

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称: 应用高等工程数学 课程类别 公共课 专业课 考核形式 开卷 闭卷

学生类别_____ 考试日期 2023-12-08 学生所在院系_____

学号_____ 姓名_____ 任课教师_____

一、选择题 (本题共 6 小题, 每题 3 分, 满分 18 分, 每小题四个选项中只有一个正确)

1. 设 T 为 n 维线性空间 V 上的线性变换。则下面哪个条件不是 T 可逆的充分必要条件?

- A. 存在 V 上的线性变换 S , 使得 $S \cdot T = T \cdot S = I$ (恒等变换)
- B. T 有 n 个线性无关的特征向量
- C. T 在 V 的一组基下的矩阵表示可逆
- D. T 的所有特征值之积不为 0

2. 设 A 为 n 阶方阵, 则下面哪个条件下 A 不一定可对角化?

- A. A 的特征多项式无重根
- B. A 的最小多项式无重根
- C. A 为实对称
- D. $A^3 = 0$

3. 设 $A = \begin{bmatrix} a & 5 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 2 & 0 & a \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 用 Gauss-Seidel 方法求解线性方程

组 $Ax = b$, a 取下面哪个值时收敛?

- A. $a = 5$
- B. $a = 0$
- C. $a = -1$

- D. $a = 1$
4. 求解初值问题 $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ 的方法
- $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$$
- 对于 $f(x, y) = \lambda y$, 以上方法的稳定性区域为 ($\lambda < 0$)
- A. $|1 + \lambda h + \lambda^2 h^2| < 1$
B. $\left|1 + \frac{\lambda h}{2} + \lambda^2 h^2\right| < 1$
C. $\left|1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right| < 1$
D. $\left|1 + \frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right| < 1$
5. 若 X_1, X_2, \dots, X_{n+1} 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的独立样本, 设 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 分别为样本均值和样本方差。
则以下结论不正确的是
- A. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
B. $\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$
C. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
D. $\frac{(X_1 - \bar{X})}{\sqrt{S^2}} \sim t(n-1)$
6. 设一批零件的加工误差服从均值为 0, 方差 σ^2 未知的正态分布。
从中抽取 n 个样品, 加工误差为 X_1, \dots, X_n 。设样本均值和样本方差分别为 \bar{X}, S^2 。则下面哪个统计量不是 σ^2 的无偏估计?
- A. S^2
B. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$
C. \bar{X}^2

D. X_1^2

二、 填空题（本题共 6 小题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 若给定 $f(0) = 0, f(0.5) = -0.25, f'(0.5) = -1.75, f(1) = 3$ ，求 $f(x)$ 的三次 Hermite 插值多项式_____。

2. 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ 的一个满秩分解为_____。

3. 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的 2-条件数为_____。

4. 求积公式 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{3}f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{2}{3}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的代数精度为_____。

5. $\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的一次最佳平方逼近多项式为_____。

6. 总体服从参数 λ 的指数分布，密度函数为 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x > 0)$ 。

设有容量为 n 的样本 X_1, X_2, \dots, X_n ，则参数 λ 的极大似然估计为_____。

三、 解答题（本题共 6 小题，满分 64 分）

1. (10 分) 已知 3 维线性空间 V 上的线性变换 T 在 V 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

设

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3 \end{cases}$$

a. 证明 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是 V 的一组基。

b. 求 T 在 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的矩阵表示。

2. (12分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a. 求 A 的 Jordan 标准型;

b. 计算矩阵函数 e^{At} 。

3. (10分) 已知数据 $(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, 3$ 如下表所示

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	1	1	2

试用二次多项式 $p(x) = ax^2 + bx + c$ 最小二乘拟合这些数据，并计算平方误差: $\sum_{i=0}^3 (p(x_i) - y_i)^2$.

4. (10分) 分别用二点 Gauss-Legendre 求积公式和 Gauss-Chebyshev 求积公式计算积分

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx$$

5. (10分) 考虑方程 $\sqrt{x} - \cos \frac{x}{2} = 0$.

a. 证明该方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有实根;

b. 分析迭代格式 $x_{n+1} = \left(\cos \frac{x_n}{2}\right)^2, n = 0, 1, 2, \dots$ 的收敛性, 其中 x_0 为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的任意一点。

6. (12分) 已知 23 级男生入学时的体能测试得分服从正态分布

$N(\mu_0, \sigma_0^2)$, 其中 $\mu_0 = 60, \sigma_0^2 = 225$ 。经过一学期的锻炼后, 抽取

100 名男生进行测验，得到样本均值 $\bar{X} = 64$ ，样本方差 $S^2 = 256$ 。依然假设得分服从正态分布。试问：

- 在显著性水平 0.05 下，男生的体测得分的均值有否增加？
- 在显著性水平 0.05 下，男生的体测得分的方差有否改变？

(附可能用到的上侧分位点)

表 1：正态分布上侧分位点 z_α

α	0.05	0.025
	1.6449	1.9600

表 2：t 分布上侧分位点 $t_\alpha(n)$

$n \backslash \alpha$	0.05	0.025
99	1.6604	1.9842
100	1.6602	1.9840

表 3： χ^2 分布上侧分位点 $\chi^2_\alpha(n)$

$n \backslash \alpha$	0.975	0.95	0.05	0.025
99	73.3611	77.0463	123.2252	128.4220
100	74.2219	77.9295	124.3421	129.5612