考试内容：矩阵论、数值计算、数理统计各五题，考生“任选”10题，必须每个内容至少选三题！每题 10 分

一、矩阵论

1.会求线性空间两组基之间的过渡矩阵，同一向量在两组基下的坐标；会求线性变换的矩阵，特征值以及特征向量。

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是线性空间$V_n$的两个基,且有

$$\begin{cases}\beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n\end{cases}, \quad (\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\overbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}}^{\text{记作P}}$$

称此公式为基变换公式，P 为由 α 到 β 的过渡矩阵。

定理1 设V_n中的元素α,在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,

在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标为$(x_1',x_2',\cdots,x_n')^T$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例 求坐标变换公式？

$$\alpha_1 = x^3 + 2x^2 - x \qquad \beta_1 = 2x^3 + x^2 + 1$$
$$\alpha_2 = x^3 - x^2 + x + 1 \qquad \beta_2 = x^2 + 2x + 2$$
$$\alpha_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 1 \qquad \beta_3 = -2x^3 + x^2 + x + 2$$
$$\alpha_4 = -x^3 - x^2 + 1 \qquad \beta_4 = x^3 + 3x^2 + x + 2$$

解： 利用一组最基本的基$x^3, x^2, x, 1$过渡

因为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = (x^3,x^2,x,1)A,\quad (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (x^3,x^2,x,1)B,$

其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$

得 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B.$

故坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = B^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

用初等变换计算$B^{-1}A$.

$$(B \mid A) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{初等行变换}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) = (E \mid B^{-1}A) \quad \text{所以} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

例：

证明 $x^3, x^3+x, x^2+1, x+1$是$P[x]_3$的一个基，
并求多项式x^2+2x+3在这个基下的坐标.

证明 令

$$k_1x^3+k_2(x^3+x)+k_3(x^2+1)+k_4(x+1)$$
$$=(k_1+k_2)x^3+k_3x^2+(k_2+k_4)x+(k_3+k_4)$$
$$=0 \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2=0, \\ k_3=0, \\ k_2+k_4=0, \\ k_3+k_4=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0$$

故$x^3, x^3+x, x^2+1, x+1$线性无关，是$P[x]_3$的一个基.

又令

$$a_1x^3+a_2(x^3+x)+a_3(x^2+1)+a_4(x+1)$$
$$=x^2+2x+3,$$

则 $\begin{cases} a_1+a_2=0, \\ a_3=1, \\ a_2+a_4=2, \\ a_3+a_4=3 \end{cases}$ 解之可得 $\begin{cases} a_1=0, \\ a_2=0, \\ a_3=1, \\ a_4=2. \end{cases}$

故x^2+2x+3在这个基下的坐标为$(0,0,1,2)^T$.

线性变换的矩阵：

$$\sigma(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)A,$$

A为线性变换的矩阵

定理：线性变换$\sigma: V \to V$，$a_1, a_2, \cdots, a_n; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$是$V$的两组基，过渡阵为$P$。

σ在$a_1, a_2, \cdots, a_n$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$下的矩阵分别为为$A, B$ 。则$B = P^{-1}AP$

例：设线性变换$A:R^3\to R^3$把基：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\ \text{变为}\ \alpha_1'=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2'=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_3'=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

1、求σ在基α_1，α_2，α_3下的矩阵

2、求$\xi=(1,2,3)^T$及$\sigma(\xi)$ 在基α_1，α_2，α_3下的坐标

3、求$\xi=(1,2,3)^T$及$\sigma(\xi)$ 在基α_1'，α_2'，α_3'下的坐标

1、求σ在基α_1，α_1，α_1下的矩阵

已知 $\sigma(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)A$

$\sigma(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$

$\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A=(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

2、求$\xi=(1,2,3)^T$及$\sigma(\xi)$ 在基α_1，α_1，α_1下的坐标

$$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\sigma(\xi)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

3、求$\xi=(1,2,3)^T$及$\sigma(\xi)$ 在基α_1'，α_2'，α_3'下的坐标

$$\xi=(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad\sigma(\xi)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

特征值与特征向量

例 1 设 V 是数域 K上的3维线性空间，T是 V上的一个线性变换，T在 V的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩是

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-2&-1&4\\2&4&-1\end{bmatrix}$$

求 T的全部特征值与特征向量。

解:A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&-2\\2&\lambda+1&-4\\-2&-4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+6)$$

$$|\lambda I-A|=(\lambda-3)^2(\lambda+6)$$

所以 A 的特征值是 3 （二重）与 -6 。

对于特征值 3 ，解齐次线性方程组 $(3I-A)X=0$

$$(3I-A)=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得到一个基础解系：$[-2\ \ 1\ \ 0]^T$，$[2\ \ 0\ \ 1]^T$

从而 T 的属于3 的极大线性无关特征向量组是

$$\xi_1=-2\alpha_1+\alpha_2,\quad \xi_2=2\alpha_1+\alpha_3$$

于是 T 的属于3 的全部特征向量是

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2,\quad k_1,k_2\in K$$

对于特征值 -6,解齐次线性方程组 $(-6I-A)X=0$

$$(-6I-A)=\begin{bmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},\alpha_3=1/2\alpha_1+\alpha_2\Leftrightarrow\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3=0$$

