华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：应用高等工程数学　　课程类别 ☑公共课 ☐专业课　　考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别________ 考试日期 2018-12 学生所在院系________

学号________ 姓名________ 任课教师________

一、　填空（每小题 3 分）

1、向量 $(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 在给定的一组基 $\alpha_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标为________。

2、R^4 中的两个子空间 $W_1=\mathrm{span}\{a_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},a_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}\}$，$W_2=\mathrm{span}\{a_3=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}},a_4=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}\}$ 的交空间 $W_1\cap W_2$ 的维数是____，基是________。

3、方阵 $\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ 的最小多项式为________________。

4、将多项式 $2x^3+3x^2+4x+5$ 的计算改写成只需要 3 次乘法和 3 次加法的形式为______________。

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&4&3\\0&-2&-1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使 $P^{-1}AP=J$。

三、（10 分）多项式空间 $P_1(t)$ 的线性变换的定义为：$Tp(t)=5p(t)+(t-1)\dfrac{d}{dt}p(t)$，求 T 的特征值与特征向量。

四、（10 分）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1,f(1)=1,f(2)=3,f'(0)=1$，试求 $f(x)$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 并写出误差余项。

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：<u>应用高等工程数学</u>　　课程类别 ☑公共课 ☐专业课　　考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别＿＿＿＿＿＿考试日期 2017-12＿＿学生所在院系＿＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿任课教师＿＿＿＿＿＿

一、填空（每小题 3 分）

1、若某近似值与π之间的相对误差小于0.01%，则此近似值至少有＿位有效数字（$\pi=3.14159265\cdots$）。

2、设$A=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 2 & 5\end{pmatrix}$，求$A^4-9A^3+A^2-8A-4I=$＿＿＿＿。

3、已知方阵A的特征多项式为$f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^3$，最小多项式为$m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，则$A$的 Jordan 标准型为＿＿＿＿＿。

4、设$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$，则$\|Ax\|_\infty=$＿＿＿＿，$cond(A)_1=$＿＿＿＿。

5、多项式空间$P_2(t)$上的线性变换T定义为$Tp(t)=3p(t)-(t+1)\frac{d}{dt}p(t)$，则$T$在基$\{1,t,t^2\}$下的矩阵为＿＿＿＿＿。

6、用隐式 Euler 法求解初值问题

$$\begin{cases}y'(x)=-5y+x\\ y(0)=1\end{cases}$$，取步长$h=0.2$，则$y(0.4)=$＿＿＿＿＿＿＿。

7、若求解某线性方程组有迭代公式 $X^{(n+1)}=BX^{(n)}+F$，

其中$B=\begin{bmatrix}a & -\sqrt{a}\\ 3\sqrt{a} & -3\end{bmatrix}$，则该迭代公式收敛的充要条件是＿＿＿＿＿＿。

8、若求解方程的简单迭代格式$x_{k+1}=ax_k+\frac{b}{x_k}$在根$x^*=\sqrt{3}$附近平方收敛，

则$a=$＿＿＿＿＿＿，$b=$＿＿＿＿＿＿。

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使 $P^{-1}AP=J$

三、（8 分）设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 是 R^3 的一个基，$V_1=span\{2\alpha_1+3\alpha_2\}$，$V_2=span\{\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3\}$，证明：$R^3=V_1\oplus V_2$。

四、（10 分）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1,f(2)=-3,f(3)=4,f'(3)=13$，试求 $f(x)$ 的三次插值多项式 $H_3(x)$ 并算出 $f(1)$ 的近似值 $H_3(1)$；若还已知 $\left|f^{(4)}(x)\right|<1(0\le x\le 3)$，证明此近似值的绝对误差小于 0.2。

五、（10 分）试求实数 a,b 使 $\int_0^1(a+bx-x^2)^2dx$ 最小，并求出此最小值。

六、（10 分）利用 3 次 Chebyshev 正交多项式 $T_3(x)=4x^3-3x$ 构造三点 Gauss-Chebyshev 型求积公式：

$$\int_0^2\frac{f(x)}{\sqrt{2x-x^2}}dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$$

