INTRODUCCIÓN A LA ROBÓTICA
E1505

MODELADO DINÁMICO

Indice:

Cinemática vs. Dinámica.

- La **cinemática** es la rama de la mecánica que describe el movimiento de los objetos sólidos sin considerar las causas que lo originan (las fuerzas) y se limita, principalmente, al estudio de la trayectoria en función del tiempo. Para ello utiliza **velocidades y aceleraciones**, que describen cómo cambia la **posición** en función del tiempo.

- La **dinámica** es la rama de la física que describe la evolución en el tiempo de un sistema físico en relación con los motivos o causas que provocan los cambios de estado físico o estado de movimiento. El objetivo de la dinámica es describir los **factores capaces de producir alteraciones** de un sistema físico, cuantificarlos y **plantear ecuaciones de movimiento** o **ecuaciones de evolución** para dicho sistema de operación.

Modelo de un robot -> dinámico o cinemático?

WIKIPEDIA
La enciclopedia libre

Metodología para modelado.

Alternativa: Formulación de Lagrange

Pasos para la obtención de modelos: (Método de Newton-Euler)

1. **Obtener ecuaciones diferenciales:** Para cada subsistema S_k, con masa m y matriz de inercias J se aplican las ecuaciones: (de aquí se obtienen 6 ecuaciones diferenciales, de las cuales alguna puede ser degenerada)

$$\sum_i \mathbf{f}_i = m\mathbf{a}$$

$$\sum_i \mathcal{M}_{\mathbf{f}_i} = \mathbf{J}\dot{\omega}$$

2. **Remover los componentes de fuerzas inerciales.** (se eliminan todas las fuerzas internas al sistema, en general aplicando la 3ra ley de Newton). A partir de esto el número de ecuaciones diferenciales se reduce al número de grados de libertad del sistema.
3. **Obtener las ecuaciones de estado.** Se deben aislar las segundas derivadas $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$ del grupo de n ecuaciones diferenciales para obtener una relación vectorial como:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})$$

Donde $\boldsymbol{u}$ es el vector de fuerzas externas no derivas de un campo potencial (en otras palabras, las fuerzas que aplicamos en el sistema). En estas condiciones las ecuaciones de estado pueden escribirse como:

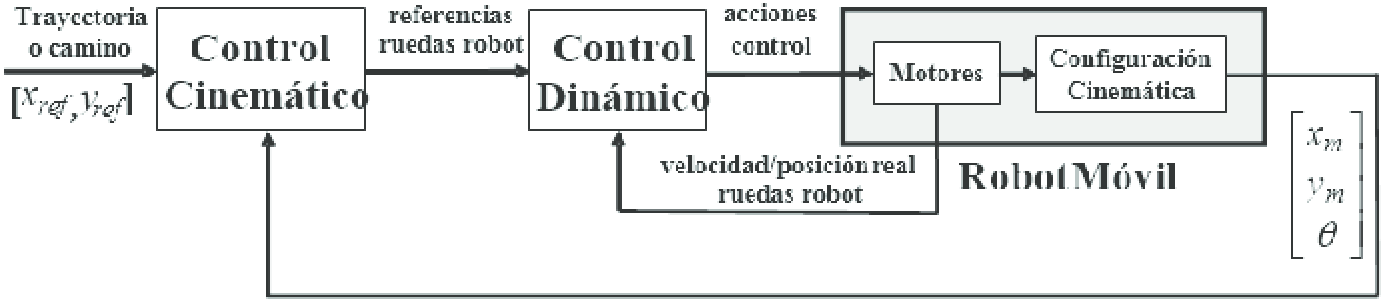
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})\end{pmatrix}$$

Metodología para modelado.

- Notar que un sistema mecánico cuya relación puede escribirse como $\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \mathbf{u})$ se trata de un **sistema holonómico**, $\boldsymbol{q}$ y $\dot{\boldsymbol{q}}$ son independientes.
- En un sistema de tipo **no holonómico** existen relaciones del tipo $h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0$

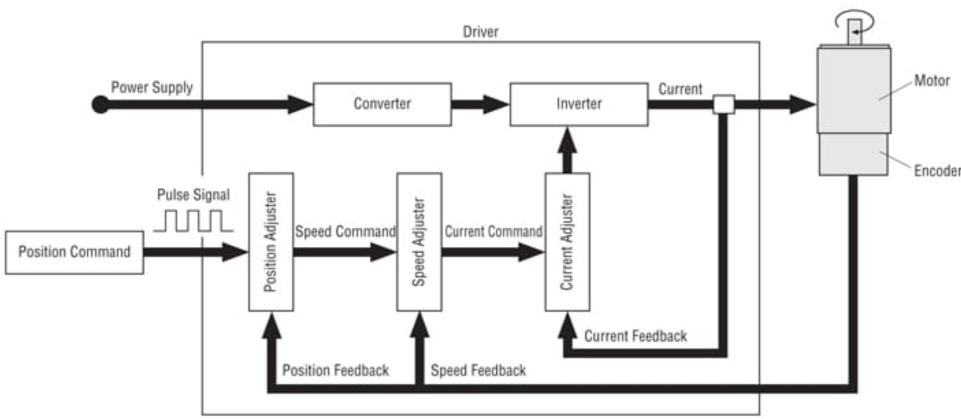
4. **Conversión modelo dinámico a cinemático:** los modelos dinámicos controlados por fuerzas o torques suelen ser complejos e involucran una gran cantidad de coeficientes generalmente pobremente estimados o conocidos. Por otra parte, los modelos cinemáticos controlados por posiciones, velocidades o aceleraciones suelen ser más fáciles de poner en ecuaciones

(ATENCION, los modelos cinemáticos desprecian parte de la información del sistema).



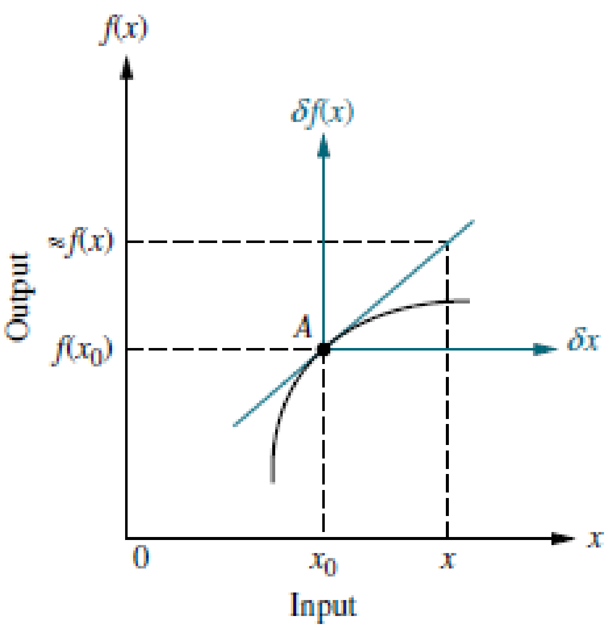
Metodología para modelado.

- Para convertir modelos dinámicos en cinemáticos se puede recurrir al concepto de **servomotor**, es decir **un sistema controlado con una rápida dinámica que me permita considerar que los cambio en la variable controlada (posición, velocidad o aceleración) son instantáneos**.
- En la práctica se suele considerar 3 tipos de servomotores:
  - **Servo motor de posición:** un sensor mide la posición (o ángulo) x del motor y se utiliza una ley de control expresada como $u = k(x - w)$, donde u es la señal de control del motor. Si k es grande entonces $x \simeq w$.
  - **Servo motor de velocidad:** un sensor mide la velocidad (o velocidad angular) $\dot{\boldsymbol{x}}$ del motor y se utiliza una ley de control expresada como $u = k(\dot{\boldsymbol{x}} - w)$, donde u es la señal de control del motor. Si k es grande entonces $\dot{\boldsymbol{x}} \simeq w$.
  - **Servo motor de aceleración:** un sensor mide la aceleración (tangencial o angular) $\ddot{\boldsymbol{x}}$ del motor y se utiliza una ley de control expresada como $u = k(\ddot{x} - w)$, donde u es la señal de control del motor. Si k es grande entonces $\ddot{\boldsymbol{x}} \simeq w$.



