矩阵论

任课教师:王琼

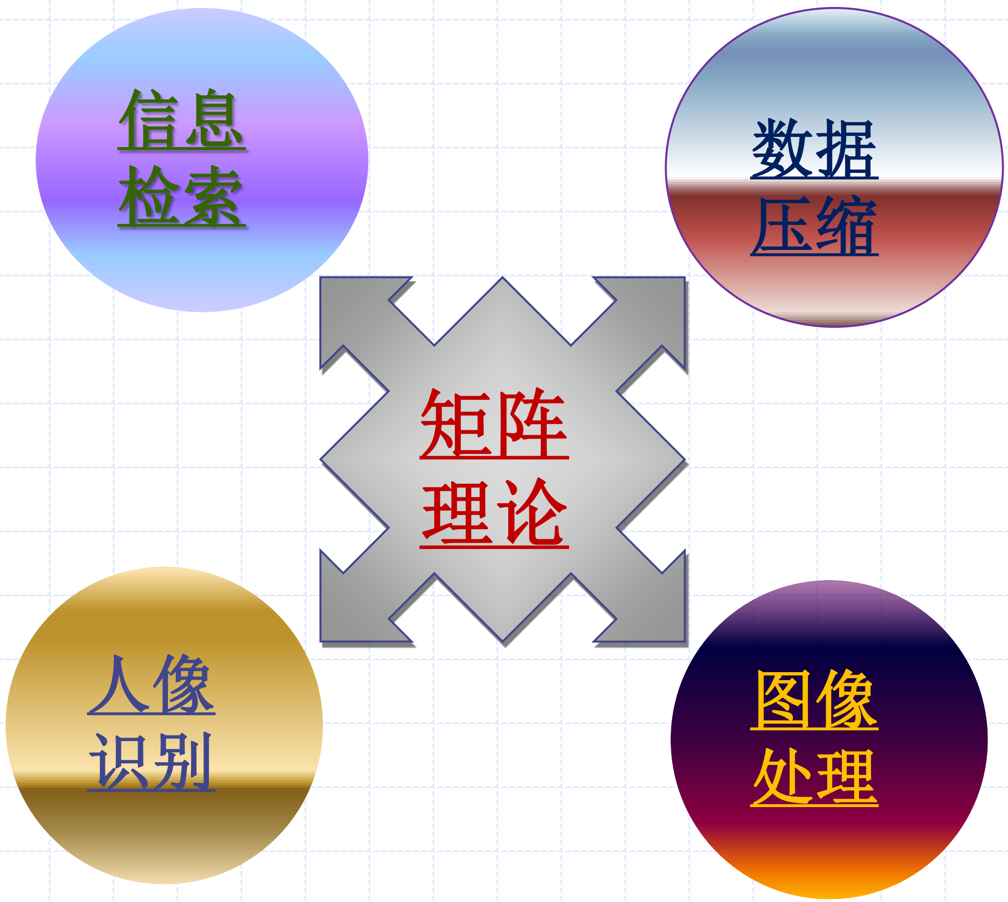
为什么要学矩阵理论

向量、矩阵及其运算法则是描述、分析、处理线性系统的有力工具--普适性、简便性。

学习专业知识中进一步认知

矩阵被认为是最有用的数学工具，既适用于现代应用问题，又适合现代理论数学的抽象结构。

矩阵理论的现代应用举例



教学参考书

- 杨明，刘先忠，矩阵论，华中科技大学出版社（修订版）2010.
- 余鄂西，矩阵论，高等教育出版社，1995。
- 方保熔等，矩阵论，清华大学出版社，2004。
- Fuzhen Zhang，Matrix Theory，Springer，1999
- Xian-Da Zhang - Matrix Analysis and Applications-Cambridge University Press (2017)