并问：

（1）所得求积公式的代数精度是多少？

（2）用所得求积公式计算 $\int_0^2\frac{\left(3x^5+4x^4+2x^2-1\right)}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ 时截断误差是多少？

七、（12 分）给定线性方程组

$$\begin{cases}4x_1-x_2+2x_3=7\\-4x_1+7x_2-x_3=-18.5\\6x_2+10x_3=-7\end{cases}$$

(1) 试用 LU 分解法求解其方程组；

(2) 分别写出方程组的 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代矩阵，并说明这两种迭代格式的收敛性。

八、(8 分)讨论求解初值问题 $\begin{cases}y'(x)=\lambda y\ (\lambda<0)\\y(0)=a\end{cases}$ 的二阶中点公式

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)\right)$$ 的稳定性。

九、(8 分)试证用牛顿法求方程 $f(x)=(x^2-a)^2=0\ (a>0)$ 的根 $x^*=\sqrt{a}$ 是线性收敛的，并将 Newton 公式变形，使其在 $x^*=\sqrt{a}$ 附近具有局部二阶收敛性。

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵论、数值分析　　课程类别 ☑公共课 ☐专业课　　考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别＿＿＿＿考试日期 2016-12-15 学生所在院系＿＿＿＿

学号＿＿＿＿姓名＿＿＿＿任课教师＿＿＿＿

一、填空（每小题 3 分）

1、计算 $y=1000+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\cdots+\frac{1}{2000}$，给出了两种运算顺序，（A）从左到右相加，（B）从右到左相加，应选择运算顺序（　　）可使计算结果接近于真值。

2、Newton-cotes 求积公式的精确程度是否一定能随着其代数精度的提高而提高？＿＿＿＿

3、设 $\varphi_2(x)=x^2-x+b$ 是 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x)=1$ 的正交多项式，则 $b=$＿＿。

4、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$，当 $a\in$＿＿＿＿时，必有分解式 $A=LL^T$，其中 L 为非奇异下三角矩阵，当其对角线元素 $l_{ii}(i=1,2,3)$ 满足条件＿＿＿＿时，这种分解是唯一的。

5、$A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&3&6\\0&8&1\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1=$＿＿＿＿；$\|AX\|_\infty=$＿＿＿＿。

6、设 $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 A 的 Jordan 标准形 $J=\begin{pmatrix}\quad\end{pmatrix}$。

7、设 T 是线性空间 V 的线性变换，已知 V 的基 $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ 和 T 在 B 下的矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$，则 T 的特征值为 λ=＿＿＿＿；特征向量 ξ=＿＿＿＿＿＿。

8、设 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 V^3 的一个基，V^3 上的线性变换 T 将 a_1,a_2,a_3 分别映为

$-a_1+2a_2+a_3$，$a_1+a_2-a_3$，$2a_1-a_2+a_3$，则 T 在这个基下的矩阵是 $B=\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$。

二、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使 $AP=PJ$。

三、（10 分）设 V_1 和 V_2 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 和 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，证明 $R^n=V_1\oplus V_2$。

四、（12 分）设函数 $f(x)$ 满足表中条件：

x_k	0	1	2
$f(x_k)$	1	0	1
$f'(x_k)$		-2	0

求一个四次插值多项式 $H_4(x)$，使其满足表中所有条件，并给出其余项表达式。

五、（10 分）试构造计算奇异积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$ 的两点求积公式，使其代数精度尽可能高；若被积函数为 $f(x)=x^3+2x^2+1$，问用所构造的求积公式计算，所产生的误差为多少？

六、（10 分）设有常微分方程初值问题

$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的单步法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})],$$

证明：该方法是无条件稳定的。

七、（14 分）给定方程组 $\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ a & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$；

