1. 给定 $y=f(x)$ 的一组值

x_i	1.0	1.8	2.6
$f(x_i)$	1	-3	2

用 Simpson 公式计算 $\int_{1.0}^{2.6} f(x)dx$

解：由 Simpson 公式

$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})\right]$$

得 $I=\int_{1.0}^{2.6} f(x)dx \approx \frac{2.6-1.0}{6}\times\left[1\times4\times(-3)+2\right]=-2.4$

2. 已知 $y=f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 的一组值

x_i	1.0	1.6	2.2
$f(x_i)$	0.85	0.59	0.44

分别用梯形公式和 Simpson 公式计算 $\int_{1.0}^{2.2}\sin\frac{1}{x}dx$，并估计误差.

解：由 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 得 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}\sin\frac{1}{x}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}\cos\frac{1}{x}-\frac{12}{x^7}\cos\frac{1}{x}-\frac{24}{x^6}\sin\frac{1}{x}$$

$$+\frac{1}{x^8}\sin\frac{1}{x}-\frac{12}{x^6}\sin\frac{1}{x}$$

用梯形公式计算：$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$

$$\int_{1.0}^{2.2}\sin\frac{1}{x}dx\approx\frac{2.2-1}{2}\left[0.85+0.44\right]=0.774$$

$$\max_{1\le x\le 2.2}|f''(x)|=f''(1)\approx 1.149$$

从而估计截断误差为：

$$|R_1(f)|\le\frac{(2.2-1)^3}{12}\max_{1\le x\le 2.2}|f''(x)|\approx 0.16555$$

用 Simpson 公式计算：$\int_0^2 f(x)dx\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$

$$\therefore \int_{1.0}^{2.2}\sin\frac{1}{x}dx\approx\frac{2.2-1}{6}\left[0.85+4\times0.59+0.44\right]=0.73$$

$$\max_{1\le x\le 2.2}|f^{(4)}(x)|\approx 34.6433$$

从而估计截断误差是

$$|R_2(f)|=\frac{(2.2-1)}{180}\left(\frac{2.2-1}{2}\right)^4 f^{(4)}(x)=0.029932$$

3. 给定 $y=f(x)$ 的一组值

x_i	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x_i)$	1	2	0	-1	-3	-1	1	3	2

分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算 $\int_{1.0}^{2.6} f(x)dx$.

解：用复化梯形公式计算区间等分数为 8

$$T_8=\frac{h}{2}\left[2f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

$$h=\frac{b-a}{8}=0.2$$

$$=\frac{0.2}{2}\left[f(1)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_k)+f(2.6)\right]$$

$$=0.5$$

用复化 simpson 公式计算区间等份数为 4，$h=\frac{b-a}{4}=0.4$

$$T_4=\frac{0.4}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k+\frac{1}{2})\right]+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]$$

$$S_4=\frac{0.4}{6}\left[1+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k+\frac{1}{2})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

$$=\frac{0.4}{6}\times 11$$

$$=0.7333$$

4. 确定常数 A_i，使求积公式

$$\int_0^2 f(x)dx\approx A_1f(0)+A_2f(1)+A_3f(2)$$

的代数精度尽可能高，并求最高代数精度。该求积公式是否为 Gauss 型求积公式?

解：由于此求积公式有3个待定系数，故令 $f(x)=1, x, x^2$

则 $\begin{cases}A_1+A_2+A_3=2\\ A_2+2A_3=2\\ A_2+4A_3=\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{1}{3}\\ A_2=\frac{4}{3}\\ A_3=\frac{1}{3}\end{cases}$

$\therefore$ 该求积公式为 $\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{3}\left[f(0)+4f(1)+f(2)\right]$

对 $f(x)=x^3$ 也准确成立，但对于 $f(x)=x^4$

由 $\int_0^2 x^4dx=\frac{32}{5}\neq\frac{1}{3}\times(4+16)$

$\therefore$ 它具有3次代数精度

$\therefore$ 由定义，选互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 使插值型求积式

为代数精确度为 $(2n+1)$ 次，则称该求积公式为 Gauss 型

$\therefore$ 该求积公式精度 $3\neq 2\times2+1$

即：该求积公式不是 Gauss 公式

5. 分别使用三点 Gauss-Legendre 求积公式和三点 Gauss-Chebyshev 求积公式计算

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{6x}{\sqrt{x(1-3x)}}dx$$

解：① 由3点知代数精度为 $2n+1=5$，$n=2$

作变量置换 $x=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}t$，$dx=\frac{1}{6}dt$

$$\int_0^{\frac{1}{6}}\frac{6x}{\sqrt{x(1-6x)}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1+t}{\frac{1}{6}\sqrt{(1+t)(2-t)}}\times\frac{1}{6}dt$$

$$\approx\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}A_k\frac{1+t_k}{\sqrt{(1+t_k)(2-t_k)}}$$

查表得，$t_0=-\sqrt{\frac{3}{5}}$，$t_1=0$，$t_2=\sqrt{3/5}$

$A_0=A_2=\frac{5}{9}$，$A_1=\frac{8}{9}$

代入上式得到 Gauss-Legendre 求积公式

$$\int_0^{\frac{1}{6}}\frac{6x}{\sqrt{x(1-3x)}}dx\approx\frac{1}{6}\left\{\frac{5}{9}\times\frac{\sqrt{\frac{13}{5}-3\sqrt{\frac{3}{5}}}+\sqrt{\frac{13}{5}+3\sqrt{\frac{3}{5}}}}{\sqrt{\frac{17}{5}}}+\frac{8}{9}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

② 构造3点 Gauss-Chebyshev 求积公式

令 $f(t)=\frac{1+t}{\sqrt{(1+t)(2-t)}}=\sqrt{\frac{1+t}{2-t}}$

则 $\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{6x}{\sqrt{x(1-3x)}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\approx\frac{\pi}{3}\left[f(-\frac{\sqrt{3}}{2})+f(0)+f(\frac{\sqrt{3}}{2})\right]$

$$=\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{\frac{11}{4}-3\frac{\sqrt{3}}{4}}+\sqrt{\frac{11}{4}+3\frac{\sqrt{3}}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$