



计算方法

Ch02 插值方法

程勇

buctcourse@163.com

<http://www.buct.edu.cn>

Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology

Mar. 4, 2020

提纲

- ① Ch01 概论
- ② Ch02 插值方法
- ③ Ch03 数值积分
- ④ Ch04 方程求根的迭代法
- ⑤ Ch05 线性方程组的迭代法
- ⑥ Ch06 线性方程组的直接法
- ⑦ Ch07 常微分方程的差分法



本章提纲

问题的提出

拉格朗日 (Lagrange) 插值

Newton 插值公式

埃尔米特插值

分段插值

什么是插值？

在初等微积分中，我们用函数 $y = f(x)$ 来描述一个平面曲线，但在实际问题中，函数 $y = f(x)$ 往往是通过实验观测得到的一组数据来给出的，即在某个区间 $[a, b]$ 上给出一系列节点的函数值：

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

或者给出一张函数表：

x	x_0	x_1	x_2	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_n

Table: 函数表

如何通过这些对应的关系去找出函数 $f(x)$ 的一个近似表达式或求某个不在期间的给定点 x 的函数值呢？

例子：武汉新冠肺炎确诊人数计算

武汉市新冠肺炎二月份确诊人数随时间变化如下表：

时间 (t)	7	8	9	10	11	12
确诊人数	11618	13603	14982	16902	18454	19558

Table: 武汉新冠肺炎每天确诊人数

要想知道新冠肺炎确诊人数随时间变化的情况 $NCP = f(t)$, 或某一时刻 $t = 7$ 日中午确诊值该如何计算?

最简单实用的方法就是插值。简单地说，插值的目的就是根据给定的数据表，寻找一个解析形式的函数 $p(x)$ 近似代替 $f(x)$ ，根据 $p(x)$ 值计算来对 $f(x)$ 值进行估计。

基本概念

已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一组 $n+1$ 个不同点 $a \leq x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \leq b$ 上的函数值 $y_i = f(x_i)$,
($i = 0, 1, 2, \dots, n$), 寻找一个 $f(x)$ 的近似函数 $p(x)$, 且满足

$$p(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

称 $f(x)$ 为被插函数;

称函数 $p(x)$ 为插值函数 (公式);

若 $p(x)$ 为多项式函数, 称 $p(x)$ 为插值多项式;

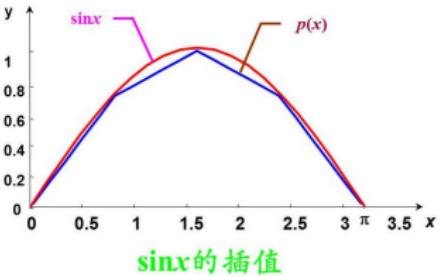
称数据表中给出的已知节点 x_i 为插值节点; 其对应的函数值 y_i 为样本点;

称待求函数值的节点为插值点;

称插值节点所界定的范围 $\Delta = [\min x_i, \max x_i]$ 为插值区间。

$\sin x$ 插值的例子

例如，对函数 $y = \sin x$ ，若给定 $[0, \pi]$ 的 5 个等分点，可构造插值函数如下：



对于插值函数 $p(x)$ 与被插函数 $f(x)$ 在节点处的函数值相等，但在节点外 $p(x)$ 与 $f(x)$ 可能会有偏离，因此 $p(x)$ 代替 $f(x)$ 必然存在误差。函数 $p(x)$ 的类型有各种不同的选择，但最常用的类型是代数多项式，因为代数多项式具有一些很好的性质，如它具有各阶导数，计算多项式比较方便等，本章讨论的就是代数插值多项式。

代数插值多项式的存在及唯一性

设函数 $y = f(x)$ 在区间上的插值多项式为

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

且满足

$$p_n(x_i) = y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

即多项式 $p_n(x)$ 的系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 满足方程组：

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ \cdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

代数插值多项式的存在及唯一性 (续)

上述方程组系数行列式为 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n (x_j - x_i)^{x_i \neq x_j} \neq 0$$

根据克莱姆 (Cramer) 法则, 上述线性方程组具有唯一解。

命题

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一组 $n+1$ 个不同点 $a \leq x_0, x_1, \dots, x_n \leq b$ 上的函数值, 并且 $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$)。则满足插值条件 $p(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) 的插值多项式 $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 存在且唯一。

