

# 华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称: 应用高等工程数学 课程类别  公共课  专业课 考核形式  开卷  闭卷

学生类别\_\_\_\_\_ 考试日期 2021-12-22 学生所在院系\_\_\_\_\_

学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 任课教师\_\_\_\_\_

## 一、填空 (每小题 3 分, 共 24 分)

1 、  $\mathbb{R}^4$  中的两个子空间  $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 = x_2 = 0\}$  ,  $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_3 = x_4\}$  , 则  $W_1$  的维数为 1 ,  $W_2$  的维数为 2 ,  $W_1 \cap W_2$  的维数为 1 。

2 、 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  , 则  $A^5 - 2A^4 - 3A^3 + A^2 - A - 4I = \underline{\hspace{2cm}}$  。

3 、 方阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  的最小多项式为  $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$  。

4、在计算机上求解方程 $x^2 + (10^{15} + 1)x + 10^{15} = 0$ 时，考虑以下两种算法：(A)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{c}{a \cdot x_1}; \quad (\text{B}) \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_1 = \frac{c}{a \cdot x_2}, \quad \text{其 中}$$

$a = 1, b = 10^{15} + 1, c = 10^{15}$ , 则两种算法中更好的算法是\_\_\_\_\_。

5、对于区间 $[0, 1]$ 上带权函数 $\rho = 1$ 的两点 Gauss 型求积公式

$$I = \int_0^1 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

求积节点 $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6、对于初值问题  $\begin{cases} y'(x) = -10y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ , 考虑递推公式  $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ , 步长取 $h = 0.2$ 时算法是否收敛\_\_\_\_\_。

7、对线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - ax_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \\ -2x_3 = 9 \end{cases}$$

使用 Jacobi 迭代法求解，当  $a = 2$  时是否收敛\_\_\_\_，当  $a = -5$  时是否收敛\_\_\_\_，当  $a = 7$  时是否收敛\_\_\_\_\_。

8、使用迭代公式  $x_{k+1} = x_k - 2 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  求解方程  $f(x) = (x - 1)^2 \sin(\pi x) = 0$  在  $x = 1$  处的根时，收敛阶数为\_\_\_\_\_。

二、(8分) 已知  $R^3$  中的两个基:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (1)、求  $B_1$  到  $B_2$  的基变换矩阵;  
(2)、求在  $B_1, B_2$  下有相同坐标的所有向量。

三、(10分) 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ , 求可逆矩阵  $P$  和 Jordan 矩阵  $J$ , 使  $P^{-1}AP = J$ 。

四、(10 分)

- (1)、求二次多项式 $f(x)$ 使得 $f(0) = 1, f(1) = -1, f(2) = -1$ 。
- (2)、试说明存在无穷多个三次多项式 $g(x)$ 使得 $g(0) = 1, g(1) = -1, g(2) = -1$ 。
- (3)、求三次多项式 $g(x)$ 使得 $g(0) = 1, g(1) = -1, g(2) = -1, g'(0) = 1$ 。

五、(8分) 求出不超过二次的多项式 $P_2(x)$ 使 $\int_{-1}^1 (x^3 - P_2(x))^2 dx$  的值达到最小(即 $P_2(x)$ 为 $x^3$ 在(-1,1)上的二次最佳平方逼近), 并求出此最小值。

六、(10分)

(1)、使用梯形公式计算积分 $\int_0^1 x^2 e^x dx$ , 并利用[a,b]区间上梯形公式的误差公式 $R[f] = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$ 估计截断误差绝对值的一个具体上界 (结果中若含有e, 可以保留不需算出);

(2)、若使用复化梯形公式计算积分 $\int_0^1 x^2 e^x dx$ , 要求截断误差绝对值不超过 $\frac{7e}{3} * 10^{-4}$ , 需要取多少个节点?

七、(10分) 对于初值问题  $\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ , 考虑使用递推公式  
 $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} + h[af(x_n, y_n)]$  求解。

(1)、若  $a = 1, h = 0.5, x_0 = 0, x_n = x_0 + nh, f(x, y) = 2xy, y_0 = 2, y_1 = 4$ , 利用此递推公式求出  $y_2$  与  $y_3$  的值。

(2)、若要使得此递推公式有尽可能高的局部截断误差精度, 则  $a$  应取何值?

八、(10分) 对于线性方程组  $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

(1)、使用LU 分解法求解方程组;

(2)、若求解线性方程组代入系数时出现误差, 变为实际

求解线性方程组  $\begin{cases} 2.002x_1 + 2.003x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2.001x_1 + 3x_2 + 3.002x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3.001x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$ , 已知解的相对误差有近似

估计  $\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} \approx \text{cond}_1(A) \frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1}$ , 其中  $\text{cond}_1(A)$  为原系数矩阵在 1 范数下的条件数, 请估计此时解的相对误差  $\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1}$ 。

九、(10分) 对于非线性方程  $f(x) = (e^x - 1)x^2(x - 1) = 0$ ,

(1)、证明当初值  $x_0$  在根  $x^* = 1$  附近时, 迭代公式  $x_{k+1} = \ln(\frac{e^{x_k} + x_k - 1}{x_k})$  所得数列将收敛到  $x^* = 1$ ;

(2)、此方程的牛顿迭代公式在根  $x^* = 0$  附近是否二阶收敛? 若不是二阶收敛, 试将牛顿迭代法进行改进使其在根  $x^* = 0$  附近二阶收敛。