北京化工大学

Beijing University of Chemical Technology

计算方法讲义 (二)

插值分析

Cheng Yong

目录

第 1 章 插值分析 **1**

1.1 基本概念 1

1.2 拉格朗日 (Lagrange) 插值 3

1.2.1 两点拉格朗日插值 3

1.2.2 三点拉格朗日插值 5

1.2.3 多点拉格朗日插值 7

1.3 Newton 插值公式 10

1.3.1 Newton 插值法 10

1.3.2 差商 10

1.4 埃尔米特插值 16

1.4.1 待定系数法 17

1.4.2 两点三次 Hermite 插值 18

1.5 分段插值 21

1.5.1 线性分段插值 22

1.5.2 分段三次 Hermite 插值 24

1.6 本章小结 24

创建日期：2019 年 7 月 5 日

更新日期：2020 年 2 月 11 日

第 1 章 插值分析

1.1 基本概念

在初等微积分中，我们用函数 $y = f(x)$ 来描述一个平面曲线，但在实际问题中，函数 $y = f(x)$ 往往是通过实验观测得到的一组数据来给出的，即在某个区间 $[a, b]$ 上给出一系列节点的函数值：

$$y_i = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{1.1}$$

或者给出一张函数表：

n	0	1	2	$\cdots$	n
x	x_0	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots\cdots$	y_n

表 1.1: 函数表

如何通过这些对应的关系去找出函数 $f(x)$ 的一个近似表达式或求某个不在期间的给定点 x 的函数值呢?

例 1. *PM2.5 指数计算*

某日北京市昌平区南环东路某地点 PM2.5 随时间变化如下表：

时间 (t)	0	4	8	12	16	20
PM2.5 值	63	54	146	181	172	95

表 1.2: 南环东路某地点 PM2.5 测量值

要想知道 PM2.5 随时间变化的情况 $PM = f(t)$，或某一时刻 $t = 10$ 的 PM2.5 指数值应该如何计算?

最简单实用的方法就是插值。简单地说，插值的目的就是根据给定的数据表，寻找一个解析形式的函数 $p(x)$ 近似代替 $f(x)$，根据 $p(x)$ 值计算来对 $f(x)$ 值进行估计。

已知 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一组 $n+1$ 个不同点 $a \le x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \le b$ 上的函数值 $y_i = f(x_i), (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$，寻找一个 $f(x)$ 的近似函数 $p(x)$，且满足

$$p(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2}$$

称 $f(x)$ 为被插函数，称函数 $p(x)$ 为插值函数 (公式)，若 $p(x)$ 为多项式函数，称 $p(x)$ 为插值多项式。

称数据表中给出的已知节点 x_i 为插值节点；其对应的函数值 y_i 为样本点；

称待求函数值的节点为插值点；

称插值节点所界定的范围 $\Delta=[\min x_i,\max x_i]$ 为插值区间。

例 2. $\sin x$ 插值的例子

例如，对函数 $y=\sin x$，若给定 $[0,\pi]$ 的 5 个等分点，可构造插值函数如下：

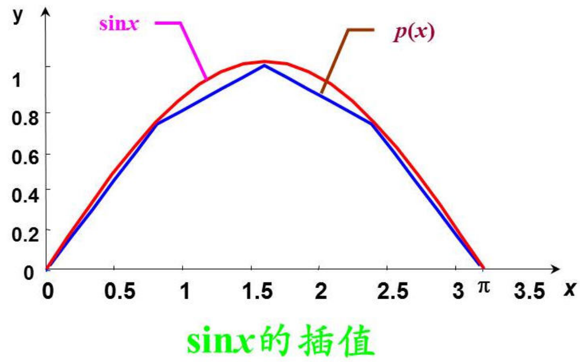

图 1.1: $\sin x$ 插值

对于插值函数 $p(x)$ 与被插函数 $f(x)$ 在节点处的函数值相等，但在节点外 $p(x)$ 与 $f(x)$ 可能会有偏离，因此 $p(x)$ 代替 $f(x)$ 必然存在误差。函数 $p(x)$ 的类型有各种不同的选择，但最常用的类型是代数多项式，因为代数多项式具有一些很好的性质，如它具有各阶导数，计算多项式比较方便等，本章讨论的就是代数插值多项式。

代数插值多项式的存在及唯一性

设函数 $y=f(x)$ 在区间上的插值多项式为

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{1.3}$$

且满足

$$p_n(x_i)=y_i=f(x_i)\quad i=0,1,2,\cdots,n \tag{1.4}$$

即多项式 $p_n(x)$ 的系数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足方程组：

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0\\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1\\ \cdots\cdots\\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases} \tag{1.5}$$

上述方程组系数行列式为 $n+1$ 阶 Vandermond 行列式：

$$V=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j-x_i)\overset{x_i\neq x_j}{\neq}0 \tag{1.6}$$

根据克莱姆 (Cramer) 法则，上述线性方程组具有唯一解。

定理 1. 命题 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一组 $n+1$ 个不同点 $a \le x_0, x_1, \cdots, x_n \le b$ 上的函数值，并且 $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,2,\cdots,n)$。则满足插值条件 $p(x_i) = y_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 的插值多项式 $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 存在且唯一。

1.2 拉格朗日 (Lagrange) 插值

虽然线性方程组推出的插值多项式存在且唯一，但通过解线性方程组求插值多项式却不是好方法，而需采用其他的方法。

现将插值多项式表示成如下形式：已知 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一组 $n+1$ 个不同点

$$a \le x_0, x_1, \cdots, x_n \le b \tag{1.7}$$

上的函数值

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0,1,2,\cdots,n \tag{1.8}$$

构造满足插值条件 $L_n(x_i) = y_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 的次数不超过 n 次的多项式

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) f(x_i) \tag{1.9}$$

其中 $\varphi_i(x)(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 是次数不超过 n 次的多项式。

1.2.1 两点拉格朗日插值

两点插值也称线性插值。设已知两个不同节点 x_0, x_1 上的函数值 (样本值)

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1 \tag{1.10}$$

构造满足插值条件 $L_1(x_i) = y_i(i = 0,1)$ 的次数不超过一次多项式 $L_1(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1$。其中 $\varphi_i(x)(i = 0,1)$ 是次数为 1 次的多项式。

实际上就是构造一次的多项式 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 并满足：

$$\begin{aligned} L_1(x_0) = \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 = y_0 \\ L_1(x_1) = \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 = y_1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