拉格朗日 (Lagrange) 插值形式

虽然线性方程组推出的插值多项式存在且唯一，但通过解线性方程组求插值多项式却不是好方法，而需采用其他的方法。

现将插值多项式表示成如下形式：已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一组 $n+1$ 个不同点

$$a \leq x_0, x_1, \dots, x_n \leq b$$

上的函数值

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

构造满足插值条件 $L_n(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 的次数不超过 n 次的多项式

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(x) f(x_i)$$

其中 $\varphi_i(x) (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 是次数不超过 n 次的多项式。

两点拉格朗日插值

两点插值也称线性插值。设已知两个不同节点 x_0, x_1 上的函数值 (样本值)

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$$

构造满足插值条件 $L_1(x_i) = y_i(i = 0, 1)$ 的次数不超过一次多项式 $L_1(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1$ 。其中 $\varphi_i(x)(i = 0, 1)$ 是次数为 1 次的多项式。

实际上就是构造一次的多项式 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 并满足：

$$L_1(x_0) = \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 = y_0$$

$$L_1(x_1) = \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 = y_1$$

令 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 满足如下的条件：

	x_0	x_1
$\varphi_0(x)$	1	0
$\varphi_1(x)$	0	1

两点拉格朗日插值 (续)

由于 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 均为一次多项式，因此可求得：

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad \varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

因此有

$$L_1(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1$$

这就是两点 Lagrange 插值 (线性插值) 公式，用它来作为函数 $y = f(x)$ 的近似。

显然 $L_1(x)$ 是次数不超过一次的多项式，且满足：

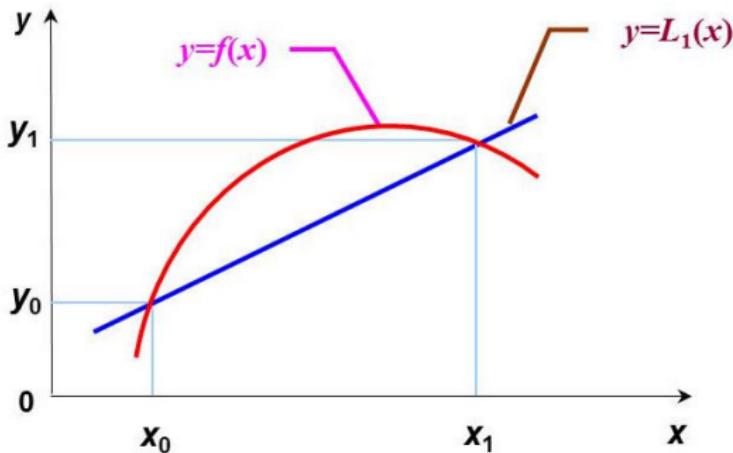
$$L_1(x_0) = \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 = 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 = y_0$$

$$L_1(x_1) = \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 = 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 = y_1$$

即 $L_1(x)$ 满足问题 1 中所要求的条件， $L_1(x)$ 即为所求。

两点拉格朗日插值 (续)

我们称 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 为 Lagrange 插值基函数。
实际上 $L_1(x)$ 就是这两个插值基函数的线性组合。



两点插值

两点拉格朗日插值例子

例 1 设 $y = f(x) = x^{1/2}$ 在 $x = 100, 121$ 处的函数值为 10, 11, 试以这两点建立 $y = x^{1/2}$ 的 Lagrange 一次插值多项式, 并由此计算 $f(115)$ 处的近似值。

解: 取 $x_0 = 100, x_1 = 121$, 则

$$y_0 = f(x_0) = 10, y_1 = f(x_1) = 11,$$

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 121}{100 - 121}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 100}{121 - 100}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 \\ &= \frac{x - 121}{100 - 121} \cdot 10 + \frac{x - 100}{121 - 100} \cdot 11 \\ &= \frac{x + 110}{21} \end{aligned}$$

两点拉格朗日插值例子 (续)

当 $x = 115$ 时,

$$\begin{aligned} L_1(115) &= \frac{115 - 121}{100 - 121} \cdot 10 + \frac{115 - 100}{121 - 100} \cdot 11 \\ &= 10.71428 \end{aligned}$$

