矩阵的分解

常见的形式:

- $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$, 矩阵的和
- $A = A_1 A_2 \cdots A_k$, 矩阵的积

分解的作用:

- 理论上, 揭示矩阵的特性
- 应用上, 简化矩阵的计算

主要技巧

- 各种标准形的理论和计算方法
- 矩阵的分块运算和初等变换

常见的标准形:

- 等价标准形: $A_{m\times n} = P_{m\times m}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_{n\times n}$,
- 相似标准形: $A = PJP^{-1}$
    - 特别的, 当 A 为对称矩阵时, J 为对角阵, 且存在正交矩阵 C 使得 $A = CJC^T$.

我们将介绍:

- (三角分解)
- 满秩分解
- Schur 分解 (UR 分解, QR 分解)
- 奇异值分解

矩阵的满秩分解

定义: 对秩为 r 的矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 若存在两个秩为 r 的矩阵 $B \in F^{m\times r}$, $C \in F^{r\times n}$, 使得 $A = BC$, 则称为 A 的满秩分解

定理: 任何非零矩阵 $A \in F^{m\times n}$ 都有满秩分解

证明: 等价标准形求法 (行列变换)

存在可逆 P, Q, 使 $A_{m\times n} = P_{m\times m} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_{n\times n}$.

令 $P = (B_{m\times r}, B_2), Q = \begin{pmatrix} C_{r\times n} \\ C_2 \end{pmatrix}$, 则

$$A = (B, O) \begin{pmatrix} C \\ C_2 \end{pmatrix} = BC.$$

满秩分解的求法: 利用初等变换

方法一: 等价标准形求法 (行列变换), 求两个逆

方法二: 阶梯型求法 (行变换), 只求一个逆矩阵

初等行变换: $(A_{m\times n}|I_m) \to \begin{pmatrix} C_{r\times n} & \\ & P_{m\times m} \\ O_{(n-r)\times n} & \end{pmatrix}$,

其中 $\mathrm{rank} C = \mathrm{rank} A = r$, 且记 $P^{-1} = (B_{m\times r}, B_2)$,

则 $PA = \begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}$, $A = (B_{m\times r}, B_2)\begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix} = BC$.

例 求 A 的满秩分解

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

解: 初等行变换 $(A|I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&&\\0&2&2&&1&\\1&0&1&&&1\end{array}\right)$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&-1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)$. 则 $C=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$,

$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$ 给出 B

方法三: 求列的极大无关组 (行变换), 不用求逆

若 A 的前 $\mathrm{rank}A = r$ 列线性无关, 则后 $n-r$ 列为前 r 列的线性组合. 即 $A = (A_1, A_2) = A_1(I_r, S)$.

此时令 $B = A_1$, $C = (I_r, S)$, 则 $A = BC$

问题: 若前 r 列线性相关, 怎么处理?

可以通过列交换 (矩阵右乘), 使前 r 列线性无关, 即 $AP = (A_1, A_2)$, $A = (A_1, A_2)P^{-1} = A_1(I_r, S)P^{-1}$, 此时 $B = A_1$, $C = (I_r, S)P^{-1}$.

方法三: 求列的极大无关组 (行变换), 不用求逆

问题: 若前 r 列线性相关, 怎么处理?

一种标准化做法: 对 A 做初等行变换, 化为阶梯型, 且每行第一个非零元素为 1, 同时该元素所在列其他元素都为 0 (此阶梯型称 Hermite 标准形).

此时阶梯型中标准基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_r$ 对应的列为 A 中线性无关的列, 取 A 的这 r 列记为 B, 取阶梯型的非零 r 行记为 C. 从而 $A = BC$.

例 求 A 的满秩分解

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ 2 & -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 10 & 25 \end{pmatrix}.$$

解: 行变换 $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -10 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

其中第 1, 2, 4 列分别为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

说明 A 的对应列线性无关, 从而取这几列为 B.

例 求 A 的满秩分解

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ 2 & -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 10 & 25 \end{pmatrix}.$$

解 (续): 即 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -10 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -13 \end{pmatrix}.$$

Schur 分解

已知: 实对称矩阵 A 正交相似于对角阵.
问题: 对于复方阵，何时可以酉相似于对角阵?