（1）确定 a 的取值范围使方程组对应的 Jacobi 迭代收敛。

（2）当 $a=2$ 时，用直接三角分解法求解方程。

八、（10 分）已知 $x=\varphi(x)$ 的 $\varphi'(x)$ 满足 $|\varphi'(x)-a|<1,(a>2)$，试问如何利用 $\varphi(x)$ 构造一个收敛的简单迭代函数 $\psi(x)$，使 $x_{k+1}=\psi(x_k)\quad k=0,1,\cdots$ 收敛？

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：<u>应用高等工程数学</u>　　课程类别 ☑公共课 ☐专业课　　考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别<u>研究生</u>考试日期<u>2015-12-16</u>学生所在院系________________

学号________________姓名________________任课教师________________

一、填空题（任选 10 小题，每小题 2 分，共计 20 分，多答不加分。）

1. 设 $A=\{A_{ij}\}_{3\times3}$ 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ 则与 A 相似的对角阵

$B=\underline{\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}}$.

2. 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 满足等式：$A^2+A=2I$，问 A 是否可对角化________.

3. 矩阵的谱半径是指________________________.

4. 矩阵特征值的根空间维数等于________________________.

5. 对任何非奇异矩阵 A，都有 $cond\,(A)_p$ __1，当 A 为正交矩阵时 $cond\,(A)_2$=___.

6. 已知 $\sqrt{5}=2.236067977499\cdots$，则其近似值 2.23607 有________位有效数字，通过四舍五入得到其有四位有效数字的近似值为__________.

7. 已知 $f(x)=2x^3-4x^2+1$，则 $f[0,1,2,3]=$__________，$f[0,1,2,3,4]=$__________.

8. 当 n 为奇数时，等距节点的插值型 $(N-C)$ 求积公式 $I_n=(b-a)\sum_{i=1}^{n}C_i f(x_i)$ 至少有____次代数精度.

9. $\varphi(x)=x+\lambda(x^2-3)$，要使迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛到 $x^*=\sqrt{3}$，则 λ 的取值范围是____________.

10. 试写出方程 $f(x)=x^3-a=0$ 的牛顿迭代格式________________.

11. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $X\sim N(0,1)$ 的样本，$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$ 为次序统计量，则 $X_{(1)}{}^2+X_{(2)}{}^2+\cdots+X_{(n)}{}^2\sim$____________.

12. 给出点估计评价的三个标准________.

13. 给出假设检验中显著性水平α与统计假设H_0的关系________.

14. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，μ未知，σ^2已知，μ的置信水平为$1-\alpha$的双侧区间估计为__________.

15. 使用方差分析时对数据的要求是_______.

二、计算证明题（任选 4 题，每小题 10 分，满分 40 分，多答不加分。）

16. 已知R^3中的两个基底$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，$B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，求从$B_1$到$B_2$的基变换矩阵。

17. 设R^4中的向量$x_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$，$x_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$x_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$x_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}$，分别张成$w_1=span\{x_1,x_2\}$，$w_2=span\{x_3,x_4\}$，求$w_1+w_2$及$w_1\cap w_2$的基底及维数。

18. 设T是线性空间V^3的线性变换，已知T在基$B=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$下的矩阵$A$为

$$A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&2&2\end{bmatrix},$$

求T的特征值和对应的特征向量。

19. 设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵$P$和 Jordan 矩阵$J$，使$AP=PJ$。

20. 设 $A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$，问 $\lim\limits_{k\to\infty}A^K=0$ 成立吗？若成立证明之。

21. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -2 & -1\\ -2 & -4 & 2 & -2\end{bmatrix}$，求 A 的满秩分解。

22. 设有微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=2x_1(t)+e^{2t}\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+e^{2t}\\ \dfrac{dx_3(t)}{dt}=x_1(t)-x_2(t)+3x_3(t)\end{cases}$