而 $f(115) = \sqrt{115} = 10.723805$, $f(115) \approx L_1(115)$ 。该近似值有三位有效数字。

由上面的例子可见, 两点插值的精度很低。原因是我们在用线性函数来代替非线性函数, 不可能有很好的效果。为了进一步改进插值精度, 下面考察三点情况下的拉格朗日插值公式。

三点拉格朗日插值

问题 2 设已知三个不同节点 x_0, x_1, x_2 上的函数值 (样本值)

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$$

构造满足插值条件 $L_2(x_i) = y_i(i = 0, 1, 2)$ 的次数不超过 2 次多项式

$$L_2(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2$$

其中 $\varphi_i(x)(i = 0, 1, 2)$ 是次数为 2 次的多项式。实际上就是构造二次的多项式 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$, 满足:

$$L_2(x_0) = \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 + \varphi_2(x_0)y_2 = y_0$$

$$L_2(x_1) = \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 + \varphi_2(x_1)y_2 = y_1$$

$$L_2(x_2) = \varphi_0(x_2)y_0 + \varphi_1(x_2)y_1 + \varphi_2(x_2)y_2 = y_2$$

三点拉格朗日插值 (续)

令 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 满足如下的条件:

	x_0	x_1	x_2
$\varphi_0(x)$	1	0	0
$\varphi_1(x)$	0	1	0
$\varphi_2(x)$	0	0	1

显然可以使上面三式成立。由于 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 均为二次多项式，因此可求得：

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

三点拉格朗日插值 (续)

因此有: $L_2(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2$

这就是三点 Lagrange 插值公式, 用它来作为函数 $y = f(x)$ 的近似。显然 $L_2(x)$ 是次数不超过二次的多项式, 且满足:

$$\begin{aligned} L_2(x_0) &= \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 + \varphi_2(x_0)y_2 \\ &= 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x_1) &= \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 + \varphi_2(x_1)y_2 \\ &= 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = y_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x_2) &= \varphi_0(x_2)y_0 + \varphi_1(x_2)y_1 + \varphi_2(x_2)y_2 \\ &= 0 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = y_2 \end{aligned}$$

即 $L_2(x)$ 满足问题 2 中所要求的条件, $L_2(x)$ 即为所求。称 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 为 Lagrange 插值基函数。实际上 $L_2(x)$ 就是这三个插值基函数的线性组合。

三点拉格朗日插值例子

例 2 设 $y = f(x) = x^{1/2}$ 在 $x = 100, 121, 144$ 处的函数值为 10, 11, 12, 试以这三点建立 $y = x^{1/2}$ 的二次 Lagrange 插值多项式，并由此计算 $f(115)$ 处的近似值。

解：取 $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$, 则

$$y_0 = f(x_0) = 10, y_1 = f(x_1) = 11, y_2 = f(x_2) = 12.$$

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 121)(x - 144)}{(100 - 121)(100 - 144)}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 100)(x - 144)}{(121 - 100)(121 - 144)}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 100)(x - 121)}{(144 - 100)(144 - 121)}$$

三点拉格朗日插值例子 (续)

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2 \\ &= \frac{(x - 121)(x - 144)}{(100 - 121)(100 - 144)} \cdot 10 \\ &\quad + \frac{(x - 100)(x - 144)}{(121 - 100)(121 - 144)} \cdot 11 \\ &\quad + \frac{(x - 100)(x - 121)}{(144 - 100)(144 - 121)} \cdot 12 \end{aligned}$$

当 $x = 115$ 时,

$$L_2(115) = \varphi_0(115) \cdot 10 + \varphi_1(115) \cdot 11 + \varphi_2(115) \cdot 12 = 10.7228$$

而 $f(115) = \sqrt{115} = 10.723805$, $f(115) \approx L_2(115)$ 。可见近似值具有四位有效数字。



多点拉格朗日插值

我们可以用同样的方法建立多点的插值公式。

问题 3 设已知 $n+1$ 个不同节点 $x_0, x_1, x_2 \dots, x_n$ 上的函数值 $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$ 构造满足插值条件 $L_n(x_i) = y_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 的次数不超过 n 次多项式

$$L_n(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \dots + \varphi_n(x)y_n$$