考虑空间: 复向量/矩阵空间 $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n\times n}$.
复向量内积: $(x, y) = x^H y = \bar{x}^T y$.
相关概念:

- 对称矩阵 $A^T = A$;
- 正交矩阵 $Q^T = Q^{-1}$;
- 正交相似 $A = QBQ^{-1} = QBQ^T$;
- Hermite 矩阵 $A^H = \bar{A}^T = A$;
- 酉矩阵 $U^H = U^{-1}$.
- 酉相似 $A = UBU^{-1} = UBU^H$.

可逆矩阵的 UR 分解

定理: $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为可逆方阵, 存在酉矩阵 U和主对角线上元素皆正的上三角矩阵 R, 使 $A=UR$. (这称为 A 的 UR 分解)

证明: 由 A 可逆, A 的列向量 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 对其进行Gram-Schmidt 正交化, 使其成为标准正交基 $\{\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n\}$ 满足 $\epsilon_j^H\epsilon_k=\delta_{jk}$

正交化过程: $\tilde{\epsilon}_1=\alpha_1,\ \epsilon_1=\frac{\tilde{\epsilon}_1}{|\tilde{\epsilon}_1|}$,

$\tilde{\epsilon}_2=\alpha_2-(\alpha_2,\epsilon_1)\epsilon_1,\ \epsilon_2=\frac{\tilde{\epsilon}_2}{|\tilde{\epsilon}_2|}$.

$\tilde{\epsilon}_3=\alpha_3-(\alpha_3,\epsilon_1)\epsilon_1-(\alpha_3,\epsilon_2)\epsilon_2,\ \epsilon_3=\frac{\tilde{\epsilon}_3}{|\tilde{\epsilon}_3|}$.

$\tilde{\epsilon}_n=\alpha_n-(\alpha_n,\epsilon_1)\epsilon_1-\cdots-(\alpha_n,\epsilon_{n-1})\epsilon_{n-1},\ \epsilon_n=\frac{\tilde{\epsilon}_n}{|\tilde{\epsilon}_n|}$.

证明 (续): 正交化过程给出了两组基的关系
即 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)R$, 其中变换矩阵

$$R = \begin{pmatrix} |\tilde{\epsilon}_1| & (\alpha_2, \epsilon_1) & (\alpha_3, \epsilon_1) & \cdots & (\alpha_n, \epsilon_1) \\ 0 & |\tilde{\epsilon}_2| & (\alpha_3, \epsilon_2) & \cdots & (\alpha_n, \epsilon_2) \\ 0 & 0 & |\tilde{\epsilon}_3| & \cdots & (\alpha_n, \epsilon_3) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |\tilde{\epsilon}_n| \end{pmatrix}$$

此时 R 为上三角矩阵, 且对角线元素 $|\tilde{\epsilon}_i| > 0$,
令 $U = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$, 则有 $A = UR$.

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. 的 UR 分解.

解: 对 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

进行正交化, 得 $\epsilon_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\epsilon_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$,

$\epsilon_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, 则 $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 的 UR 分解.

解 (续): 在正交化过程中, R 中的元素已被算出.
或者由 $A = UR$, 则 $R = U^H A$.

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

列满秩矩阵的 QR 分解

定理: $A \in \mathbb{C}^{n\times r}$ 为列满秩矩阵, 则有 $A = QR$, 其中$Q \in \mathbb{C}^{n\times r}$ 的列向量为标准正交的向量组 和 $R \in \mathbb{C}^{r\times r}$ 为主对角线上元素皆正的上三角矩阵, (这称为 A 的 QR 分解)

证明: 当 A 为列满秩时, r 个列向量可以扩充为 $\mathbb{C}^n$ 的一组基, 则 $(A_{n\times r}, A_2) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为可逆矩阵.
从而可逆矩阵有分解 $(A_{n\times r}, A_2) = UR$.
将酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 分块为 (Q, Q_2), $Q \in \mathbb{C}^{n\times r}$
将上三角矩阵 R 分块为 $\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & R_3 \end{pmatrix}$, $R_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$

证明 (续): 将 UR 分解写为分块形式

$$
\begin{aligned}
(A, A_2) &= (Q, Q_2)\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & R_3 \end{pmatrix} \\
&= (QR_1, QR_2 + Q_2R_3).
\end{aligned}
$$

其中 $A = QR_1$ 为满足条件的 QR 分解.

