INTRODUCCIÓN A LA ROBÓTICA

CINEMÁTICA DE ROBOTS MÓVILES

Indice:

Indice:

Cinemática vs. Dinámica.

- La **cinemática** es la rama de la mecánica que describe el movimiento de los objetos sólidos sin considerar las causas que lo originan (las fuerzas) y se limita, principalmente, al estudio de la trayectoria en función del tiempo. Para ello utiliza **velocidades y aceleraciones**, que describen cómo cambia la **posición** en función del tiempo.

- La **dinámica** es la rama de la física que describe la evolución en el tiempo de un sistema físico en relación con los motivos o causas que provocan los cambios de estado físico o estado de movimiento. El objetivo de la dinámica es describir los **factores capaces de producir alteraciones** de un sistema físico, cuantificarlos y **plantear ecuaciones de movimiento** o **ecuaciones de evolución** para dicho sistema de operación.

Modelo de un robot -> dinámico o cinemático?

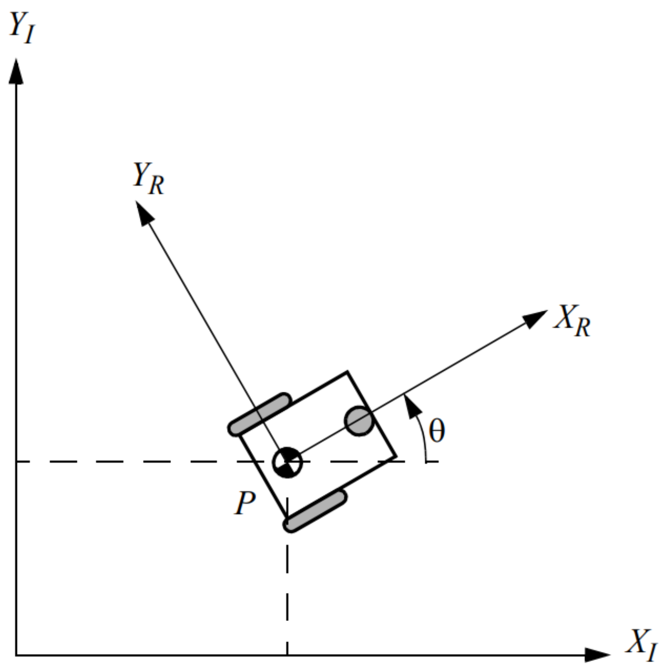
Wikipedia
La enciclopedia libre

Modelado cinemático

- Necesitamos el modelado para entender el comportamiento mecánico, y consiguientemente para diseñar el robot y su control para una tarea particular.
- Entender la cinemática -> descripción del espacio de trabajo.
- Para el caso de un **brazo robot** la **controlabilidad** definirá en qué manera los actuadores moverán al robot de una pose a otra.
- Para el caso de **robots móviles** la **controlabilidad** definirá posibles caminos y trayectorias en su espacio de trabajo.
- El análisis dinámico usualmente agrega restricciones adicionales al espacio de trabajo y trayectorias debido a masas y fuerzas.
- En el caso del robot móvil el modelado aporta información para el **problema de ubicación**.

Modelado cinemático "a mano"

- Para la derivación de un modelo cinemático podemos seguir una serie de pasos:
  1. Establecer un marco mundo $\{I\}$ y un marco en el robot $\{R\}$
  2. Establecer una relación entre ambos marcos, aquí una matriz ortogonal de rotación $R(\theta)$



$$
{}^{R}R(\theta)_I = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Modelado cinemático "a mano"

- Para la derivación de un modelo cinemático podemos seguir una serie de pasos:
  1. Establecer un marco mundo $\{I\}$ y un marco en el robot $\{R\}$
  2. Establecer una relación entre ambos marcos, aquí una matriz ortogonal de rotación $R(\theta)$
  3. Luego es posible expresar los movimientos con relación a los marcos como:

$$^R\dot{\xi} = R(\theta)\,^I\dot{\xi}$$

  4. Luego debemos expresar los movimientos en función de los parámetros del robot.

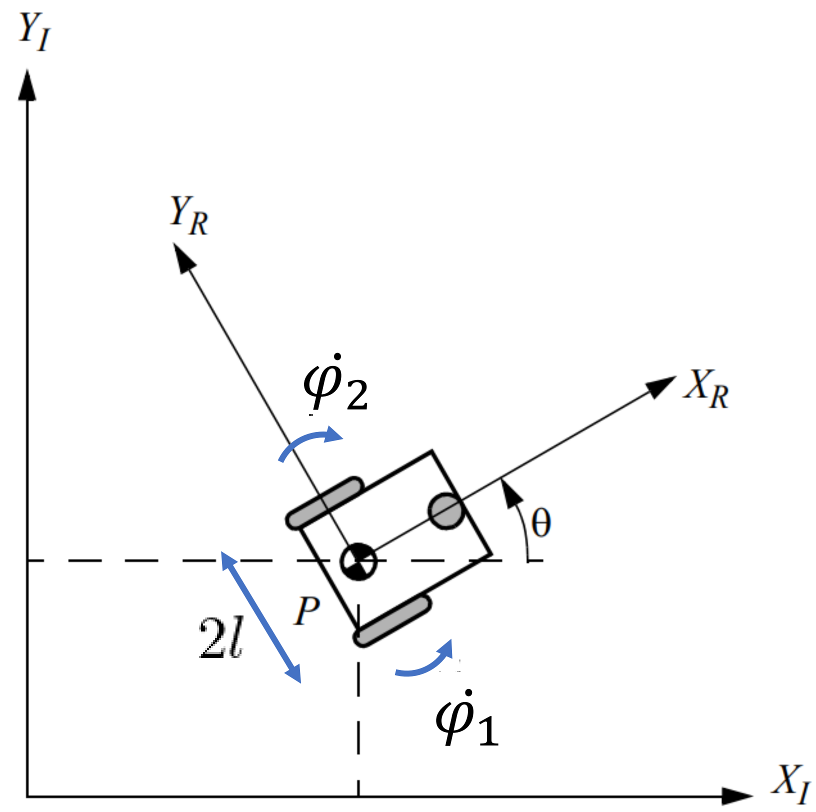
$$^I\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = f(l, r, \theta, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$$

Modelado cinemático “a mano”

4. Luego debemos expresar los movimientos en función de los parámetros del robot.

$$^{I}\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = f(l, r, \theta, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$$

- r radio de las ruedas
- φ velocidades angulares de las ruedas
- l distancia entre ruedas



Modelado cinemático "a mano"

4. Podemos obtener el movimiento en el marco global como:

$$ {}^{I}\dot{\xi} = R(\theta)^{-1}\,{}^{R}\dot{\xi} $$

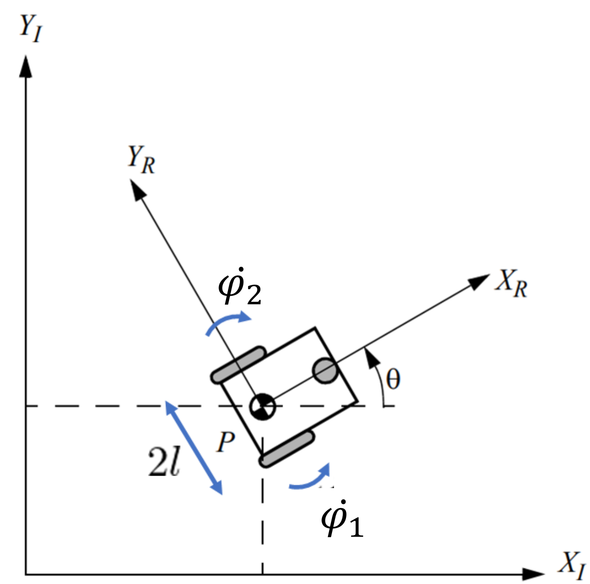
5. A partir de lo anterior podemos obtener las velocidades en el marco del robot de forma más simple. El procedimiento general es observar cuanto aporta en movimiento cada rueda en forma individual al marco del robot (punto P), pero esto dependerá de las restricciones propias de la rueda.

Aporte a velocidad lineal

$$ \dot{x}_{r1} = (1/2)r\dot{\varphi}_1 \qquad \dot{x}_{r2} = (1/2)r\dot{\varphi}_2 $$

Aporte a velocidad angular

$$ \omega_1 = \frac{r\dot{\varphi}_1}{2l} \qquad \omega_2 = \frac{-r\dot{\varphi}_2}{2l} $$



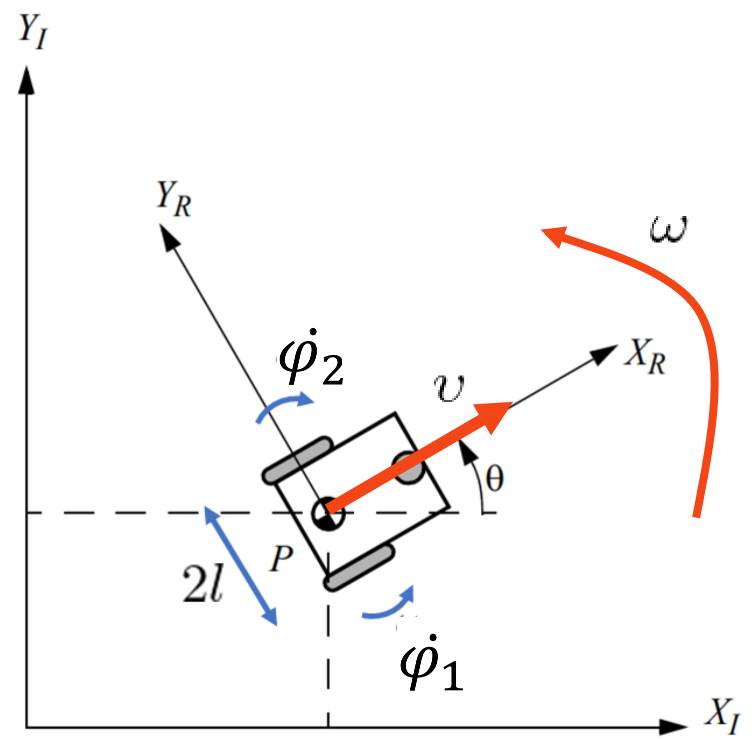
Modelado cinemático “a mano”