得到一个基础解系：$[1\quad 2\quad -2]^T$

从而 T的属于 -6 的极大线性无关特征向量组是

$$\xi_3=\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3$$

于是T的属于 -6 的全部特征向量

$$k\xi_3,\quad k\in K$$

这里 k为数域 K中任意非零数。

2.给定一线性空间的两组向量分别生成的子空间，求它们的和空间与交空间的基与维数。

例：设$a_1=(2,1,3,1)^T$，$a_2=(-1,1,-3,1)^T$，$\beta_1=(4,5,3,1)^T$，$\beta_2=(1,5,-3,1)^T$，
$V_1=span\{a_1,a_2\}, V_2=span\{\beta_1,\beta_2\}$。求1、$V_1+V_2$的基与维数。 2、$V_1\cap V_2$的基与维数.

解：$V_1+V_2=span\{a_1,a_2,\beta_1,\beta_2\}$，$(a_1,a_2,\beta_1,\beta_3)=\begin{bmatrix}2&-1&4&1\\1&1&5&5\\3&-3&3&-3\\1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

a_1,a_2,β是极大无关组，是V_1+V_2的基，维数为3。

设$\alpha\in V_1\cap V_2$ 有$\alpha\in V_1$且$\alpha\in V_2$

$$a=k_1a_1+k_2a_2=k_3\beta_1+k_4\beta_2=k_3\beta_1+k_4(-a_1+a_2+\beta_1)$$
$$(k_1+k_4)a_1+(k_2-k_4)a_2-(k_3+k_4)\beta_1=0$$

$$\begin{matrix}k_1+k_4=0\\k_2-k_4=0\\k_3+k_4=0\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\alpha=c(-a_1+a_2)=c(\beta_2-\beta_1)=c\begin{pmatrix}-3\\0\\-6\\0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$V_1\cap V_2$的基为（$1,0,2,0)^T$ 维数为1

3.会求矩阵的各种范数：$\|A\|_F, \|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$,

设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$，则与向量$1-$范数，$2-$范数和$\infty-$范数相容的矩阵算子范数分别为

（1）$\|A\|_1=\max\limits_j\sum\limits_{i=1}^m|a_{ij}|$，称为矩阵 A 的列模和最大值范数；

（2）$\|A\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|$，称为矩阵 A 的行模和最大值范数；

（3）$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{A^HA}}$（其中 λ_{A^HA} 为 A^HA 的最大特征值），称为矩阵 A 的谱范数.

（4）$\|A\|_F$：矩阵的各个元素平方之和再开平方根），称为矩阵 A 的 **F** 范数.

对任何矩阵$A\in C^{m\times n}$，都有$\|A^H\|_1=\|A^T\|_1=\|A\|_\infty,\|A^H\|_2=\|A^T\|_2=\|A\|_2$

$\|A^HA\|_2=\|A\|_2^2,\|A\|_2^2\le\|A\|_1\|A\|_\infty$

例：$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&2&3\\1&2&0\end{bmatrix}$，计算$\|A\|_1,\|A\|_2,\|A\|_\infty$和$\|A\|_F$

解：$\|A\|_1=5,\|A\|_\infty=5,\|A\|_F=\sqrt{23}$

$$A^HA=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&9&6\\0&6&9\end{bmatrix},\|A\|_2=\sqrt{15}$$

4.会求矩阵的奇异值分解及其伪逆矩阵A^+

①求奇异值

引理 1 ：对于任何一个矩阵 A 都有

$$Rank(AA^H)=Rank(A^HA)=Rank(A)$$

设$A\in C_r^{m\times n}$，λ_i是AA^H的特征值，μ_i是A^HA 的特征值，它们都是实数。如果记

$$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_r>\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_m=0$$
$$\mu_1\ge\mu_2\ge\cdots\ge\mu_r>\mu_{r+1}=\mu_{r+2}=\cdots=\mu_n=0$$

特征值λ_i与μ_i之间有如下关系:

定理：设$A\in C_r^{m\times n}$，那么$\lambda_i=\mu_i>0$，$i=1,2,\cdots,r$。

同时，称$\alpha_i=\sqrt{\lambda_i}=\sqrt{\mu_i}>0$，$i=1,2,\cdots,r$为矩阵A的正奇异值，简称奇异值。

例：求下列矩阵的奇异值

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&0&0\end{bmatrix}$

解： （1）

由于$AA^H=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，显然$AA^H$的特征值为5 ,0 ,0 ，所以$A$ 的奇异值为$\sqrt{5}$

（2）

由于$AA^H=\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}$，显然$AA^H$的特征值为2 ,4 ，所以$A$ 的奇异值为$\sqrt{2}$， 2

例：求下列矩阵的奇异值分解表达式

(1) $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\\0&2\\1&0\end{bmatrix}$