Metodología para modelado.

5. **Linealización (opcional).** Dependiendo del tipo de ley de control a aplicar, o nivel de detalle esperado al simplificar el modelado, los modelos no lineales pueden linealizarse en torno a un punto de operación. Es importante destacar que **su validez queda restringida a un entorno del punto de linealización elegido**.

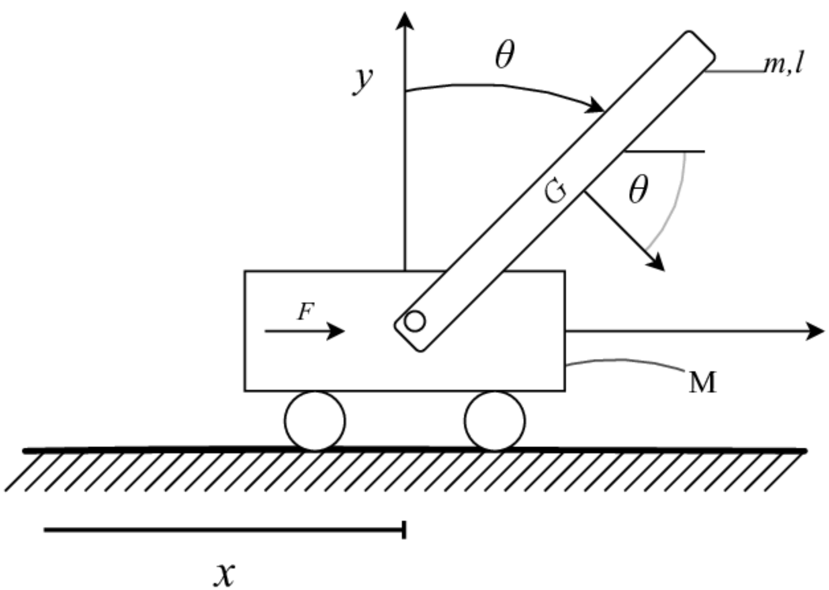


$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

Linealización

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Ejemplo: Sedway (péndulo invertido montado en carro).



Método de Euler

- Con el objetivo de simular nuestros sistemas o lograr estimaciones en tiempo real con la utilización de computadoras debemos poder discretizar los modelos analizados.
- Partiendo de las ecuaciones diferenciales de un **sistema no lineal** genérico:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

- Podemos utilizar distintos métodos de integración para lograr el cómputo de los mismos.

  1. **Método de Euler:**

  Siendo dt un número muy pequeño comparado con las constantes de tiempo del sistema y el periodo de muestreo, la evaluación de una ecuación de estado puede aproximarse por:

$$\frac{\mathbf{x}(t+dt)-\mathbf{x}(t)}{dt} \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

  O reescribiendo:

$$\mathbf{x}\left(t+dt\right) \simeq \mathbf{x}\left(t\right) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).dt$$

Podemos describir el algoritmo de simulación como (**Método de Euler**):

Algorithm EULER(in: $\mathbf{x}_0$)

$\mathbf{x} := \mathbf{x}_0; t := 0;\ dt = 0.01;$
repeat
    wait for uinput;
    $\mathbf{y} := \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u});$
    return $\mathbf{y}$;
    $\mathbf{x} := \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}).dt;$
    wait for interrupt from timer;
    $t = t + dt;$
while true

En este caso se puede escribir el error local como:

$$e_t = ||\mathbf{x}(t + dt) - \hat{\mathbf{x}}(t + dt)|| \quad \text{con} \quad \mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t)$$

Se puede demostrar que e_t es de orden 1, es decir que e_t depende del paso de tiempo dt.

2. Método de Runge-Kutta:

Es un método de orden 2, el cual consiste en reemplazar la recurrencia en el algoritmo de Euler por:

$$\hat{\mathbf{x}}(t+dt)=\hat{\mathbf{x}}(t)+dt.\left[\frac{1}{4}.\mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t)\right)+\frac{3}{4}.\mathbf{f}(\underbrace{\hat{\mathbf{x}}(t)+\frac{2}{3}dt.\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t))}_{\hat{\mathbf{x}}_E(t+\frac{2}{3}dt)},\mathbf{u}(t+\frac{2}{3}dt))\right]$$

Ver que el termino entre corchetes puede verse como la media entre la estimación de $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right)$ y de $\mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{x}}(t+\frac{2}{3}dt),\mathbf{u}(t+\frac{2}{3}dt)\right)$

3. Método de Taylor:

El método de Euler es un caso particular del método de Taylor de orden 1, el orden puede ser extendido a mayores órdenes. En forma general para el caso de segundo orden la recurrencia se convierte en:

$$\hat{\mathbf{x}}(t+dt)=\hat{\mathbf{x}}(t)+dt.\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t))+dt^2\,.\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t)).\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t))+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t)).\dot{\mathbf{u}}(t)\right)$$

Indice:

Metodología para modelado dinámico.

- Los métodos más comunes para la obtención de las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos, particularmente en robots manipuladores, se basan en dos formulaciones: **la formulación de Lagrange y la formulación de Newton-Euler.**
  - En la **formulación de Lagrange**, una vez definido un sistema de coordenadas generalizadas, a partir del Lagrangiano del Sistema mecánico: $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ donde $\mathcal{T}$ es la expresión de la energía cinética del sistema y $\mathcal{U}$ es la expresión de la energía potencial del sistema, se derivan las ecuaciones de movimiento.
  - La **formulación de Newton-Euler** se basa en plantear el balance de todas las fuerzas actuando en el cuerpo del robot, y a partir de ello se despejan las ecuaciones de movimiento. **(ya lo vimos un par de filminas atrás)**


Lagrange


Newton


Euler

Metodología para modelado dinámico. Formulación de Lagrange

- Siendo $q = [q_1, \ldots, q_{n_Q}]^T \in \mathbb{R}^{n_Q}$ un vector de coordenadas generalizadas que representa el espacio de configuración nq-dimensional de nuestro sistema.
- Siendo $u = [u_1, \ldots, u_{n_Q}]^T \in \mathbb{R}^{n_Q}$ el vector de fuerzas actuando en el robot en coordenadas generalizadas.
- El Lagrangiano del sistema mecánico se escribe como la energía cinética del mismo menos su energía potencial:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$$

- Luego a partir del Lagrangiano, las ecuaciones lagrangianas de movimiento (o ecuaciones de Euler Lagrange) se pueden escribir como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i, \quad i = 1 \ldots n_Q$$

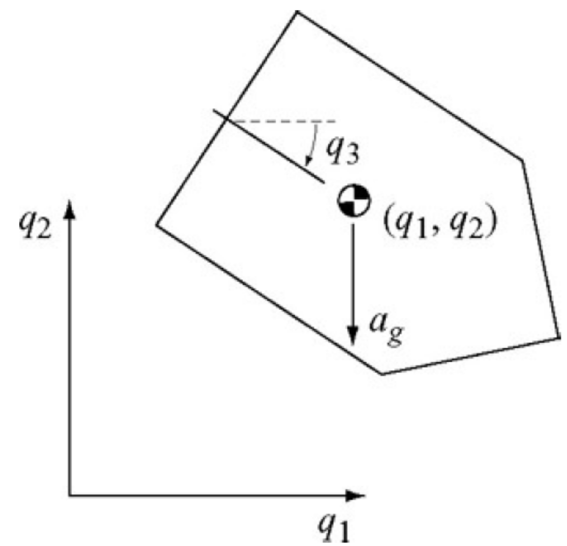
O en forma matricial como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = u$$