6. Finalmente podemos obtener el modelo cinemático combinando las ecuaciones anteriores:

$$^{I}\dot{\xi} = R(\theta)^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}r\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}r\dot{\varphi}_2 \\ 0 \\ \frac{r\dot{\varphi}_1}{2l} + \frac{-r\dot{\varphi}_2}{2l} \end{pmatrix}$$

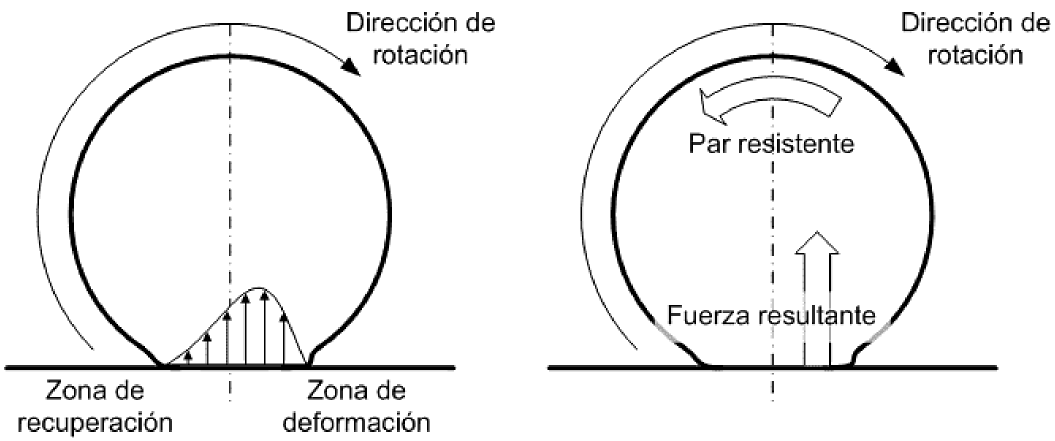
$$R(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{I}\dot{\xi} = \begin{pmatrix} v\cos(\theta) \\ v\sin(\theta) \\ \omega \end{pmatrix}$$

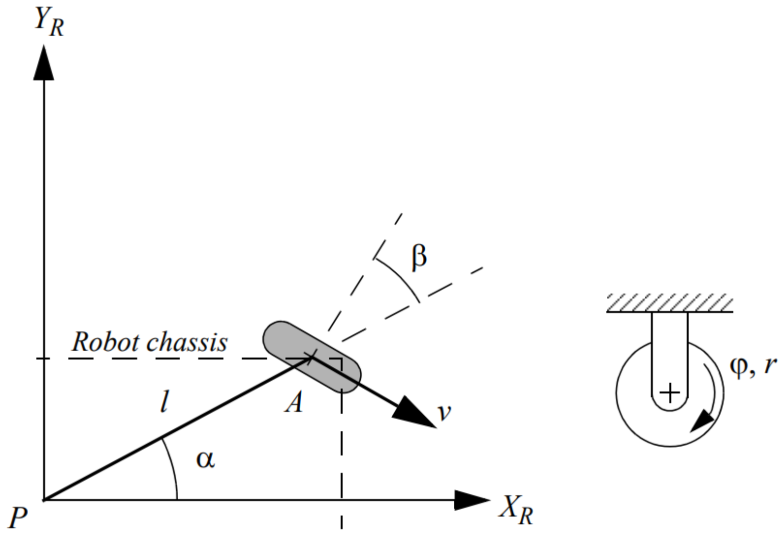


Restricciones cinemáticas de rueda

- El primer paso en el modelado cinemático consiste en expresar las **restricciones de movimiento de cada rueda** y luego ver como combinadas afectan el movimiento del robot.
- En el análisis del movimiento de cada rueda individual se toman dos supuestos:
- Se asume que el plano de la rueda se mantiene vertical y solamente hay un punto de contacto entre la rueda y el suelo. -> **condición de rodadura ideal**.
- Se asume que no hay deslizamiento en el punto de contacto. -> **condición de no deslizamiento**.



Restricciones cinemáticas de rueda. Rueda fija



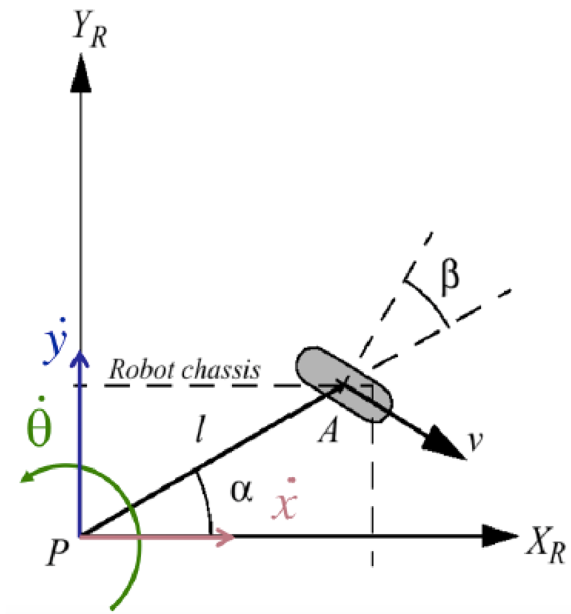
Restricción de rodadura

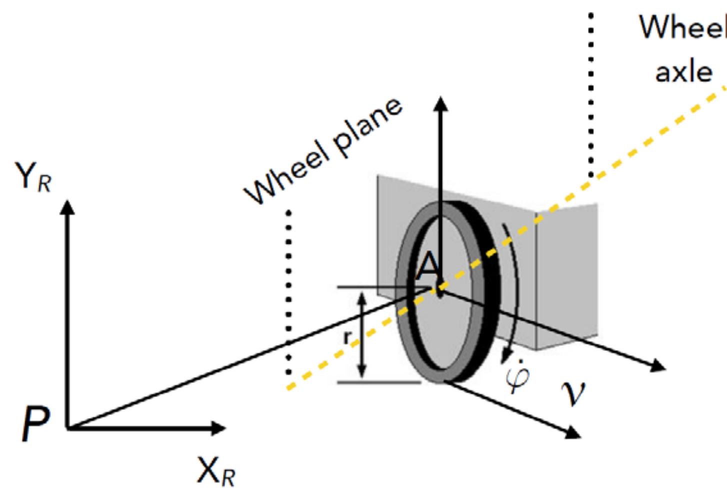
$$\begin{pmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & (-l)\cos(\beta)\end{pmatrix} R(\theta)^I\dot{\xi} - r\dot{\varphi} = 0$$

Restricción de deslizamiento

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & l\sin(\beta)\end{pmatrix} R(\theta)^I\dot{\xi} = 0$$

Restricciones cinemáticas de rueda. Rueda fija





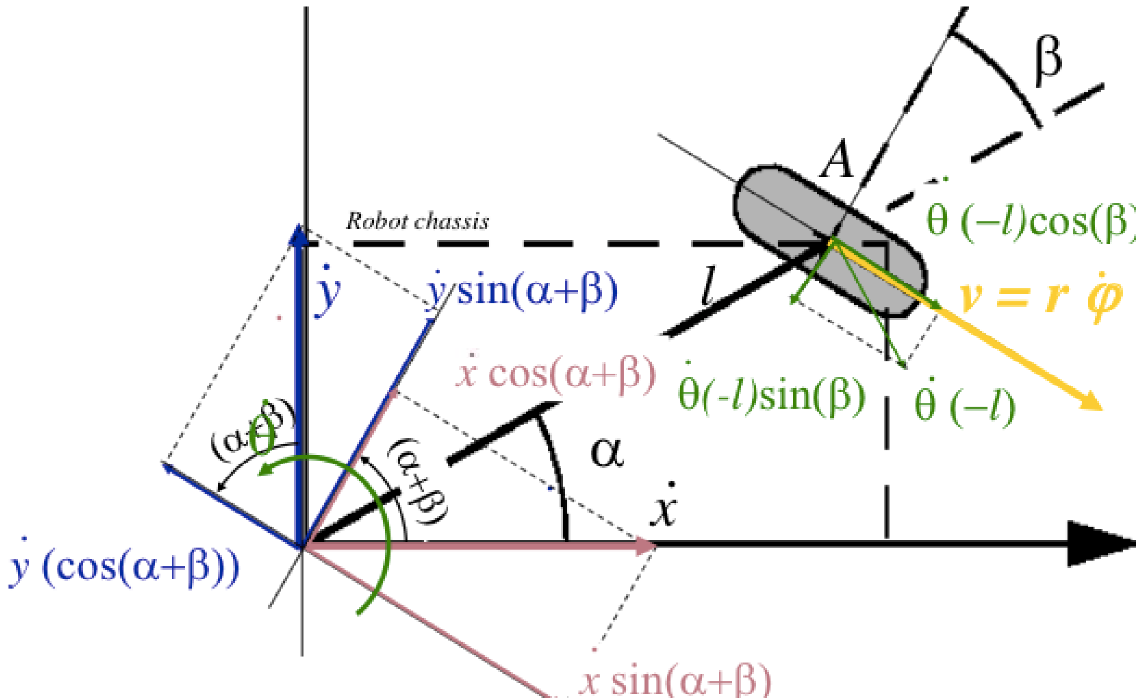
Restricción de rodadura

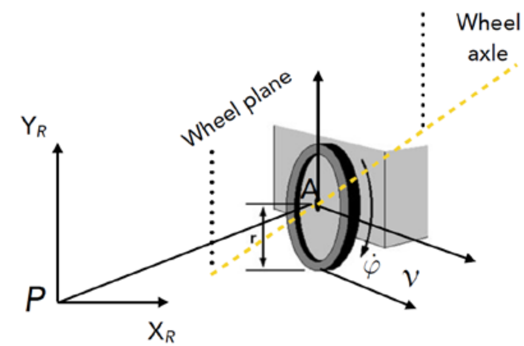
$$\left(\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad (-l)\cos(\beta)\right) R(\theta)^{I}\dot{\xi} - r\dot{\varphi} = 0$$

Restricción de deslizamiento

$$\left(\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad l\sin(\beta)\right) R(\theta)^{I}\dot{\xi} = 0$$

Restricciones cinemáticas de rueda. Rueda fija





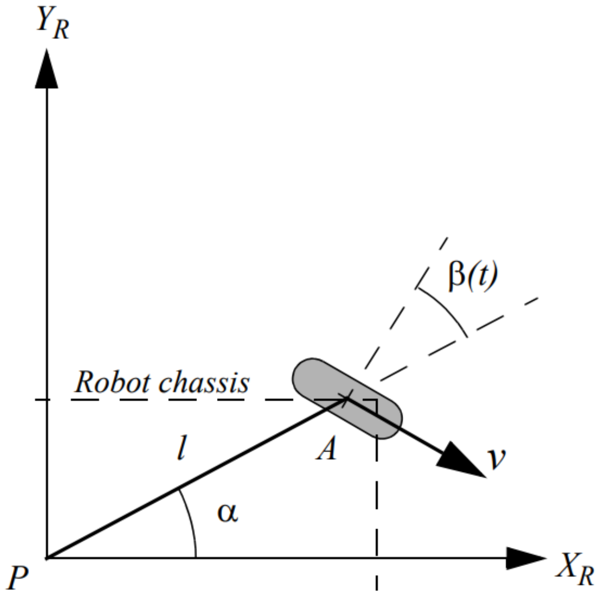
Restricción de rodadura

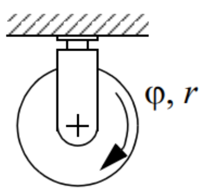
$$\begin{pmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & (-l)\cos(\beta)\end{pmatrix} R(\theta)^I\dot\xi - r\dot\varphi = 0$$

Restricción de deslizamiento

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & l\sin(\beta)\end{pmatrix} R(\theta)^I\dot\xi = 0$$

Restricciones cinemáticas de rueda. Rueda giratoria estándar





Instantáneamente, la tasa de cambio de β(t) no tiene impacto en las restricciones de movimiento.