解：(1) 容易计算A^HA 的特征值为5, 0, 所以A 的奇异值为$\sqrt{5}$,0

对于特征值5，解齐次线性方程组$\left(5I-A^HA\right)X=0\to\begin{bmatrix}4&-2\\-2&1\end{bmatrix}X=0\to X=k\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

对于特征值0，解齐次线性方程组$\left(-A^HA\right)X=0\to\begin{bmatrix}-1&-2\\-2&-4\end{bmatrix}X=0\to X=k\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

将$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$标准化得$v_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$，$v_2=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

$\because A^HA$ 的非零奇异值个数为 1

$\therefore$取 $\Delta=\left[\sqrt{5}\right]$,取$V=[V_1,V_2]$,其中$V_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{bmatrix},V_2=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

计算$U_1=AV_1\Delta^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{bmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\right]=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

构造$U_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，$U_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，得$U=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

于是可得奇异值分解式为$A=U\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}V^H=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}&2/\sqrt{5}\\-2/\sqrt{5}&1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

另一种方法（有时需要试凑？）：

解：⑴ 容易计算AA^H 的特征值为5, 0, 0, 所以A 的奇异值为$\sqrt{5}$

下面计算AA^H的标准正交特征向量

$AA^H=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$对应的正交特征向量分别为$\mu_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mu_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\mu_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

由这三个标准正交特征向量组成矩阵U，所以有$U=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$A^HA=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$

再计算A^HA 的标准正交特征向量，解得分别与5 ，0 对应的两个标准正交特征向量

对于特征值5，解齐次线性方程组$\left(5I-A^HA\right)X=0\rightarrow\begin{bmatrix}4&-2\\-2&1\end{bmatrix}X=0\rightarrow X=k\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

对于特征值0，解齐次线性方程组$\left(-A^HA\right)X=0\rightarrow\begin{bmatrix}-1&-2\\-2&-4\end{bmatrix}X=0\rightarrow X=k\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

将$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$标准化得$v_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$，　$v_2=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

由这两个标准正交特征向量组成矩阵U，那么有$V=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}&-2/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}&1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

于是可得奇异值分解式为$A=U\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}V^H=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}&2/\sqrt{5}\\-2/\sqrt{5}&1/\sqrt{5}\end{bmatrix}$

（2）

$A^HA=\begin{bmatrix}2&0\\0&5\end{bmatrix}$，那么$A$ 的非零奇异值为$\sqrt{5}$，$\sqrt{2}$，A^HA 对应于特征值5 ,2 的标准特征向量为

$v_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，　$v_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$由这两个标准正交特征向量组成矩阵$V$，那么有$V=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$\because A^HA$ 的非零奇异值个数为 2 $\therefore$取 $\Delta=\begin{bmatrix}\sqrt{5}&0\\0&\sqrt{2}\end{bmatrix},V_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

计算$U_1=AV_1\Delta^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\\0&2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}&0\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{2\sqrt{5}}{5}&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$，再扩充成$U$

另一种方法（有时需要试凑？）：

再计算AA^H 的标准正交特征向量，解得分别与5, 2,0,0 对应的两个标准正交特征向量

$$\mu_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\0\\2/\sqrt{5}\\0\end{bmatrix},\mu_2=\begin{bmatrix}0\\-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix},\mu_3=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}\\0\\1/\sqrt{5}\\0\end{bmatrix},\mu_4=\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}&0&-2/\sqrt{5}&0\\0&-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\2/\sqrt{5}&0&1/\sqrt{5}&0\\0&1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

注：这里定义 A^HA 对应的..是 V，AA^H 对应的..是 U

于是可得$A=U\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{H}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} & 0\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

伪逆矩阵求法：

①首先求 SVD 分解。（$A = U\ S\ V^H$）

②将 S 矩阵中的非零元素取倒数，再转置，得到 Σ^+

③$A^+ = V\ \Sigma^+\ U^H$

注：这里定义 A^HA 对应的…是 V，AA^H 对应的…是 U。

5.会求$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=Ax+f(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$的解

$$x=e^{A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-t_0)}f(\tau)d\tau,\ f(A)=Pf(J)P^{-1}$$

例：$A=\begin{bmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{bmatrix}$，求微分方程组$\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$满足初始条件$x(0)=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}^T$的解。

$$\boldsymbol{\phi}(t)=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}],\quad L^{-1}[\frac{1}{s+a}]=e^{-at},L^{-1}[\frac{1}{(s+a)^2}]=te^{-at}$$

$$(sI-A)=\begin{bmatrix}s+1&2&-6\\1&s&-3\\1&1&s-4\end{bmatrix},(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s-3}{s^2-2s+1}&-\dfrac{2}{s^2-2s+1}&\dfrac{6}{s^2-2s+1}\\-\dfrac{1}{s^2-2s+1}&\dfrac{s-2}{s^2-2s+1}&\dfrac{3}{s^2-2s+1}\\-\dfrac{1}{s^2-2s+1}&-\dfrac{1}{s^2-2s+1}&\dfrac{s+2}{s^2-2s+1}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\boldsymbol{\phi}(t)=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\begin{bmatrix}-(2t-1)e^t&-2te^t&6te^t\\-te^t&-(t-1)e^t&3te^t\\-te^t&-te^t&(3t+1)e^t\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\phi(t)x(0)=\begin{bmatrix}-(2t-1)e^t&-2te^t&6te^t\\-te^t&-(t-1)e^t&3te^t\\-te^t&-te^t&(3t+1)e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2t+1)e^t\\(t+1)e^t\\(t+1)e^t\end{bmatrix}$$