第一章　线性空间和线性变换

§1.1 线性空间

定义　设V是一非空集，F是数域（常用实数域R或复数域C）. 对V中任意两个元α, β ,定义一个加法运算,记为“＋”:

$$\alpha + \beta \in V(\text{称为}\alpha\text{与}\beta\text{的和});$$

定义一个数乘运算:

$$k\alpha \in V, k \in F(\text{称为}k\text{与}\alpha\text{的数积})$$

这两种运算(也称为V的线性运算)满足下列规则:

（1）对任意 $\alpha,\beta\in V$,有

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha\ ;$$

（2）对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$,有

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\ ;$$

（3）存在零元 $0\in V$,使得对任意 $\alpha\in V$,都有

$$\alpha+0=\alpha\ ,$$

（4）对任意 $\alpha\in V$，存在 α 的负元 $-\alpha\in V$

使得 $\alpha+(-\alpha)=0$

（5）对任意的$k\in F$和任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta;$$

（6）对任意 $\alpha\in V$和任意的$k,l\in F$，有

$$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha;$$

（7）对任意$\alpha\in V$和任意的$k,l\in F$，有

$$k(l\alpha)=(kl)\alpha;$$

（8）F中的数1，使得对任意 $\alpha\in V$，有

$$1\alpha=\alpha.$$

那么称V为F上的**线性空间**(或向量空间),记为$V(F)$;

V中的元称为**向量**.当F为实数域R时称它为实线性空间,而当 F为复数域C时称它为复线性空间.

设 $a_i \in F, \quad 0 \le i \le m, \quad t$ 为变量,则

$$P(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_{m-1} t + a_m$$

称为F上的一个多项式.当 $a_0 \neq 0$ 时,$P(t)$称为m次多项式,$a_0 t^m$称为$P(t)$ 的首项.特别,当 $a_0 = 1$时,则称$P(t)$为m次首一多项式.系数全都是零的多项式称为**零多项式**,记为0。零多项式是唯一不定义次数的多项式,它与零次多项式是有本质区别的.

例1 实数域R上的多项式全体,按通常意义的多项式加法及数与多项式乘法,构成实线性空间,记为$P(t)$.如果只考虑次数不大于n的多项式全体,再添加零多项式所成的集,则对于通常意义的多项式加法及数与多项式乘法也构成一个实线性空间,以$P_n(t)$表之.

例2 在正实数集R_+中定义加法和数乘运算为

$$a \oplus b = ab, \quad k \circ a = a^k,$$

其中 $a,b \in R_+, k \in R$. 这里, 为了区别于常规的加法和数乘,我们用"$\oplus$"表示加法, "$\circ$"表示数乘. 那么R_+是实线性空间.

事实上,不难验证R_+对这两种运算是封闭的,即$a \oplus b \in R_+, k \circ a \in R_+$,并且满足规则(1)、(2)和(5)—(8).

又$1 \in R_+$,且对任意$a \in R_+$有 $a \oplus 1 = a$和$a \oplus 1/a = 1$ 而 $1/a \in R_+$,因此,规则(3)、(4)也是满足的, 并且 R_+中的零元是1,a的负元是$1/a$.

线性空间基本性质:

(1)零元是唯一的.

(2)对任意$\alpha \in V$,它的负元是唯一的.从而可以定义

V中两个元 α, β 的减法(记为“－”)为

$$\alpha - \beta \triangleq \alpha + (-\beta)$$

(3)对任意 $\alpha \in V$, 有

$$0\alpha = 0, (-1)\alpha = -\alpha \quad ;$$

对任意的 $k \in F$,有 $k0 = 0.$

由线性空间的定义可知,若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in V(F)$, $k_1,k_2,\cdots,k_m \in F$,则

$$\beta \underline{\underline{\Delta}} k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i$$

是V(F)的元,称 β 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个线性组合,或称 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出.

定义 V中的向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}(m \geq 1)$ 称为线性相关的, 如果存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i = 0. \qquad (1.1\text{-}1)$$

若仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时, (1.1-1)式才成立,则称此向量组线性无关.