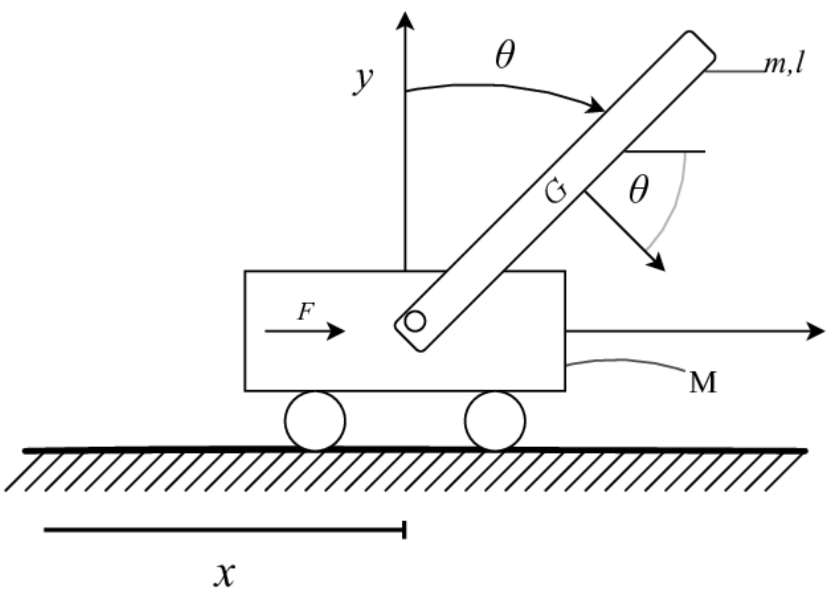
Ejemplo 1:

- Considere un robot de dos dimensiones descripto por un marco de condenadas generalizadas $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ donde $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ describen la posición del centro de masa y $q_3 \in S^1$ la orientación del robot
- El vector de fuerzas puede describirse como $u = [u_1, u_2, u_3]^T \in \mathbb{R}^3$, donde (u_1, u_2) son fuerzas líneas actuando en el centro de masa y u_3 un torque sobre el centro de masa
- La aceleración de la gravedad actual en la dirección $-q_2$ en forma vectorial: $[0, -a_g, 0]^T$.
- m es la masa del robot e I su momento de inercia.
- Se puede obtener el Lagrangiano del sistema como: $L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}I\dot{q}_3^2 - m a_g q_2$
- Y a partir de lo anterior las ecuaciones de movimiento (modelo)

$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}(m\dot{q}_1) - 0 = m\ddot{q}_1 \\
u_2 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{d}{dt}(m\dot{q}_2) - m a_g = m\ddot{q}_2 - m a_g \\
u_3 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial L}{\partial q_3} = \frac{d}{dt}(I\dot{q}_3) - 0 = I\ddot{q}_3.
\end{aligned}
\right\} \quad \ddot{\boldsymbol{q}} = f(\boldsymbol{u})
$$



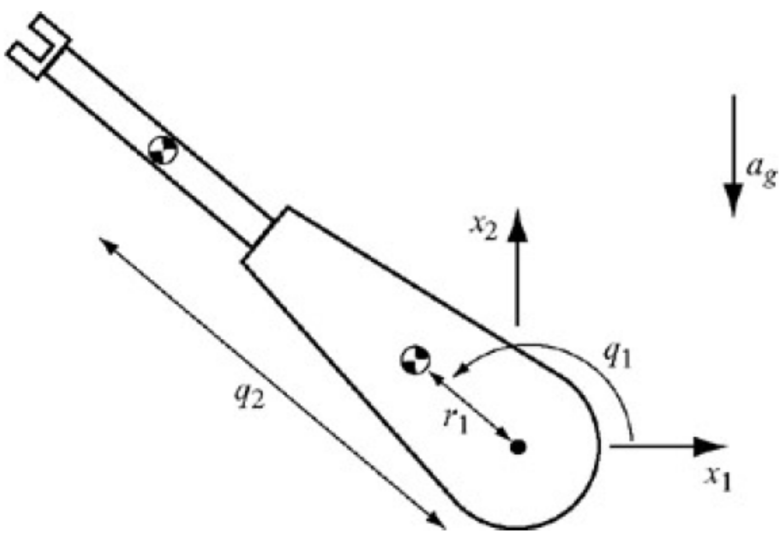
Ejemplo 2: Sedway (péndulo invertido montado en carro).



Método de Lagrange

Ejemplo 3 . Formulación de Lagrange

- Sea un robot con una articulación giratoria y otra prismática.
- La configuración del robot queda representada por $[q_1, q_2]^T$ donde q_1 representa el ángulo del primer eslabón respecto de un marco de coordenadas y $q_2 > 0$ la distancia del centro de masa del segundo eslabón al marco de coordenadas.
- El primer eslabón posee su centro de masa a una distancia r_1 del marco de coordenadas, una masa m_1 y un momento de inercia I_1, el segundo eslabón posee una masa m_2 y un momento de inercia I_2
- La aceleración de la gravedad actúa en la dirección $-x_2$ del marco de coordenadas.



Ejemplo 2 . Formulación de Lagrange

- La energía cinética del primer eslabón se puede escribirse como: $K_1(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$

Con: $v_1 = r_1\dot{q}_1 \qquad \omega_1 = \dot{q}_1$

Reemplazando: $K_1(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2$

- La energía potencial del primer eslabón se puede escribir como:

$$V_1(q) = m_1 a_g r_1 \sin q_1$$

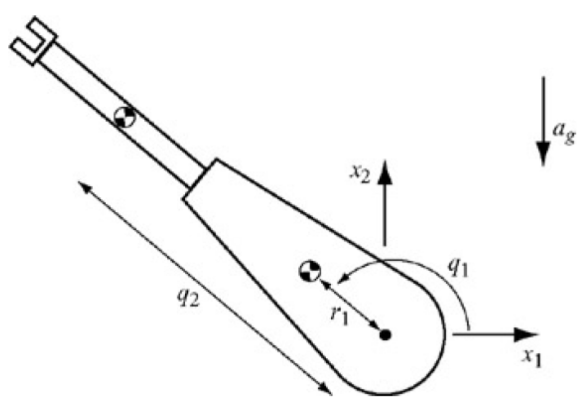
- La energía cinética del segundo eslabón se puede escribir como: $K_2(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$

Con

$$v_2 = \sqrt{\dot{q}_2^2 + (q_2\dot{q}_1)^2} \qquad \omega_2 = \dot{q}_1$$

Reemplazando:

$$K_2(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m_2\left(\dot{q}_2^2 + (q_2\dot{q}_1)^2\right) + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_1^2$$



- La energía potencial del segundo eslabón se puede escribir como:

$$V_2(q) = m_2 a_g q_2 \sin q_1$$

Ejemplo 2 .

- El Lagrangiano del sistema se puede expresar como:

$$L = K_1 + K_2 - V_1 - V_2$$

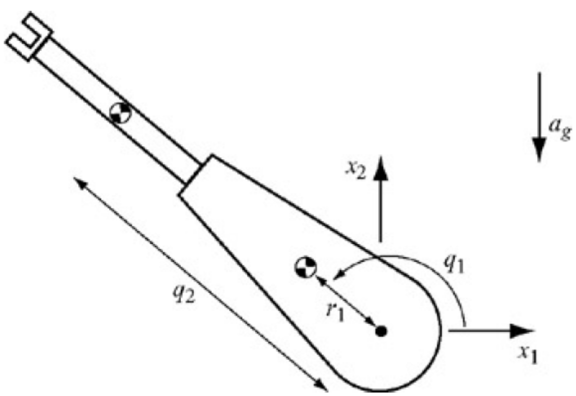
- Reemplazando:

$$L = \frac{1}{2}((I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 q_2^2)\dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) - a_g \sin q_1 (m_1 r_1 + m_2 q_2)$$

- Finalmente podemos despejar las ecuaciones de movimiento como:

$$u_1 = (I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 q_2^2)\ddot{q}_1 + 2 m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_g (m_1 r_1 + m_2 q_2) \cos q_1$$

$$u_2 = m_2 \ddot{q}_2 - m_2 q_2 \dot{q}_1^2 + a_g m_2 \sin q_1$$



Indice:

Forma estándar de ecuación dinámica

- Podemos escribir para el sistema mecánico de segundo orden y dimensión n_Q:

$$u = \underline{M(q)}\ddot{q} + \underline{C(q,\dot{q})}\dot{q} + g(q) + b(q,\dot{q})$$

Ver que dependen de la elección de coordenadas *q*, por tanto no deben ser consideradas como fuerzas, solo su suma lo es.