例：$A=\begin{bmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{bmatrix}$，$f(t)=\begin{bmatrix}-e^t\\0\\e^t\end{bmatrix}$，求$\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+f(t)$满足$x(0)=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}^T$的解。

满足所给初始条件的解为$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau$

$$e^{A(t-\tau)}=\begin{bmatrix}(1-2t+2\tau)e^{t-\tau}&-2(t-\tau)e^{t-\tau}&6(t-\tau)e^{t-\tau}\\-(t-\tau)e^{t-\tau}&(1-t+\tau)e^{t-\tau}&3(t-\tau)e^{t-\tau}\\-(t-\tau)e^{t-\tau}&-(t-\tau)e^{t-\tau}&(1+3t-3\tau)e^{t-\tau}\end{bmatrix},e^{A(t-\tau)}f(\tau)=\begin{bmatrix}-1+8(t-\tau)\\4(t-\tau)\\1+4(t-\tau)\end{bmatrix}e^t$$

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau=e^t\begin{bmatrix}\int_0^t[-1+8(t-\tau)]d\tau\\\int_0^t 4(t-\tau)d\tau\\\int_0^t[1+4(t-\tau)]d\tau\end{bmatrix}=e^t\begin{bmatrix}4t^2-t\\2t^2\\2t^2+t\end{bmatrix}$$

二、数值计算

1.误差的来源有哪些？为了使某个数的近似值其误差不超过ϵ,至少需要几位有效数字？

(1)模型误差—— 数学模型与实际问题之间的误差.
(2)观测误差—— 由观测产生的误差.
(3)截断误差——由简化问题（公式）所引起的解的误差(也称方法误差).
(4)舍入误差——数字计算过程中产生的误差

有效数字定义:如果$|e| = |x^* - x| \le 0.5 \times 10^{-k}$，称近似数 x*准确到小数点后第 k 位，从这小数点后第 k 位数字直到最左边非零数字之间的所有数字都称为有效数字。

（k 加上小数点左边的数字个数，为有效数字个数）

例：$x_1 = 3.142, x_2 = 3.141, x_3 = \frac{22}{7}$分别作为$\pi$的近似值各具有几位有效数字？

解：$\pi = 3.14159265358979323846\dots$

$\left|\pi - x_1\right| = 0.00040\ldots \le \frac{1}{2}\times 10^{-3} = 0.0005$，　4位

$\left|\pi - x_2\right| = 0.00059\ldots \le \frac{1}{2}\times 10^{-2} = 0.005$，　3位

$\left|\pi - x_3\right| = 0.00126\ldots \le \frac{1}{2}\times 10^{-2} = 0.005$，　3位

有效数位与相对误差的关系：

设 x 的近似值为：$x^* = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m \quad (a_1 \ne 0)$，

(1)若 x 具有 n 位有效数字，则 $\varepsilon_r \le \frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1}$

(1)若 $\varepsilon_r \le \frac{1}{2\left(a_1+1\right)}\times 10^{-n+1}$，则 x 至少有 n 位有效数字

例：要使 $\sqrt{20}$ 的近似值有小于0.1% 的相对误差，要取几位有效数字。

解：$\varepsilon_r \le \frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1} \quad \because \sqrt{20} = 4.4\cdots, \therefore a_1 = 4$

$\varepsilon_r \le \frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1} = \frac{1}{2\times 4}\times 10^{-n+1} = 0.125\times 10^{-n+1}$

故取$n=4$,则$\varepsilon_r \le 0.125\times 10^{-n+1} < 10^{-3} = 0.1\%$

2.熟悉 Lagrange 与 Newton 插值多项式，会利用分段线性、抛物插值求函数值，积分的近似值，并能估计误差。

Lagrange 插值：

基函数 $l_i(x)=\dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

$Lagrange$插值多项式 $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega_{n+1}^{'}(x_k)}$

$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ (全部乘满)

$\omega_{n+1}^{'}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$ (除去(x_k-x_k))

插值余项 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\xi\in(a,b)$

误差估计 $\left|R_n(x)\right|=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}\left|x-x_j\right|\le\dfrac{\max\limits_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}\left|x-x_j\right|$

$\max\limits_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|=M_{n+1}$

注：n 代表插值多项式的次数！n=1，一次，线性；n=2，二次，抛物。n+1 点。

例：已给$\sin 0.32=0.314567,\sin 0.34=0.333487,\sin 0.36=0.3522787$
用线性插值及抛物插值计算$\sin 0.3367$ 的值，并估计截断误差。