其中 $\varphi_i(x) (i = 0, 1, \dots, n)$ 是次数为 n 的多项式。

同前述方法，令 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 满足如下的条件：

	x_0	x_1	\cdots	x_n
$\varphi_0(x)$	1	0	\cdots	0
$\varphi_1(x)$	0	1	\cdots	0
\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots
$\varphi_n(x)$	0	0	\cdots	1

多点拉格朗日插值 (续)

可求得：

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \\ &= \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)\end{aligned}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(x) y_i = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) y_i$$

这就是 $n+1$ 点 Lagrange 插值 (n 次插值) 公式，用它来作为函数 $y = f(x)$ 的近似。 $L_n(x)$ 满足问题 3 中所要求的条件。我们称 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 为 Lagrange 插值基函数。 $L_n(x)$ 就是这 $n+1$ 个插值基函数的线性组合。

拉格朗日插值法分析

- ① 插值点要求等距；
- ② 插值基函数形式简单，但计算比较复杂；
- ③ 当有新的插值点加入时，基函数要重新计算；
- ④ 高次插值的精度不一定高；

Newton 插值公式思想

我们知道 Lagrange 插值多项式的插值基函数为：

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

上述基函数形式上比较复杂、计算量大，并且重复计算很多，由线性代数可知任何一个 n 次多项式都可以表示成：

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

共 $n+1$ 个多项式的线性组合。那么，是否可以将这 $n+1$ 个多项式作为插值基函数呢？答案是肯定的。多项式组

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

线性无关，因此可以作为插值基函数。

Newton 插值公式

问题 4 设已知 $n+1$ 个不同节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的函数值

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$$

构造满足插值条件 $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 的次数不超过 n 次多项式

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ &+ a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

为了便于计算系数值 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, 我们引入差商的概念。

差商

设 $f(x)$ 在不同节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的函数值为：

$$f(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

称 $f(x_i)$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i 的零阶差商。

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, n, i \neq j)$$

为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j 的一阶差商。

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i} \quad (i, j, k = 0, 1, 2, \dots, n, i \neq j \neq k)$$

为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j, x_k 的二阶差商。

差商 (续)

依此类推, $f(x)$ 关于节点 $x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ 的 k 阶差商为:

$$f(x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = \frac{f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) - f(x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}})}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

显然有:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ f(x_0, x_1, x_2) &= \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} \\ f(x_0, x_1, \dots, x_k) &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k) - f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

差商的性质

差商具有如下性质：

① 对称性。任意调整节点的次序，差商的值不变，如：

$$f(x_0, x_1) = f(x_1, x_0)$$

$$f(x_i, x_j, x_k) = f(x_j, x_k, x_i) = f(x_i, x_k, x_j) = \dots$$

② $f(x)$ 的 k 阶差商 $f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ 可以由函数值 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$ 的线性组合来表示。即：

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k)$$

$$= \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_k)}$$

差商的计算方法 (表格法)

使用表格法计算差商:

节点	样本值	一阶差商	二阶差商	...	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$...	
.	.	.	.		
.	
.	.	.	.		
x_n	$f(x_n)$	$f(x_{n-1}, x_n)$	$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$...	$f(x_0, x_1, \dots, x_n)$

差商计算例子

例：已知节点 0, 2, 3, 5 对应的函数值为 1, 3, 2, 5，试使用表格法计算差商值。

节点	样本值	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	1			
2	3	1		
3	2	-1	− $\frac{2}{3}$	
5	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{10}$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{3 - 1}{2 - 0} = 1$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{5 - 2}{5 - 3} = \frac{3}{2}$$

.....