  - $M(q)$ representa la matriz de masas o matriz de inercias, matriz positiva definida simétrica $n_Q \times n_Q$.
  - $g(q) \in \mathbb{R}^{n_Q}$ es un vector de fuerzas gravitacionales.
  - $b(q,\dot{q})$ termino que represente fricción y amortiguamiento (no necesariamente depende de q o $\dot{q}$)
  - $C(q,\dot{q})\ \epsilon\ n_Q \times n_Q$ matriz de Coriolis, lineal con $\dot{q}$ (asociada a velocidades centrifugas y efecto Coriolis).

- Retomando el ejemplo anterior podemos escribir en forma estándar:

Ver que depende de *q*

$$\begin{cases} u_1 = (I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 q_2^2)\ddot{q}_1 + 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \quad +a_g(m_1 r_1 + m_2 q_2)\cos q_1 \\ u_2 = m_2 \ddot{q}_2 - m_2 q_2 \dot{q}_1^2 + a_g m_2 \sin q_1 \end{cases}$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2 q_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q,\dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} 2m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -m_2 q_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} a_g(m_1 r_1 + m_2 q_2)\cos q_1 \\ a_g m_2 \sin q_1 \end{bmatrix}$$

Forma estándar de ecuación dinámica

- En la forma estándar se enmascara que el termino $C(q,\dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^{n_Q}$, que es un vector producto de velocidades, puede derivarse de la matriz de inercias $M(q)$, considerando los componentes individuales del vector, puede derivarse:

$$C(q,\dot{q})\dot{q} = [c_1(q,\dot{q}), \ldots, c_{n_Q}(q,\dot{q})]^T$$

$$c_i(q,\dot{q}) = \sum_{j=1}^{n_Q}\left(\sum_{k=1}^{n_Q}\Gamma^i_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k\right)$$

$$\Gamma^i_{jk}(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i}\right)$$

  - Donde los escalares $\Gamma^i_{jk}(q)$ son conocidos como símbolos de Christoffel de la matriz de inercia $M(q)$.
  - En $c_i(q,\dot{q})$, los términos con $j = k$ se los conoce como términos centrífugos, mientras que los productos de velocidad con $j \neq k$ se los conoce como términos de Coriolis.
  - Una forma usual de escribir la matriz de Coriolis es en función de los símbolos de Christoffel:

Forma estándar de ecuación dinámica

- En la forma estándar presentada, las fuerzas intervinientes actúan directamente en las coordenadas generalizadas q, esto se cumple por ejemplo en un brazo robot donde cada articulación es un actuador.
- En casos más generales la forma estándar puede escribirse como :

$$T(q)f = M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q)$$

- Aquí f son las fuerzas de los actuadores y la matriz $T(q) \in n_Q \times n_Q$ especifica como los actuadores son mapeados a las coordenadas generalizadas, función de la configuración del sistema.
- Para lo anterior es útil tener presente como se mapean las fuerzas entre el espacio de tarea y el espacio de configuración, recordando que la relación entre ambos viene dada por $\mathrm{x} = \emptyset(q)$ (cinemática directa) y que $\dot{x} = J\dot{q}$, siendo $J = \frac{d\emptyset}{dq}$ el Jacobiano de la cinemática directa. Considerando que el trabajo (o la potencia) son iguales en ambos espacios (recordar potencia=fuerza*velocidad):

- Finalmente podemos ver que $T(q) = J(q)^T$

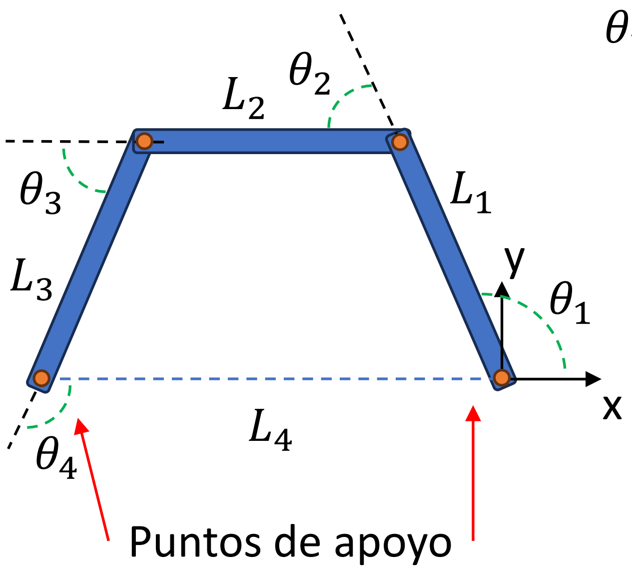
¿Qué pasa con las restricciones de velocidad y espacio?

Forma estándar de ecuación dinámica - restricciones

- Dado un robot de 4 eslabones (links), donde el link 4 esta fijo al suelo.
- Considerando todos los ángulos positivos en el sentido antihorario
- Podemos escribir la posición final del "extremo del robot " (ver que se trata de una cadena cerrada, el inicio coincide con el final):

$$\left.\begin{aligned} L_1\cos(\theta_1)+L_2\cos(\theta_1+\theta_2)+L_3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+L_4\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0 \\ L_1\sin(\theta_1)+L_2\sin(\theta_1+\theta_2)+L_3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+L_4\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0 \end{aligned}\right\}\text{Posición}$$

$$\left.\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\pi=0\right\}\text{Orientación}$$



- Para este caso el espacio de configuración puede plantearse entorno a los ángulos de cada articulación:

$$q=(\theta_1\ \theta_2\ \theta_3\ \theta_4)^T$$

- En forma general podemos escribir:

g(q)=0

Reducen espacio configuración ⇒ DOF mecanismo

Forma estándar de ecuación dinámica - restricciones

- En forma general podemos escribir las restricciones como:

$$q = [q_1 \ \dots \ q_n]^T \ \epsilon \ \mathbb{R}^n$$

Con $k \leq n$ podemos concluir que: $DOF = n - k$

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1(q_1 \ \dots \ q_n) \\ \vdots \\ g_k(q_1 \ \dots \ q_n) \end{bmatrix} = 0 \ \epsilon \ \mathbb{R}^k$$

Restricciones holonómicas.

Reducen el espacio de configuración.

¿Y si la configuración de mi robot depende del tiempo? ¿Cómo estas restricciones holonómicas restringen las velocidades de mi robot?

Derivando con respecto al tiempo:

$$g(q(t)) = 0$$

$$\frac{d}{dt} g\big(q(t)\big) = 0$$

Forma estándar de ecuación dinámica - restricciones

- En forma matricial podemos escribir las restricciones como:

$$\frac{d}{dt}g\big(q(t)\big) = \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{dq_1}(q)\dot{q}_1 + \cdots + \frac{dg_1}{dq_n}(q)\dot{q}_n \\ \vdots \\ \frac{dg_k}{dq_1}(q)\dot{q}_1 + \cdots + \frac{dg_k}{dq_n}(q)\dot{q}_n \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{dq_1}(q) & \dots & \frac{dg_1}{dq_n}(q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dg_k}{dq_1}(q) & \dots & \frac{dg_k}{dq_n}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = 0$$

$$A(q)\dot{q} = 0$$

Restricciones Pfaffian (o restricciones de velocidad).

- Si las restricciones de velocidad son integrables, son llamadas **holonómicas o de configuración** -> reducen espacio de configuración -> reducen DOF. (también se consideran dentro de las llamadas restricciones de Pfaffian)
- Si las restricciones de velocidad no son integrables de forma de obtener restricciones de configuración, son llamadas **restricciones no holonómicas** -> no reducen espacio de configuración, pero si reducen espacio de posibles velocidades del robot.

