矩阵论习题

1.在R^4中，求向量x在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$下的坐标。设

$\alpha_1=[1\quad 1\quad 1\quad 1]^T$，$\alpha_2=[1\quad 1\quad -1\quad -1]^T$，$\alpha_3=[1\quad -1\quad 1\quad -1]^T$，

$\alpha_4=[1\quad -1\quad -1\quad 1]^T$；$x=[1\quad 2\quad 1\quad 1]^T$.

2.已知R^3中的两个基：

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}，B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(1).求B_1到B_2的基变换矩阵；

(2).求在B_1，B_2下有相同坐标的所有向量。

3.设R^4中的向量$x_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$x_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$x_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$分别张成子空间$w_1=span\{x_1,x_2\}$和$w_2=span\{x_3,x_4\}$。求$w_1+w_2$及$w_1\cap w_2$的基和维数。

4.设V_1和V_2分别是齐次方程组$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$和$x_1=x_2=\cdots=x_n$的解空间，证明：$R^n=V_1\oplus V_2$。

5. 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是 R^4 的一个基，$V_1=span\{2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\}$，$V_2=span\{\alpha_3-\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4\}$，证明：$R^4=V_1\oplus V_2$.

6. 设T_1是V^n到V^m的线性变换，T_2是V^m到V^r的线性变换，定义V^n到V^r的变换$T_2\bullet T_1$为

$$(T_2\bullet T_1)\alpha=T_2(T_1\alpha),\forall\alpha\in V^n。$$

证明，$T_2\bullet T_1$是线性变换。

7.已知R^3的线性变换T在基$B_1=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$下的矩阵是$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，

求T在基$B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$下的矩阵。

8.V的变换T称为可逆的，如果存在V的变换S，使$T\bullet S=S\bullet T=I$。这时S称为T的逆变换，记为T^{-1}，证明

（1）若线性变换T是可逆的，则T^{-1}也是线性变换；

（2）T的特征值一定不为零；

（3）若λ是T的特征值，则$\dfrac{1}{\lambda}$是T^{-1}的特征值。

又若T在基B下的矩阵是A，那么T^{-1}在B下的矩阵是什么？

9.设T是复数域上线性空间V的线性变换，已知V的基B和T在B下的矩阵A如下，求T的特征值和特征向量：

（1）$B=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$，$A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&2&2\end{pmatrix}$；

（2）$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$，$A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$.

10.求下列方阵的最小多项式：

$$\begin{pmatrix}3&1&\\&3&1\\&&3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}3&1&&\\-4&-1&&\\&&2&1\\&&-1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}3&1&1&1\\-4&-1&-1&1\\&&2&1\\&&-1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2&2&&\\1&3&&\\&&4&1\\&&&4\end{pmatrix}.$$

11.满足下述条件的方阵A是否可对角化？

（1）A是幂零矩阵；

（2）$A^k = I(k \geq 2)$；

（3）$A^2 + A = 2I$.

12.已知$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$g(A) = A^8 - 9A^6 + A^4 - 3A^3 + 4A^2 + I$.

13. 下述的$f(\lambda)$，$m(\lambda)$分别表示矩阵A的特征多项式和最小多项式，确定A的可能的$Jordan$标准形：

(1). $f(\lambda) = (\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$，$m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$

(2). $f(\lambda) = (\lambda-3)^3(\lambda+2)^3$，$m(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda+2)$

14. 求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为$Jordan$矩阵，其中：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}。$$

15. 设V^4是由函数e^x，xe^x，x^2e^x，e^{2x}张成的线性空间，求V^4的线性变换$D = \frac{d}{dx}$的$Jordan$标准形。

16. 设 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$f(t)=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ e^t-1\end{pmatrix}$. 求微分方程组 $x'(t)=Ax(t)+f(t)$ 满足初始条件 $x(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ 的解.

17. 求下列矩阵的满秩分解

（1）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2i & i & 1\end{pmatrix}$.

18. 求下列矩阵的 QR 分解

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

19. 求下列矩阵的奇异值分解

（1）$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

统计量与抽样分布

1. 若总体X服从泊松分布$\pi(\lambda)$，X_i(i=1,2,…,n)为来自总体X的样本，试求：

(1). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$的联合分布的概率密度函数；

(2). $E(\overline{X}), D(\overline{X}), E(\mathrm{S}^2), E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2)$.

2. 若$(3,2,3,4,2,3,5,7,9,3)^T$为来自总体X的样本，试求经验分布函数$F_{10}(\mathrm{x})$.