差商形式的 Newton 插值公式

设已知 $n+1$ 个不同节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的函数值

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$$

构造满足插值条件 $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 的次数不超过 n 次多项式

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\quad + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

由插值条件可得：

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0) \\ a_1 &= f(x_0, x_1) \\ &\dots \\ a_n &= f(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

差商形式的 Newton 插值公式 (续)

这样可得到差商形式的 Newton 插值公式如下：
一次插值多项式：

$$p_1(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0)$$

二次插值多项式：

$$p_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$

.....

n 次插值多项式：

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Newton 插值多项式例子

例：已知节点 0, 2, 3, 5 对应的函数值为 1, 3, 2, 5，构造三次 Newton 插值多项式，当 $x = 2.5$ 时，计算 Newton 多项式插值结果。

解：由前面计算的差商值，我们很容易写出三次 Newton 插值多项式如下：

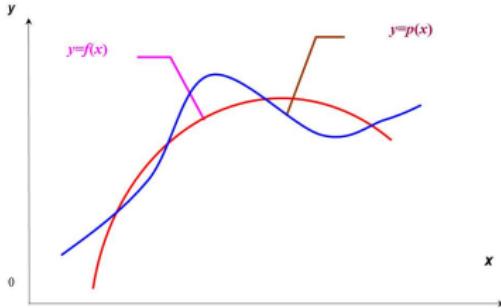
$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) \\
 &\quad + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &= 1 + 1 \cdot (x - 0) - \frac{2}{3}(x - 0)(x - 2) + \frac{3}{10}(x - 0)(x - 2)(x - 3) \\
 &= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1
 \end{aligned}$$

当 $x = 2.5$ 时，Newton 多项式插值结果为：

$$p_3(2.5) = \frac{3}{10}(2.5)^3 - \frac{13}{6}(2.5)^2 + \frac{62}{15}(2.5) + 1 = 2.479167$$

埃尔米特插值

Lagrange 插值、Newton 插值虽然构造比较简单，但仅要求他们的函数值与被插函数的函数值在节点上相同，但没有考虑到导数值。



Hermite 插值 (切触插值) 是要构造一个插值函数，不但在给定的节点上取已知函数值，而且取已知导数值，使插值函数与被插函数的密合程度更好。

待定系数法例子

待定系数法是构造多项式最基本的方法。这种方法原理简明并且原则上总是可行的，只是处理过程往往比较繁琐。

例：求作二次式 $\varphi_0(x)$ ，使分别满足插值条件：

$$\varphi_0(0) = 1, \varphi_0(1) = 0, \varphi'_0(0) = 0.$$

解：由于 $\varphi_0(1) = 0$ ，可知它有一个零点 $x_0 = 1$ ，故二次式 $\varphi_0(x)$ 具有形式：

$$\varphi_0(x) = (cx + d)(x - 1)$$

因此： $\varphi'_0(x) = c(x - 1) + (cx + d)$

由条件 $\varphi_0(0) = 1, \varphi'_0(0) = 0$ 可得：

$$\varphi_0(0) = (c \cdot 0 + d)(0 - 1) = 1$$

$$\varphi'_0(0) = c(0 - 1) + (c \cdot 0 + d) = 0$$

因此得到： $c = d = -1$ 。从而有： $\varphi_0(x) = -x^2 + 1$

待定系数法例子

例：求作三次式 $\varphi_0(x)$, 使分别满足插值条件：

$$\varphi_0(0) = 1, \varphi_0(1) = 0, \varphi'_0(0) = 0, \varphi'_0(1) = 0$$

解：由于 $\varphi_0(1) = \varphi'_0(1) = 0$, 可知它有一个二阶零点 $x_0 = 1$, 故三次式 $\varphi_0(x)$ 具有形式

$$\varphi_0(x) = (ax + b)(x - 1)^2$$

$$\varphi'_0(x) = a(x - 1)^2 + 2(ax + b)(x - 1)$$

再由 $\varphi_0(0) = 1, \varphi'_0(0) = 0$

$$\varphi_0(0) = (a \cdot 0 + b)(0 - 1)^2 = 1$$

$$\varphi'_0(0) = a(0 - 1)^2 + 2(a \cdot 0 + b)(0 - 1) = 0$$

求解得到： $a = 2, b = 1$ 。因此： $\varphi_0(x) = (2x + 1)(x - 1)^2$ 。

Hermite 插值的基函数方法

基函数方法是将所有的插值多项式表达为某些简单函数—基函数的线性组合。这些基函数满足某些特定的插值条件，比较容易构造。基函数方法主要针对如下一类问题：

问题：给定 $[a, b]$ 区间上 $n+1$ 个节点和相应的函数值和导数值

x	x_0	x_1	x_2	\cdots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\cdots	y_n
y'	y'_0	y'_1	y'_2	\cdots	y'_n