Forma estándar de ecuación dinámica - restricciones

- **Ejemplo: Modelo diferencial**

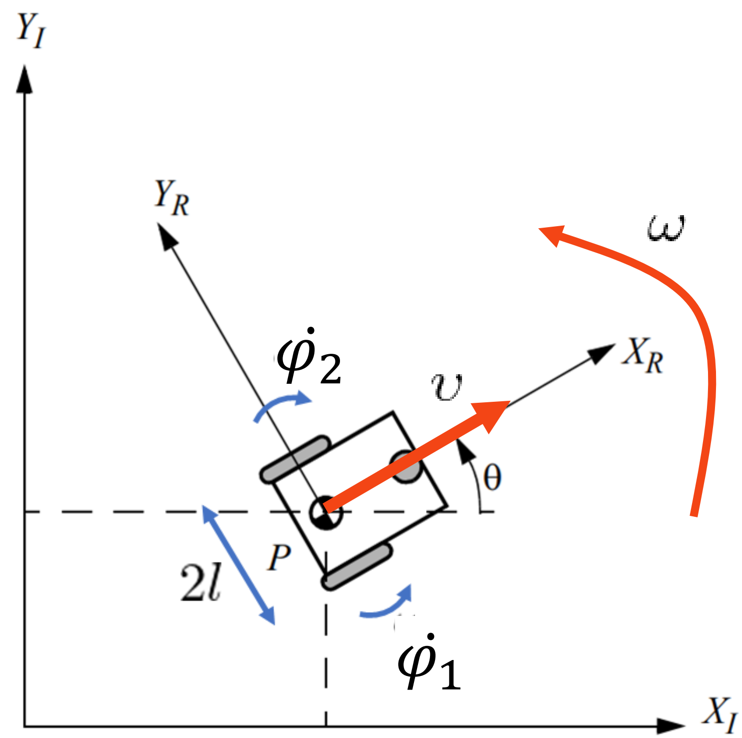
$$q = [x \quad y \quad \theta]^T$$

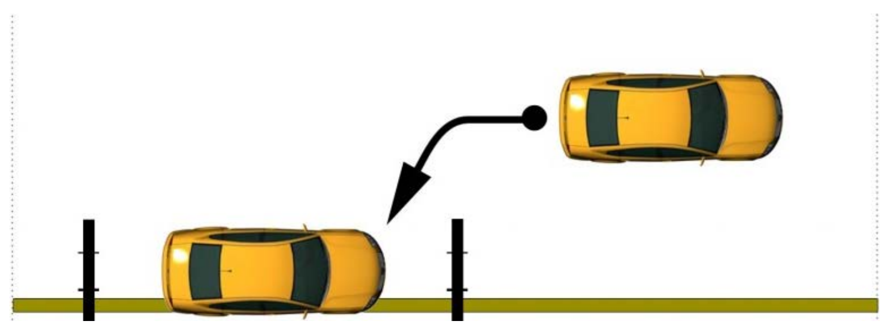
$$\dot{x} = v\cos(\theta)$$
$$\dot{y} = v\sin(\theta)$$

$$v = \frac{\dot{y}}{\sin(\theta)} \implies \dot{x} = \frac{\dot{y}}{\sin(\theta)}\cos(\theta)$$

$\dot{x}\sin(\theta) - \dot{y}\cos(\theta) = 0$ Restricciones holonómica

$$\underbrace{[\sin(\theta) \quad \cos(\theta) \quad 0]}_{A(q)\in\mathbb{R}^{1\times 3}}\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}}_{\dot{q}} = 0$$





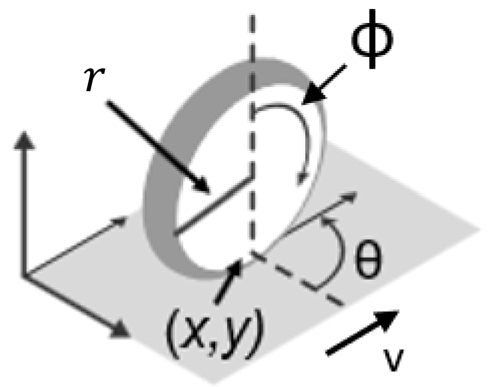
Forma estándar de ecuación dinámica - restricciones

- **Ejemplo: Rueda sin deslizamiento (monociclo)**

Sistema con ambos tipos de restricciones:

- Rueda no puede moverse en forma vertical
- No es posible gira la rueda respecto del eje y, ya que pierde condición de verticalidad

Restricciones holonómicas



$$q = [x \quad y \quad \emptyset \quad \theta]^T$$

$$\dot{x} = r\,\dot{\phi}\cos(\theta)$$
$$\dot{y} = r\dot{\phi}\sin(\theta)$$

Restricciones no holonómicas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r\cos(\theta) \\ 0 & 1 & 1 & -r\sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0$$

Como tenemos 2 restricciones no holonómicas:

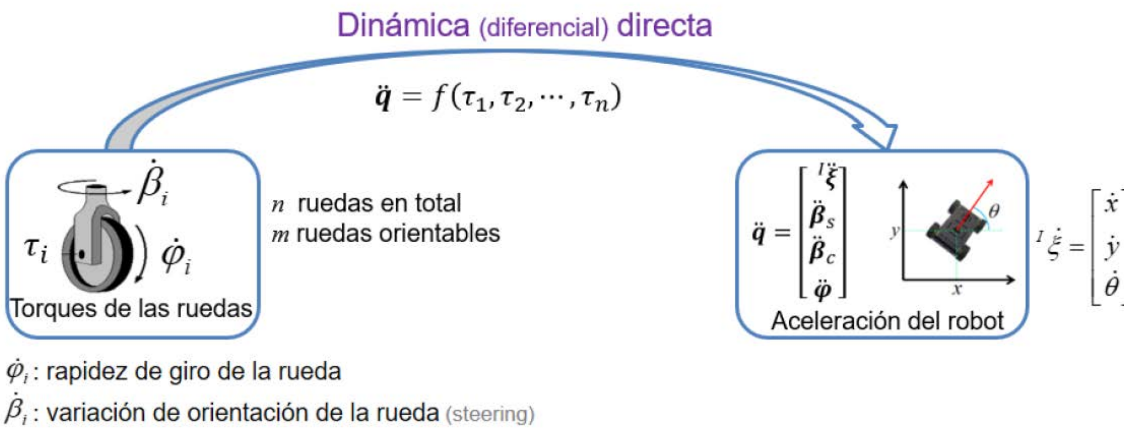
$$DOF = 6 - 2 = 4$$

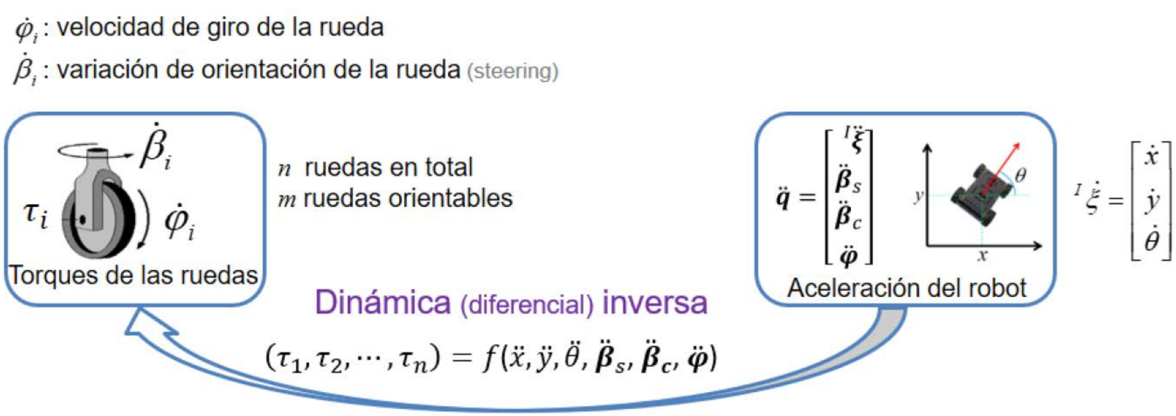
Indice:

Dinámica de robots móviles

Espacio de configuración – Espacio de trabajo

- **Dinámica directa:** permite determinar la evolución temporal de las aceleraciones generalizadas del robot, dadas las fuerzas/pares que ejercen los n motores sobre las ruedas.



