

# 华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：应用高等工程数学      课程类别    ☒公共课    考核形式    ☐开卷  
   ☐专业课                          ☒闭卷

学生类别 \_\_\_\_\_ 考试日期 2023-12-08 学生所在院系 \_\_\_\_\_

学号                      姓名                      任课教师

一、 选择题（本题共 6 小题，每题 3 分，满分 18 分，每小题四个选项中只有一个正确）

1. 设 $T$ 为 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换。则下面哪个条件不是 $T$ 可逆的充分必要条件？

A. 存在 $V$ 上的线性变换 $S$ , 使得 $S \cdot T = T \cdot S = I$  (恒等变换)

### B. $T$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量

### C. $T$ 在 $V$ 的一组基下的矩阵表示可逆

D.  $T$ 的所有特征值之积不为 0

2. 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵, 则下面哪个条件下 $A$ 不一定可对角化?

A.  $A$ 的特征多项式无重根

### B. $A$ 的最小多项式无重根

### C. $A$ 为实对称

#### D. $A^3 = 0$

3. 设  $A = \begin{bmatrix} a & 5 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 2 & 0 & a \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . 用 Gauss-Seidel 方法求解线性方程

组  $Ax = b$ ,  $a$  取下面哪个值时收敛?

A.  $a = 5$

### B. $a = 0$

C.  $a = -1$

D.  $a = 1$

4. 求解初值问题  $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$  的方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$$

对于  $f(x, y) = \lambda y$ , 以上方法的稳定性区域为 ( $\lambda < 0$ )

A.  $|1 + \lambda h + \lambda^2 h^2| < 1$

B.  $\left|1 + \frac{\lambda h}{2} + \lambda^2 h^2\right| < 1$

C.  $\left|1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right| < 1$

D.  $\left|1 + \frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right| < 1$

5. 若  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$  为来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的独立样本, 设  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  和  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  分别为样本均值和样本方差。

则以下结论不正确的是

A.  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

B.  $\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$

C.  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

D.  $\frac{(X_1 - \bar{X})}{\sqrt{S^2}} \sim t(n-1)$

6. 设一批零件的加工误差服从均值为 0, 方差  $\sigma^2$  未知的正态分布。

从中抽取  $n$  个样品, 加工误差为  $X_1, \dots, X_n$ 。设样本均值和样本方差分别为  $\bar{X}, S^2$ 。则下面哪个统计量不是  $\sigma^2$  的无偏估计?

A.  $S^2$

B.  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

C.  $\bar{X}^2$

D.  $X_1^2$

二、 填空题（本题共 6 小题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 若给定  $f(0) = 0, f(0.5) = -0.25, f'(0.5) = -1.75, f(1) = 3$ ，求  $f(x)$  的三次 Hermite 插值多项式\_\_\_\_\_。

2. 矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$  的一个满秩分解为\_\_\_\_\_。

3. 矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  的 2-条件数为\_\_\_\_\_。

4. 求积公式  $\int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{2}{3}f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{2}{3}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  的代数精度为\_\_\_\_\_。

5.  $\cos x$  在  $[0, \pi]$  上的一次最佳平方逼近多项式为\_\_\_\_\_。

6. 总体服从参数  $\lambda$  的指数分布，密度函数为  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x > 0)$ 。  
设有容量为  $n$  的样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，则参数  $\lambda$  的极大似然估计为\_\_\_\_\_。

三、 解答题（本题共 6 小题，满分 64 分）

1. （10 分）已知 3 维线性空间  $V$  上的线性变换  $T$  在  $V$  的一组基  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

设

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3 \end{cases}$$

- a. 证明 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是 $V$ 的一组基。
- b. 求 $T$ 在 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的矩阵表示。

2. (12 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

- a. 求 $A$ 的 Jordan 标准型;
- b. 计算矩阵函数 $e^{At}$ 。

3. (10 分) 已知数据 $(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, 3$ 如下表所示

$x_i$	-1	0	1	2
$y_i$	2	1	1	2

试用二次多项式 $p(x) = ax^2 + bx + c$ 最小二乘拟合这些数据, 并计算平方误差:  $\sum_{i=0}^3 (p(x_i) - y_i)^2$ .

4. (10 分) 分别用二点 Gauss-Legendre 求积公式和 Gauss-Chebyshev 求积公式计算积分

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx$$

5. (10 分) 考虑方程 $\sqrt{x} - \cos \frac{x}{2} = 0$ .

- a. 证明该方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有实根;
- b. 分析迭代格式 $x_{n+1} = \left(\cos \frac{x_n}{2}\right)^2, n = 0, 1, 2, \dots$ 的收敛性, 其中 $x_0$ 为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的任意一点。

6. (12 分) 已知 23 级男生入学时的体能测试得分服从正态分布

$N(\mu_0, \sigma_0^2)$ , 其中 $\mu_0 = 60, \sigma_0^2 = 225$ 。经过一学期的锻炼后, 抽取

100 名男生进行测验，得到样本均值 $\bar{X} = 64$ ，样本方差 $S^2 = 256$ 。依然假设得分服从正态分布。试问：

- a. 在显著性水平 0.05 下，男生的体测得分的均值有否增加？
- b. 在显著性水平 0.05 下，男生的体测得分的方差有否改变？

（附可能用到的上侧分位点）

表 1：正态分布上侧分位点 $z_{\alpha}$

$\alpha$	0.05	0.025
	1.6449	1.9600

表 2：t 分布上侧分位点 $t_{\alpha}(n)$

$n$ $\alpha$	0.05	0.025
99	1.6604	1.9842
100	1.6602	1.9840

表 3： $\chi^2$ 分布上侧分位点 $\chi^2_{\alpha}(n)$

$n$ $\alpha$	0.975	0.95	0.05	0.025
99	73.3611	77.0463	123.2252	128.4220
100	74.2219	77.9295	124.3421	129.5612