$x(0)=[-1,1,0]^T$，求满足初始条件的特解。

23. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，求 A 的奇异值分解。

三、计算证明题（任选 4 题，每小题 10 分，满分 40 份，多答不加分。）

24. 对函数 $f(0)=-1$，$f'(0)=-2, f(1)=0$，$f'(1)=10$，试求过这 2 点的三次 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$，并写出插值余项的表达式。

25. 试构造两点 Gauss-Chebyshev 求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

并由此计算积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{\dfrac{3+2x^2}{1-x^2}}dx$。

26. 设有常微分方程初值问题$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(0) = a \end{cases}$的隐式中点公式

$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_{n+\frac{h}{2}}, \dfrac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$，证明该方法是无条件稳定的。

27. 方程$Ax = b$的系数矩阵为$A = \begin{bmatrix} a & 5 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$，问$a$取何值时，Jacobi 迭代收敛？

28. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为总体X的一个样本，$EX = \mu$，μ未知。

（1）$\bar{X}$是否为μ的无偏估计？

（2）由$(X_1,\cdots,X_n)$构造μ的n个无偏估计.

（3）设$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1, a_i > 0, i = 1,\cdots,n$.

问$\hat{\mu} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$是否为$\mu$的无偏估计，若是$\mu$的无偏估计，确定$a_i$，$i = 1,\cdots,n$，使$\hat{\mu}$的方差最小。

29. 某纺织厂生产的某种产品的纤度，设服从正态分布，标准差$\sigma = 0.048$，现抽取 5 根测得纤度为 1.32,1.55,1.36,1.40,1.44，问在显著性水平$\alpha = 0.10$下，能否认为σ^2无显著变化。（$\chi^2_{0.05}(4) = 0.711$，$\chi^2_{0.95}(4) = 9.488$）

30. 设有三个工厂生产同一种机械锻件，为比较这三个厂生产的锻件强度无显著差异，分别从每个厂随机抽 4 件，测得强度数据如下：

工厂	强度数据			
A_1	103	101	98	110
A_2	113	107	108	116
A_3	82	92	84	86

设第 i 个厂的强度服从 $N(\mu_i,\sigma^2)$，$i=1,2,3$。检验三个厂的平均强度有无显著差异？$\alpha=0.05$（$F_{0.95}(2,9)=4.26, F_{0.95}(3,12)=3.49$）

31. 已知 y 与三个自变量的观察值如下表：

x_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
x_2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
x_3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
y	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

求 y 对 x_1,x_2,x_3 的回归方程。

32. 有经过 xmin 反应之后的数据如下：

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	28.5	16.9	17.5	14.0	9.8	8.9

设 $y=\beta_0\beta_1^x\varepsilon$（$\varepsilon$ 满足回归分析条件），求 β_0,β_1 的点估计，并求 $\hat{y}=\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1^{\ x}$.

最小二乘法
多项式误差和 $\delta^2=\psi^T(y-A\alpha)$　　关于 λ_0 的线性无关特征向量

V_{λ_0} 是 T 的不变子空间，且 λ_0 的几何重数就是有

华中科技大学研究生课程考试试卷

Jordan 矩阵的数目等于 A 的不同的特征值的个数。

任何特征值的几何重数不大于其代数重数

$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$

课程名称：<u>应用高等工程数学</u>　课程类别 ☑公共课 ☐专业课　考核形式 ☐开卷 ☑闭卷

学生类别 <u>研究生</u> 考试日期 <u>2014-12-16</u> 学生所在院系________

学号________ 姓名________ 任课教师________

Jordan 块的个数等于该 λ 阶的代数……无关特征向量的个数

一、填空题（任选 10 小题，每小题 2 分，共计 20 分，多答不加分。）

1. 设 $A=\{A_{ij}\}_{3\times3}$ 的最小多项式为 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ 则与 A 相似的对角阵

$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.　　$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

n 阶方阵 A 可对角化（即相似于对角阵）的充分必要条件是，A 的最小多项式没有重根

矩阵特征值的模最大者为谱半径

2. 设矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 满足等式：$A^2+A=2I$，问 A 是否可对角化 <u>可对角化</u>.　$\lambda^2+\lambda=2 \Rightarrow \lambda=1,\ \lambda=-2$

幂等矩阵的特征值为 0

3. 矩阵的谱半径是指 <u>矩阵特征值的模最大者为谱半径</u> $\rho(A)_{max}=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$.　$\rho(A)\le\|A\|_v$.