解：取$x_0=0.32,y_0=0.314567,x_1=0.34,y_1=0.333487,x_2=0.36,y_2=0.352274$
用线性插值计算，取$x_0=0.32$及$x_1=0.34$,得

$$\sin 0.3367\approx L_1(0.3367)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(0.3367-x_0)$$

$$=0.314567+\frac{0.01892}{0.02}\times 0.0167=0.330365$$

用抛物插值计算：

$$\sin 0.33677\approx y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=L_2(0.3367)=0.330374$$

$$\left|R_2(x)\right|\le\frac{M_3}{6}\left|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right|$$

其中$M_3=\max\limits_{x_0\le x\le x_2}\left|f^{'''}(x)\right|=\cos x_0<0.828$

$$\therefore\left|R_2(x)\right|\le\frac{1}{6}(0.828)(0.0167)(0.033)(0.0233)<0.178\times 10^{-6}$$

Newton 插值：

$$N_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

注：n 代表插值多项式的次数！n=1，一次，线性；n=2，二次，抛物。n+1 点。

$$a_0=f[x_0]$$

$$a_1=f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$a_2=f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_0,x_1,\dots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}=\frac{f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

$$(k=0,1,\dots,n)$$

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
x_5	$f(x_5)$	$f[x_4,x_5]$	$f[x_3,x_4,x_5]$	$f[x_2,x_3,x_4,x_5]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$

线性插值误差估计：

$$|R(x)|=|f(x)-\varphi(x)|\le\frac{h^2}{8}M,\ h=\max_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i),\ M=\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

牛顿插值的余项与误差估计？？？

求积分近似值：

梯形公式： $\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

误差估计：$R_1(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$

*Simpson*求积公式： $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

误差估计：$R_2(f) = -\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)$

例 1 分别用梯形公式与辛普森公式计算积分 $I = \int_0^1 e^x dx$ 的近似值并估计误差。

解：由梯形公式 $I = \frac{1}{2}\left(e^0 + e^1\right) = 1.85914$

截断误差为： $|R_1| = \frac{1}{12}\left|f''(\xi)\right| \le \frac{e}{12} = 0.22652$

由Simpson公式 $I \approx \frac{1}{6}\left(e^0 + 4e^{\frac{1}{2}} + e^1\right) = 1.71886$

截断误差为： $|R_2| = \frac{1}{2880}\left|f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{e}{2880} = 0.00095$

复化求积？？？

3.会建立非线性方程$f(x)=0$求近似根的迭代格式，比如 Newton 切线法，弦截法并能用你熟知的语言编程。建立求非线性常微分方程 Cauchy 问题数值解的 Euler 折线法的迭代格式

Newton 切线法：

切线法：

设已知方程 $f(x)=0$有近似根 x_k (假定$f'\left(x_k\right)\neq 0$)，将函数 $f\left(x\right)$ 在点 x_k 展开，有

$$f\left(x\right)\approx f\left(x_k\right)+f'\left(x_k\right)\left(x-x_k\right)$$

$f\left(x\right)=0$ 可近似表示为 $f\left(x_k\right)+f'\left(x_k\right)\left(x-x_k\right)=0$

则迭代形式为：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f\left(x_k\right)}{f'\left(x_k\right)}\quad\left(k=0,1,\cdots\right)$

弦截法：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{\left(x_k-x_{k-1}\right)}{f\left(x_k\right)-f\left(x_{k-1}\right)}f\left(x_k\right)$

非线性常微分方程的 Euler 法：

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f\left(x,y\right)\\ y\left(x_0\right)=y_0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n,y_n\right)\\ y_0=y\left(x_0\right)\end{cases}$$

4.会判断一数值积分公式的代数精度。

如果对于次数不超过 m 的多项式均能准确地成立,但对于 *m*+1 次多项式不准确成立,则称该求积公式具有 *m* 次代数精度。

此处的"多项式"，是指{1,x,x^2,x^3……}。

n+1 个节点的插值型求积公式至少具有 n 次代数精确度。

梯形公式代数精确度是 1，Simpson 公式代数精度为 3.

三、数理统计

1.会求参数估计：矩估计与极大似然估计。

一、矩估计

方法：用样本k 阶矩$A_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 估计总体k 阶矩$\mu_k=E\left(X^k\right)$ ，建立含有待估参数的方程，从而解出待估参数。

例 1.设总体 $X \sim B(m,p)$, 其中 p 未知， $X_1, X_2,\dots, X_n$ 为总体的样本, 求 p 的矩估计量.

解：$E\left(X\right)=mp$ ，令$\overline{X}=mp$ ，得$\hat{p}=\overline{X}/m$.