注: 由证明过程知, 求 QR 分解时, 可直接对 A 的列向量做 Gram-Schmidt 正交化, 得到 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_r)R_1 = QR_1$.

Schur 分解

定理: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 存在酉矩阵 U和上三角矩阵 T, 使得

$$U^H A U = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \cdots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

其中 λ_i 为 A 的特征值.

证明: A 相似于 Jordan 标准形, 即 $A = PJP^{-1}$. 可逆方阵 P 有分解 $P = UR$, 则$A = URJ(UR)^{-1} = URJR^{-1}U^H$. 其中 $T = RJR^{-1}$ 为上三角矩阵.

QR 与 UR 分解的一些应用

(1). A 行满秩 (可逆), 则$A = LV$, L 为对角线为正的下三角矩阵, V 的行标准正交 (V 为酉矩阵).

(2). 满秩分解, $A_{m\times n} = Q_{m\times r}D_{r\times n}$, $\text{rank}A = r$, 其中 Q 的列标准正交, $\text{rank}D = r$.

(3). $A_{m\times n} = U_{m\times m}\begin{pmatrix} B_r & O \\ O & O \end{pmatrix} V^H_{n\times n}$

其中 B_r 可逆, U 和 V 为酉矩阵.

- (1). $A^H = UR \Rightarrow A = R^H U^H$,
- (2). $A = BC \Rightarrow A = (QR)C = Q(RC) = QD$
- (3). $A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = UR\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} LV^H$

$$= U\begin{pmatrix} R_{11}L_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} V^H$$

会用到的一些特殊方阵的性质:

若方阵 A 满足 $A^HA = AA^H$, A 为正规矩阵.

- Hermite 矩阵 (实对称矩阵), 酉矩阵 (实正交矩阵), 酉相似于正规阵的方阵等是正规矩阵
- A 是正规方阵的充要条件是酉相似于对角阵

若对于任意非零向量 x, Hermite 方阵 A 满足 x^HAx 为正 (非负), 则 A 为(半) 正定 Hermite 阵.

- Hermite 矩阵特征值为实数,
  (半) 正定 Hermite 矩阵特征值为正 (非负)
- (半) 正定实对称矩阵为(半) 正定 Hermite 矩阵的特殊情况

矩阵的奇异值分解 (SVD)

奇异值分解是酉等价型的分解:

对 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$A = U\Sigma V^H$$

其中 $\Sigma = \begin{pmatrix} \Delta_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$, $\Delta_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}$

- 奇异值分解常适用于解决矩阵秩相关问题
- A 的奇异值分解依赖于 $A^H A$ 的酉相似分解

1. 矩阵A^HA和AA^H的性质: $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$
$A^HA\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $AA^H\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 为 Hermite 矩阵.

- $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}A^HA=\mathrm{rank}AA^H$
- A^HA 和 AA^H 的非零特征值相等
- A^HA 和 AA^H 半正定.
  A 秩为 n, A^HA 正定; A 秩为 m, AA^H 正定.

从而 A^HA 和 AA^H 的特征值为非负实数:

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0.$$

2. 奇异值的定义: 若 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 秩为 r,
设 A^HA 的特征值 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r>0$,
$\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$, 则矩阵 A 的奇异值为

$$\sigma_i=\sqrt{\lambda_i},\ i=1,2,\cdots,r.$$

特殊矩阵的奇异值

定理:

· 正规矩阵 A 的奇异值等于 A 的非零特征值的模
· 正定的 Hermite 矩阵 A 的奇异值是 A 的特征值
· 酉等价矩阵的奇异值相等

- A 和 B 酉等价, 则 A^HA 和 B^HB 酉相似
- 奇异值是酉等价的不变性质

(1) 若 A 为正规矩阵, 则有酉相似

$$A = U \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^H, A^H = U \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} U^H$$

A^HA 的特征值为 $\lambda_i\bar{\lambda}_i = |\lambda_i|^2$, $\sigma_i = |\lambda_i|$, $1 \le i \le r$.