令 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 满足如下的条件：

	x_0	x_1
$\varphi_0(x)$	1	0
$\varphi_1(x)$	0	1

显然可以使上述两式成立。

由于 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 均为一次多项式，因此可求得：

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad \varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{1.12}$$

因此有

$$L_1(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}y_1 \tag{1.13}$$

这就是两点 Lagrange 插值 (线性插值) 公式，用它来作为函数 $y = f(x)$ 的近似。

显然 $L_1(x)$ 是次数不超过一次的多项式，且满足：

$$L_1(x_0) = \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 = 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 = y_0 \tag{1.14}$$

$$L_1(x_1) = \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 = 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 = y_1 \tag{1.15}$$

即 $L_1(x)$ 满足问题 1 中所要求的条件，$L_1(x)$ 即为所求。

我们称 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_1(x)$ 为 Lagrange 插值基函数。

实际上 $L_1(x)$ 就是这两个插值基函数的线性组合。

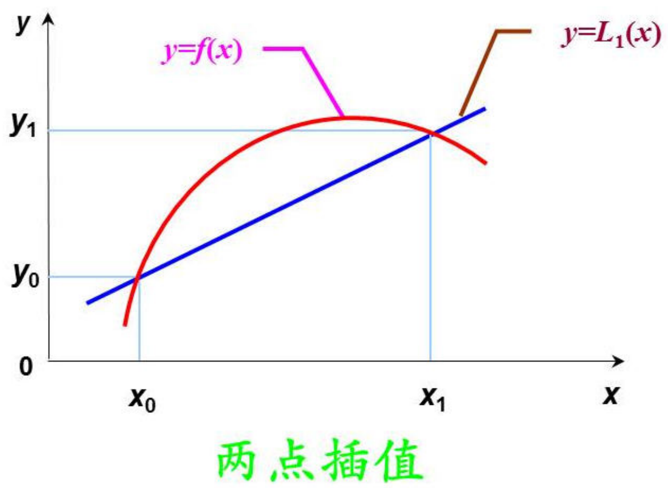

图 1.2: 两点拉格朗日插值

例 3. 设 $y = f(x) = x^{1/2}$ 在 $x = 100, 121$ 处的函数值为 $10, 11$，试以这两点建立 $y = x^{1/2}$ 的 *Lagrange* 一次插值多项式，并由此计算 $f(115)$ 处的近似值。

解：取 $x_0 = 100, x_1 = 121$，则 $y_0 = f(x_0) = 10, y_1 = f(x_1) = 11$，

$$\varphi_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 121}{100 - 121} \tag{1.16}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 100}{121 - 100} \tag{1.17}$$

$$L_1(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 \tag{1.18}$$

$$= \frac{x - 121}{100 - 121} \cdot 10 + \frac{x - 100}{121 - 100} \cdot 11 \tag{1.19}$$

$$= \frac{x + 110}{21} \tag{1.20}$$

当 $x = 115$ 时，

$$L_1(115) = \frac{115 - 121}{100 - 121} \cdot 10 + \frac{115 - 100}{121 - 100} \cdot 11 \tag{1.21}$$

$$= 10.71428 \tag{1.22}$$

而 $f(115) = \sqrt{115} = 10.723805$，$f(115) \approx L_1(115)$。该近似值有三位有效数字。

由上面的例子可见，两点插值的精度很低。原因是我们用线性函数来代替非线性函数，不可能有很好的效果。为了进一步改进插值精度，下面考察三点情况下的拉格朗日插值公式。

1.2.2 三点拉格朗日插值

问题 2 设已知三个不同节点 x_0, x_1, x_2 上的函数值 (样本值)

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2 \tag{1.23}$$

构造满足插值条件 $L_2(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2)$ 的次数不超过 2 次多项式

$$L_2(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2 \tag{1.24}$$

其中 $\varphi_i(x)(i = 0, 1, 2)$ 是次数为 2 次的多项式。实际上就是构造二次的多项式 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$，满足：

$$L_2(x_0) = \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 + \varphi_2(x_0)y_2 = y_0 \tag{1.25}$$

$$L_2(x_1) = \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 + \varphi_2(x_1)y_2 = y_1 \tag{1.26}$$

$$L_2(x_2) = \varphi_0(x_2)y_0 + \varphi_1(x_2)y_1 + \varphi_2(x_2)y_2 = y_2 \tag{1.27}$$

令 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 满足如下的条件：

	x_0	x_1	x_2
$\varphi_0(x)$	1	0	0
$\varphi_1(x)$	0	1	0
$\varphi_2(x)$	0	0	1

显然可以使上面三式成立。由于 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 均为二次多项式，因此可求得：

$$\varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \tag{1.28}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \tag{1.29}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \tag{1.30}$$

因此有：$L_2(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2$。

这就是三点 Lagrange 插值公式，用它来作为函数 $y = f(x)$ 的近似。显然 $L_2(x)$ 是次数不超过二次的多项式，且满足：

$$L_2(x_0) = \varphi_0(x_0)y_0 + \varphi_1(x_0)y_1 + \varphi_2(x_0)y_2 \tag{1.31}$$

$$= 1 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = y_0 \tag{1.32}$$

$$L_2(x_1) = \varphi_0(x_1)y_0 + \varphi_1(x_1)y_1 + \varphi_2(x_1)y_2 \tag{1.33}$$

$$= 0 \cdot y_0 + 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = y_1 \tag{1.34}$$

$$L_2(x_2) = \varphi_0(x_2)y_0 + \varphi_1(x_2)y_1 + \varphi_2(x_2)y_2 \tag{1.35}$$

$$= 0 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = y_2 \tag{1.36}$$

即 $L_2(x)$ 满足问题 2 中所要求的条件，$L_2(x)$ 即为所求。称 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 为 Lagrange 插值基函数。实际上 $L_2(x)$ 就是这三个插值基函数的线性组合。

例 4. *设 $y = f(x) = x^{1/2}$ 在 $x = 100, 121, 144$ 处的函数值为 $10, 11, 12$，试以这三点建立 $y = x^{1/2}$ 的二次 Lagrange 插值多项式，并由此计算 $f(115)$ 处的近似值。*

解：取 $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$，则 $y_0 = f(x_0) = 10, y_1 = f(x_1) = 11, y_2 = f(x_2) = 12$。

$$\varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} \tag{1.37}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} \tag{1.38}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} \tag{1.39}$$

$$L_2(x) = \varphi_0(x)y_0 + \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2 \tag{1.40}$$

$$= \frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} \cdot 10 \tag{1.41}$$

$$+ \frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} \cdot 11 \tag{1.42}$$

$$+ \frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} \cdot 12 \tag{1.43}$$