构造满足条件 $p_{2n+1}(x_i) = y_i, p'_{2n+1}(x_i) = y'_i$ 的次数不超过 $2n+1$ 次的插值多项式 $p_{2n+1}(x)$ 。

两点三次 Hermite 插值

设 $f(x)$ 在节点 x_0, x_1 处的函数值为 y_0, y_1 , 在节点 x_0, x_1 处的一阶导数值为 y'_0, y'_1 , 构造次数不超过三次的多项式 $p_3(x)$ 并满足插值条件:

$$p_3(x_0) = y_0, p_3(x_1) = y_1$$

$$p'_3(x_0) = y'_0, p'_3(x_1) = y'_1$$

根据 Lagrange 方法, 它应该具有如下的形式:

$$p_3(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y'_0\psi_0(x) + y'_1\psi_1(x)$$

其中 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ 为待定的三次多项式。

两点三次 Hermite 插值 (续)

实际上是在每个节点上构造两个插值基函数, x_0 点对应 $\varphi_0(x), \psi_0(x)$, x_1 点对应 $\varphi_1(x), \psi_1(x)$, 其取值情况如下:

	函数值		导数值	
	x_0	x_1	x_0	x_1
$\varphi_0(x)$	1	0	0	0
$\varphi_1(x)$	0	1	0	0
$\psi_0(x)$	0	0	1	0
$\psi_1(x)$	0	0	0	1

两点三次 Hermite 插值 (续)

这样可由待定系数法或 Lagrange 中构造基函数的方法直接解得：

$$\varphi_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$\psi_0(x) = (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\psi_1(x) = (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

两点三次 Hermite 插值 (续)

即三次 Hermite 插值多项式为：

$$p_3(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y'_0\psi_0(x) + y'_1\psi_1(x)$$

其中：

$$\varphi_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$\psi_0(x) = (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$\psi_1(x) = (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

Hermite 插值例子

例题：已知 $f(x)$ 在节点 1, 2 处的函数值为 $f(1) = 2, f(2) = 3$,
 $f(x)$ 在节点 1, 2 处的导数值为 $f'(1) = 0, f'(2) = -1$, 求 $f(x)$ 的两点三次插值多项式及 $f(x)$ 在 $x = 1.5, 1.7$ 处的函数值。

解：

$$x_0 = 1, x_1 = 2, y_0 = 2, y_1 = 3, y'_0 = 0, y'_1 = -1$$

$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= y_0 \varphi_0(x) + y_1 \varphi_1(x) + y'_0 \psi_0(x) + y'_1 \psi_1(x) \\
 &= y_0 \left(1 + 2 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2 \\
 &\quad + y_1 \left(1 + 2 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2 \\
 &\quad + y'_0 (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2 + y'_1 (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2
 \end{aligned}$$

Hermite 插值例子 (续)

分别代入并化简，可求得 Hermite 插值公式为：

$$\begin{aligned}
 p_3(x) &= 2(1 + 2(x - 1))(x - 2)^2 + 3(1 - 2(x - 2))(x - 1)^2 \\
 &\quad - (x - 2)(x - 1)^2 \\
 &= -3x^3 + 13x^2 - 17x + 9
 \end{aligned}$$

$$f(1.5) \approx p_3(1.5) = 2.625$$

$$f(1.7) \approx p_3(1.7) = 2.931$$

对于高次的 Hermite 插值，可采用类似的方法来进行构造。作为多项式插值，三次已是较高的次数，次数再高就有可能发生 Runge 现象，下面采用被称为分段插值的办法来解决多条件插值问题。

分段插值概念

分段插值，就是将被插值的函数逐段进行多项式化，选取分段多项式作为插值多项式。

分段插值方法的处理过程分两步，先将所考察区间 $[a, b]$ 作划分

$$\Delta : a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

并在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造插值多项式；然后将每个区间上的插值多项式拼接到一起，形成区间 $[a, b]$ 上的插值多项式。这样构造的插值多项式称为分段插值多项式。