Es sólo mediante la integración en el tiempo que los cambios en el ángulo de dirección tienen un impacto en la movilidad del robot.

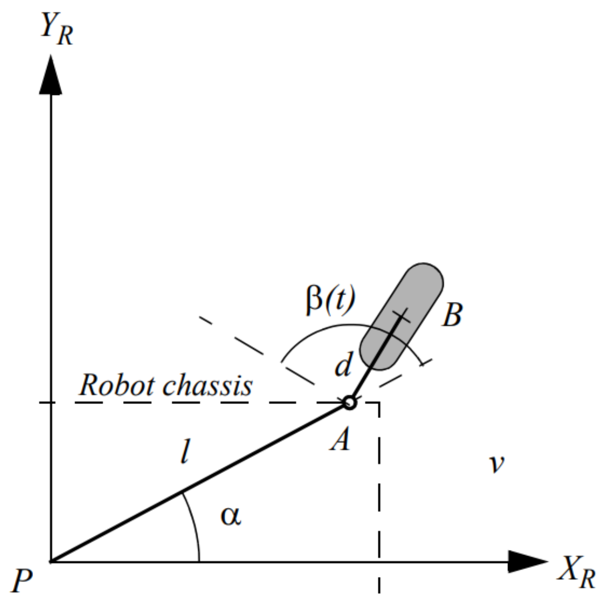
Restricción de rodadura

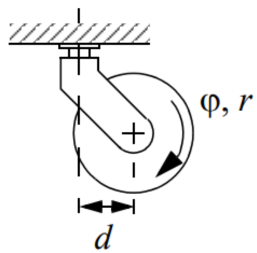
$$\left(\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad (-l)\cos(\beta)\right) R(\theta)^I\dot{\xi} - r\dot{\varphi} = 0$$

Restricción de deslizamiento

$$\left(\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad l\sin(\beta)\right) R(\theta)^I\dot{\xi} = 0$$

Restricciones cinemáticas de rueda. Rueda giratoria castor





- El movimiento de giro de la rueda causa movimiento por sí mismo en el robot.
- Todo movimiento lateral se equilibra con un movimiento de dirección de rueda equivalente, de forma que la rueda giratoria no oponga resistencia al movimiento

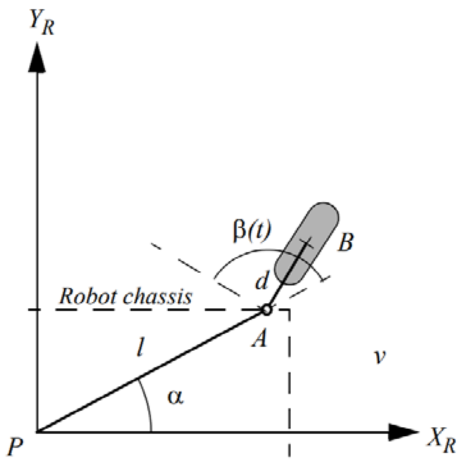
Restricción de rodadura

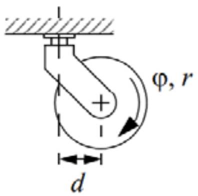
$$\begin{pmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & (-l)\cos(\beta)\end{pmatrix} R(\theta)\,{}^{I}\dot{\xi} - r\dot{\varphi} = 0$$

Restricción de deslizamiento

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & d + l\sin(\beta)\end{pmatrix} R(\theta)\,{}^{I}\dot{\xi} + d\dot{\beta} = 0$$

Restricciones cinemáticas de rueda. Rueda giratoria castor





- Dado cualquier movimiento del chasis del robot $\dot{\xi}_I$, existe algún valor para la velocidad de giro, $\dot{\varphi}$, y velocidad de dirección, $\dot{\beta}$, tal que se cumplan las restricciones.
- Por tanto, un robot solo conformado con este tipo de ruedas puede moverse con cualquier velocidad (en el espacio de posibles posiciones del robot), tenemos un robot omnidireccional.

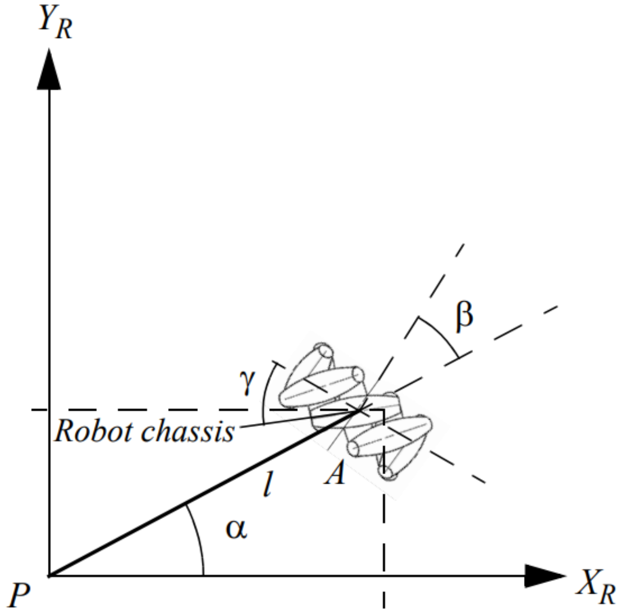
Restricción de rodadura

$$\left(\sin(\alpha+\beta) \quad -\cos(\alpha+\beta) \quad (-l)\cos(\beta)\right) R(\theta)^I\dot{\xi} - r\dot{\varphi} = 0$$

Restricción de deslizamiento

$$\left(\cos(\alpha+\beta) \quad \sin(\alpha+\beta) \quad d + l\sin(\beta)\right) R(\theta)^I\dot{\xi} + d\dot{\beta} = 0$$

Restricciones cinemáticas de rueda. Rueda sueca



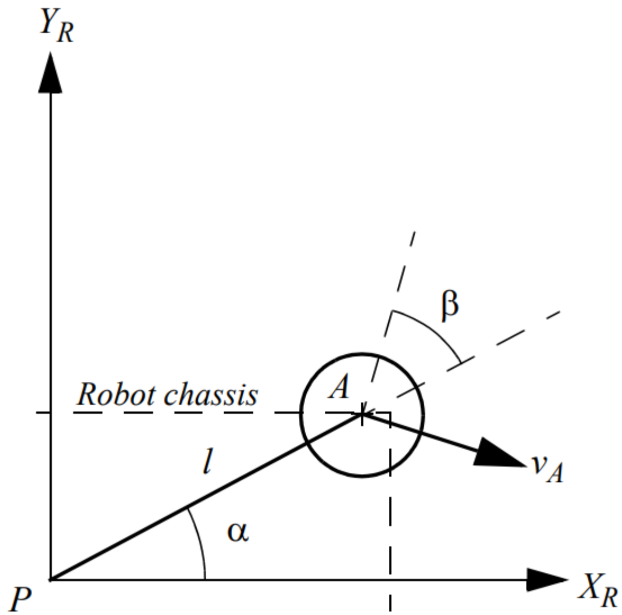
Restricción de rodadura

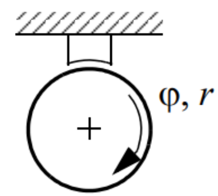
$$\begin{pmatrix}\sin(\alpha+\beta+\gamma) & -\cos(\alpha+\beta+\gamma) & (-l)\cos(\beta+\gamma)\end{pmatrix} R(\theta)^I\dot{\xi} - r\dot{\varphi}\cos(\gamma) = 0$$

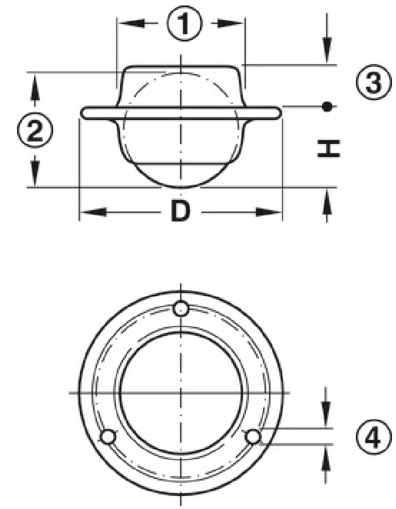
Restricción de deslizamiento

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta+\gamma) & \sin(\alpha+\beta+\gamma) & l\sin(\beta+\gamma)\end{pmatrix} R(\theta)^I\dot{\xi} - r\dot{\varphi}\sin(\gamma) - r_{sw}\dot{\varphi}_{sw} = 0$$

Restricciones cinemáticas de rueda. Rueda esférica







Descripción de movimiento en la dirección de v_A en el punto A

$$\begin{pmatrix}\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) & (-l)\cos(\beta)\end{pmatrix} R(\theta)^I\dot{\xi} - r\dot{\varphi} = 0$$

Por definición la rotación ortogonal a v_A es cero

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) & l\sin(\beta)\end{pmatrix} R(\theta)^I\dot{\xi} = 0$$

La rueda esférica omnidireccional puede tener cualquier dirección de movimiento, por tanto no impone ninguna restricción cinemática al chasis del robot

Modelado cinemático “sistemático”