当 $x = 115$ 时，

$$L_2(115) = \varphi_0(115) \cdot 10 + \varphi_1(115) \cdot 11 + \varphi_2(115) \cdot 12 = 10.7228 \tag{1.44}$$

而 $f(115) = \sqrt{115} = 10.723805$，$f(115) \approx L_2(115)$。可见近似值具有四位有效数字。

1.2.3 多点拉格朗日插值

我们可以用同样的方法建立多点的插值公式。

问题 3 设已知 $n+1$ 个不同节点 $x_0, x_1, x_2 \cdots, x_n$ 上的函数值 $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \cdots, f(x_n) = y_n$ 构造满足插值条件 $L_n(x_i) = y_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 的次数不超过 n 次多项式

$$L_n(x) = \varphi_0(x) y_0 + \varphi_1(x) y_1 + \cdots + \varphi_n(x) y_n \tag{1.45}$$

其中 $\varphi_i(x)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 是次数为 n 的多项式。

同前述方法，令 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 满足如下的条件：

	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$\varphi_0(x)$	1	0	$\cdots$	0
$\varphi_1(x)$	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\varphi_n(x)$	0	0	$\cdots$	1

表 1.3: 需要满足的条件

可求得：

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \tag{1.46}$$

$$= \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{1.47}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) y_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) y_i \tag{1.48}$$

这就是 $n+1$ 点 Lagrange 插值 (n 次插值) 公式，用它来作为函数 $y = f(x)$ 的近似。$L_n(x)$ 满足问题 3 中所要求的条件。我们称 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 为 Lagrange 插值基函数。$L_n(x)$ 就是这 $n+1$ 个插值基函数的线性组合。

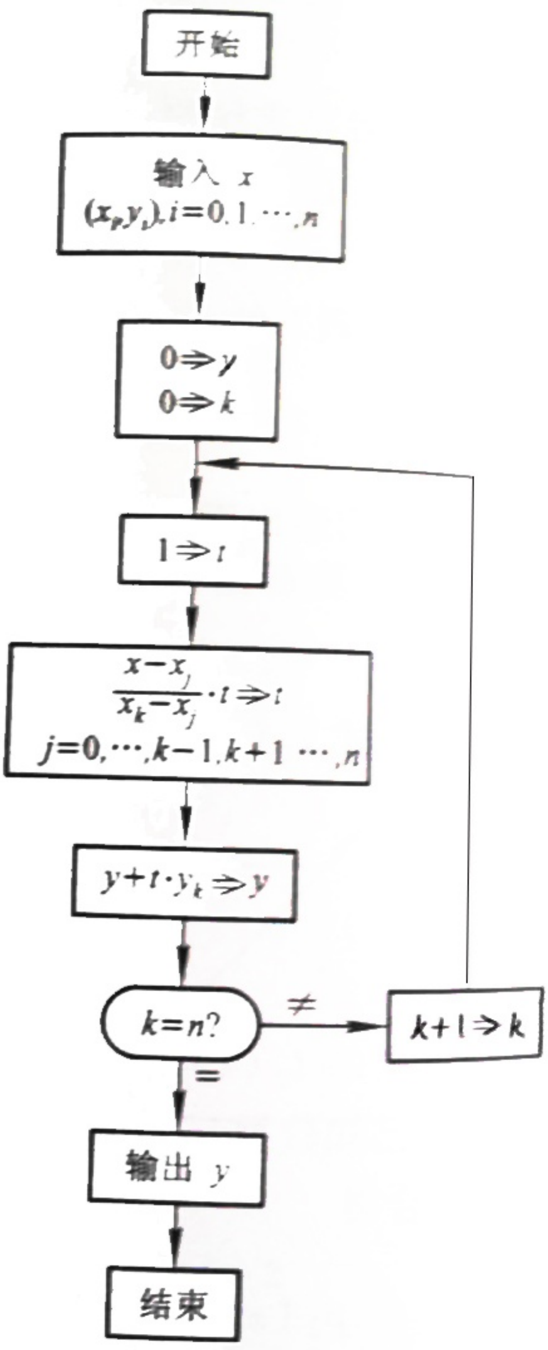

图 1.3: fig001

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define MAXSIZE 50

void input(double x[MAXSIZE], double y[MAXSIZE], long n);

void main(void) {
    double x[MAXSIZE], y[MAXSIZE], _x, _y, t;
    long n, i, j;
```

```
    printf("\n请输入插值节点的个数：");
    scanf("%ld", &n);
    input(x, y, n);
    printf("\n请输入插值点：");
    scanf("%lf", &_x);
    _y = 0;

    for(i = 0; i <= n - 1; i++) {
        t = 1;
        for(j = 0; j <= n-1; j++)
            if(j != i)
                t*=(_x-x[j])/(x[i] - x[j]);
        _y+= t*y[i];
    }
    printf("\n插值点(x,y) = (%lf, %lf)。",_x, _y);
}