4. 矩阵特征值的根空间维数等于 <u>相应特征值的代数重数</u>.

特征子空间维数 = 相应特征值的几何重数

5. 对任何非奇异矩阵 A，都有 $cond\ (A)_p$ <u>$\ge$</u> 1，当 A 为正交矩阵时 $cond\ (A)_2=$ <u>1</u>.

6. 已知 $\sqrt5=2.2360679774\,99\cdots$，则其近似值 2.23607 有 <u>6</u> 位有效数字，通过四舍五入得到其有四位有效数字的近似值为 <u>2.236</u>.

7. 已知 $f(x)=2x^3-4x^2+1$，则 $f[0,1,2,3]=$ <u>2</u>，$f[0,1,2,3,4]=$ <u>0</u>.

n 次插值　n 为偶数

8. 当 n 为奇数时，等距节点的插值型 $(N-C)$ 求积公式 $I_n=(b-a)\sum_{i=1}^{n}C_if(x_i)$ 至少有 <u>n</u> 次代数精度.

9. $\varphi(x)=x+\lambda(x^2-3)$，要使迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛到 $x^*=\sqrt3$，则 λ 的取值范围是 <u>$(-\frac{\sqrt3}{3},0)$</u>.

$\varphi'(x)=1+2\lambda x$　$|1+2\lambda\sqrt3|<1$　$-1<1+2\lambda\sqrt3<1$ $\Rightarrow 2\lambda\sqrt3<0$ $\Rightarrow\lambda<0$　$\lambda>-\frac{\sqrt3}{3}$

10. 试写出方程 $f(x)=x^3-a=0$ 的牛顿迭代格式 <u>$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$</u> $=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}$

11. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $X\sim N(0,1)$ 的样本，$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$ 为次序统计量，则

$X_{(1)}{}^2+X_{(2)}{}^2+\cdots+X_{(n)}{}^2\sim$________.　　$\varphi'(x)=|1+2\lambda x|<1$

$-\frac{2}{\sqrt3}<x<0$

相应特征值的线性无关的特征向量的个数，即特征子空间的维数，亦即相应特征值的几何重数

$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&1&2\end{bmatrix}$ $|\lambda I-A| = \begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\0&\lambda-3&0\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$ $=(\lambda-2)^2(\lambda-3)-(\lambda-3)$ $=(\lambda^2-4\lambda+4-1)(\lambda-3)$ $=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-3)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$

$J=\begin{bmatrix}1&&\\&3&1\\&&3\end{bmatrix}$

12. 给出点估计评价的三个标准________.

13. 给出假设检验中显著性水平α与统计假设H_0的关系________.

14. 设$(X_1,\cdots,X_n)$为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，μ未知，σ^2已知，μ的置信水平为$1-\alpha$的双侧区间估计为________.

$\lambda_1=1$时 $AX=\lambda X$ $(A-I)X=0$ $\Rightarrow \begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}X=0$ $\Rightarrow \xi_1=c_1[1\ \ 0\ \ -1]^T$

$\lambda_1=1$、$\lambda_{2,3}=3$（二重根）

15. 使用方差分析时对数据的要求是________.