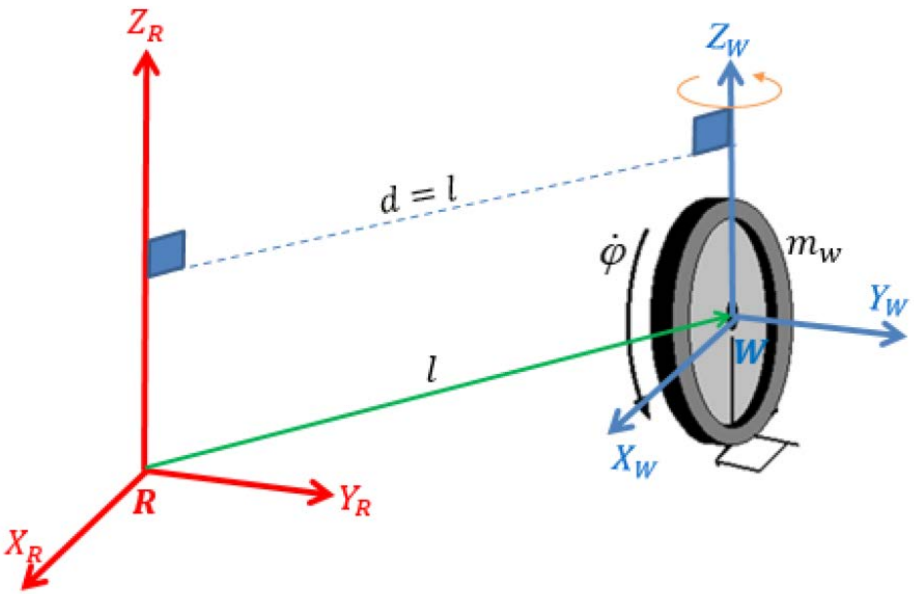


- **Dinámica inversa:** proporciona fuerzas/pares que se necesitan para obtener las trayectorias deseadas que debe recorrer el robot (aceleraciones deseadas

Dinámica de robots móviles con ruedas

- **Masa del robot:** compuesta por masa del chasis m_R y masa m_W de las n ruedas.

$$m = m_R + n\, m_W$$



- **Momento de inercia:** compuesto por momento chasis J_R respecto de su sistema de referencia local R y el momento de inercia de la rueda ${}^{R}J_W$ respecto del eje de rotación Z_R. (aquí suponemos n ruedas en posiciones simétricas respecto de centro de rotación)

$$J = J_R + n\,{}^{R}J_W$$

- Para determinar ${}^{R}J_W$ puede utilizarse el **teorema de Steiner** (teorema de los ejes paralelos):

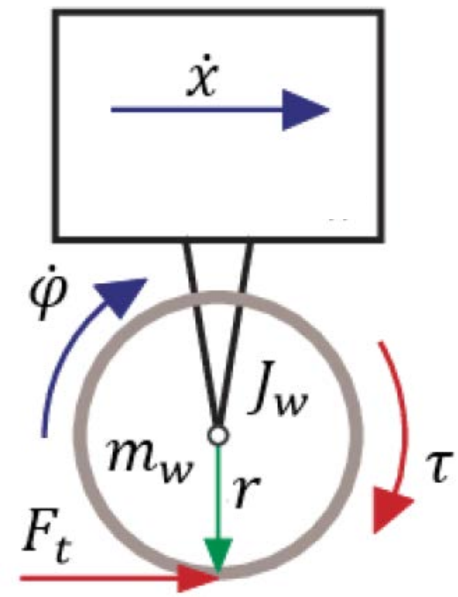
$${}^{R}J_W = J_{WZ} + m_W d^2$$

Jakob Steiner

Dinámica de rueda acoplada a chasis del vehículo

Con:

- τ torque aplicado en el eje de la rueda. **Única entrada independiente del sistema**
- F_t fuerza de tracción desarrollada en el punto de contacto de la rueda.
- m_W masa rueda.
- J_W inercia rueda.



Podemos plantear:

$$F_t = m_W \ddot{X}$$

$$\tau = J_W \ddot{\varphi} + F_t r$$

- **No se contempla suspensión ni deflexión de la rueda.**
- **No se considera rozamiento con el suelo**

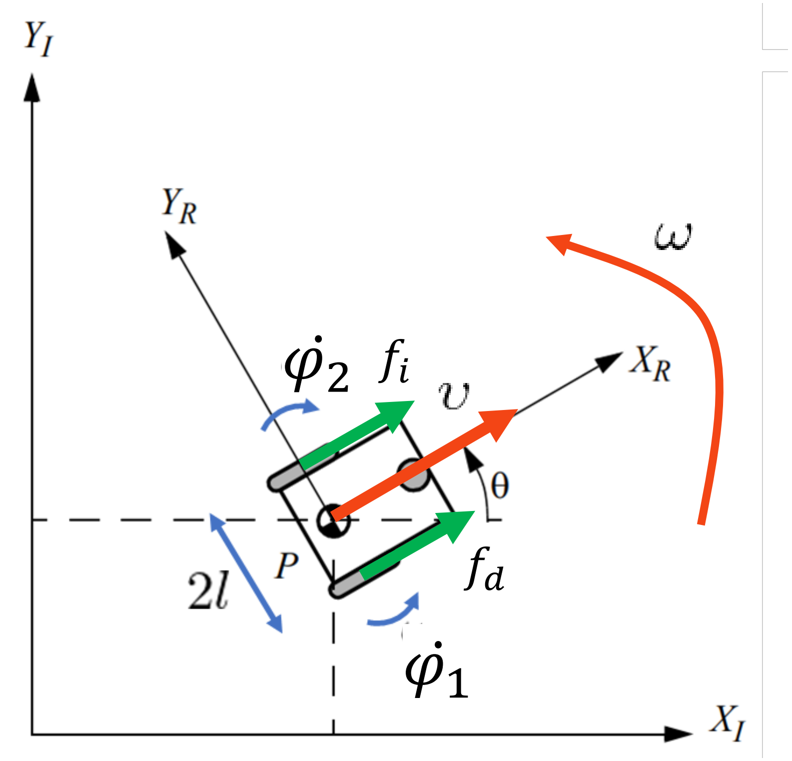
Ver que dinámica de rotación y translación de una rueda se acoplan a través de la fuerza de tracción.

Dinámica robot diferencial

Buscamos escribir Lagrangiano:

$$L(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - V(q)$$

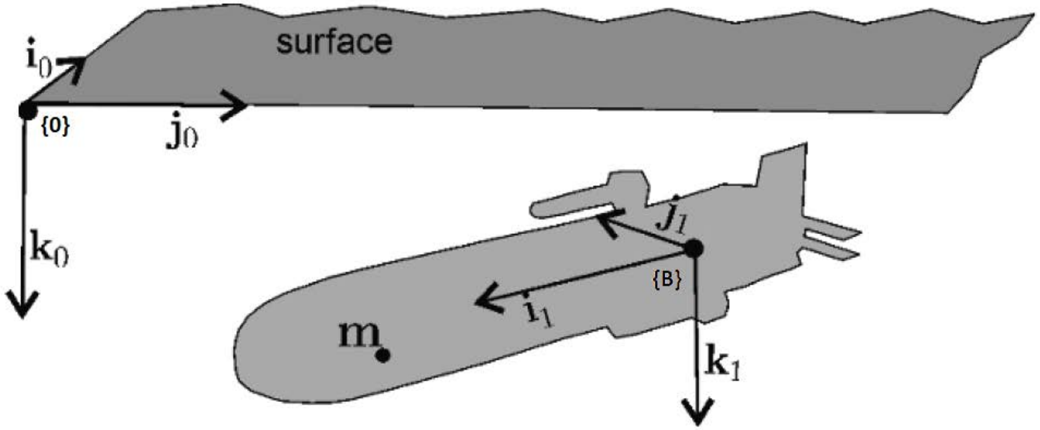
$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$



Modelo robot sólido.