void input(double x[MAXSIZE], double y[MAXSIZE], long n) {
    long i;
    for(i = 0; i <= n-1; i++) {
        printf("\n请输入插值节点x[%ld], y[%ld]:", i,i);
        scanf("%lf, %lf", &x[i], &y[i]);
    }
}
```

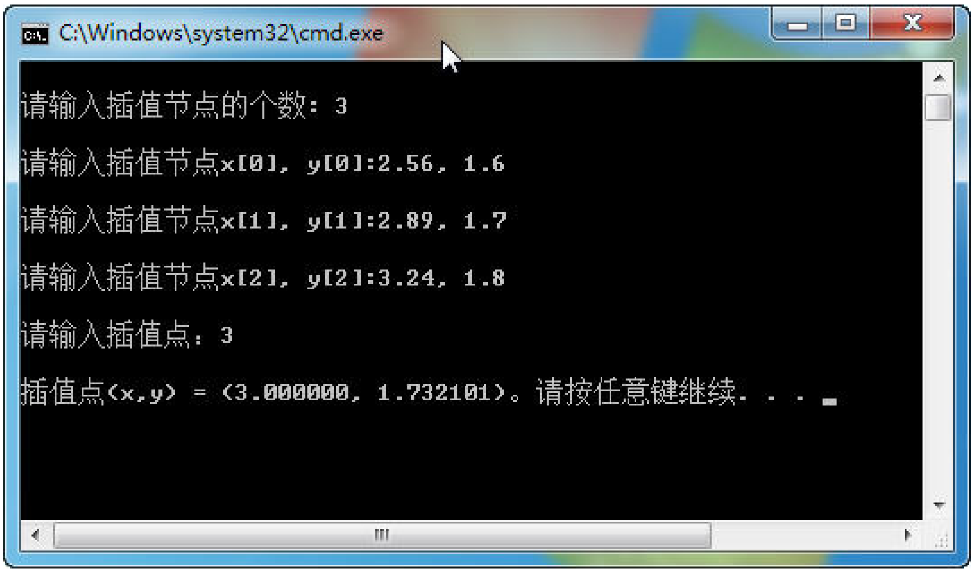

图 1.4: fig001

1. 插值点要求等距；

2. 插值基函数形式简单，但计算比较复杂；

3. 当有新的插值点加入时，基函数要重新计算；

4. 高次插值的精度不一定高；

1.3 Newton 插值公式

我们知道 Lagrange 插值多项式的插值基函数为：

$$\varphi_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{1.49}$$

上述基函数形式上比较复杂、计算量大，并且重复计算很多，由线性代数可知任何一个 n 次多项式都可以表示成：

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \cdots, (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \tag{1.50}$$

共 $n+1$ 个多项式的线性组合。那么，是否可以将这 $n+1$ 个多项式作为插值基函数呢？答案是肯定的。多项式组

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \cdots, (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \tag{1.51}$$

线性无关，因此可以作为插值基函数。

1.3.1 Newton 插值法

问题 4 设已知 $n+1$ 个不同节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \cdots, f(x_n) = y_n \tag{1.52}$$

构造满足插值条件 $p_n(x_i) = f(x_i) = y_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 的次数不超过 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \tag{1.53}$$

$$+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \tag{1.54}$$

$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}) \tag{1.55}$$

为了便于计算系数值 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$，我们引入差商的概念。

1.3.2 差商

设 $f(x)$ 在不同节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值为：

$$f(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{1.56}$$

称 $f(x_i)$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i 的零阶差商。

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \quad (i, j = 0, 1, 2, \cdots, n, i \neq j) \tag{1.57}$$

为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j 的一阶差商。

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i} \quad (i, j, k = 0, 1, 2, \cdots, n, i \neq j \neq k) \tag{1.58}$$

为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_j, x_k 的二阶差商。

依此类推，$f(x)$ 关于节点 $x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ 的 k 阶差商为：

$$f(x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}) = \frac{f(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}) - f(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_{k-1}})}{x_{i_k} - x_{i_0}} \tag{1.59}$$

显然有：

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{1.60}$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} \tag{1.61}$$

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_k) = \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_k) - f(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1})}{x_k - x_0} \tag{1.62}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.63}$$

差商具有如下性质：

性质 1. n 阶差商可以表示成 $n+1$ 个函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 的线性组合，即：

$$f[x_0, \cdots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \tag{1.64}$$

该性质说明：k 阶差商 $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ 计算是由函数值 $f(x_0), f(x_1), \cdots f(x_k)$ 线性组合而成。

例如：

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \tag{1.65}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \tag{1.66}$$

$$= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0} \tag{1.67}$$

$$= \frac{-\frac{f(x_0)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)}{x_1-x_0} - \frac{f(x_1)}{x_2-x_1} + \frac{f(x_2)}{x_2-x_1}}{x_2 - x_0} \tag{1.68}$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \tag{1.69}$$

性质 2 (对称性). 差商与节点的顺序无关。即:

$$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0] \tag{1.70}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] \tag{1.71}$$

使用表格法计算差商:

节点	样本值	一阶差商	二阶差商	$\cdots$	n阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0,x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1,x_2)$	$f(x_0,x_1,x_2)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	
x_n	$f(x_n)$	$f(x_{n-1},x_n)$	$f(x_{n-2},x_{n-1},x_n)$	$\cdots$	$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)$

图 1.5: 表格法计算差商

例 5. 已知节点 $0, 2, 3, 5$ 对应的函数值为 $1, 3, 2, 5$，试使用表格法计算差商值。

节点	样本值	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	1			
2	3	1		
3	2	-1	$-\frac{2}{3}$	
5	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{10}$

表 1.4: 差商计算

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{3-1}{2-0} = 1 \tag{1.72}$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{5-2}{5-3} = \frac{3}{2} \tag{1.73}$$

$$\cdots\cdots \tag{1.74}$$

设已知 $n+1$ 个不同节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \cdots\ f(x_n) = y_n \tag{1.75}$$

构造满足插值条件 $p_n(x_i)=f(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的次数不超过 n 次多项式

