三、(8 分)求 $f(x)=4x^3+2x^2+x+1$ 在[-1, 1]上的二次最佳一致逼近多项式 $P_2(x)$。

四、(12 分) 利用 3 次 Legendre 正交多项式 $P_3(x)=(5x^3-3x)/2$ 构造三点 Gauss 型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2),$$

并问：

（1）所得求积公式的代数精度是多少？

（2）用所得求积公式计算 $\int_0^1 (x^4-2x^2+1)dx$ 。

五、(14 分)设方程组 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$,

（1）用 Gauss 消元法求方程组的解；

（2）给出求解方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式，并说明此二种迭代格式的收敛性。

六、(12 分) 设步长为 h, $f(x,y)=\lambda y(x)$, 隐式公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{3}[f(x_n,y_n)+2f(x_{n+1},y_{n+1})]$,

（1）已知 $y(0)=1$，求 $y(x)$在节点 $x_n=nh$ 处的数值解 y_n；

（2）若 $\lambda<0$，证明公式是无条件稳定的。

七、(12 分)方程 $(x-2)^2(x+3)=0$

（1）试证用牛顿法求方程在[1,3]内的根 $x^*=2$ 是线性收敛的，

（2）对根 $x^*=2$，写出处理重根的牛顿迭代公式，并讨论其收敛性。

八、(8 分) 设求解方程组的 Jacobi 迭代格式为 $X^{(k+1)}=BX^{(k)}+g \quad (k=0,1,2,\cdots)$

求证：若 $\|B\|_\infty<1$，则相应的 Gauss-Seidel 迭代收敛。