3. 若连续随机变量X的密度函数$p(x)$是一个偶函数，$F(x)$为其（累积）分布函数，求证对于任意$a>0$，有

(1). $F(-a)=1-F(a)=0.5-\int_0^a p(x)\,dx$;

(2). $P(|X|<a)=2F(a)-1$;

(3). $P(|X|>a)=2[1-F(a)]$.

由正态总体$N(100,4)$抽取两组独立样本$X_1, X_2, \ldots, X_{10}$和$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{40}$，样本均值分别为$\overline{X}$和$\overline{Y}$，

(4) 试求$P(|\overline{X}-\overline{Y}|>0.2)$

4. 若X_1, X_2为来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的独立样本，试求$(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2})^2$的分布.

5. 若$X_1,X_2,\dots,X_{n+1}$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的独立样本，设$\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$和${S_n}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，求常数 c 使 c$\frac{X_{n+1}-\overline{X_n}}{S_n}$服从 t 分布.

参数估计

1. 设总体X服从几何分布 $P(X=k)=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\dots$

而$(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$为总体的样本，试求p的矩估计和最大似然估计.

2. 设总体的分布密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中$\theta>-1$，$(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$为其样本，求θ的矩估计和最大似然估计.

当样本值为$(0.1, 0.2, 0.9, 0.8, 0.7, 0.7)^T$时，求$\theta$的估计值.

3. 设总体X服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，而$(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$为其样本，说明$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2$是$\sigma^2$的有效估计，而$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$不是$\sigma^2$的有效估计.

4. 设$(X_1,X_2,\dots,X_n)^T$为总体X的样本，常数$a_i>0$, (i=1,2,…,n)且$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.

(1). 说明$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$是$E(X)$的无偏估计.

(2). 说明在所有$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$中，$\overline{X}$是方差最小的$E(X)$无偏估计.

5. 对铅的比重进行 16 次测量，得到 16 个测量值的平均值为 2.705，而样本方差为0.029^2，假定测量结果X服从正态分布，试求铅的平均比重的置信度为 95%的置信区间.

假设检验

1. 测定溶液中某种物质的水平，假设其服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，它的 10 个测定值给出$\bar{x}=0.452\%$，$S^2=0.037\%$，试在水平$\alpha=0.05$下检验假设：

(1)．$H_0:\mu\geq 0.5\% \iff H_1:\mu<0.5\%$；

(2)．$H_0:\sigma\geq 0.04\% \iff H_1:\sigma<0.04\%$．

2. 9 名运动员在初进学校时接受体育训练的检测，经过一个星期的训练后再进行检测，检测结果记分如下：

入学初X: 76,71,57,49,70,69,26,65,59;

训练后Y: 81,85,52,52,70,63,33,83,62;

假定分数服从正态分布，请在显著性水平 0.05 下判断判断运动员在训练后是否有进步？

3. 如果一批产品的废品率不超过 0.02，这批产品即可被接收。现在随机抽取 480 件产品检查后发现 12 件废品，请问在$\alpha = 0.05$水平下这批废品是否可以被接受？

4. 某种配偶的后代按体格的属性分为三类，各类的数目是：10, 53, 46. 按照某种遗传模型其频率比应为 $p^2 : 2p(1-p) : (1-p)^2$，求问在 $\alpha = 0.05$ 水平下数据与模型是否相符？

5. 从自动精密机床产品传递带中取出 200 个零件，以 $1\mu m$以内的测量值检验零件尺寸，把测量与额定尺寸按每隔 $5\mu m$进行分组，这种偏差落在各组内的频数n_i如下表，试问尺寸偏差是否服从正态分布($\alpha = 0.05$)?

组号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
组限	-20 ~ -15	-15 ~ -10	-10 ~ -5	-5 ~ 0	0 ~ 5	5 ~ 10	10 ~ 15	15 ~ 20	20 ~ 25	25 ~ 30
n_i	7	11	15	24	49	41	26	17	7	3

插值多项式

4. 已知$f(x)=5x^2(3\mathrm{x}-2)(2\mathrm{x}+1)$，设$x_i$(i=0,1,2,3,4)为互异节点，$l_i(x)$为对应的 4 次 Lagrange 插值基函数，分别求$\sum_{i=0}^{4} l_i(x)$，$\sum_{i=0}^{4} f(x_i)l_i(x)$，$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$.