- Un robot (avión, submarino, bote) puede ser considerado un sólido cuyas entradas de control son aceleraciones (tangencial o angular). Las cuales son funciones de las fuerzas a las que está sometido el robot.

- Podemos modelar el robot como un sólido puntual, partiendo de considerar un marco $\{0\}$ inercial y un marco fijo en el robot $\{B\}$ (pensar robot como masa puntual).



Modelo robot sólido.

- Como primera ecuación de nuestro modelo consideraremos la posición del robot expresada en el marco inercial:

$$ {}^{0}\dot{\mathbf{p}} = {}^{0}R_B\,{}^{B}\dot{\mathbf{p}} $$

- Si derivamos esta ecuación respecto del tiempo y despejamos la aceleración en el marco del robot obtenemos:

$$ {}^{0}\ddot{\mathbf{p}} = {}^{0}\dot{R}_B\,{}^{B}\dot{\mathbf{p}} + {}^{0}R_B\,{}^{B}\ddot{\mathbf{p}} $$

$$ {}^{B}\ddot{\mathbf{p}} = {}^{0}R_B^{T}\,{}^{0}\ddot{\mathbf{p}} - {}^{0}R_B^{T}\,\underbrace{{}^{0}\dot{R}_B}_{{}^{0}R_B[{}^{B}\omega]_\times}\,{}^{B}\dot{\mathbf{p}} $$

$$ {}^{B}\ddot{\mathbf{p}} = {}^{0}R_B^{T}\,{}^{0}\ddot{\mathbf{p}} - [{}^{B}\omega]_\times\,{}^{B}\dot{\mathbf{p}} $$

$$ {}^{B}\ddot{\mathbf{p}} = {}^{0}R_B^{T}\,{}^{0}\ddot{\mathbf{p}} - {}^{B}\omega \times {}^{B}\dot{\mathbf{p}} $$

Donde ω es el vector que relaciona la rotación del marco $\{B\}$ al marco $\{0\}$

Modelo robot sólido.

- Podemos expresar el vector de rotación instantáneo entre marcos como: (Ver Mobile robotics Luc Jaulin)

$$^{0}\omega = {}^{0}R_B{}^{B}\omega$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin(\psi) & \cos(\theta)\cos(\psi) \\ 0 & \cos(\psi) & \cos(\theta)\sin(\psi) \\ 1 & 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = {}^{0}R_B{}^{B}\omega$$

- Luego despejando las derivadas de los ángulos del vector de rotación, para expresarlos en función de las variables de estado obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)} & \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\theta)} \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\varphi) \\ 1 & \tan(\theta)\sin(\varphi) & \tan(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix} {}^{B}\omega$$

Modelo robot sólido.

- Finalmente podemos obtener el modelo cinemático como:

Velocidad en marco inercial

Aceleración en marco del robot

Velocidades angulares en marco inercial

$$
\begin{cases}
{}^{0}\dot{\mathbf{p}} = {}^{0}R_B \, {}^{B}\dot{\mathbf{p}} \\
{}^{B}\ddot{\mathbf{p}} = {}^{0}R_B^{T} \, {}^{0}\ddot{\mathbf{p}} - {}^{B}\omega \times {}^{B}\dot{\mathbf{p}} \\
\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\theta)} & \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\theta)} \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\varphi) \\ 1 & \tan(\theta)\sin(\varphi) & \tan(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix} {}^{B}\omega
\end{cases}
$$

Velocidades en marco del robot

Velocidades angulares en marco del robot

- Este modelo puede convertirse en dinámico, expresando la aceleración en el marco del robot en función de la fuerza aplicada en el marco inercial (o en el del robot), a partir de:

$$m \, {}^{0}\ddot{\mathbf{p}} = {}^{0}\mathbf{f}$$

Recordando que ${}^{0}\ddot{\mathbf{p}} = {}^{0}R_B \, {}^{B}\ddot{\mathbf{p}}$ es posible realizar el siguiente despeje:

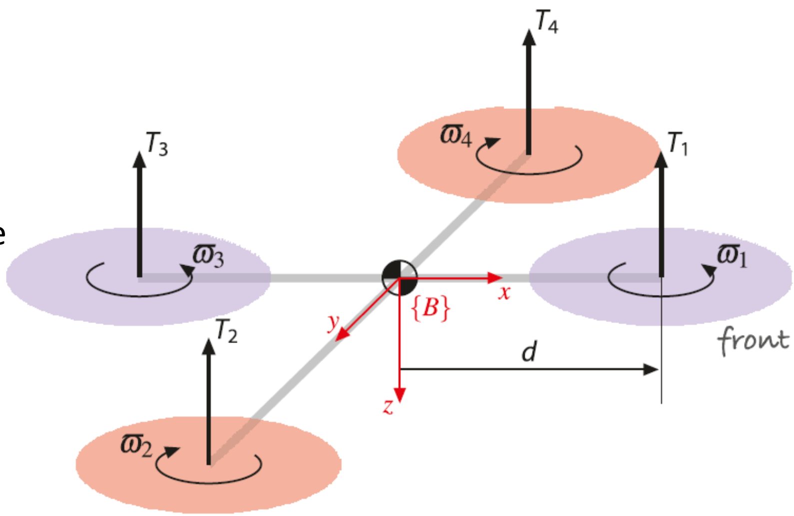
$$m \, {}^{B}\ddot{\mathbf{p}} = {}^{0}R_B^{T} \, {}^{0}\mathbf{f}$$

$${}^{B}\ddot{\mathbf{p}} = \frac{1}{m} \, {}^{0}R_B^{T} \, {}^{0}\mathbf{f}$$

Modelo quadrotor.

- El empuje generado por cada motor puede describirse como:

$$T_i = b\varpi_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4$$



Con ϖ_i la velocidad del rotor i y $b > 0$ la constante de elevación que depende de la densidad del aire, el cubo del radio de las palas del rotor, el número de palas, y del ancho y largo de la pala.

- La dinámica de translación del vehículo está dada por la segunda ley de Newton:

$$m\dot{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} - {}^0R_B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix} - Bv$$

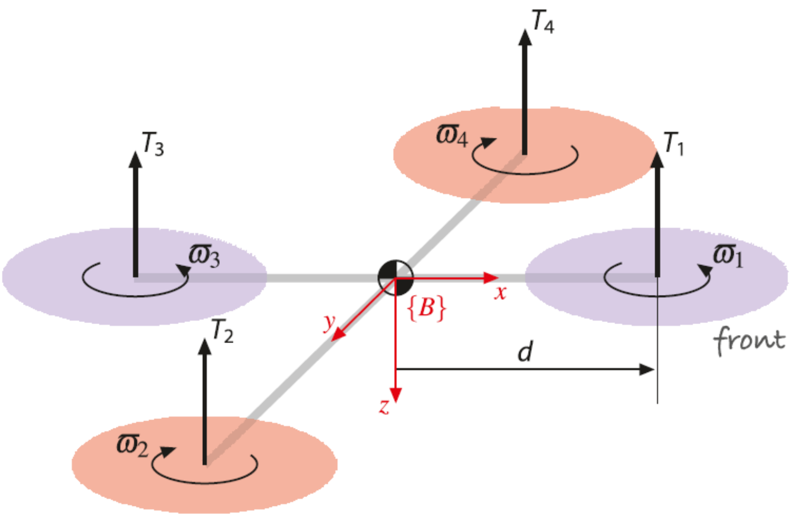
- Con:
  - v velocidad del centro de masa del vehículo en el marco mundo
  - g la aceleración de la gravedad
  - m la masa total del vehículo
  - B la fricción aerodinámica
  - $T = \sum T_i$ el empuje total (hacia arriba).

Modelo quadrotor.