注：(1)当 $m\geq 2$ 时,向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 线性相关的充要条件是,其中至少有一个向量 $\alpha_i(1\leq i\leq m)$ 可由组中其余向量线性表出.

(2)若某向量组线性无关,则它的任一子向量组必线性无关;而若某向量组中有一个子向量组线性相关,那么该向量组必线性相关.

(3)单个零向量组是线性相关的,但单个非零向量组是线性无关的.

定义 如果在线性空间V中能够找到无限多个线性无关的向量,则称V为无限维的;而若在V中只能够找到有限多个线性无关的向量,则称V为有限维的,称最大线性无关向量的个数为V的维数,记为$\dim V$.$\dim V=n$的线性空间称为n**维线性空间**,记为V^n.

线性空间$F^{m\times n}$是$m\times n$维的,因为$F^{m\times n}$中的任一矩阵$A=[a_{ij}]$可表示为,

$$A=[a_{ij}]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$$

其中 E_{ij} 表示第i行第j列处的元为1,其余元都是0的

$m\times n$ 矩阵,并且 $\{E_{ij},i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n\}$

显然是线性无关的. 例1中的 $P(t)$ 则是无限维的, 因

为对于任意的正整数 N, 都有 N 个线性无关的

“ 向量” (多项式)1, $t,\cdots,t^{N-1}$. $P_n(t)$ 是 $n+1$ 维线性空间,

因为任一次数不大于 n 的多项式和零多项式都

可由n+1个线性无关的多项式1, $t,\cdots,t^{n}$

线性表出.

定义 V^n 中给定顺序的n个线性无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 所成的向量组称为V^n 的一个**基**(或**基底**), 记为$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$.$\mathcal{B}$中的向量 $\alpha_i(1\le i\le n)$ 称为第i个**基向量**.

定理 设$\mathcal{B}$是 V^n的一个基,则V^n中任一向量都可由$\mathcal{B}$唯一表示。

证 由于V^n中$n+1$个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\zeta$ 必线性相关,所以存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$，使

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i+k_{n+1}\zeta=0.$$

如果 $k_{n+1}=0$,则上式为 $\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=0.$ 但 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是基,故有 $k_i=0, 1\le i\le n$.这与 $k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$ 不全为零矛盾.因此 $k_{n+1}\ne 0$,从而有

$$\zeta=-\frac{1}{k_{n+1}}\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{k_i}{k_{n+1}}\right)\alpha_i,$$

即ζ可由$\mathcal{B}$线性表出.再证唯一性.设有

$$\zeta=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i \text{和} \zeta=\sum_{i=1}^{n}y_i\alpha_i$$

则得

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\alpha_i = 0,$$

从而由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是线性无关的,推出

$$x_i = y_i, i = 1,2,\cdots,n\ .$$

这个定理表明,在 V^n 中取定一个基$\mathcal{B}$,那么对任意 $\zeta \in V^n$, 存在唯一的一组数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

.

用矩阵记号,可把它写成

$$\zeta = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathcal{B} X \quad , \qquad (1.1\text{-}2)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所组成的矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ 仍记为$\mathcal{B}$. $X = [x_1 x_2 \cdots x_n]^T$称为 ζ 在基$\mathcal{B}$下的坐标向量(或坐标), $x_i (1 \le i \le n)$称为ζ 在$\mathcal{B}$下的第i个坐标;

例3 在 $P_2(t)$ 中取基 $\mathcal{B}=\{1,t,t^2\}$,则多项式

$P(t)=2t^2-t+1$ 在 $\mathcal{B}$ 下的坐标向量是[1 －1 2]^T,因为

$$2t^2-t+1=1\cdot 1+(-1)\cdot t+2\cdot t^2=[1\ t\ t^2]\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

若另取一个基 $\mathcal{B}_1=\{t+1,t+2,t^2\}$,则由

$$2t^2-t+1=-3\cdot(t+1)+2\cdot(t+2)+2\cdot t^2=B\begin{bmatrix}-3\\2\\2\end{bmatrix}.$$

知， $P(t)$ 在 $\mathcal{B}_1$ 下的坐标向量是[－3 2 2]^T.