- Para la derivación de un modelo cinemático podemos seguir una serie de pasos:
  1. Establecer número de ruedas fijas N_f y direccionables N_s
  2. Juntamos las condiciones de rodadura en una única ecuación:

$$J_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I - J_2\dot{\varphi} = 0$$

Siendo

1. φ el vector de velocidades de giro de las ruedas fijas y direccionables $$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_s(t) \end{bmatrix}$$
2. J_2 una matriz diagonal compuesta por el radio de cada rueda
3. $J_1(\beta_s)$ una matriz con las proyecciones de todas las ruedas en sus movimientos a lo largo de los planos de rueda. Esta matriz tendrá un parte constante debido a la ruedas fijas y una variable debido a las direccionables.

$$J_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix}$$

Modelado cinemático “sistemático”

4. De la misma manera juntamos las restricciones de deslizamiento en una única ecuación:

$$C_1(\beta_s)R(\theta)\dot{\xi}_I = 0 \qquad\qquad C_1(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix}$$

5. Finalmente podemos fusionar ambas ecuaciones en análisis, a partir de la cual podemos obtener el modelo cinemático de nuestro robot:

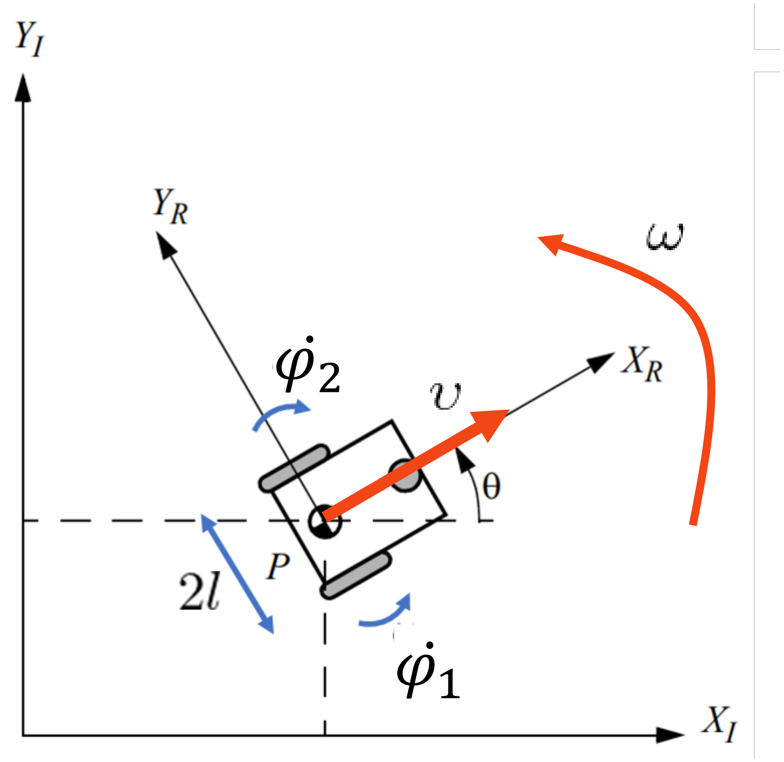
$$\begin{bmatrix} J_1(\beta_s) \\ C_1(\beta_s) \end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} J_2\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modelado cinemático “sistemático” – robot diferencial

$$\begin{bmatrix} J_1(\beta_s) \\ C_1(\beta_s) \end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} J_2\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & l \\ 1 & 0 & -l \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I = \begin{bmatrix} J_2\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\xi}_I = R(\theta)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & l \\ 1 & 0 & -l \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} J_2\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = R(\theta)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_2\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

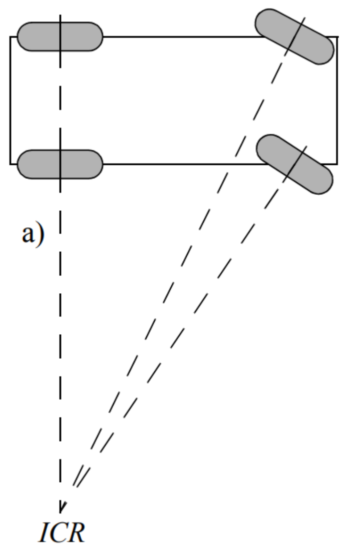


$$J_2 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

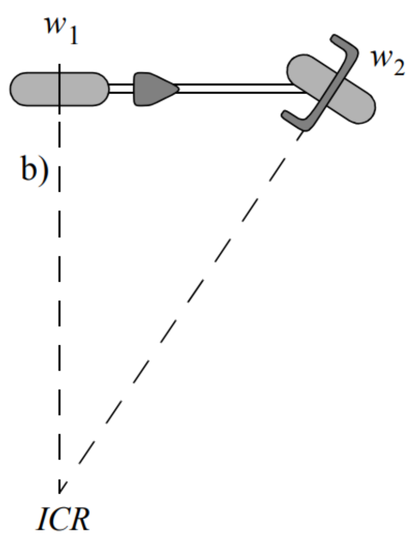
Indice:

Modelado cinemático. Características

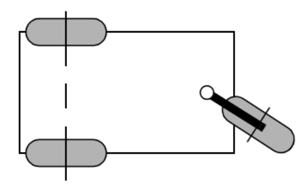
- **Centro de rotación instantáneo (ICR – instantaneous center of rotation)**, concepción geométrica que nos sirve para ver las restricciones cinemáticas.



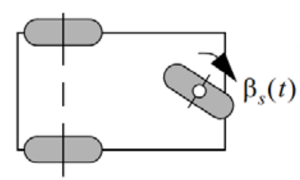
Modelo Ackerman



Modelo bicicleta



Modelo robot diferencial



Modelo robot tipo triciclo

Modelado cinemático. Características – ICR – Grado de movilidad

- Podemos definir el **grado de movilidad** (número entre 0 y 3) como:

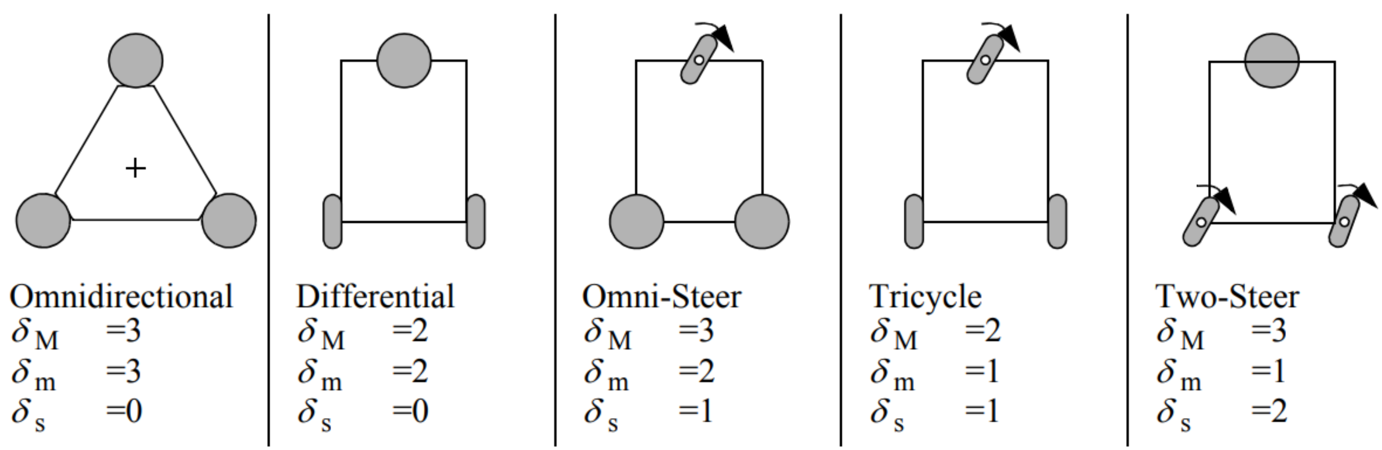
$$\delta_m = dimN\left[C_1(\beta_s)\right] = 3 - rank\left[C_1(\beta_s)\right]$$

- Podemos definir el **grado de direccionamiento** (número entre 0 y 2) como:

$$\delta_s = rank\left[C_{1s}(\beta_s)\right]$$

- Podemos definir la **maniobrabilidad** como:

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$

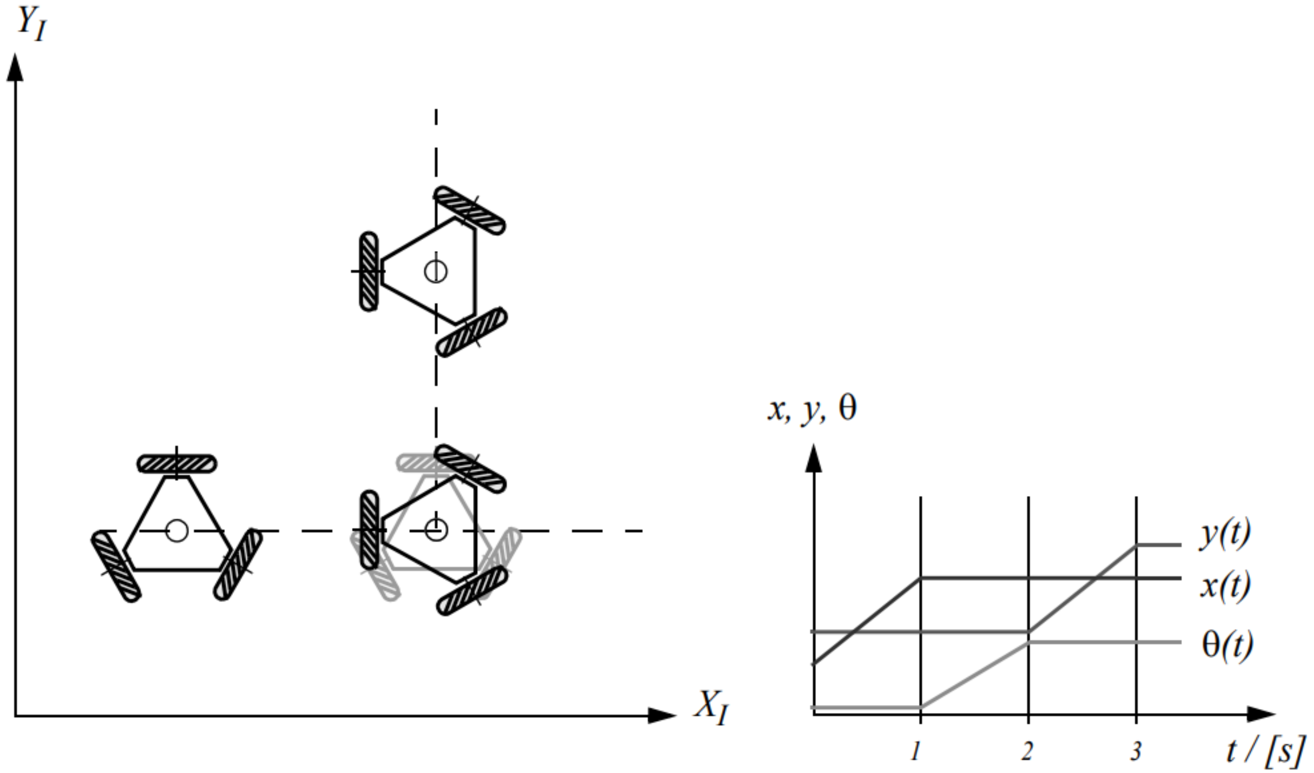


Modelado cinemático. Características

- La **maniobrabilidad** es equivalente a los grados de libertad del robot (**DOF** –degrees of freedom), estos definen los movimientos que pueden controlarse en el robot.
- El **espacio de configuración**, puede exceder a los grados de libertad. Ejemplo: robot Akerman posee dos grados de libertad tracción y giro, mientras que su espacio de configuración puede ser x,y y orientación θ
- El **espacio de velocidad admisible**, se relaciona con los grados de libertad diferenciales (**DDOF** – differential degrees of freedom), estos son siempre igual a la movilidad. Este espacio describe los movimientos independientes que un robot puede controlar.
- **Robot holonómico** -> robot scon cero restricciones no holonómicas cinemáticas (restricción que considere la derivada de una variable de posición) (termino más matemático por que relaciona grados de libertad e integrabilidad de restricciones cinemáticas)
- **Robot omnidireccional** -> robot holonómico donde DDOF=3 -> se puede mover en cualquier dirección

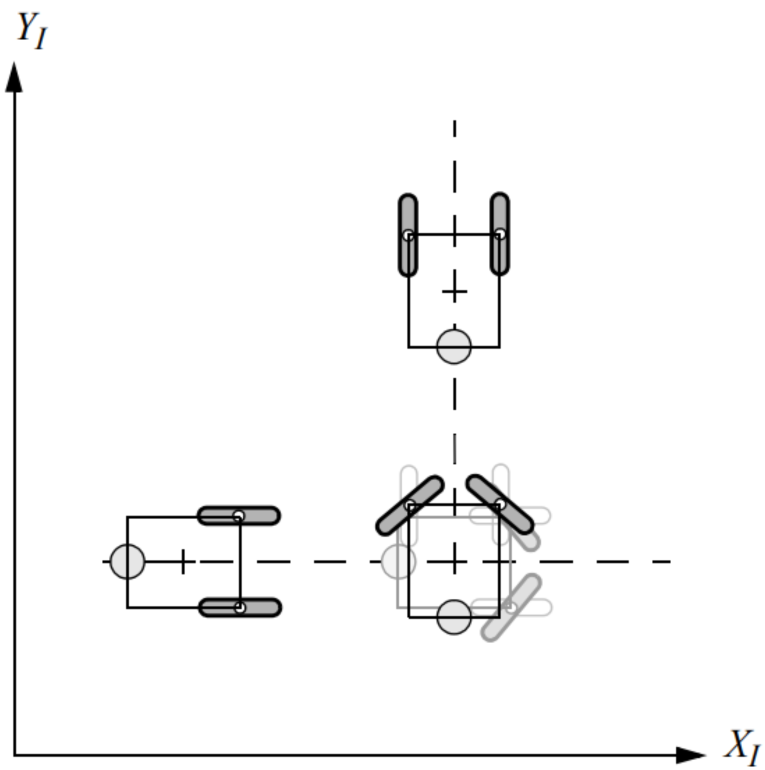
Consideraciones sobre caminos y trayectorias.

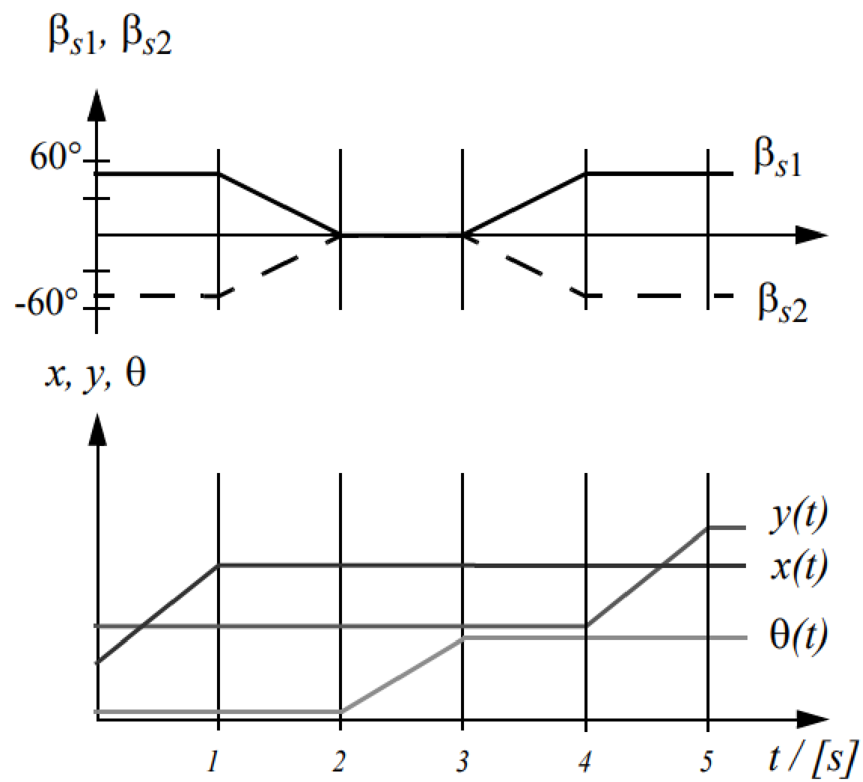
- Considerando un robot omnidireccional y una trayectoria a cumplir:



Consideraciones sobre caminos y trayectorias.

- Considerando un robot con dos ruedas direccionables con la misma trayectoria a cumplir:

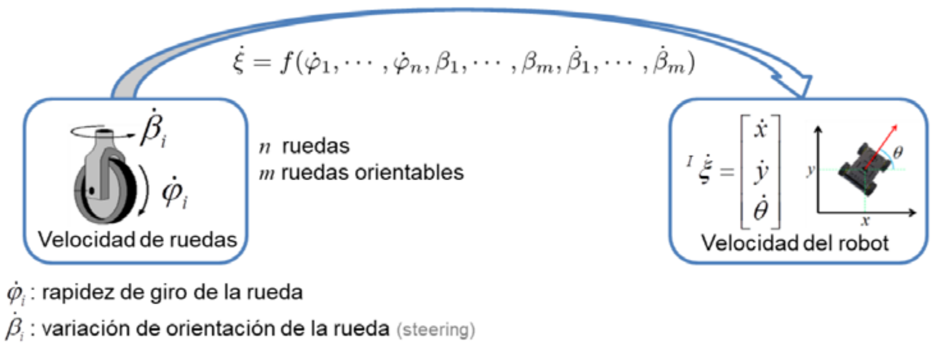


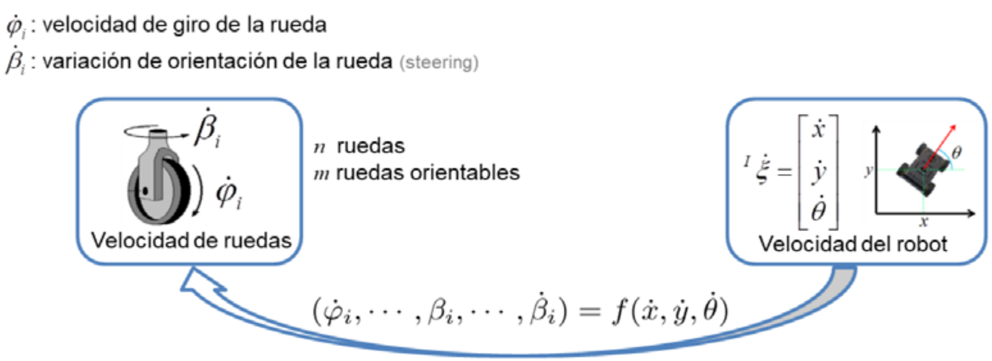


Cinemática Directa e Inversa del Robot

- **Cinemática diferencial directa:** dadas las características de las ruedas (radio, ubicación geométrica en el robot, distancia entre cada una, etc), un punto de referencia del robot (normalmente el centro geométrico) y las velocidades a las que giran las ruedas, se pueden obtener las **velocidades del robot respecto al sistema de referencia global**. Permite determinar la velocidad cartesiana del robot $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ dadas las velocidades de giro de las ruedas $(\dot{\varphi}_i, \dot{\beta}_i)$ y las orientaciones de las ruedas β_i.

