 A关于λ_0 的不同级的根向量是线性无关的.

证 设$x_i(i=1,2,\cdots,p)$是A关于λ_0的 i 级根向量, 要证明向量组 $x_1x_2,\cdots x_p$线性无关.

设有等式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_px_p=0.$$

用 $(A-\lambda_0 I)^{p-1}$ 左乘上式两边, 得

$$a_1(A-\lambda_0 I)^{P-1}x_1+a_2(A-\lambda_0 I)^{P-1}x_2+\cdots$$
$$+a_p(A-\lambda_0 I)^{P-1}x_p=0.$$

由根向量的定义知,

$$(A-\lambda_0 I)^{p-1}x_1=0,\cdots,(A-\lambda_0 I)^{p-1}x_{p-1}=0,$$

但 $(A-\lambda_0 I)^{p-1}x_p \neq 0$ ，因此 $a_p=0$. 类似地可证

$$a_{p-1}=\cdots=a_1=0.$$

因此,

$$a_1=a_2=\cdots=a_p=0$$

即向量组 $\{x_1,x_2,\cdots,x_p\}$ 线性无关.

定理 A 关于不同特征值的根向量是线性无关的.

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是A的不同特征值, $x_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 为 λ_i 的 n_i 级根向量，要证明向量组 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_s$ 是线性无关的.

设有等式

$$b_1\mathbf{x}_1+b_2\mathbf{x}_2+\cdots+b_s\mathbf{x}_s=0. \qquad (2.2\text{-}2)$$

用 $(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}$ 左乘（2.2-2）式两边，得

$$\begin{aligned}&b_1(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}\mathbf{x}_1\\&+b_2(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}\mathbf{x}_2+\cdots\\&+b_s(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}\mathbf{x}_s=0.\end{aligned} \qquad (2.2\text{-}3)$$

根据根向量的定义，有

$$(A-\lambda_2 I)^{n_2}\mathbf{x}_2=0,\cdots,(A-\lambda_s I)^{n_s}\mathbf{x}_s=0,$$

从而由（2.2-3）式得

$$
\begin{aligned}
& b_1(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}\mathbf{x}_1 \\
& = b_1(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda_s I)^{n_s}(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}\mathbf{x}_1 \\
& = 0.
\end{aligned}
\qquad (2.2\text{-}4)
$$

令 $y \overset{\Delta}{=} (A-\lambda_1 I)^{n_1-1}x_1 \neq 0$, 则 $(A-\lambda_1 I)\mathbf{y} = (A-\lambda_1 I)^{n_1}\mathbf{x}_1 = 0$, 故 $\mathbf{y}$ 是A关于 λ_1 的特征向量，因而（2.2-4）式成为

$$
b_1(\lambda_1-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda_1-\lambda_s)^{n_s}\mathbf{y} = 0.
$$

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是互异的，有 $\mathbf{y}\neq 0$, 所以 $b_1 = 0$. 同理可得

$b_2 = \cdots = b_s = 0$. 因此向量组 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_s$ 线性无关。

定义 设λ_0是A的k重特征值，$(A-\lambda_0 I)^K$的零空间

$$N\left[(A-\lambda_0 I)^k\right]=\left\{x \middle| (A-\lambda_0 I)^k x=0\right\} \qquad (2.2\text{-}5)$$

称为A关于λ_0的根空间，简称λ_0的根空间，记为N_{λ_0}.

容易看出，N_{λ_0}是λ_0的级数至多到k的所有根向量所张成的线性空间，并且N_{λ_0}是A的不变子空间.

值得指出的是，N_{λ_0}中根向量的最高级数可能小于k.例如，若对于特征值$\lambda_2=1$的代数重数是3，但由于$(A-1\cdot I)^2=(A-1\cdot I)^3$

所以 N_{λ_0}中根向量的最高级数是2，小于3.

N_{λ_0}中根向量的最高级数r 称为λ_0的**指标**,从而

$$N_{\lambda_0} = N\left[(A-\lambda_0 I)^r\right].$$

我们将会知道，λ_0 的指标 r即是关于λ_0 的子Jordan矩阵中Jordan块的最大阶数.