例4 $R^{n\times n}$ 中的任何可逆矩阵P,其 n 个列向量 $P_1, P_2, \cdots, P_n \in R^n$ 构成R^n的基,因为它们是线性无关的,并且对任一向量 $y=[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^T \in R^n$,若令 $P^{-1}y=x\in R^n$,则有

$$y = Px = [P_1 P_2 \cdots P_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i,$$

即 R^n 中任意向量y都可以由P的n个列向量线性表出.

注:由 R^n(或 C^n)的一个基所排列成的n阶方阵是可逆的.

例5 将C看作C上的线性空间,则它是1维的,{1}是它的基.但若把C看作R上的线性空间,则{1,i}是它的基,从而是2维的.这一例子说明,线性空间的维数与所考虑的数域有关.

注:在V^n中取定一个基$\mathcal{B}$,则 V^n中的元与F^n中的向量之间是一一对应的,并且若α,β在$\mathcal{B}$下的坐标分别为x,y,那么 $\alpha+\beta$在$\mathcal{B}$下的坐标是$x+y$,$k\alpha$ 在$\mathcal{B}$下的坐标是kx.因此, V^n与F^n有相同的代数结构,只是各自的元的名称不同而已.由于F^n比 V^n 具体,又便于应用矩阵运算,所以一般总是把V^n上的问题通过取定一个基转化为F^n上的问题来讨论.

从例3可以看出,同一个元在不同基下的坐标一般是不同的,那么它们之间有何联系呢?为此需要讨论两个基之间的变换关系.

定义 设 $B_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$, $B_\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$是$V^n$的两个基,则每个$\beta_j(1\le j\le n)$都可由$B_\alpha$线性表出:

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\alpha_i=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}p_{1j}\\p_{2j}\\\vdots\\p_{nj}\end{bmatrix}, j=1,2,\cdots,n.$$

将 $\beta_j,1\le j\le n$ 按顺序排列,并使用矩阵记号,则得

$$[\beta_1\beta_2\cdots\beta_n]=[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}. \qquad (1.1\text{-}3)$$

简记为 $$B_\beta = B_\alpha P \qquad (1.1\text{-}3')$$

其中 n 阶方阵 $P=[p_{ij}]$称为由基 B_α 到 B_β 的**变换矩阵**(或**过渡矩阵**).显然,基变换矩阵P中的第j个列向量 $P_j=\begin{bmatrix}p_{1j} & p_{2j} & \cdots & p_{nj}\end{bmatrix}^T$ 就是 B_β 中第j个基向量 β_j 在基 B_α 下的坐标.

注:基变换矩阵P是可逆矩阵.

例6已知 R^3 的两个基是

$$B_1=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\quad B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\},$$

求由 B_1 到 B_2 的变换矩阵P.

解 (1.1-3)式给出

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}P,$$

故

$$P=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-1&0\\2&1&2\end{bmatrix}.$$

现设ζ在基 B_α, B_β下的坐标向量分别为 x, y, 即

$$\zeta = B_\alpha x, \quad \zeta = B_\beta y,$$

将(1.1-3′)式代入上述第二式,并与第一式比较,得

$$\zeta = B_\alpha x = B_\beta y = B_\alpha P y, \text{即} B_\alpha (x - Py) = 0,$$

从而有 $x = Py$ 或 $y = P^{-1} x$ (1.1-4)

(1.1-4)式表示了同一个ζ在不同基下坐标之间的关系，称为坐标变换公式.