$(\lambda-3I)^2X=0$ $\Rightarrow \begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}X=0$ $\Rightarrow \xi_3=c_3[1\ \ 1\ \ 1]^T$ 或 $[0\ \ 1\ \ 0]^T$

当λ_2时 $(A-3I)X=0$ $\Rightarrow \begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix}X=0$ 秩为2 $\Rightarrow \xi_2=c_2[1\ \ 0\ \ 1]^T$

二、计算证明题（任选4题，每小题10分，满分40分，多答不加分。）

16. 已知R^3中的两个基底$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，$B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$，求从$B_1$到$B_2$的基变换矩阵

$\Rightarrow P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$ $P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac12&0&-\frac12\\\frac12&0&\frac12\\0&1&0\end{bmatrix}$ $P^{-1}AP=$

解 $B_2=B_1P$ $B_2=B_1 d$. $\Rightarrow d=B_1^{-1}B_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&2&2\end{bmatrix}$

17. 设R^4中的向量$x_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$，$x_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$x_3=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$x_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}$，分别张成$w_1=span\{x_1,x_2\}$，$w_2=span\{x_3,x_4\}$，求$w_1+w_2$及$w_1\cap w_2$的基底及维数。

解：设 $x_4=ax_1+bx_2+cx_3$ $a\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\\7\end{bmatrix}$ 解得 $a=-\frac32$ $b=\frac92$ $c=\frac52$ $\Rightarrow x_4=-\frac32x_1+\frac92x_2+\frac52x_3$

$w_1+w_2=span\{x_1,x_2,x_3,x_4\}=span\{x_1,x_2,x_3\}$ 其基底 $[x_1\ \ x_2\ \ x_3]$ 是其基底

$dim(w_1+w_2)=dim(w_1)+dim(w_2)-dim(w_1\cap w_2)$ $\Rightarrow dim(w_1+w_2)=3$ $\Rightarrow dim(w_1\cap w_2)=2+2-3=1$

设 $\xi\in w_1\cap w_2$，$\xi\in w_1$，$\xi=k_1x_1+k_2x_2$；$\xi\in w_2$，$\xi=k_3x_3+k_4x_4$ $\Rightarrow k_1x_1+k_2x_2=k_3x_3+k_4x_4$ $k_1x_1+k_2x_2-k_3x_3-k_4x_4=0$ $\Rightarrow [x_1,\ x_2,\ -x_3,\ -x_4]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=0$ $k_1=-\frac32k_4$ $k=c[-\frac32\ \ \frac92\ \ \frac52\ \ 1]$

2) $\xi=-\frac32x_1+\frac92x_2=[-6\ \ \frac32\ \ 3\ \ \frac92]^T=[-4\ \ 1\ \ 2\ \ 3]^T$ $[-4\ \ 1\ \ 2\ \ 3]^T$ 是 $w_1\cap w_2$ 的基底

18. 设T是线性空间V^3的线性变换，已知T在基$B=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$下的矩阵$A$为
$$A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&2&2\end{bmatrix},$$
求T的特征值和对应的特征向量。

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&1\\1&\lambda+1&-1\\1&-2&\lambda-2\end{vmatrix}$ $=(\lambda-2)^2(\lambda+1)+2-2-(\lambda+1)-2(\lambda-2)+2(\lambda-2)$ $=(\lambda-2)^2(\lambda+1)-(\lambda+1)=(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+3)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)$

② $\lambda=1$ $(A-I)X=0$ $\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\-1&2&1\end{bmatrix}X=0$ $\xi_2=c_2[1\ \ 0\ \ 1]^T$ $\Rightarrow V_2=c_2(\alpha_1+\alpha_3)$

③ 当$\lambda=3$，$\xi_3=c_3[1\ \ -1\ \ -3]^T$ $\Rightarrow V_3=c_3(\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3)$

19. 设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&1&2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵$P$和Jordan矩阵$J$，使$AP=PJ$。

当$\lambda=-1$时 $AX=\lambda X$ $(A-\lambda I)X=0$ $\Rightarrow\begin{bmatrix}3&2&-1\\-1&0&1\\-1&2&3\end{bmatrix}X=0$ 基础解系 $\xi_1=c_1[1\ \ -1\ \ 1]^T$

则相应的特征向量 $V_1=c_1[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=c_1(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$.