Espacio de configuración – Espacio de trabajo

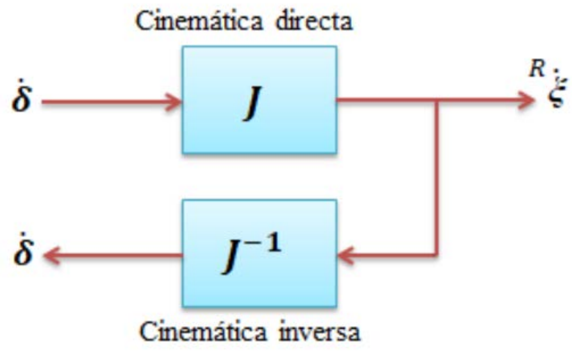




- **Cinemática diferencial inversa:** permite determinar las velocidades $(\dot{\varphi}_i, \dot{\beta}_i)$ y las orientaciones β_i. que se deben aplicar a las ruedas, para que el robot se mueva con una velocidad cartesiana deseada $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$

Cinemática Directa e Inversa del Robot

Cinemática diferencial directa:



- Siendo $\dot{\delta}$ las variables articulares de cada rueda (velocidades angulares ruedas y articulaciones), podemos expresar la cinemática diferencial directa como :

$$ {}^{R}\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{\delta}} $$

- Donde J es la matriz jacobiana del robot (m x n).
- La ecuación anterior se puede poner respecto del sistema de referencia global como:

$$ {}^{I}\dot{\boldsymbol{\xi}} = {}^{I}\boldsymbol{R}_{R}\,\boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{\delta}} = \left({}^{R}\boldsymbol{R}_{I}\right)^{-1}\boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{\delta}} = \left({}^{R}\boldsymbol{R}_{I}\right)^{T}\boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{\delta}} $$

Cinemática diferencial inversa:

$$ \dot{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{J}^{-1}\;{}^{R}\dot{\boldsymbol{\xi}} $$

- En caso de que no podamos calcular la inversa de J podemos utilizar la inversa generalizada:

$$ \boldsymbol{J}^{+} = (\boldsymbol{J}^{T}\boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{J}^{T} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{J}^{+}\;{}^{R}\dot{\boldsymbol{\xi}} $$

m=n	J cuadrado y no singular $\boldsymbol{J}^{+} = \boldsymbol{J}^{-1}$
m>n	J rectangular rango n, $\dot{\delta}$ sobreespecificado
m<n	J rango m, $\dot{\delta}$ subespecificado (muchas especificaciones de $\dot{\delta}$ conducen al mismo vector ${}^{R}\dot{\varepsilon}$

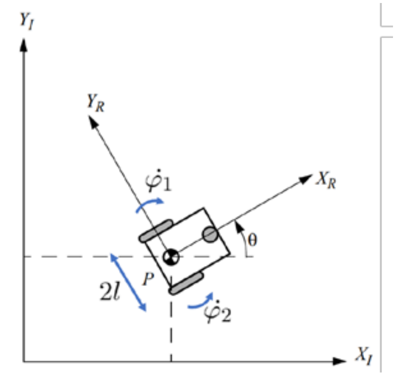
Cinemática Directa e Inversa del Robot

Caso robot diferencial:

$$\dot{\xi}_I = R(\theta)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & l\\ 1 & 0 & -l\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}J_2\varphi\\ 0\end{bmatrix} = R(\theta)^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_2\varphi\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}$$



Cinemática diferencial directa:

$$\dot{\varepsilon}_I = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2l} & \frac{1}{2l} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r & 0\\ 0 & r\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\varphi}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}r & \frac{1}{2}r\\ 0 & 0\\ \frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\varphi}_2\end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}r & \frac{1}{2}r\\ 0 & 0\\ \frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l}\end{bmatrix}$$

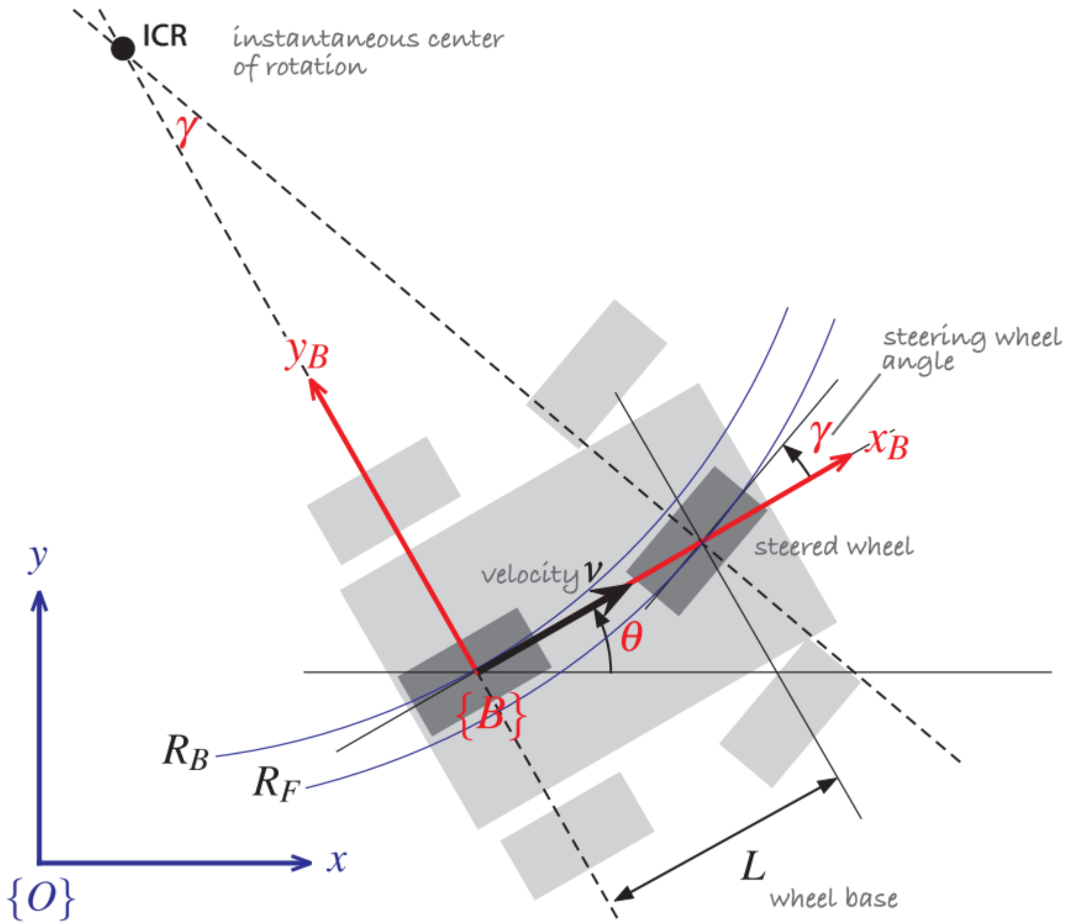
Cinemática diferencial inversa:

$$J^{-1} = [J^T J]^{-1} J^T = \begin{bmatrix}\frac{1}{r} & 0 & \frac{l}{r}\\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{l}{r}\end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & l\\ 1 & 0 & -l\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\varphi}_1\\ \dot{\varphi}_2\end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}1 & 0 & l\\ 1 & 0 & -l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^R\dot{x}\\ {}^R\dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

Indice:

Modelo de bicicleta.



Configuración del robot:

$$q = (x, y, \theta) \in \mathcal{C}$$

$$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$$

Velocidad angular

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R_B}$$

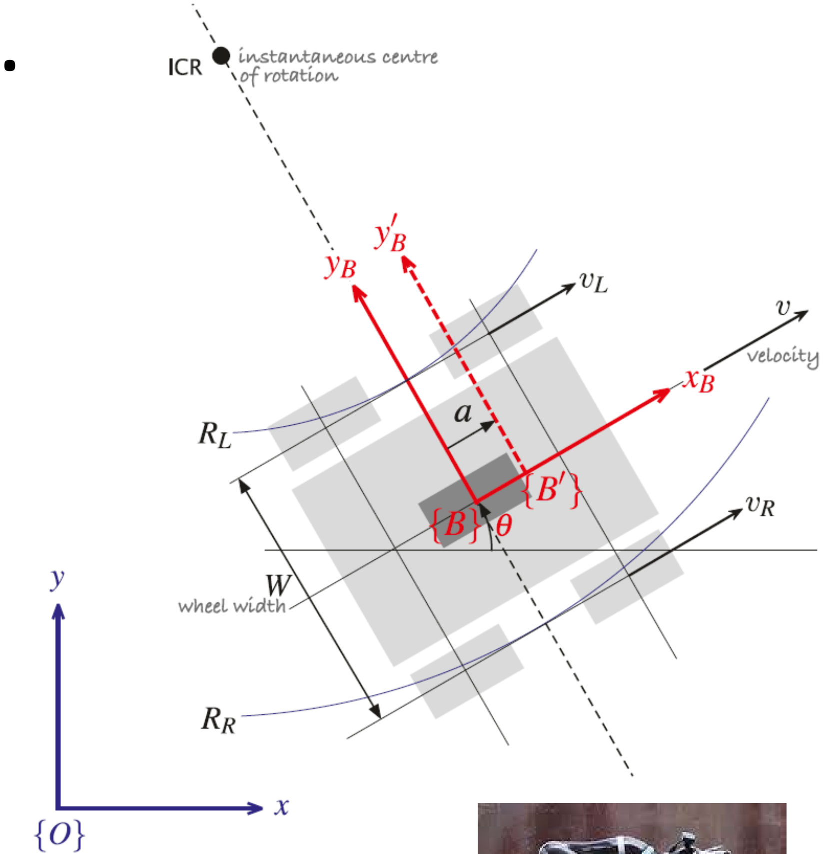
Radio de giro

$$R_B = L / \tan \gamma$$

Modelo monociclo - diferencial.

$$\dot{\theta} = \frac{v_L}{R_L} = \frac{v_R}{R_R} \qquad R_R = R_L + W$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_R - v_L}{W}$$



Modelo cinemático

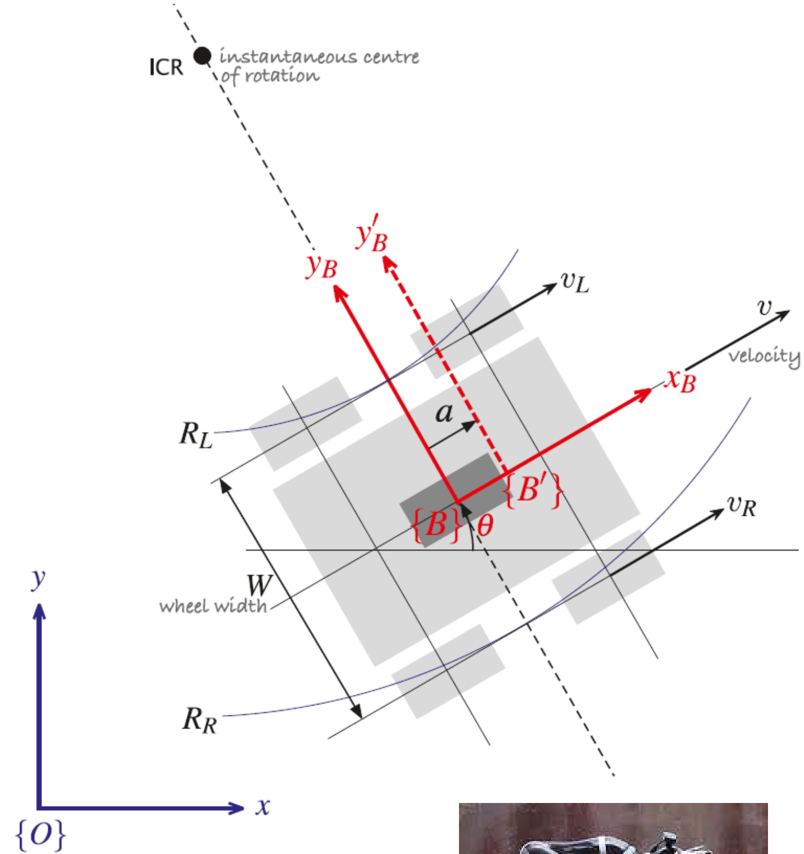
$$\dot{x} = v\cos\theta$$
$$\dot{y} = v\sin\theta$$
$$\dot{\theta} = \frac{v_\Delta}{W}$$

$$v_\Delta = v_R - v_L \qquad v = ½(v_R + v_L)$$

Restricción no holonómica

$$\dot{y}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta \equiv 0$$

Modelo monociclo - diferencial.