如果多项式 $p_k(x)$ 在划分 Δ 的每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上都是次数不超过 k 次的多项式，则称 $p_k(x)$ 为具有划分 Δ 的分段 k 次插值多项式。

线性分段插值

问题：给定 $[a, b]$ 区间上 $n + 1$ 个节点
 $(a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b)$ 和相应的函数值

x	x_0	x_1	x_2	\cdots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\cdots	y_n

构造满足上述条件的次数不超过一次的分段插值多项式
 $p_1(x)$, 满足插值条件: $p_1(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 。
 解: 构造多项式 $p_1(x) = y_i \varphi_0(x) + y_{i+1} \varphi_1(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 。
 其中 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 为一次多项式且满足插值条件:

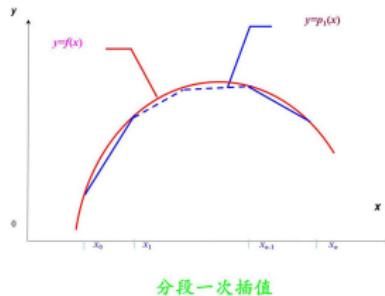
$$p_1(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

线性分段插值 (续)

可得插值基函数:

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$



分段插值的特点是算法简单, 计算量小, 但精度不高, 插值曲线也不光滑。

分段线性插值例子

例题：已知 $y = x^2$ 在 $x = 1, 2, 3$ 点的值为 1, 4, 9。构造分段线性插值多项式，并求在 $x = 1.2$ 和 2.5 处的近似值。

解：令 $p_1(x) = y_i\varphi_0(x) + y_{i+1}\varphi_1(x)$ ，得插值基函数：

$$\varphi_0(x) = \frac{x-2}{1-2}, \quad \varphi_1(x) = \frac{x-1}{2-1}, \quad x \in [1, 2]$$

$$\varphi_0(x) = \frac{x-3}{2-3}, \quad \varphi_1(x) = \frac{x-2}{3-2}, \quad x \in [2, 3]$$

当 $x \in [1, 2]$ 时， $p_1(x) = 1 \cdot \frac{x-2}{1-2} + 4 \cdot \frac{x-1}{2-1} = 3x - 2$

当 $x \in [2, 3]$ 时， $p_1(x) = 4 \cdot \frac{x-3}{2-3} + 9 \cdot \frac{x-2}{3-2} = 5x - 6$

所以

$$p_1(1.2) = 3 \cdot 1.2 - 2 = 1.6, \quad \text{实际上 } 1.2^2 = 1.44$$

$$p_1(2.5) = 5 \cdot 2.5 - 6 = 6.5, \quad \text{实际上 } 2.5^2 = 6.25$$

分段三次 Hermite 插值

下面介绍分段三次 Hermite 插值以进一步改进逼近效果。

问题：给定 $[a, b]$ 区间上 $n + 1$ 个节点

$(a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b)$ 和相应的函数值及导数值，如下表所示。

x	x_0	x_1	x_2	\cdots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\cdots	y_n
y'	y'_0	y'_1	y'_2	\cdots	y'_n

试构造次数不超过 3 次的分段插值多项式 $p_3(x)$ ，满足插值条件：

$$p_3(x_i) = y_i \quad p'_3(x_i) = y'_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

我们构造多项式

$$p_3(x) = y_i \varphi_0(x) + y_{i+1} \varphi_1(x) + y'_i \psi_0(x) + y'_{i+1} \psi_1(x)$$

分段三次 Hermite 插值 (续)

可得插值基函数:

$$\varphi_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\psi_0(x) = (x - x_i) \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\psi_1(x) = (x - x_{i+1}) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

本章小结

本章主要介绍了数值计算中常用的插值方法，主要包括 Lagrange 插值、Newton 插值公式、Hermite 插值和分段插值，并使用例子对各种插值进行了详细分析。

- 问题的提出；
- 拉格朗日 (Lagrange) 插值；
- Newton 插值公式；
- 埃尔米特插值；
- 分段插值；

练习题

- ① 编程实现拉格朗日插值算法。
- ② 编程实现牛顿插值算法。

谢谢!

AUTHOR: Cheng Yong

ADDRESS: Dept. of Computer

Beijing University of Chemical Technology
Beijing, 100029, China

EMAIL: buctcourse@163.com