例2 设总体X的概率密度为$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},X_1,\cdots,X_n$ 为样本，求参数σ 的矩估计

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=0$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=\int_{0}^{+\infty}(-x^2)de^{-\frac{x}{\sigma}}$ （用两次分部积分法）

$=(-x^2)e^{-\frac{x}{\sigma}}|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\frac{x}{\sigma}}dx=2\int_0^{+\infty}(-x)d\sigma e^{-\frac{x}{\sigma}}=2\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=2\sigma^2$

令$A_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=2\sigma^2$ 得 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$

注：分部积分法： $\int udv=uv-\int vdu$

例3 设$X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体X的一个样本

$X\sim f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}},\ x\geq\mu\\ 0,\ 其它\end{cases},\theta,\mu$为未知参数，其中$\theta>0$，求$\theta,\mu$ 的矩估计.

解：$E(X)=\int_{\mu}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\int_{\mu}^{+\infty}\left(-x\right)\cdot de^{-\frac{x-\mu}{\theta}}=\left(-x\right)e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}|_{\mu}^{+\infty}+\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx$

$=\mu-\theta e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}|_{\mu}^{+\infty}=\mu+\theta$

$E(X^2)=\int_{\mu}^{+\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\int_{\mu}^{+\infty}\left(-x^2\right)\cdot de^{-\frac{x-\mu}{\theta}}=\left(-x^2\right)e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}|_{\mu}^{+\infty}+\int_{\mu}^{+\infty}2xe^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx$

$=\mu^2+2\theta\int_{\mu}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\mu^2+2\theta E(X)=\mu^2+2\mu\theta+2\theta^2$

令$\begin{cases}\overline{X}=\mu+\theta,\\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=\mu^2+2\mu\theta+2\theta^2\end{cases}$解得$\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2}\\ \hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2}\end{cases}$

方差计算公式：$\hat{\sigma}^2==\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$

二、极大似然估计

例 1.设总体 X 服从参数为 λ (λ>0) 的泊松分布，求 λ 的极大似然估计。

解：设$\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$为从总体X 中随机抽取的样本，样本观察值为$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$

由X 服从泊松分布，得X 的分布律为$p\left(x;\lambda\right)=P\left(X=x\right)=\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\quad ,x=0,1,\cdots$

似然函数为$L\left(\lambda\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=e^{-n\lambda}\dfrac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}$

两边取对数，得$\ln L\left(\lambda\right)=-n\lambda+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i!$

对λ求导，并令其为0,$\dfrac{d\ln L\left(\lambda\right)}{d\lambda}=-n+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$

得$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$　所以λ的极大似然估计为$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$

例2 设总体X的概率密度为$f\left(x\right)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}e^{-\lambda x^a} & ,x\geq 0\\ 0, & ,x<0\end{cases}$,其中$\lambda>0$为待估参数，$a>0$是已知常数,$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$是取自总体$X$ 的样本值，求λ 的极大似然估计值.

解：$L\left(\lambda\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}f\left(x_i,\lambda\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda a x_i^{a-1}e^{-\lambda x_i^a}=\lambda^n a^n\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{a-1}e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a}$

两边取对数,得$\ln L\left(\lambda\right)=n\ln\lambda+n\ln a+\left(a-1\right)\ln\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a$

对λ求导，并令其为0,$\dfrac{d\ln L\left(\lambda\right)}{d\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a=0$

得 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a}$，为$\lambda$的极大似然估计值.

例 3. 设总体 X 的分布律

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ（$0<\theta<1/2$）是未知参数，3，1，3，0，3，1，2，3，是来自总体 X 的样本观察值,求参数 θ 的极大似然估计值.

解：$L(\theta)=(1-2\theta)\cdot 2\theta\cdot(1-\theta)\cdot(1-2\theta)\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)\cdot 2\theta\cdot(1-\theta)\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)$

$=4\theta^6(1-2\theta)^4(1-\theta)^2$

两边取对数，的$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+4\ln(1-2\theta)+2\ln(1-\theta)$

对θ求导，并令其为0,$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{6}{\theta}-\dfrac{8}{1-2\theta}-\dfrac{2}{1-\theta}=0$

的$\theta=\dfrac{7+\sqrt{13}}{12}$和$\theta=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$,因为$\theta=\dfrac{7+\sqrt{13}}{12}>\dfrac{1}{2}$不合题意，

所以θ 的极大似然估计值为$\theta=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$

例 4. 设 $X\sim U(a,b)$, $x_1, x_2,\ldots, x_n$ 是 X 的一个样本值, 求 a , b 的极大似然估计值与极大似然估计量.

解：由$X\sim U(a,b)$知, X 的密度函数为$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ,a<x<b\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$

似然函数为$L(a,b)=\prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i,a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n} & ,a<x_i<b\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$

似然函数只有当$a<x_i<b, i=1,2,\cdots,n$ 时才能获得最大值，

且a越大，b越小, $L(a,b)$越大

令$x_{\min}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $x_{\max}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,取$\hat{a}=x_{\min}$,$\hat{b}=x_{\max}$

则对满足$a\le x_{\min}\le x_{\max}\le$的一切$a<b$,都有$\dfrac{1}{(b-a)^n}\le\dfrac{1}{(x_{\max}-x_{\min})^n}$

故有$\hat{a}=x_{\min}$,$\hat{b}=x_{\max}$是a,b的极大似然估计值.