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots \tag{1.76}$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{1.77}$$

由插值条件可得：

$$a_0=f(x_0) \tag{1.78}$$
$$a_1=f(x_0,x_1) \tag{1.79}$$
$$\cdots \tag{1.80}$$
$$a_n=f(x_0,x_1,\cdots,x_n) \tag{1.81}$$

这样可得到差商形式的 Newton 插值公式如下：
一次插值多项式：

$$p_1(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0) \tag{1.82}$$

二次插值多项式：

$$p_2(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1) \tag{1.83}$$

……

n 次插值多项式：

$$p_n(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\cdots \tag{1.84}$$
$$+f(x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{1.85}$$

可以验证 $f(x_i)=N_n(x_i),i=0,1,2,\cdots,n$，即 $N_n(x)$ 满足插值条件，因此有如下结论：

定理 2 (牛顿插值多项式). *已知 $y=f(x)$ 函数表 $(x_i,f(x_i)),i=0,1,2,\cdots,n$，且 $i\neq j$ 有 $x_i\neq x_j$，则满足插值条件 $f(x_i)=P_n(x_i),i=0,1,2,\cdots,n$ 的插值多项式为：*

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x) \tag{1.86}$$

其中 $N_n(x)$ 为牛顿插值多项式，$R_n(x)$ 为余项，

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0) \tag{1.87}$$
$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots \tag{1.88}$$
$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{1.89}$$
$$R_n(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \tag{1.90}$$
$$=f[x,x_0,\cdots,x_n]\prod_{j=1}^{n}(x-x_j) \tag{1.91}$$

证明. 已知 $y=f(x)$ 函数表如下所示：

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

其中当 $i\neq j$ 时 $x_i\neq x_j$，由差商的定义及对称性，可以得到：

$$f\left[x,x_0\right]=\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} \tag{1.92}$$

$$\Rightarrow f(x)=f\left(x_0\right)+f\left[x,x_0\right]\left(x-x_0\right) \tag{1.93}$$

$$f\left[x,x_0,x_1\right]=\frac{f\left[x,x_0\right]-f\left[x_0,x_1\right]}{x-x_1} \tag{1.94}$$

$$\Rightarrow f\left[x,x_0\right]=f\left[x_0,x_1\right]+f\left[x,x_0,x_1\right]\left(x-x_1\right) \tag{1.95}$$

$$\begin{gathered}f\left[x,x_0,x_1,x_2\right]=\frac{f\left[x,x_0,x_1\right]-f\left[x_0,x_1,x_2\right]}{x-x_2}\\ \Rightarrow f\left[x,x_0,x_1\right]=f\left[x_0,x_1,x_2\right]+f\left[x,x_0,x_1,x_2\right]\left(x-x_2\right)\end{gathered} \tag{1.96}$$

一般地，可得：

$$\begin{gathered}f\left[x,x_0,x_1,\ldots,x_n\right]=\frac{f\left[x,x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\right]-f\left[x_0,x_1,\ldots,x_n\right]}{x-x_n}\\ \Rightarrow f\left[x,x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\right]=f\left[x_0,x_1,\ldots,x_n\right]+f\left[x,x_0,x_1,\ldots,x_n\right]\left(x-x_n\right)\end{gathered} \tag{1.97}$$

综上，可得到如下式子：

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f\left[x,x_0\right]\left(x-x_0\right) \tag{1.98}$$

$$f\left[x,x_0\right]=f\left[x_0,x_1\right]+f\left[x,x_0,x_1\right]\left(x-x_1\right) \tag{1.99}$$

$$f\left[x,x_0,x_1\right]=f\left[x_0,x_1,x_2\right]+f\left[x,x_0,x_1,x_2\right]\left(x-x_2\right) \tag{1.100}$$

$$\vdots \tag{1.101}$$

$$f\left[x,x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\right]=f\left[x_0,x_1,\ldots,x_n\right]+f\left[x,x_0,x_1,\ldots,x_n\right]\left(x-x_n\right) \tag{1.102}$$

现在将式 (1.99) 两边乘以 $(x-x_0)$，式 (1.100) 两边乘以 $(x-x_0)(x-x_1)$，$\cdots$，式 (1.102) 两边乘以 $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$：

然后把所有的式子相加在化简，得到：

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f\left[x_0,x_1\right]\left(x-x_0\right) \tag{1.103}$$

$$+f\left[x_0,x_1,x_2\right]\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)+\cdots \tag{1.104}$$

$$+f\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right) \tag{1.105}$$

$$+f\left[x,x_0,x_1,\cdots,x_n\right]\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\cdots\left(x-x_n\right) \tag{1.106}$$

$$=N_n(x)+R_n(x) \tag{1.107}$$

其中 $N_n(x)$ 为牛顿插值多项式，$R_n(x)$ 为余项：

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \tag{1.108}$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \tag{1.109}$$
$$+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \tag{1.110}$$
$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{1.111}$$
$$= f[x, x_0, \cdots, x_n]\prod_{j=1}^{n}(x - x_j) \tag{1.112}$$

□

例 6. 已知节点 $0,2,3,5$ 对应的函数值为 $1,3,2,5$，构造三次 *Newton* 插值多项式，当 $x = 2.5$ 时，计算 *Newton* 多项式插值结果。

解：由前面计算的差商值，我们很容易写出三次 *Newton* 插值多项式如下：

$$p_3(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) \tag{1.113}$$
$$+ f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{1.114}$$
$$= 1 + 1 \cdot (x - 0) - \frac{2}{3}(x - 0)(x - 2) + \frac{3}{10}(x - 0)(x - 2)(x - 3) \tag{1.115}$$
$$= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1 \tag{1.116}$$

当 $x = 2.5$ 时，*Newton* 多项式插值结果为：

$$p_3(2.5) = \frac{3}{10}(2.5)^3 - \frac{13}{6}(2.5)^2 + \frac{62}{15}(2.5) + 1 = 2.479167 \tag{1.117}$$