定理:

· 正规矩阵 A 的奇异值等于 A 的非零特征值的模
· 正定的 Hermite 矩阵 A 的奇异值是 A 的特征值
· 酉等价矩阵的奇异值相等

- A 和 B 酉等价, 则 A^HA 和 B^HB 酉相似
- 奇异值是酉等价的不变性质

(2) 若 A 为 Hermite 矩阵, 则特征值 λ_i 为实数, 又因为正定. 则 $\lambda_i > 0$. 根据 (1), A^HA 的特征值为 $0 < \lambda_i\bar{\lambda}_i = \lambda_i^2$. 则 $\sigma_i = \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$.

定理:

· 正规矩阵 A 的奇异值等于 A 的非零特征值的模
· 正定的 Hermite 矩阵 A 的奇异值是 A 的特征值
· 酉等价矩阵的奇异值相等

- A 和 B 酉等价, 则 $A^H A$ 和 $B^H B$ 酉相似
- 奇异值是酉等价的不变性质

(3) 若 $A = UBV^H$, 则有 $A^H = VB^H U^H$,

$$A^H A = VB^H BV^H,$$

$A^H A$ 和 $B^H B$ 酉相似, 有相同的特征值.

矩阵的奇异值分解

定理: 对 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}A = r$, 存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使 $A = U\Sigma V^H$, 其中

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Delta_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}, \quad \Delta_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

证明思想: 要证 $A = U\Sigma V^H$, 则 $AV = U\Sigma$, 即 $Av_i = \sigma_i u_i$, $1 \le i \le r$; $Av_i = 0$, $r+1 \le i \le n$;

A^HA 正规, 则有酉相似 $V^HA^HAV = \begin{pmatrix} \Delta_r^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

令 $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$, $1 \le i \le r$, 记 $U_1 = [u_1, u_2, \cdots, u_r]$. 并将其扩充为 $U = (U_1, U_2)$ 成为酉矩阵.

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

解: $A^H A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 其特征多项式为 $(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$, 即特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$, 从而 A奇异值$\sigma_1 = \sqrt{3}$, $\sigma_2 = 1$.

接下来求 $A^H A$ 的特征向量, 确定酉矩阵 V.
$\lambda_1 = 3$, $x_1 = (1, 1)^T$; $\lambda_1 = 1$, $x_2 = (-1, 1)^T$.
将 $\{x_1, x_2\}$ 标准化 (这里 x_1 和 x_2 已经正交)
则 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$.

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

解 (续): 求酉矩阵 U: $u_1=\frac{Av_1}{\sigma_1}$, $u_2=\frac{Av_2}{\sigma_2}$. 则
$u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)^T$, $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T$.

此时仍需要扩充标准正交基 u_3. 如取
$e_1=(1,0,0)^T$, 与 u_1,u_2 线性无关, 计算
$\tilde{u}_3=e_1-(e_1,u_1)u_1-(e_1,u_2)u_2=\frac{1}{3}(1,-1,-1)^T$.
从而 $u_3=\frac{\tilde{u}_3}{|\tilde{u}_3|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^T$.

例 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

解: (1). $A^H A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 其特征值为 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$, 从而 A奇异值$\sigma_1 = \sqrt{3}$, $\sigma_2 = 1$.

求 λ_i 对应的特征向量 (这里已正交):
$x_1 = (1, 1, 2)^T$; $x_2 = (1, -1, 0)^T$, $x_3 = (1, 1, -1)^T$.
将 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 标准化后, 得 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^T$;
$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$.

例 求 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

解 (续): 求酉矩阵 U, 令 $u_1=\frac{Av_1}{\sigma_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $u_2=\frac{Av_2}{\sigma_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, 由 $u_3\perp u_1,u_2$, 易得 $u_3=(0,0,1)^T$ 为第三个标准正交基.

(2). 求 B^HB 的特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=0.$
从而 B 的奇异值为 $\sigma_1=\sqrt{2},\sigma_2=1.$
对应的标准特征向量为 $v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $v_2=(0,0,1)^T$, $v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$.
从而 $u_1=\frac{Bv_1}{\sigma_1}=(1,0)^T$, $u_2=\frac{Bv_2}{\sigma_2}=(0,1)^T$.