5. 给定$f(x)$在如下节点处的值，试计算$f(x)$的 3 次 Lagrange 和 Newton 插值多项式。

x	1	3/2	0	2
$f(x)$	3	13/4	3	5/3

6. 若$p(x)$是$f(x)=e^{x-2}$在节点 0，0.1，0.2, … , 0.9, 1 处的 10 次插值多项式，试估计该插值多项式在[0,1]上的插值误差。

7. 若$h(x)$是$f(x)=e^{x-2}$在节点 0，0.1，0.2, … , 0.9, 1 处的**分段线性**插值多项式，试估计该插值多项式在[0,1]上的插值误差。

8. 若给定$f(0)=0, f(1)=1, f(0.5)=1, f^{'}(0.5)=2$，求$f(x)$的 3 次 Hermite 插值多项式。若又知道$f^{'(1)}=-3$，求$f(x)$的 4 次 Hermite 插值多项式。

数值逼近

1. 求$f(x)=x^2+x\cos x$在$[0,\pi]$上的二次最佳平方逼近多项式。
2. 证明: 在所有首一的n次多项式中, 首一的n次 Legendre 多项式在$[-1,1]$上与零的平方误差最小。
3. 已知数据

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	0	1	2	1	0

试用二次多项式 $p(x)=ax^2+\mathrm{b}x+c$ 拟合这些数据。

4. 已知数据

xi	1	2	3	4
yi	2	1	0	1

求形如 $y=ax+b\sin^2\frac{\pi x}{6}$ 的拟合曲线。

5. 已知变量 x,y 的一组数据对点如下

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

试求关于以上数据的形如 $y=ae^{bx}$ 的拟合曲线，并估计 $x=1.35$ 处的函数值。

数值求积

1. 给定 $y=f(x)$ 的一组值

x_i	1.0	1.8	2.6
$f(x_i)$	1	-3	2

用 Simpson 公式计算 $\int_{1.0}^{2.6} f(x)dx$

2. 已知 $y=f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 的一组值

x_i	1.0	1.6	2.2
$f(x_i)$	0.85	0.59	0.44

分别用梯形公式和 Simpson 公式计算 $\int_{1.0}^{2.2}\sin\frac{1}{x}dx$，并估计误差.

3. 给定 $y=f(x)$ 的一组值

x_i	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x_i)$	1	2	0	-1	-3	-1	1	3	2

分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算 $\int_{1.0}^{2.6} f(x)dx$.

4. 确定常数 A_i，使求积公式

$$\int_0^2 f(x)dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(1) + A_3 f(2)$$

的代数精度尽可能高，并求最高代数精度。该求积公式是否为 Gauss 型求积公式？

5. 分别使用三点 Gauss-Legendre 求积公式和三点 Gauss-Chebyshev 求积公式计算

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{6x}{\sqrt{x(1-3x)}} dx$$

方程求解

1. 用改进的欧拉法（即预估-校正方法）求初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y^2, \qquad x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的解函数 $y(x)$ 在 $x = 0.2$ 的近似值（取步长 $h = 0.1$）

2. 对于求解初值问题 $\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ 的方法

   1) 说明方法 $y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)$ 的整体精度是几阶。

   2) 讨论方法 $y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{h}{4} f(x_n, y_n)\right)$
      对于 $f(x,y) = \lambda y$ 时的稳定性。若 $\lambda < 0$，求出步长 h 的区间使算法绝对稳定。

3. 设方程组

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{gathered}$$

   1) 若系数矩阵为 A，求 $\|A\|_1$ 和 $\mathrm{cond}_1(A)$；
   2) 若求解线性方程组代入时出现误差，变为实际求解线性方程组

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1.001 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0.998 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{gathered}$$

      请估计此时解的相对误差 $\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1}$。
   3) 分别写出 Jacobi 迭代格式及 Gauss-Seidel 迭代格式；
   4) 证明 Jacobi 迭代格式是收敛的

4. 设方程 $x = e^{-x}$.

1) 分析迭代格式 $x_0 = 0.5,\ x_{n+1} = e^{-x_n}$， $n = 0,1,2,\cdots\cdots$.的收敛性;

2) 写出解此方程的牛顿迭代格式,并问 x_0 取 0.5，迭代是否收敛.

5. 若x^*是$f(x) = 0$ 的三重根，$f(x)$在x^*的邻域内有三阶连续导数

1) 证明对$f(x) = 0$ 的 Newton 迭代法在x^*附近是线性收敛的；

2) 试对上面的 Newton 迭代法进行改变，使之在x^*附近有二阶收敛性。