```
#include<iostream>
#define N 4

using namespace std;

void difference(float *x,float *y,int n) {
    float *f;
    int k,i;
    f =new float[(n*sizeof(float))];
    for(k=1; k<=n; k++) {
        f[0]=y[k];
        for(i=0; i<k; i++)
            f[i+1]=(f[i]-y[i])/(x[k]-x[i]);
        y[k]=f[k];
    }
    cout<<endl;
    return ;
}
```

```

void main() {
    int i;
    float varx =0.895,b;
    float x[N+1] = {0.4,0.55,0.65,0.8,0.9};
    float y[N+1] = {0.41075,0.57815,0.69675,0.88811,1.02652};
    difference(x,(float *)y,N);
    b =y[N];
    for (i=N-1; i>=0; i--) {
        b = b*(varx-x[i])+y[i];
        cout<<b<<endl;
    }
    cout<<"Nn("<<varx<<")="<<b<<endl;
}
```

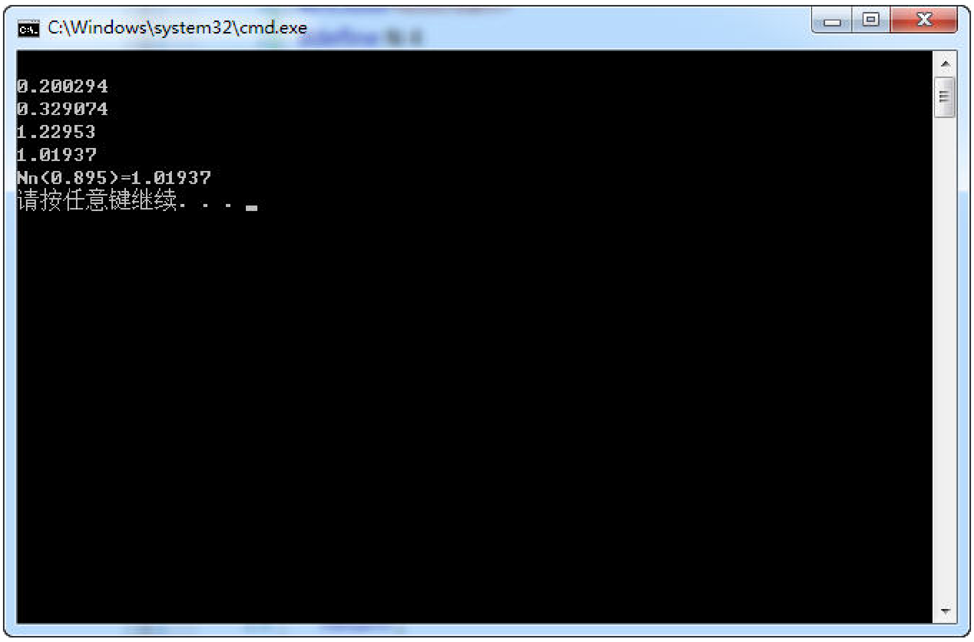

图 1.6: 牛顿差分插值公式结果

1.4 埃尔米特插值

Lagrange 插值、Newton 插值虽然构造比较简单，但仅要求他们的函数值与被插函数的函数值在节点上相同，但没有考虑到导数值。

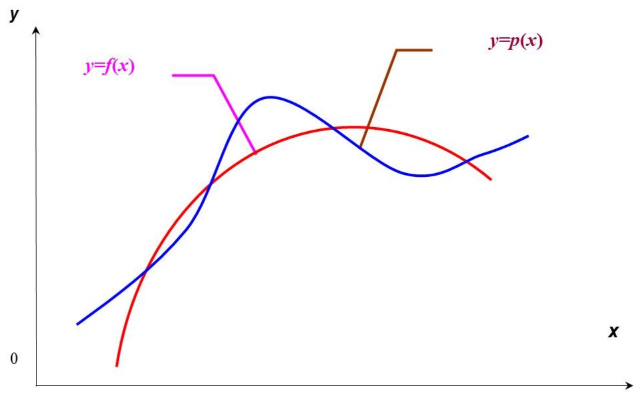

图 1.7: Hermite 插值

Hermite 插值 (切触插值) 是要构造一个插值函数，不但在给定的节点上取已知函数值，而且取已知导数值，使插值函数与被插函数的密合程度更好。

1.4.1 待定系数法

待定系数法是构造多项式最基本的方法。这种方法原理简明并且原则上总是可行的，只是处理过程往往比较繁琐。

例 7. 求作二次式 $\varphi_0(x)$ ，使分别满足插值条件：$\varphi_0(0)=1, \varphi_0(1)=0, \varphi_0'(0)=0$。

解：由于 $\varphi_0(1)=0$，可知它有一个零点 $x_0=1$，故二次式 $\varphi_0(x)$ 具有形式：

$$\varphi_0(x)=(cx+d)(x-1) \tag{1.118}$$

因此：$\varphi_0'(x)=c(x-1)+(cx+d)$
由条件 $\varphi_0(0)=1, \varphi_0'(0)=0$ 可得：

$$\varphi_0(0)=(c\cdot 0+d)(0-1)=1 \tag{1.119}$$

$$\varphi_0'(0)=c(0-1)+(c\cdot 0+d)=0 \tag{1.120}$$

因此得到：$c=d=-1$。从而有：$\varphi_0(x)=-x^2+1$

例 8. 求作三次式 $\varphi_0(x)$，使分别满足插值条件：

$$\varphi_0(0)=1, \varphi_0(1)=0, \varphi_0'(0)=0, \varphi_0'(1)=0 \tag{1.121}$$

解：由于 $\varphi_0(1)=\varphi_0'(1)=0$，可知它有一个二阶零点 $x_0=1$，故三次式 $\varphi_0(x)$ 具有形式

$$\varphi_0(x)=(ax+b)(x-1)^2 \tag{1.122}$$

$\varphi_0'(x) = a(x-1)^2 + 2(ax+b)(x-1)$
再由 $\varphi_0(0) = 1, \varphi_0'(0) = 0$

$$\varphi_0(0) = (a \cdot 0 + b)(0-1)^2 = 1 \tag{1.123}$$

$$\varphi_0'(0) = a(0-1)^2 + 2(a \cdot 0 + b)(0-1) = 0 \tag{1.124}$$

求解得到：$a = 2, b = 1$。因此：$\varphi_0(x) = (2x+1)(x-1)^2$。

1.4.2 两点三次 Hermite 插值

基函数方法是将所有的插值多项式表达为某些简单函数—基函数的线性组合。这些基函数满足某些特定的插值条件，比较容易构造。基函数方法主要针对如下一类问题：

问题：给定 $[a,b]$ 区间上 $n+1$ 个节点和相应的函数值和导数值。

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
y'	y_0'	y_1'	y_2'	$\cdots$	y_n'

构造满足条件 $p_{2n+1}(x_i) = y_i, p_{2n+1}'(x_i) = y_i'$ 的次数不超过 $2n+1$ 次的插值多项式 $p_{2n+1}(x)$。

设 $f(x)$ 在节点 x_0, x_1 处的函数值为 y_0, y_1，在节点 x_0, x_1 处的一阶导数值为 y_0', y_1'，构造次数不超过三次的多项式 $p_3(x)$ 并满足插值条件：

$$p_3(x_0) = y_0, p_3(x_1) = y_1 \tag{1.125}$$

$$p_3'(x_0) = y_0', p_3'(x_1) = y_1' \tag{1.126}$$

根据 Lagrange 方法，它应该具有如下的形式：

$$p_3(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_0'\psi_0(x) + y_1'\psi_1(x) \tag{1.127}$$

其中 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ 为待定的三次多项式。

实际上是在每个节点上构造两个插值基函数，x_0 点对应 $\varphi_0(x), \psi_0(x)$，x_1 点对应 $\varphi_1(x), \psi_1(x)$，其取值情况如下：

	函数值		导数值	
	x_0	x_1	x_0	x_1
$\varphi_0(x)$	1	0	0	0
$\varphi_1(x)$	0	1	0	0
$\psi_0(x)$	0	0	1	0
$\psi_1(x)$	0	0	0	1

图 1.8: 需要满足的条件

这样可由待定系数法或 Lagrange 中构造基函数的方法直接解得：

$$\varphi_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 \tag{1.128}$$

$$\varphi_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \tag{1.129}$$

$$\psi_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 \tag{1.130}$$

$$\psi_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \tag{1.131}$$

即三次 Hermite 插值多项式为：

$$p_3(x)=y_0\varphi_0(x)+y_1\varphi_1(x)+y_0'\psi_0(x)+y_1'\psi_1(x) \tag{1.132}$$

其中：

$$\varphi_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 \tag{1.133}$$

$$\varphi_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \tag{1.134}$$

$$\psi_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 \tag{1.135}$$

$$\psi_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \tag{1.136}$$

例 9. 已知 $f(x)$ 在节点 $1,2$ 处的函数值为 $f(1)=2, f(2)=3$，$f(x)$ 在节点 $1,2$ 处的导数值为 $f'(1)=0, f'(2)=-1$，求 $f(x)$ 的两点三次插值多项式及 $f(x)$ 在 $x=1.5,1.7$ 处的函数值。

解：

$$x_0 = 1, x_1 = 2, y_0 = 2, y_1 = 3, y_0' = 0, y_1' = -1 \tag{1.137}$$

$$p_3(x) = y_0\varphi_0(x) + y_1\varphi_1(x) + y_0'\psi_0(x) + y_1'\psi_1(x) \tag{1.138}$$

$$= y_0\left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 \tag{1.139}$$

$$+ y_1\left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 \tag{1.140}$$

$$+ y_0'(x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 + y_1'(x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 \tag{1.141}$$

分别代入并化简，可求得 Hermite 插值公式为：

$$p_3(x) = 2(1 + 2(x-1))(x-2)^2 + 3(1 - 2(x-2))(x-1)^2 \tag{1.142}$$

$$-(x-2)(x-1)^2 \tag{1.143}$$

$$= -3x^3 + 13x^2 - 17x + 9 \tag{1.144}$$

$$f(1.5) \approx p_3(1.5) = 2.625 \tag{1.145}$$

$$f(1.7) \approx p_3(1.7) = 2.931 \tag{1.146}$$

