华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：<u>　应用高等工程数学　　　　　</u>　课程类别 ☑公共课 ☐专业课　考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别______________考试日期 <u>2021-12-22　　</u>学生所在院系_____________

学号________________姓名______________任课教师___________________

一、填空（每小题 3 分，共 24 分）

1、R^4 中的两个子空间 $W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\mid x_1=x_2=0\}$，$W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}\mid x_3=x_4\}$，则 W_1 的维数为______，W_2 的维数为______，$W_1\cap W_2$ 的维数为_____。

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}$，则 $A^5-2A^4-3A^3+A^2-A-4I=$___________。

3、方阵 $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\2&2&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$ 的最小多项式为____________________。

4、 在计算机上求解方程$x^2+(10^{15}+1)x+10^{15}=0$时，考虑以下两种算法：（A）$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\frac{c}{a\cdot x_1}$；（B）$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_1=\frac{c}{a\cdot x_2}$，其中$a=1, b=10^{15}+1, c=10^{15}$，则两种算法中更好的算法是（ ）。

5、对于区间[0, 1]上带权函数$\rho=1$的两点 Gauss 型求积公式

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$$，

求积节点$x_1=$______，$x_2=$______。

6、对于初值问题$\begin{cases} y'(x)=-10y \\ y(0)=y_0 \end{cases}$，考虑递推公式$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$，步长取$h=0.2$时算法是否收敛__________。

7、对线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - ax_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \\ \quad -2x_3 = 9 \end{cases}$$

使用 Jacobi 迭代法求解，当$a = 2$ 时是否收敛___，当$a =- 5$ 时是否收敛____，当$a = 7$ 时是否收敛_____。

8、使用迭代公式 $x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 求解方程 $f(x) = (x-1)^2\sin(\pi x) = 0$ 在 $x = 1$ 处的根时，收敛阶数为_____。

二、（8 分）已知R^3 中的两个基：

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\quad B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

（1）、求B_1 到B_2 的基变换矩阵；

（2）、求在B_1, B_2 下有相同坐标的所有向量。

三、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\-5&6&1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使$P^{-1}AP=J$。

四、（10 分）

（1）、求二次多项式$f(x)$ 使得$f(0) = 1, f(1) = -1, f(2) = -1$ 。

（2）、试说明存在无穷多个三次多项式$g(x)$ 使得$g(0) = 1, g(1) = -1, g(2) = -1$。

（3）、求三次多项式$g(x)$ 使得$g(0) = 1, g(1) = -1, g(2) = -1, g'(0) = 1$。

五、（8 分）求出不超过二次的多项式$P_2(x)$使$\int_{-1}^{1}(x^3-P_2(x))^2\mathrm{d}x$ 的值达到最小（即$P_2(x)$为x^3在(-1,1)上的二次最佳平方逼近），并求出此最小值。

六、（10 分）

（1）、使用梯形公式计算积分$\int_0^1 x^2e^x\,dx$，并利用[a, b]区间上梯形公式的误差公式$R[f]=-\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$估计截断误差绝对值的一个具体上界（结果中若含有e，可以保留不需算出)；

（2）、若使用复化梯形公式计算积分$\int_0^1 x^2e^x\,dx$，要求截断误差绝对值不超过$\frac{7e}{3}*10^{-4}$，需要取多少个节点？

七、（10 分）对于初值问题 $\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$，考虑使用递推公式 $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} + h[af(x_n, y_n)]$ 求解。

（1）、若$a = 1, h = 0.5, x_0 = 0, x_n = x_0 + nh, f(x,y) = 2xy, y_0 = 2,\ y_1 = 4$，利用此递推公式求出$y_2$与$y_3$的值。

（2）、若要使得此递推公式有尽可能高的局部截断误差精度，则a应取何值？

八、（10 分）对于线性方程组 $\begin{cases}2x_1+2x_2+2x_3=4\\2x_1+3x_2+3x_3=5\\2x_1+3x_2+4x_3=6\end{cases}$

（1）、使用LU 分解法求解方程组；

（2）、若求解线性方程组代入系数时出现误差，变为实际

求解线性方程组 $\begin{cases}2.002x_1+2.003x_2+2x_3=4\\2.001x_1+3x_2+3.002x_3=5\\\quad 2x_1+3.001x_2+4x_3=6\end{cases}$ ，已知解的相对误差有近似

估计 $\frac{\|\boldsymbol{\delta x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}\approx \mathrm{cond}_1(A)\frac{\|\boldsymbol{\delta A}\|_1}{\|\boldsymbol{A}\|_1}$，其中$\mathrm{cond}_1(A)$为原系数矩阵在 1 范数下的条件数，请估计此时解的相对误差$\frac{\|\boldsymbol{\delta x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}$。

九、（10 分）对于非线性方程 $f(x) = (e^x - 1)x^2(x - 1) = 0$ ，

（1）、证明当初值x_0在根$x^* = 1$ 附近时，迭代公式$x_{k+1} = \ln\left(\frac{e^{x_k} + x_k - 1}{x_k}\right)$所得数 列将收敛到$x^* = 1$；

（2）、此方程的牛顿迭代公式在根$x^* = 0$ 附近是否二阶收敛？若不是二阶收敛，试将牛顿迭代法进行改进使其在根$x^* = 0$ 附近二阶收敛。