华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：____应用高等工程数学____ 课程类别 ☑公共课 □专业课 考核形式 ☑开卷 □闭卷

学生类别：__________ 考试时间：__2020__年__12__月__2__日__________

学号：________________ 姓名：____________ 院系：____________

一、填空（每小题 3 分，共 24 分）

1、 向量 $(2,3,4)^T$ 在给定的一组基 $\alpha_1=(0,0,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,0,0)^T$ 下的坐标为 ________。

2、 设$\{a_1,a_2,a_3\}$是V^3 的一个基，V^3 上的线性变换 T将a_1,a_2,a_3分别映为 $a_1+2a_2+a_3$，$-a_3$，$2a_1-a_2$，则 T在这个基下的矩阵是$B=$________。

3、已知方阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^4$，最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$，则$A$所有可能的 Jordan 标准型为__________。（Jordan 块的排列顺序不同视为同一种 Jordan 标准型）

4、 在计算积分$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx$时，有两种递推算法：（A）$I_n=\frac{1}{n}-5I_{n-1}$；（B）$I_{n-1}=\frac{1}{5}(\frac{1}{n}-I_n)$，其中算法（　）是稳定的。

5、 若插值型求积公式 $I=\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \approx A_1 f(x_1)+A_2 f(0)$ 有 2 次代数精度，节点$x_1=$______。

6、 对于初值问题 $\begin{cases} y'(x)=f(x,y) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$，

算法 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$，$y_{n+1}=y_n+h[\frac{1}{3}f(x_n,y_n)+\frac{2}{3}f(x_{n+1},y_{n+1})]$

为显式还是隐式公式____？单步法还是多步法____？整体截断误差为_____阶。

7、已知 $x=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\-5 & 0 & -2\\1 & 4 & 1\end{pmatrix}$，则 $\|x\|_1=$ ____，$\|A\|_1=$ ____，

$\|Ax\|_1$____$\|A\|_1 \cdot \|x\|_1$（填≤或≥）。

8、使用迭代公式 $x_{k+1}=e^{-2x_k}+\frac{1}{2}$ 求解方程 $e^{-2x}-x+\frac{1}{2}=0$，对任意初值 $x_0\in[1/2,1]$，以上迭代公式是否收敛_____。（其中 $e\approx 2.71828\cdots$）

二、（8分）已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求 $g(A)=A^5-4A^4+4A^3+A-I$。

三、（10分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 和 Jordan 矩阵 J，使 $P^{-1}AP=J$。

四、（10 分）已知函数$f(x)$ 满足$f(0)=4, f(2)=0, f'(0)=4, f'(2)=0$，试求$f(x)$ 的三次插值多项式$H_3(x)$ 并算出$f(1)$ 的近似值$H_3(1)$。

五、（8 分）给定一组数据 $x_1=0, x_2=1, x_3=2; y_1=1, y_2=2, y_3=4$，并定义内积

$(f,g)=\sum_{i=1}^{3} f(x_i)g(x_i)$， 定义$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x$。

（1）求$(\varphi_0,\varphi_0),(\varphi_0,\varphi_1),(\varphi_1,\varphi_1)$；

（2）用一次多项式对这组数据进行最小二乘拟合（即求一次多项式φ使

$\sum_{i=1}^{3}(\varphi(x_i)-y_i)^2$ 最小）。

六、（10 分）

（1）写出首项系数为一的 2 次勒让德多项式；

（2）使用两点的高斯-勒让德求积公式计算$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^4\,\mathrm{d}x$；

（3）直接积分计算$\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^4\,\mathrm{d}x$，比较与上述结果是否相同，并解释其原因。

七、（10 分）对于初值问题 $\begin{cases} y'(x) = -20y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

（1）使用格式 $\mathrm{y}_{\mathrm{n+1}} = \mathrm{y}_{\mathrm{n}} + h[\frac{1}{2}f(x_n, y_n) + \frac{1}{2}f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$ 进行计算，假设$y_0 = 1, h = 0.05$，求出y_4；

（2）如果要使上述格式稳定，求步长h的取值范围。

八、（10 分）对于线性方程组 $\begin{cases} 4x_1+2x_2=2 \\ 2x_1+4x_2+x_3=2 \\ x_2+4x_3=4 \end{cases}$

（1）使用一种矩阵分解的方法求解方程组；

（2）写出此方程组对应的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式；

（3）使用Jacobi 迭代格式时是否收敛，说明原因。

九、（10 分）对于非线性方程 $x^5-5x^4+9x^3-7x^2+2x=0$，

（1）写出牛顿法的迭代公式；

（2）说明牛顿法在根$x^*=1$ 附近线性收敛；

（3）对以上的牛顿法进行改进，使改进后的迭代法在根$x^*=1$ 附近至少平方收敛。