定理 设n阶方阵A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

其中λ_1 $\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是A的所有不同的特征值, $n_1,n_2,\cdots,n_s$

是相应的代数重数, 则有

$$N_{\lambda_1}\oplus N_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus N_{\lambda_s}=C^n \qquad (2.2\text{-}6)$$

证 由前述有关根向量线性无关性的两个定理可知

$$N_{\lambda_1}+N_{\lambda_2}+\cdots+N_{\lambda_s}=N_{\lambda_1}\oplus N_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus N_{\lambda_s}\subset C^n.$$

又因 $f(A)=(A-\lambda_1 I)^{n_1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\cdots(A-\lambda sI)^{n_s}=O.$ 故（2.1-11）式给出

$$\dim N_{\lambda_1}+\dim N_{\lambda_2}+\cdots+\dim N_{\lambda_s}\geq n.$$

因而有

$$\dim N_{\lambda_1}+\dim N_{\lambda_2}+\cdots+\dim N_{\lambda_s}=n,$$

即（2.2-6）式成立.

把 A 相似简化为Jordan矩阵的关键是, 寻找 A 关于其特征值的各级根向量. 1级根向量可以解齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i I)x=0, i=1,2,\cdots,s$$

求得. 如果rank $(A-\lambda_i I)=r_i$, 那么有 $n-r_i$ 个线性无关的属于 λ_i 的1级根向量.若 $n-r_i<n_i$,则必有 λ_i 的2级根向量.按定义, 可以通过解方程 $(A-\lambda_i I)x\neq 0$; $(A-\lambda_i I)^2 x=0$ 求得.

但这样求解是比较困难的,又不能得到与1级根向量有规律的关系,因此我们用下述方法.由于

$$(A-\lambda_i I)^2 x=(A-\lambda_i I)(A-\lambda_i I)x=0$$

所以若令 $$(A-\lambda_i I)x=y, \qquad (2.2\text{-}7)$$

则 $(A-\lambda_i I)y=0$,且 $y\neq 0$. 这就是说, y 是属于 λ_i 的1级根向量。

由于（2.2-7）式是非齐次线性方程组,所以要求它有解,增广矩阵 $[A-\lambda_i I \vdots y]$ 的秩必须也是 r_i .这就对 y 的选取作了限制.

如果还有更高级的根向量,我们仍是利用(2.2-7)式从这级的根向量 y 求高一级的根向量 x ,但要注意 y 的选取应使方程组(2.2-7)的解存在.

例3 求方阵A的根向量,其中

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

解 由于$\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$,故$A$有三重特征值2.又因齐次线性方程组

$$(A-2I)x=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}x=0$$

的系数矩阵$A-2I$秩是1，所以特征值2的几何重数是3-1=2，

小于代数重数3，因而存在2级根向量.

为了从1级根向量求得2级根向量，首先求出1级根向量的一般表达式，即给出上述方程组的通解.由于它的基础解系有两个向量:

$$x_1=[0\quad 1\quad 0]^T,x_2=[1\quad 0\quad -1]^T$$

所以它的通解为

$$y=c_1x_1+c_2x_2=[c_2\quad c_1\quad -c_2]^T.$$

代入(2.2-7)式得

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & -1\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}c_2\\c_1\\-c_2\end{bmatrix}$$

容易看出,当且仅当 $c_1=0$ 时,这个非齐次线性方程才有解,

且它的通解是

$$y=\begin{bmatrix}c_2 & 0 & 0\end{bmatrix}^T+b_1x_1+b_2x_2, c_2\neq 0.$$

这就是2级根向量的一般表达式.

于是

$$N_{\lambda=2}=span\{x_1,x_2,x_3\},\quad \dim N_{\lambda=2}=3,$$

其中$x_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$.特征值 2 的根空间的维数恰好等于它的代数重数.

那么是否还会有更高级的根向量呢?回答是不可能再有了.因为上一定理表明,特征值的根空间的维数只能等于它的代数重数,而不能大于代数重数.