Modelo cinemático – desplazo 'a' punto interés

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -a\sin\theta \\ \sin\theta & a\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

De donde si $a \neq 0$ podemos obtener:

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{a}\sin\theta & \frac{1}{a}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Ver que este sistema nos dice que velocidades lineales y angulares debemos generar con nuestro robot, para conseguir determinadas velocidades deseadas del marco $\{B'\}$ en el marco mundo.

Modelo omnidireccional.

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{v_w \hat{\boldsymbol{x}}_w}_{\text{driven}} + \underbrace{v_r(\cos\alpha \hat{\boldsymbol{x}}_w + \sin\alpha \hat{\boldsymbol{y}}_w)}_{\text{rolling}}$$

$$= (v_w + v_r \cos\alpha)\hat{\boldsymbol{x}}_w + v_r \sin\alpha \hat{\boldsymbol{y}}_w$$

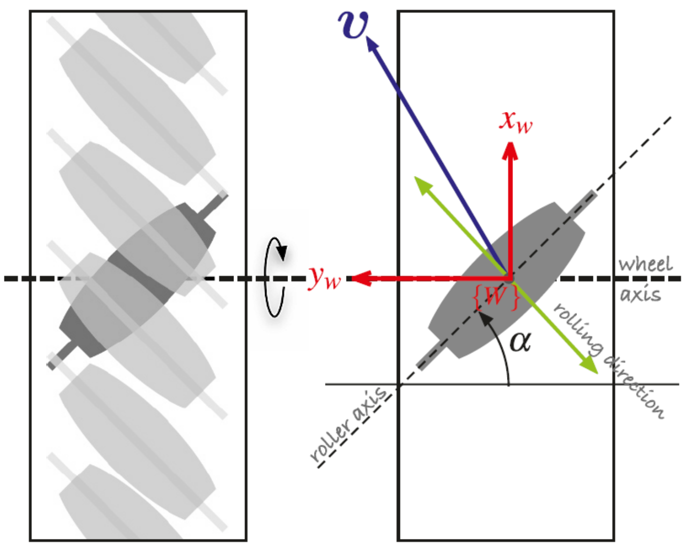
Con v_w la velocidad debida a la rotación de la rueda y v_r la velocidad debido al rodillo.

Tomando : $\boldsymbol{v} = v_x \hat{\boldsymbol{x}}_w + v_y \hat{\boldsymbol{y}}_w$

Podemos reescribir: $v_r = \boldsymbol{v}_y / \sin\alpha$

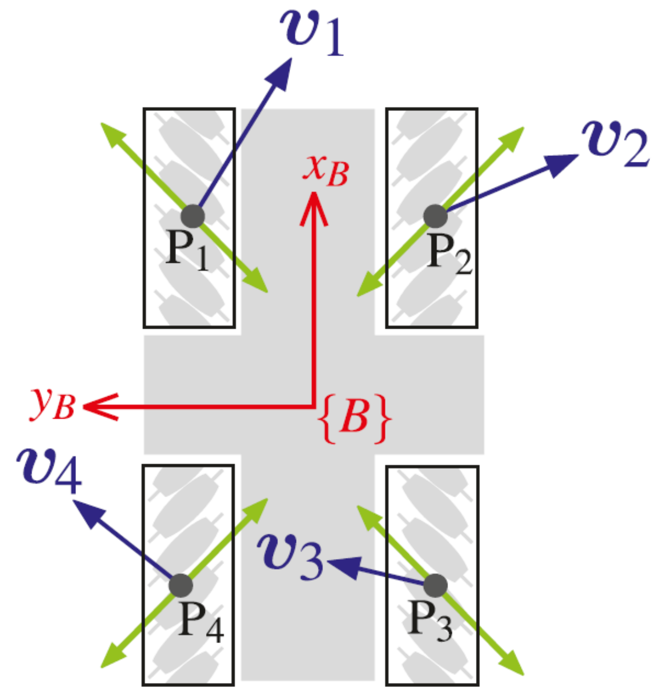
A lo que podemos obtener la velocidad de la rueda como: $v_w = \boldsymbol{v}_x - \boldsymbol{v}_y \cot\alpha$

Que luego podemos relacionar con su velocidad angular como: $\varpi = v_w / R$



Notar acoplamiento de movimiento entre velocidad rodillos y la velocidad de la rueda.

Modelo omnidireccional.



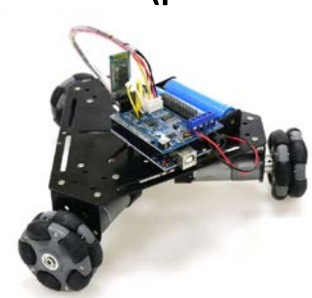
La configuración de este vehículo puede representarse con $\boldsymbol{q} = (x, y, \theta) \in \mathcal{C}$

donde $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$

Las cuatro ruedas poseen puntos de contactos ${}^{B}\boldsymbol{p}_i$ descriptos en el marco del robot $\{B\}$. Para una velocidad vectorial ${}^{B}\boldsymbol{v}_B$ del marco del robot y angular ${}^{B}\omega$ la velocidad en cada puto de contacto puede ser descripta como: ${}^{B}\boldsymbol{v}_i = {}^{B}\boldsymbol{v}_B + {}^{B}\omega\hat{\boldsymbol{z}}_B \times {}^{B}\boldsymbol{p}_i$

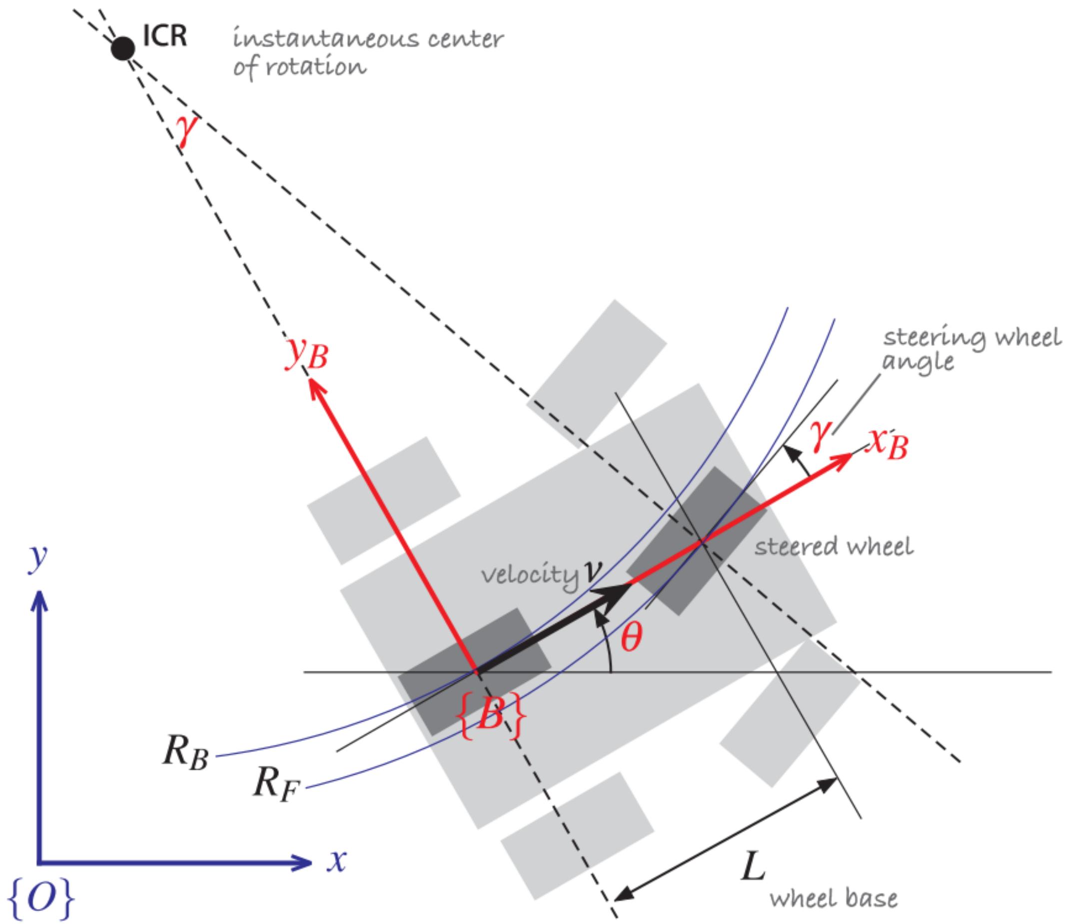
Luego a partir de las ecuaciones vistas puede despejarse las velocidades angulares de cada rueda.

Otros tipos de robot omnidireccionales (poseen otros modelos)



Indice:

Modelo de bicicleta.