例7 已知 R^3 的两个基

$$B_1=\{e_1=[1\ 0\ 0]^T, e_2=[0\ 1\ 0]^T, e_3=[0\ 0\ 1]^T\}$$

(称之为 R^3 中的标准基)和

$$B_2=\{[-2\quad -7\quad 1]^T, [3\ 6\ 1]^T, [-1\quad -3\quad 2]^T\},$$

求在这个基下有相同坐标的所有向量.

解 设 $x=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T$是所求的向量在标准基下的坐标,因此由题意,**x**应满足关系式

$$x=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ -7 & 6 & -3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}x,$$

即

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x = 0,$$

解得 $$x = k\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T.$$

定义 设W是线性空间V的一个非空子集,如果W关于V中的线性运算也构成线性空间,则称W为V的**子空间**,记为$W \subset V$.

线性空间V本身及由V的零元构成的零空间(记为{0},都是V的子空间,称它们为**平凡子空间**.)

例8 给定$A \in R^{m \times n}$，集

$$N(A) \underline{\underline{\Delta}} \{x \in R^n \mid Ax = 0\},$$

$$R(A) \underline{\underline{\Delta}} \{y \in R^m \mid y = Ax, x \in R^n\}$$

分别是 R^n和R^m 的子空间，依次称为A的零空间和列空间.

例9 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \ (r \geq 1)$ 是V的r个向量，它们所有可能的线性组合所成的集

$$\text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\} \underline{\underline{\Delta}} \{\alpha \mid \alpha = \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i\},$$

是V的一个子空间，称为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$张成的子空间。

例10 $R^{n\times n}$中所有对称矩阵组成的集

$$F \triangleq \{A \in R^{n\times n} \mid A^T = A\}$$

是 $R^{n\times n}$的一个子空间.

对于$m\times n$复数矩阵A,定义A^H(也记为A^*)为A的共轭转置

$$A^H \triangleq \overline{A}^T = \overline{A^T}.$$

例如,设

$$A = \begin{bmatrix} 2+\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} \\ -5 & 2-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} \in C^{2\times 3},$$

则

$$A^H = \begin{bmatrix} 2-\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} \\ -5 & 2+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2-\mathrm{i} & -5 \\ -3\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\ -1+2\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix} \in C^{3\times 2}.$$

当 $A \in C^{n\times n}$ (即A为n阶复数方阵),并且 $A^H = A$ 时,则称A为Hermite矩阵.

定理 设W是V^n的一个r维子空间，$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$是$W$的一个基，则这$r$个向量必可扩充为$V^n$的基，即在$V^n$中一定可以找到 n-r 个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，使$\{\alpha_1,\cdots\alpha_r;\alpha_{r+1},\cdots\alpha_n\}$是$V^n$的一个基。

证 若$r=n$，则定理已成立。若$r<n$，则V^n必存在一个向量 α_{r+1}不能由$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$线性表出，从而$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r+1}\}$线性无关。如果 $r+1=n$ ，则定理已成立，否则继续这个过程。由于n是一个确定的正整数，所以在n-r步后必找到n-r个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，使$\{\alpha_1,\cdots\alpha_r;\alpha_{r+1},\cdots\alpha_n\}$为$V^n$的基。

定义 设 W_1, W_2 是V的两个子空间，则

$$W_1 \cap W_2 \underline{\underline{\Delta}} \{\xi \in V \mid \xi \in W_1 \text{且} \xi \in W_2\},$$

$$W_1 + W_2 \underline{\underline{\Delta}} \{\xi \in V \mid \xi = \xi_1 + \xi_2, \xi_1 \in W_1, \xi_2 \in W_2\},$$

分别称为 W_1与W_2 的交，W_1与W_2 的和.