例4 设

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -12 & 4 & 8 \\ -6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

求可逆矩阵P使$P^{-1}AP$为Jordan矩阵。

解 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3,\ \lambda=2$ 是A的三重特征值。齐次线性方程组

$$(A-2I)x=\begin{bmatrix} -6 & 1 & 4 \\ -12 & 2 & 8 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}x=0$$

的系数矩阵 $A-2I$ 的秩是1，因而基础解系有两个解向量，

例如，$x_1=\begin{bmatrix}4 & 4 & 5\end{bmatrix}^T,\ z_1=\begin{bmatrix}5 & 2 & 7\end{bmatrix}^T$

且通解的表达式为

$$y = c_1 x_1 + c_2 z_1 = \begin{bmatrix} 4c_1 + 5c_2 & 4c_1 + 2c_2 & 5c_1 + 7c_2 \end{bmatrix}^T$$

代入（2.2-7）式得

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 & 4 \\ -12 & 2 & 8 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4c_1 + 5c_2 \\ 4c_1 + 2c_2 \\ 5c_1 + 7c_2 \end{bmatrix}$$

对它的增广矩阵施行行初等变换：

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -6 & 1 & 4 & 4c_1 + 5c_2 \\ -12 & 2 & 8 & 4c_1 + 2c_2 \\ -6 & 1 & 4 & 5c_1 + 7c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} -6 & 1 & 4 & 4c_1 + 5c_2 \\ 0 & 0 & 0 & -4(c_1 + 2c_2) \\ 0 & 0 & 0 & c_1 + 2c_2 \end{array}\right]$$

由此可见,当且仅当$c_1 + 2c_2 = 0$时这个非齐次方程组才有解。

若取$c_1 = 2/3, c_2 = -1/3,$ 这时 $y = x_2 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$, 上述非齐次线性方程组的一个解是$x_3 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$，且有$(A-2I)x_3 = x_2$，即

$$Ax_3 = x_2 + 2x_3$$

因此，取

$$P = \begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2\end{pmatrix}$$

因为若在（2.2-7）式中令$y=0$，也就是齐次线性方程组，$(A-\lambda_i I)x=0$ 它的非零解是A关于λ_i 的特征向量，亦即 λ_i 的1级根向量，所以我们可以直接从（2.2-7）式出发求λ_i 的各级根向量。如果是求A的Jordan标准形，所需要求的只是线性无关的根向量。

例5　求方阵的*Jordan*标准形。

$$A=\begin{bmatrix}4&3&0&1\\0&2&0&0\\1&3&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

解　A的特征多项式 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3(\lambda-4)$ ，故它有两个不同的特征值：代数重数是3的特征值 $\lambda_1=2$ 和单重特征值 $\lambda_1=4$ 。

关于$\lambda_1 = 2$，考察线性方程组（2.2-7），即

$$(A-2I)x = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

由于$rank(A-2I)=2$, 所以$\dim V_{\lambda_1} = 4-2 = 2 < 3$, 因而还有2级根向量。

对此方程组的增广矩阵施行行初等变换

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_1 - y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}(-y_1 + 2y_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 \end{array}\right] \quad （2.2\text{-}8）$$

容易看出，当且仅当 $y_2 = y_4 = 0$，增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩时，它才有解。

令 $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ ，便得到 λ_1 的两个线性无关的特征向量

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T, x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

且 x_2 的第二、第四个分量是 0，从而由 x_2 可求得 λ_1 的2级根向量 $x_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$，且有 $Ax_3 = x_2 + 2x_3$ 。

关于 $\lambda_2=4$ 的一个特征向量是 $x_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$。

于是，若取

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

若取

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

它是可逆的，则有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$

通过上面几个例子，可以对方阵A的*Jordan*标准的结构得到下列几点结论：

（1）A的*Jordan*标准形中子*Jordan*矩阵的数目等于A的不同的特征值的个数；

（2）每个子*Jordan*矩阵的阶数等于相应的根空间的维数，亦即相应特征值的代数重数；

（3）每个子*Jordan*矩阵中*Jordan*块的数目恰好等于相应特征值的线性无关的特征向量的个数，即特征子空间的维数，亦即相应特征值的几何重数；

（4）每个子*Jordan*矩阵中*Jordan*块的最大阶数恰好等于相应特征值的指标，也即相应的根空间中根向量的最高级数。

Jordan标准型的应用：矩阵函数的计算

例7 设

$$J=\begin{bmatrix}-2 & 1 & & \\ & -2 & 1 & \\ & & -2 & 1 \\ & & & -2\end{bmatrix}$$

求J^5。

解 $J=-2I+U$，其中

$$U=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}$$

是幂零矩阵，U具有一些特殊的性质，如

$$U^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\ &0&0&1\\ & &0&0\\ & & &0\end{bmatrix},U^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\ &0&0&0\\ & &0&0\\ & & &0\end{bmatrix},U^4=O$$