矩阵 U, V 的空间性质

$V = [v_1, v_2, \cdots, v_r, \cdots, v_n] = [V_1, V_2] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的列向量是 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基 (右奇异向量)

- $V_2 \in \mathbb{C}^{n\times(n-r)}$ 的列向量是 $N(A)$ 标准正交基 $(AV_2 = 0)$

$U = [u_1, u_2, \cdots, u_r, \cdots, u_m] = [U_1, U_2] \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 的列向量是 $\mathbb{C}^m$ 的标准正交基 (左奇异向量)

- $U_1 \in \mathbb{C}^{m\times r}$ 的列向量是 $R(A)$ 标准正交基 $(A = U_1\Delta_r V_1^H,\ U_1 = AV_1\Delta_r^{-1})$

定理: $A = \sigma_1 u_1 v_1^H + \sigma_2 u_2 v_2^H + \cdots + \sigma_r u_r v_r^H$.
(按照奇异值分解展开可得)

例: 图像数字化技术与奇异值分解

- 计算机一般将图像转换成矩阵来存储
- 转换的原理是将图形分解成像素 (pixels) 的一个矩形数阵，其中的信息就可以用一个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$来存储。矩阵 A 的元素 a_{ij} 是一个正数，它相应于像素的灰度水平 (gray level) 的度量值。
- 一般相邻的像素会产生相近的灰度水平值，因此有可能在满足图像清晰度要求的条件下，将存储一个$m\times n$ 阶矩阵需要存储的$m\times n$个数减少到$n+m+1$的一个倍数

- 压缩数字化图形存储量的方法主要是应用矩阵的奇异值分解和矩阵范数下的逼近。若图象的矩阵 A 有奇异值分解$A = U\Sigma V^H$及展开式$A = \sigma_1 u_1 v_1^H + \sigma_2 u_2 v_2^H + \cdots + \sigma_r u_r v_r^H$.

- 压缩矩阵 A 的方法是取一个秩为 k $(k \leq r)$ 的矩阵 A_k 来逼近矩阵 A. 可取 A_k 为
$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^H + \sigma_2 u_2 v_2^H + \cdots + \sigma_k u_k v_k^H$.

- 在秩为 k $(k \leq n)$ 的所有矩阵中，矩阵 A_k 所对应的图象和矩阵 A 所对应的图象最相近。一般的，k 越大图象就越清晰。通过选择合适的 k $(k < r)$ 使得既减少数据存储量，又不至于太失真.

- 存储矩阵 A_k 只需要存储 k 个奇异值，k 个 m 维向量 u_i 和 n 维向量 v_j 的所有分量，共计 $k(m+n+1)$ 个元素。

- 如果 $m=n=1000$，存储原矩阵 A 需要存储 1000×1000 个元素. 取 $k=100$ 时，图象已经非常清晰了，这时的存储量是 $100(2000+1)=200100$ 个数。

- 和矩阵 A 比较，存储量减少了 80%.

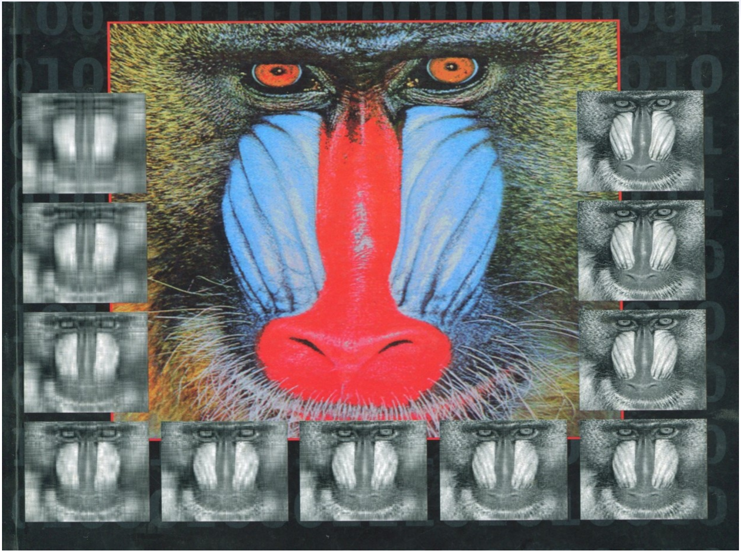

Figure: 图像数据的奇异值分解压缩：秩从 4 到 128