$\hat{a}=X_{\min}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$,$\hat{b}=X_{\max}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

分别为a,b的极大似然估计量

2.假设检验的思想、原理是什么？假设检验中 p—值是什么含义？你知道哪几种非参数检验方法？会列联表的独立性检验。

假设检验的思想原理：

假设检验的理论依据：实际推断原理（小概率原理）：

小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的。

假设检验是概率意义下的反证法.即：

首先假定原假设 H_0 成立，依照事先给定的概率 α（称为显著性水平），构造一个小概率事件。然后根据抽样的结果，观察此小概率事件是否发生。若此小概率事件发生了，则认为原假设是不真的，从而作出拒绝 H_0 的判断。否则，就接受 H_0。

拒绝原假设是有说服力的, 而接受原假设是没有说服力的，因此应把希望否定的假设作为原假设。

P 值的含义：

一般在一个假设检验中，利用观测值能够做出的拒绝原假设 H_0 的最小显著性水平称为该检验的 p 值。按 p 值的定义，对于任意指定的显著性水平 α，有以下结论：

（1）若 $\alpha < p$ 值，则在显著性水平 α 下接受 H_0.

（2）若 $\alpha \geq p$ 值，则在显著性水平 α 下拒绝 H_0.

p 值反映了样本信息中所包含的反对原假设 H_0 的依据的强度, p 值是已经观测到的一个小概率事件的概率， p 值越小，H_0 越有可能不成立，说明样本信息中反对 H_0 的依据的强度越强、越充分。

非参数检验方法：

χ^2 拟合优度检验：检验总体 X 的分布函数是否为 F(x)

柯尔莫哥洛夫检验：检验经验分布是否服从某种理论分布

斯米尔诺夫检验：检验两个样本是否服从同一分布

独立性检验：

独立性检验列联表：

X \ Y		Y				$n_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{k}n_{ij}$
		B_1	B_2	$\cdots$	B_k	
X	A_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1k}	$n_{1\bullet}$
	A_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2k}	$n_{2\bullet}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
	A_m	n_{m1}	n_{m2}	$\cdots$	n_{mk}	$n_{m\bullet}$
$n_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{m}n_{ij}$		$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$\cdots$	$n_{\bullet k}$	

例 1.

X \ Y	患慢性气管炎者	未患慢性气管炎者	合计	患病率%
吸烟	**43**	**162**	**205**	**21.0**
不吸烟	**13**	**121**	**134**	**9.7**
合计	**56**	**283**	**339**	**16.5**

解：检验的问题为：H_0 ：总体的两个指标X 和Y 是相互独立的。

统计量为：$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_{ij}-\frac{n_i\cdot n_{\bullet j}}{n})^2}{n_i n_{\bullet j}}$

观察值为：$\hat{\chi}^2 = n\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_{ij}-\frac{n_i\cdot n_{\bullet j}}{n})^2}{n_i n_{\bullet j}} = 7.48$

[上侧]分位数：$\chi^2_{0.01}((m-1)(k-1)) = \chi^2_{0.01}(1) = 6.635$

显然：$\chi^2_{0.01}(1) = 6.635 < \hat{\chi}^2 = 7.48$

因而拒绝原假设，即认为慢性气管炎与吸烟有关。

3.掌握方差分析表格结构，会填出空格（单因素、双因素无交互作用、有交互作用）

SST：全部观察值x_{ij}与总平均值$\bar{x}$ 的离差平方和

$$SST=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}\right)^2$$

SSE：组内离差平方和

每个水平或组的各样本数据与对应组平均值作差，平方，再求和

$$SSE=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2$$

SSA：组间平方和

各组平均值$\bar{x}_i\left(i=1,2,\cdots,k\right)$与总平均值$\bar{x}$ 的离差平方和

$$SSA=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\bar{x}_i-\bar{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}n_i\left(\bar{x}_i-\bar{x}\right)^2$$，n_i为对应组观察值个数

$SST=SSE+SSA$

数据的简化：数据经过变换$X_{ij}^{'}=b\left(X_{ij}-a\right)$ 后，对F 值的计算没有影响

单因素方差分析表：（其中，k 为水平的个数，**n 为总的数据个数**）

方差来源	平方和 SS	自由度 df	均方 MS	F 值
组间（因素影响）	SSA	k-1	MSA = SSA/(k-1)	$F=\dfrac{MSA}{MSE}$
组内（误差）	SSE	n-k	MSE = SSE/(n-k)	
总和	SST	n-1		

双因素无重复（无交互作用）：

因素 B / 因素 A	B_1	B_2	…	B_b	$T_{i.}=\sum_{j=1}^{b}X_{ij}$	$\overline{X}_{i.}=T_{i.}/b$
A_1	X_{11}	X_{12}	…	X_{1b}	$T_{1.}$	$\overline{X}_{1.}$
…	…	…	…	…	…	…
A_a	X_{a1}	X_{a2}	…	X_{ab}	$T_{a.}$	$\overline{X}_{a.}$
$T_{.j}=\sum_{i=1}^{a}X_{ij}$	$T_{.1}$	$T_{.2}$	…	$T_{.b}$	$T=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}X_{ij}$	
$\overline{X}_{.j}=T_{.j}/a$	$\overline{X}_{.1}$	$\overline{X}_{.2}$	…	$\overline{X}_{.b}$		$\overline{X}=\frac{1}{ab}T$