由于单位矩阵与任一方阵的乘积是可交换的，所以

$$J^5=(-2I+U)^5=(-2I)^5+C_5^1(-2I)^4U+C_5^2(-2I)^3U^2$$
$$+C_5^3(-2I)^2U^3+C_5^4(-2I)U^4+U^5$$

$$
\begin{aligned}
&= (-2)^5 I + 5\cdot(-2)^4 U + 10\cdot(-2)^3 U^2 \\
&\quad + 10\cdot(-2)^2 U^3 \\
&= (-2)^5 I + 5\cdot(-2)^4 U + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(-2)^3 U^2 \\
&\quad + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}(-2)^2 U^3
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
(-2)^5 & 5\cdot(-2)^4 & 10\cdot(-2)^3 & 10\cdot(-2)^2 \\
 & (-2)^5 & 5\cdot(-2)^4 & 10\cdot(-2)^3 \\
 & & (-2)^5 & 5\cdot(-2)^4 \\
 & & & (-2)^5
\end{bmatrix}
$$

矩阵函数e^A的计算

设A的Jordan标准型$J=P^{-1}AP$，即$A=PJP^{-1}$.

$$e^A=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(PJP^{-1})^k}{k!}=P\left(I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J^k}{k!}\right)P^{-1}$$

则$e^A=Pe^JP^{-1}$.

设J的所有子Jordan块为$J_1,J_2,\dots,J_K$, 对应的（可重复）特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_K$，则

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_K\end{bmatrix}, 且e^J=\begin{bmatrix}e^{J_1} & & & \\ & e^{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_K}\end{bmatrix}$$

Jordan块幂函数e^{J_i}的计算

记第i个Jordan子块为

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i},$$

则$$e^{J_i} = I + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_i^k}{k!} = e^{\lambda_i}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}.$$

综上所述，$e^{A}=P\begin{bmatrix} e^{J_1} & & & \\ & e^{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_K} \end{bmatrix}_{n\times n} P^{-1}$，

其中

子矩阵 $e^{J_i}=e^{\lambda_i}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n_i-1)!} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$

含参数的矩阵函数e^{At}的计算

对于任意参数t

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = P\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_K t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

其中 $e^{J_i t} = e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

例8：设$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，求$e^A$和$e^{At}$.

解：$e^A=e^2\begin{bmatrix}1&1&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$e^{At}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&t&\frac{t^2}{2}\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}$

例9: 设$A=\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}$，求$e^{At}$.

解：$A=PJP^{-1}$，其中$P=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&0&0\\0&-1&-1\end{bmatrix}$，$J=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$

则 $e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}$

$$=P\begin{bmatrix}e^t&&\\&e^t&\\&&e^{2t}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2e^t-e^{2t}&0&2e^t-2e^{2t}\\0&e^t&0\\-e^t+e^{2t}&0&-e^t+2e^{2t}\end{bmatrix}$$

矩阵函数的应用（求解常系数微分方程组）

求解： 设变量$X(t)\in R^n$,关于$X(t)$的常系数微分方程组

$$X'(t)=AX(t)+f(t),\qquad X(0)=C$$

其中$A\in R^{n\times n}, f(t)\in R^n$均为已知。

解：上述方程的解为$X(t)=e^{At}C+\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds.$

当$f(t)=f$为常值向量，则$X(t)=e^{At}C+\int_0^t e^{A(t-s)}f ds.$

其中向量的积分定义为向量元素的积分。

例10：求解$X'(t)=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}e^t\\-e^t\end{bmatrix},X(0)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

解：设$A=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$，则$A=PJP^{-1}$，其中$P=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}$，

$J=\begin{bmatrix}5&\\&-1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, f(t)=\begin{bmatrix}e^t\\-e^t\end{bmatrix}$.

则$e^{At}=P\begin{bmatrix}e^{5t}&\\&e^{-t}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}e^{5t}+\frac{2}{3}e^{-t}&\frac{1}{3}e^{5t}-\frac{1}{3}e^{-t}\\\frac{2}{3}e^{5t}-\frac{2}{3}e^{-t}&\frac{2}{3}e^{5t}+\frac{1}{3}e^{-t}\end{bmatrix}$,

$$X(t)=e^{At}C+\int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds=\begin{bmatrix}e^{5t}\\2e^{5t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}\\-\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$