```
#include<iostream>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>

using namespace std;

int main() {

   double a,b=0.0,d[10]= {0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00},e
       [10]= {1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00},f[10],g[10];
   int j=0,k=0,i=0;
   double x[10]= {0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00};
   double y[10]=
       {0.904837,0.818731,0.740818,0.670320,0.606531,0.548812,0.496585,0.449329,0.406570,0.36

   double m[10]=
       {-0.904837,-0.818731,-0.740818,-0.670320,-0.606531,-0.548812,-0.496585,-0.449329,-0

   cin>>a;
   for(j=0; j<10; j++) {
      for(k=0; k<10; k++) {
         if(k!=j) {
            d[j]+=1/(x[j]-x[k]);
            e[j]*=(a-x[k])/(x[j]-x[k]);
         }
```

```
        }
    }
    for(j=0; j<10; j++) {
        f[j]=(a-x[j])*(e[j]*e[j]);
        g[j]=(1-2*(a-x[j])*d[j])*(e[j]*e[j]);
        b+=(y[j]*g[j]+m[j]*f[j]);
    }
    cout<<b;

    return 0;
}
```

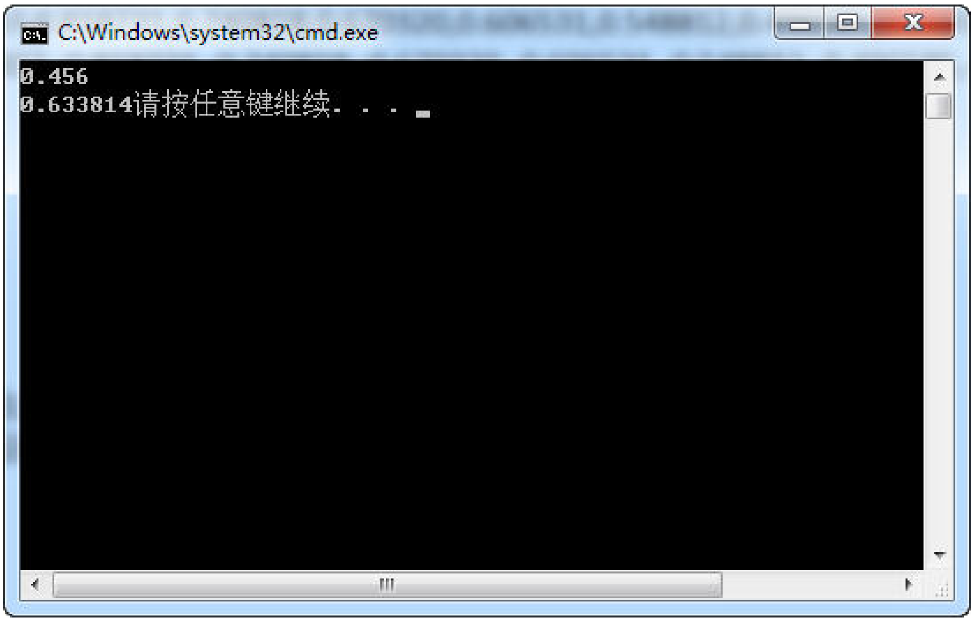

图 1.9: Hermite 插值运行结果

对于高次的 Hermite 插值，可采用类似的方法来进行构造。作为多项式插值，三次已是较高的次数，次数再高就有可能发生 Runge 现象，下面采用被称为分段插值的办法来解决多条件插值问题。

1.5 分段插值

1901 年，Carl Runge 发表了他关于高次多项式插值风险的研究结果，给出一个简单的函数：

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \tag{1.147}$$

该函数被称为龙格函数，该函数有这么一个性质，就是你使用多项式插值来逼近，居然在次数越大的时候误差越大，这和一般的“次数越多越好”的常识有冲突了。

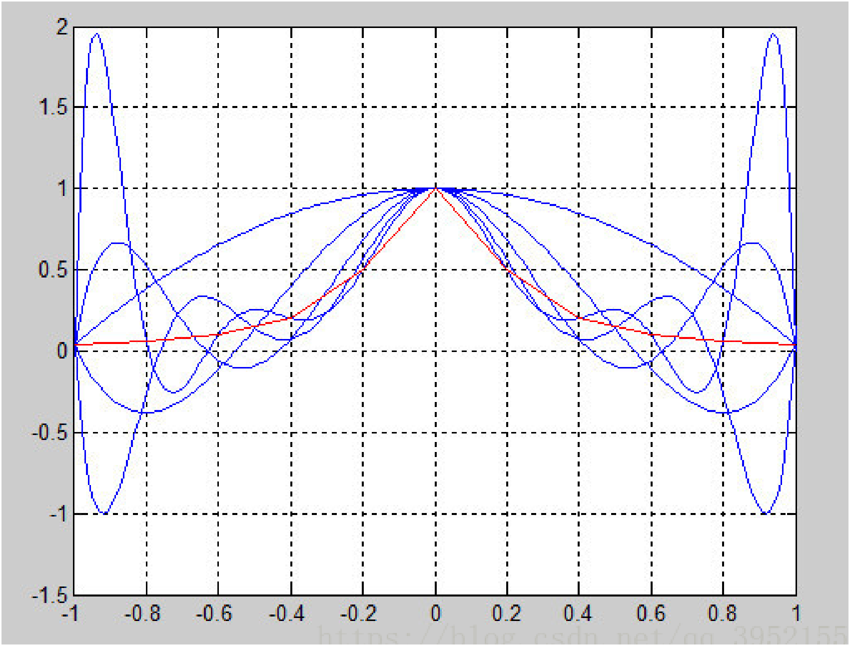

图 1.10: 龙格现象

图中红色的才是真正的函数图形。一般吧这种次数越高而插值结果越偏离原函数的现象称为龙格现象。所以在不熟悉曲线运动趋势的前提下，不要轻易使用高次插值。

分段插值，就是将被插值的函数逐段进行多项式化，选取分段多项式作为插值多项式。

分段插值方法的处理过程分两步，先将所考察区间 $[a,b]$ 作划分

$$\Delta : a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b \tag{1.148}$$

并在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造插值多项式；然后将每个区间上的插值多项式拼接到一起，形成区间 $[a,b]$ 上的插值多项式。这样构造的插值多项式称为分段插值多项式。

如果多项式 $p_k(x)$ 在划分 Δ 的每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上都是次数不超过 k 次的多项式，则称 $p_k(x)$ 为具有划分 Δ 的分段 k 次插值多项式。

1.5.1 线性分段插值

问题：给定 $[a,b]$ 区间上 $n+1$ 个节点 $(a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b)$ 和相应的函数值。

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

例 10. 构造满足上述条件的次数不超过一次的分段插值多项式 $p_1(x)$，满足插值条件：$p_1(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$。

解：构造多项式 $p_1(x)=y_i\varphi_0(x)+y_{i+1}\varphi_1(x)$，$x\in[x_i,x_{i+1}]$。其中 $\varphi_0(x),\varphi_1(x)$ 为一次多项式且满足插值条件：