定理 若 W_1, W_2 是V的两个子空间，则

$$W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$$

都是 V的子空间。

定理 设 W_1, W_2 是V的两个子空间，则

$$\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2. \quad (1.1\text{-}5)$$

证 设 $\dim W_1=n_1, \dim W_2=n_2, \dim(W_1\cap W_2)=r$，又

$\{\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_r\}$是 $W_1\cap W_2$的一个基。由于 $(W_1\cap W_2)\subset W_i\,(i=1,2)$

所以 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$可扩充为 W_1 的基：

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{n_1-r}\} \qquad (1.1\text{-}6)$$

又可扩充为 W_2的基：

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\delta_1,\delta_2,\cdots\delta_{n_2-r}\} \qquad (1.1\text{-}7)$$

我们证明向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{n_1-r};\delta_1,\delta_2,\cdots\delta_{n_2-r}\}$ （1.1-8）

是 W_1+W_2 的一个基，从而维数公式（1.1-5）成立。

据和空间 W_1+W_2 的定义，其中任何一向量ξ都可以表示为W_1中的向量ξ_1与W_2中的向量ξ_2之和，而 ξ_1 可由基（1.1-6）线性表出,又 ξ_2可由基（**1.1-7**）线性表出，故 $\xi=\xi_1+\xi_2$ 可由向量组(1.1-8)线性表出。假设有等式

$$\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i+\sum_{j=1}^{n_1-r}p_j\beta_j+\sum_{l}^{n_2-r}q_l\delta_l=0,$$

令

$$\xi\triangleq\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i+\sum_{j=1}^{n_1-r}p_j\beta_j=-\sum_{l=1}^{n_2-r}q_l\delta_l,\qquad（1.1\text{-}9）$$

则由（1.1-9）式的第一个等号关系知$\xi\in W_1$，而第二个等号关系给出$\xi\in W_2$，从而 $\xi\in W_1\cap W_2$。于是，ξ 可由$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$线性表出。设 $\xi=\sum_{i=1}^{r}b_i\alpha_i$,

则由（1.1-9）式得 $\sum_{i=1}^{r} b_i\alpha_i + \sum_{l=1}^{n_2-r} q_l\delta_l = 0.$

但 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\delta_1,\delta_2,\cdots\delta_{n_2-r}\}$ 线性无关，故

$$b_i = 0, 1 \le i \le r; q_l = 0, 1 \le l \le n_2 - r.$$

因此 $\xi = 0$，即 $\sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n_1-r} p_j\beta_j = 0.$

又因 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{n_1-r}\}$ 线性无关，故

$$k_i = 0, 1 \le i \le r; p_j = 0, 1 \le j \le n_1 - r.$$

这就证明了向量组（1.1-8）是线性无关的。

综合起来，便证明了向量组（1.1-8）是 $W_1 + W_2$ 的基。

例11 R^4 中的两个子空间是

$$W_1 = \text{span}\{a_1 = [1\ 1\ 0\ \ 0]^T, a_2 = [0\ 1\ 1\ 0]^T\},$$

$$W_2 = \text{span}\{a_3 = [0\ 0\ 1\ 1]^T, a_4 = [1\ 0\ 0\ 1]^T\},$$

求 $W_1 + W_2$ 及 $W_1 \cap W_2$ 的基和维数。

解 $W_1 + W_2 = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.但由于$\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$,

且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以 $W_1 + W_2$ 的一个基为

$\{\alpha_1 = [1\ 1\ 0\ \ 0]^T,\ \ \alpha_2 = [0\ 1\ 1\ 0]^T, \alpha_3 = [0\ \ 0\ 1\ 1]^T\}, \dim(W_1 + W_2) = 3.$

维数公式（1.1-5）给出

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 1.$$

为了求 $W_1\cap W_2$ 的基，设 $\xi\in W_1\cap W_2$，则由 $\xi\in W_1$ 知，存在 k_1,k_2 使 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，又由 $\xi\in W_2$ 知，存在 k_3,k_4 使 $\xi=k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$ 因而，k_1,k_2,k_3,k_4 应满足方程。

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_3\alpha_3+k_4\alpha_4,$$

即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(-\alpha_3)+k_4(-\alpha_4)=0.$$