Configuración del robot:

$$q = (x, y, \theta) \in \mathcal{C}$$

$$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$$

Velocidad angular

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R_B}$$

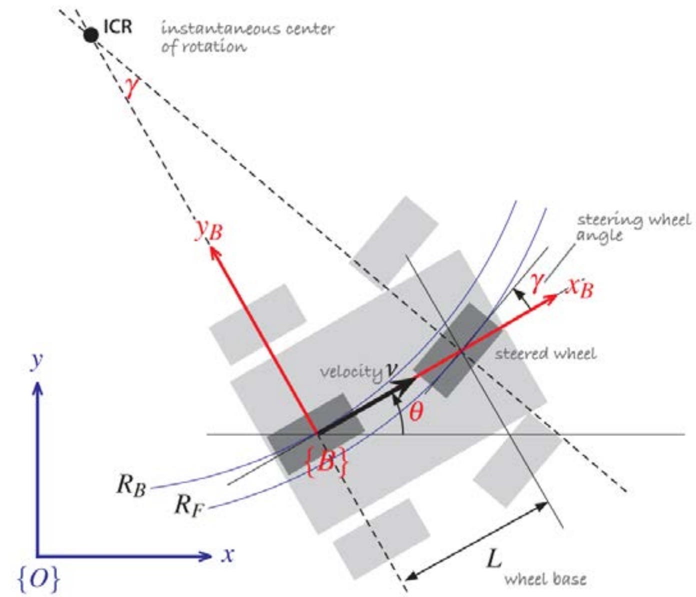
Radio de giro

$$R_B = L / \tan \gamma$$

Modelo de bicicleta.

Modelo cinemático

$$\dot{x} = v\cos\theta$$
$$\dot{y} = v\sin\theta$$
$$\dot{\theta} = \frac{v}{L}\tan\gamma$$



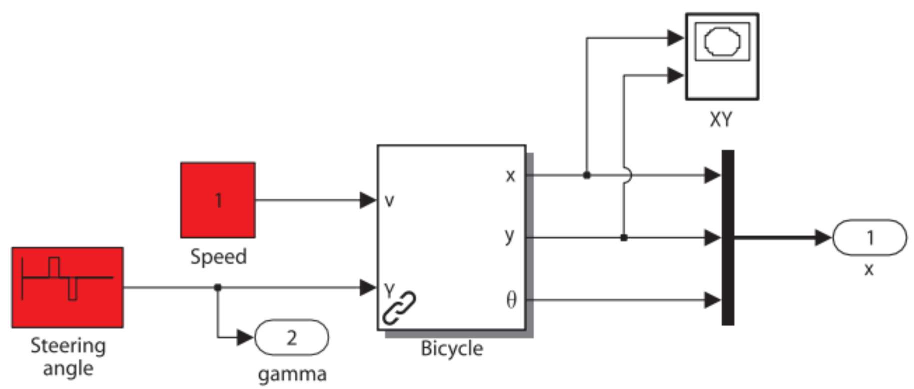
Restricción no holonómica

$$\dot{y}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta \equiv 0$$

Método de integración: Euler

$$\frac{\mathbf{x}(t+dt)-\mathbf{x}(t)}{dt} \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{x}\,(t+dt) \simeq \mathbf{x}\,(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).dt$$



Modelo de bicicleta. Moviéndose a un punto (x*,y*)

- Podemos plantear que la velocidad lineal se proporcional a la distancia al punto:

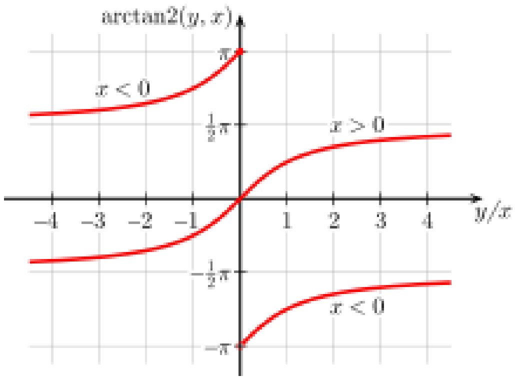
$$v^* = K_v \sqrt{\left(x^* - x\right)^2 + \left(y^* - y\right)^2}$$

- Y en forma similar podemos plantear un control proporcional para el control de giro:

$$\gamma = K_h\left(\theta^* \ominus \theta\right), \; K_h > 0$$

- Donde el ángulo de giro se calcula en el marco global como: $\theta^* = \tan^{-1}\dfrac{y^* - y}{x^* - x}$

- La función "atan2" tiene como imagen el intervalo $[-\pi, \pi)$:



Modelo de bicicleta. Siguiendo una línea

- Si deseamos seguir la línea en el plano definida por la ecuación:

$$ax + by + c = 0$$

- Se necesitan dos controles para regular el ángulo de dirección:
  - Uno que gire el robot hacia la línea, minimizando la distancia normal a la línea:

$$\alpha_d = -K_d d,\ K_d > 0 \qquad d = \frac{(a, b, c) \cdot (x, y, 1)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

  - Uno que ajuste la orientación del robot para que sea paralela a la línea:

$$\alpha_h = K_h\left(\theta^* \ominus \theta\right),\ K_h > 0 \qquad \theta^* = \tan^{-1}\frac{-a}{b}$$

  - La combinación de ambos orientara al robot hacia la línea y lo desplazara a lo largo de la misma.

$$\gamma = -K_d d + K_h\left(\theta^* \ominus \theta\right)$$

Modelo de bicicleta. Siguiendo una trayectoria

- Un algoritmo simple para seguir una trayectoria (en general generada por una etapa de planeación de movimiento), es simplemente seguir los puntos objetivo $(x^*(t), y^*(t))$ que se mueven a lo largo de la trayectoria. El robot siempre apuntará hacia el punto a seguir y mantendrá una distancia d^*. Podemos definir el error como:

$$e = \sqrt{\left(x^* - x\right)^2 + \left(y^* - y\right)^2} - d^*$$

- Luego podemos utilizar un control PI para la velocidad lineal:

$$v^* = K_v e + K_i \int e \mathrm{d}t$$

- Y un control proporcional para el control de orientación:

$$\gamma = K_h\left(\theta^* \ominus \theta\right), \quad K_h > 0 \qquad \theta^* = \tan^{-1} \frac{y^* - y}{x^* - x}$$

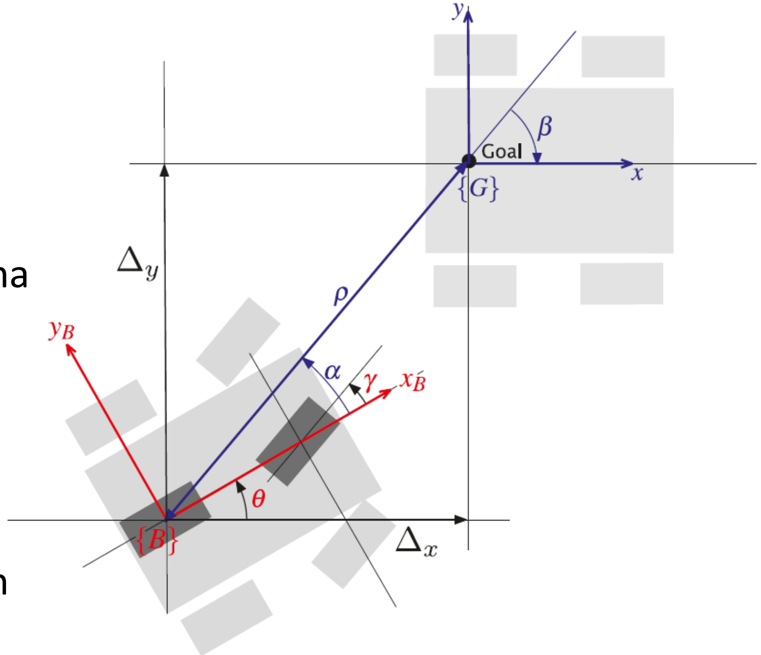
Modelo de bicicleta. Moviéndose a una pose determinada (x^*, y^*, θ^*)

- Podemos reescribir el modelo en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

- Para obtener la velocidad angular como entrada del sistema podemos tomar el ángulo de giro γ como:

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{\omega L}{v}$$



- Para este problema es conveniente reescribir el modelo en coordenadas polares, usando las siguientes relaciones:

$$\rho = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} \qquad \alpha = \tan^{-1} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} - \theta \qquad \beta = -\theta - \alpha$$

Modelo de bicicleta. Moviéndose a una pose determinada $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$

- Podemos reescribir el modelo como:

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & 0 \\ \dfrac{\sin\alpha}{\rho} & -1 \\ -\dfrac{\sin\alpha}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \text{if } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- Asumiendo que el objetivo $\{G\}$ se encontrara en frente al robot, podemos plantear el siguiente control lineal:

$$v = k_\rho \rho$$
$$\omega = k_\alpha \alpha + k_\beta \beta$$

- Este control general las siguientes dinámicas de lazo cerrado, con sus respectivas condiciones de estabilidad:

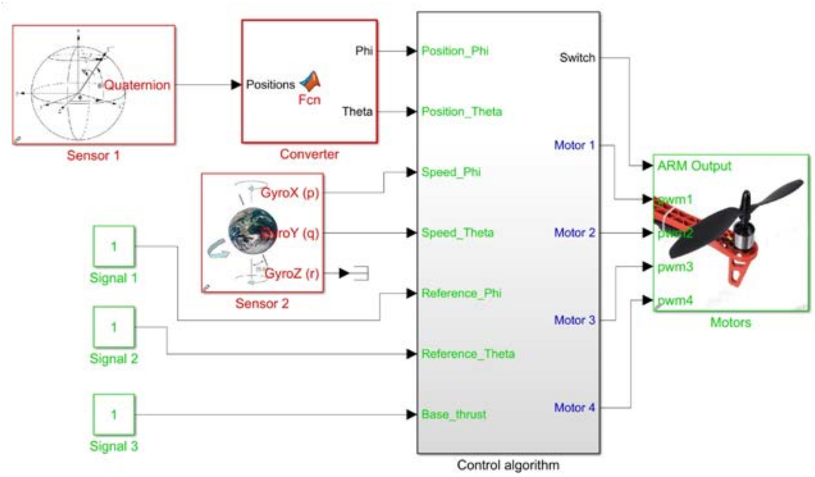
$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_\rho \cos\alpha \\ k_\rho \sin\alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \\ -k_\rho \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad k_\rho > 0,\ k_\beta < 0,\ k_\alpha - k_\rho > 0$$

- Este control conduce el robot a la posición $(0,0,0)$, podemos conducirlo a un punto arbitrario simplemente con un cambio de coordenadas como:

$$x' = x - x^*,\ y' = y - y^*,\ \theta' = \theta,\ \beta = \beta' + \theta^*$$

Lo visto...

- Cinemática vs. dinámica.
- Modelado cinemático.
- Control de movimiento cinemático.



Próxima clase:

- Mas de modelos...

Bibliografía:

- Robotics, Vision and Control Fundamental Algorithms in MATLAB. Peter Corke. 2da edición Springers.
- Introduction to Autonomous Mobile Robot. Roland Siegwart. 2da edición. MIT Press.