$$p_1(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n) \tag{1.149}$$

可得插值基函数：

$$\varphi_0(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \quad x\in[x_i,x_{i+1}] \tag{1.150}$$

$$\varphi_1(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \quad x\in[x_i,x_{i+1}] \tag{1.151}$$

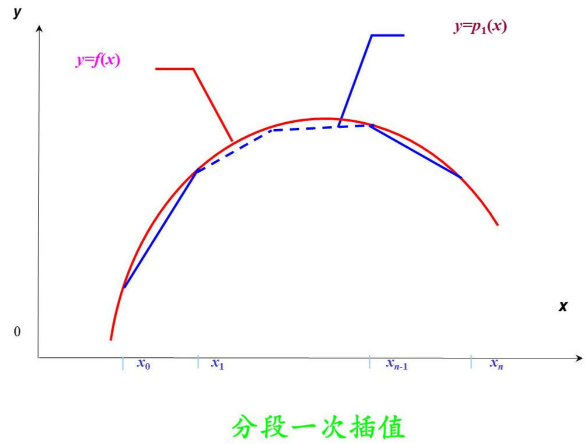

图 1.11: 分段插值

分段插值的特点是算法简单, 计算量小，但精度不高，插值曲线也不光滑。

例 11. 已知 $y=x^2$ 在 $x=1,2,3$ 点的值为 $1,4,9$。构造分段线性插值多项式，并求在 $x=1.2$ 和 2.5 处的近似值。

解：令 $p_1(x)=y_i\varphi_0(x)+y_{i+1}\varphi_1(x)$，得插值基函数：

$$\varphi_0(x)=\frac{x-2}{1-2},\quad \varphi_1(x)=\frac{x-1}{2-1},\quad x\in[1,2] \tag{1.152}$$

$$\varphi_0(x)=\frac{x-3}{2-3},\quad \varphi_1(x)=\frac{x-2}{3-2},\quad x\in[2,3] \tag{1.153}$$

当 $x\in[1,2]$ 时，$p_1(x)=1\cdot\frac{x-2}{1-2}+4\cdot\frac{x-1}{2-1}=3x-2$
当 $x\in[2,3]$ 时，$p_1(x)=4\cdot\frac{x-3}{2-3}+9\cdot\frac{x-2}{3-2}=5x-6$
所以

$$p_1(1.2)=3\cdot1.2-2=1.6,\quad 实际上1.2^2=1.44 \tag{1.154}$$

$$p_2(2.5)=5\cdot2.5-6=6.5,\quad 实际上2.5^2=6.25 \tag{1.155}$$

1.5.2 分段三次 Hermite 插值

下面介绍分段三次 Hermite 插值以进一步改进逼近效果。

问题：给定 $[a,b]$ 区间上 $n+1$ 个节点 $(a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b)$ 和相应的函数值及导数值，如下表所示。

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
y'	y'_0	y'_1	y'_2	$\cdots$	y'_n

表 1.5: 中文表

试构造次数不超过 3 次的分段插值多项式 $p_3(x)$，满足插值条件：

$$p_3(x_i) = y_i \quad p'_3(x_i) = y'_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{1.156}$$

我们构造多项式

$$p_3(x) = y_i\varphi_0(x) + y_{i+1}\varphi_1(x) + y'_i\psi_0(x) + y'_{i+1}\psi_1(x) \tag{1.157}$$

可得插值基函数：

$$\varphi_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{1.158}$$

$$\varphi_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{1.159}$$

$$\psi_0(x) = (x - x_i)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{1.160}$$

$$\psi_1(x) = (x - x_{i+1})\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{1.161}$$

1.6 本章小结

本章主要介绍了数值计算中常用的插值方法，主要包括 Lagrange 插值、Newton 插值公式、Hermite 插值和分段插值，并使用例子对各种插值进行了详细分析。

- 问题的提出；
- 拉格朗日 (Lagrange) 插值；
- Newton 插值公式；
- 埃尔米特插值；
- 分段插值；

本章习题

1. 令 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，分别取插值节点为 $f(1.331)=1.1$, $f(1.728)=1.2$, $f(2.197)=1.3$ 的函数表如下，利用拉格朗日插值计算 $f(2)=\sqrt[3]{2}$ 的近似值。

2. 已知 $y=f(x)$ 取值如下：

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	3	2	6

求牛顿插值公式 $N_3(x)$，并计算 $N_3(2.5)$。

参考文献

[1] Author. *Title*. `http://www.baidu.com`, 2019.