用矩阵表示则为 $\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=0$

解得 $[k_1k_2k_3k_4]^T=c[1\quad -1\quad -1\quad 1]^T,$

其中c为任意非零实数，从而 $\xi=c(\alpha_1-\alpha_2)=c[1\,0\,-1\,0]^T.$

因此，$W_1\cap W_2=\mathrm{span}\{[1\,0\,-1\,0]^T\}$，即$[1\,0\,-1\,0]^T$ 是$W_1\cap W_2$ 的一个基。

注：和空间W_1+W_2 的定义仅表明，其中的任一向量 ξ 可表示为$\xi_1+\xi_2,\xi_1\in W_1,\xi_2\in W_2$. 但这种表示法不一定是唯一的。例如，设 R^3 的子空间

$$W_1=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\quad W_2=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\},$$

那么 W_1+W_2 中零向量0，一方面可表示为0=0+0，即W_1及W_2的零向量之和；

另一方面又可表示为

$$0=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}+\left\{-\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

这就是说，零向量的表示不唯一。

定义 若 W_1+W_2 中任一向量只能唯一地分解为 W_1 中的一个向量与 W_2 中的一个向量之和，则 W_1+W_2 称为 W_1,W_2 的直和，记为 $W_1 \oplus W_2$.

定理 $W_1+W_2=W_1\oplus W_2$ 的充分必要条件是下列条件的之一满足：

（1） $W_1\cap W_2=\{0\};$

（2） 若 $\xi_1+\xi_2=0, \xi_i\in W_i (i=1,2)$, 则 $\xi_1=\xi_2=0;$

（3） $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2.$

证 我们只证（1）.设 $W_1\cap W_2=\{0\}$，而 W_1+W_2 不是直和，则 $\xi\in W_1+W_2$ 的分解式不唯一，即存在 $\alpha_1,\alpha_2\in W_1$ 和 $\beta_1,\beta_2\in W_2$，且 $\alpha_1\neq\alpha_2, \beta_1\neq\beta_2$，使

$$\xi=\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2.$$

因此

$$\alpha_1-\alpha_2=-(\beta_1-\beta_2).$$

令 $\delta \triangleq \alpha_1-\alpha_2=-(\beta_1-\beta_2)$，则 $\delta\neq 0$, 且$\alpha_1-\alpha_2\in W_1$, $-(\beta_1-\beta_2)\in W_2$, 故$\delta\in W_1\cap W_2$. 这与假设矛盾。

反过来，假设 W_1+W_2 是直和，而 $W_1\cap W_2\neq\{0\}$, 则存在非零向量 $\alpha\in W_1\cap W_2$.又$-\alpha\in W_1\cap W_2$, 故W_1+W_2 的零向量既有分解式0=0+0,又有分解式$0=\alpha+(-\alpha)$, 这与直和的假设矛盾。

定理 设V_1是V^n的一个子空间，则必存在V^n的子空间V_2，使 $V_1 \oplus V_2 = V^n$

证 设 $\dim V_1 = r$, 且$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r\}$是$V_1$ 的一个基，则它可扩充为V^n的基

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r; \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n\}.$$

令

$$V_2 = \mathrm{span}\{\alpha_{r+1}, \cdots \alpha_n\},$$

显然V_2即满足要求。

子空间的交、和及直和的概念都可以推广到多个子空间的情形。例如，s 个子空间 $W_1, W_2, \cdots W_s$ 的和 $\sum_{i=1}^{s} W_i$ 是$\{\xi \in V \mid \xi = \sum_{i=1}^{s} \xi_i, \xi_i \in W_i\}$. 如果和空间 $\sum_{i=1}^{s} W_i$ 中任一向量 ξ 的分解式

$$\xi = \sum_{i=1}^{s} \xi_i, \xi_i \in W_i.$$

是唯一的，则称它为直和，记为

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i.$$