总离差平方和：$SS_T=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(X_{ij}-\overline{X}\right)^2$，$SS_T=SS_A+SS_B+SS_E$

因素A/B的离差平方和：$SS_A=b\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{X}_{i.}-\overline{X}\right)^2$，$SS_B=a\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{X}_{.j}-\overline{X}\right)^2$

误差平方和：$SS_E=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(X_{ij}-\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{.j}+\overline{X}\right)^2$

双因素（无交互作用）试验的方差分析表

方差来源	平方和 SS	自由度 df	均方和 MS	F 值	F 值临界值
因素 A	SS_A	df_A	$MS_A=\frac{SS_A}{df_A}$	$F_A=\frac{MS_A}{MS_E}$	$F_\alpha((a-1),(a-1)(b-1))$
因素 B	SS_B	df_B	$MS_B=\frac{SS_B}{df_B}$	$F_B=\frac{MS_B}{MS_E}$	$F_\alpha((b-1),(a-1)(b-1))$
误差	SS_E	df_E	$MS_E=\frac{SS_E}{df_E}$		
总和	SS_T	df_T			

$$df_E=df_T-df_A-f_B,\quad SS_E=SS_T-SS_A-SS_B$$

各因素离差平方和的自由度 df_A、df_B 为水平数减一，总平方和的自由度 df_T 为试验总次数减一。

双因素有重复（有交互作用）试验资料表

因素 B / 因素 A	B_1	B_2	$\cdots$	B_b
A_1	X_{111} $\cdots$ X_{11n}	X_{121} $\cdots$ X_{12n}	$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$	X_{1b1} $\cdots$ X_{1bn}
$\cdots$	$\cdots\cdots$			
A_a	X_{a11} $\cdots$ X_{a1n}	X_{a21} $\cdots$ X_{a2n}	$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$	X_{ab1} $\cdots$ X_{abn}

所有观测值的平均值：$\bar{X}=\frac{1}{abn}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}X_{ijk}$

在条件(A_i,B_j)下的平均值：$\bar{X}_{ij\bullet}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{ijk}$

在条件A_i下的平均值：$\bar{X}_{i\bullet\bullet}=\frac{1}{bn}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}X_{ijk}=\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\bar{X}_{ij\bullet}$

在条件B_i下的平均值：$\bar{X}_{\bullet j\bullet}=\frac{1}{an}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n}X_{ijk}=\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a}\bar{X}_{ij\bullet}$

总离差平方和：$SS_T=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(X_{ijk}-\bar{X}\right)^2$

可分解为：$SS_T=SS_A+SS_B+SS_{A\times B}+SS_E$

因素A的离差平方和：

$$SS_A=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{X}_{i\bullet\bullet}-\bar{X}\right)^2=bn\sum_{i=1}^{a}\left(\bar{X}_{i\bullet\bullet}-\bar{X}\right)^2$$

因素B的离差平方和：

$$SS_B=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{X}_{\bullet j\bullet}-\bar{X}\right)^2=an\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{X}_{\bullet j\bullet}-\bar{X}\right)^2$$

交互作用的离差平方和：

$$SS_{A\times B}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{X}_{ij\bullet}-\bar{X}_{i\bullet\bullet}-\bar{X}_{\bullet j\bullet}+\bar{X}\right)^2=n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{X}_{ij\bullet}-\bar{X}_{i\bullet\bullet}-\bar{X}_{\bullet j\bullet}+\bar{X}\right)^2$$

双因素（有重复）试验的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方和	**F** 值	**F** 值临介值
因素**A**	SS_A	df_A	$MS_A=\frac{SS_A}{df_A}$	$F_A=\frac{MS_A}{MS_E}$	$F_\alpha((a-1), ab(n-1))$
因素**B**	SS_B	df_B	$MS_B=\frac{SS_B}{df_B}$	$F_B=\frac{MS_B}{MS_E}$	$F_\alpha((b-1), ab(n-1))$
$A\times B$	$SS_{A\times B}$	$df_{A\times B}$	$MS_{A\times B}=SS_{A\times B}/df_{A\times B}$	$F_{A\times B}=\frac{MS_{A\times B}}{MS_E}$	$F_\alpha((a-1)(b-1), ab(n-1))$
误差	SS_E	df_E	$MS_E=\frac{SS_E}{df_E}$		
总和	SS_T	df_T			

$$df_A=a-1,df_B=b-1,df_{A\times B}=df_A\times df_B,df_E=ab\left(n-1\right),df_T=abn-1$$

4.会解读 Excel 的回归分析输出结果，据此能写出自变量因变量以及回归方程，判别回归效果（拟合程度）【见其它文档】
5.会正交设计的极差分析法，找出各因素影响的主次顺序，最佳生产工艺