- La diferencia de empujes en pares de motores produce que el vehículo rote.
- Alrededor del eje x, se genera el torque de rolido (Rolling torque) mediante (d distancia del centro de masa al rotor):

$$\tau_x = dT_4 - dT_2$$

$$\tau_x = db\left(\varpi_4^2 - \varpi_2^2\right)$$

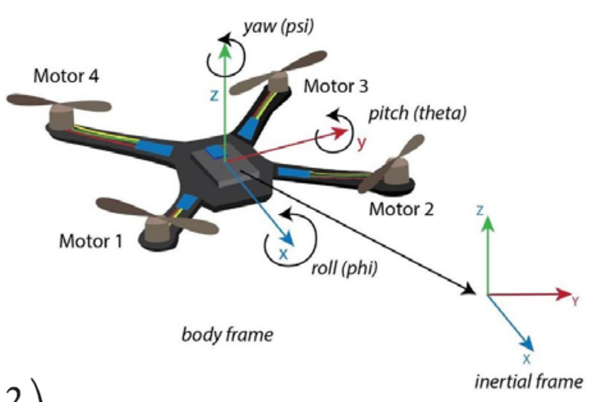


- Alrededor del eje y, se genera el torque de cabeceo (pitch torque) mediante:

$$\tau_y = db\left(\varpi_1^2 - \varpi_3^2\right)$$

- El torque aplicado por cada propela es opuesto por un arrastre aerodinámico dado por (k depende de los mismos factores que b):

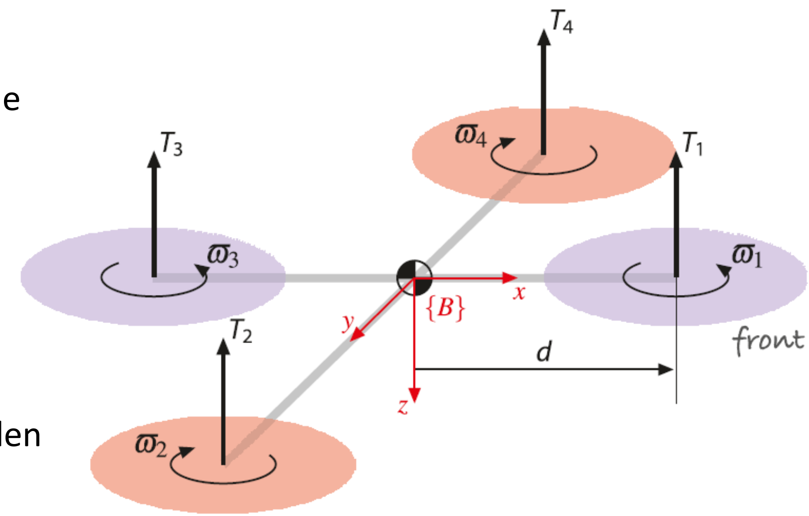
$$Q_i = k\varpi_i^2$$



- El torque total sobre el eje z queda:

$$\tau_z = Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 = k\left(\varpi_1^2 + \varpi_3^2 - \varpi_2^2 - \varpi_4^2\right)$$

Modelo quadrotor.



- A partir de la 2da ecuación de Newton y la ecuación rotacional de Euler, se podría obtener las ecuaciones dinámicas del sistema:

$$m\dot{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} - {}^{0}\boldsymbol{R}_B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix} - Bv \qquad\qquad \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}$$

- Las fuerzas y momentos aplicados en el marco del vehículo pueden agruparse como:

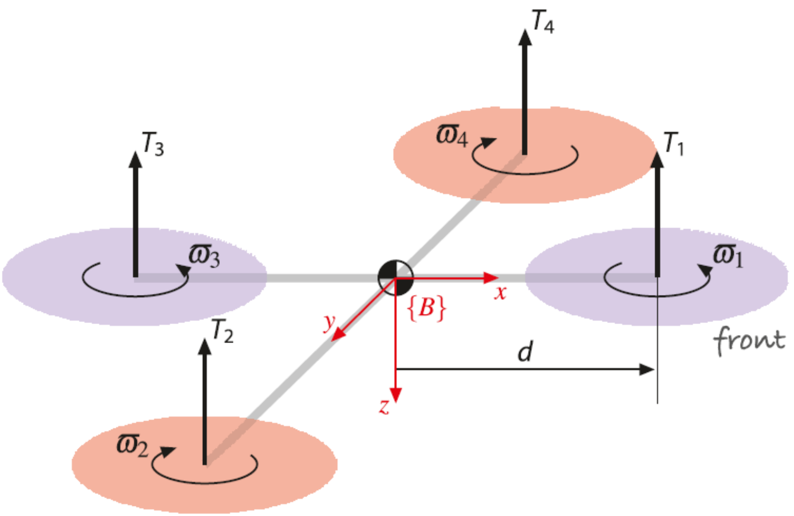
$$\begin{pmatrix} T \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -b & -b & -b \\ 0 & -db & 0 & db \\ db & 0 & -db & 0 \\ k & -k & k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_1^2 \\ \varpi_2^2 \\ \varpi_3^2 \\ \varpi_4^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \varpi_1^2 \\ \varpi_2^2 \\ \varpi_3^2 \\ \varpi_4^2 \end{pmatrix}$$

- Vemos que la matriz $\boldsymbol{A}$ es una constante y de rango completo si $b, k, d > 0$ por tanto sería posible obtener su inversa:
- **Este sistema nos permite obtener las velocidades de los rotores para un empuje y momento determinados en el marco del vehículo.**

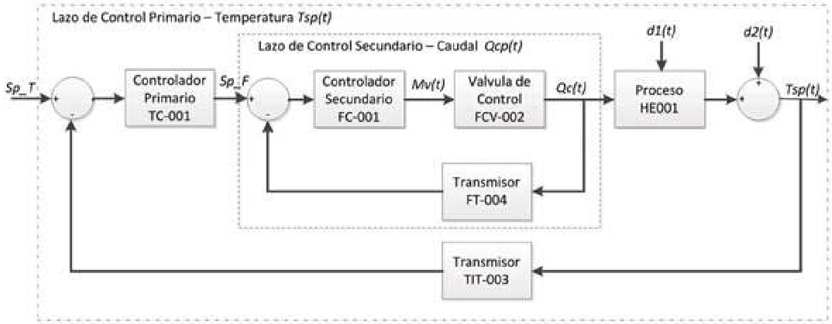
$$\begin{pmatrix} \varpi_1^2 \\ \varpi_2^2 \\ \varpi_3^2 \\ \varpi_4^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{pmatrix} T \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix}$$

Modelo quadrotor.

- Para controlar este tipo de vehículos una opción es utilizar **controles anidados**. Notar que aquí tenemos tres ejes a controlar, z (altitud), ángulo de pitch (que se traducirá en movimiento en eje x), ángulo de roll (que se traduce en movimiento en el eje y). Además, notar que los tres ejes se encuentran **acoplados**.



- Los controles de ángulo de pitch para desplazamiento en *x* y ángulo de roll para desplazamiento en *y* son similares, aquí solo describiremos el control de pitch.

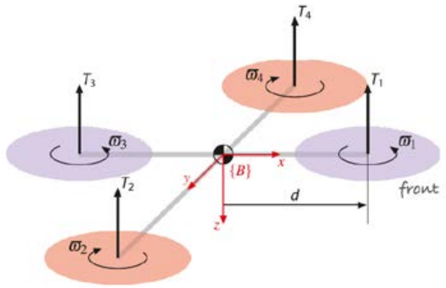


Modelo quadrotor.

- Para el control de pitch y desplazamiento en x, se propone un control interno de tipo PD:

$$\tau_y^* = K_{\tau,p}\left(\theta_p^* - \theta_p^\#\right) + K_{\tau,d}\left(\dot{\theta}_p^* - \dot{\theta}_p^\#\right)$$

- Si consideramos un marco $\{B'\}$ con el mismo origen que $\{B\}$ pero con sus ejes x e y paralelos al plano de tierra. Podemos proyectar el vector de empuje en este nuevo marco, considerando un movimiento de cabeceó hacia abajo θ_P alrededor del eje y :



$$^{B'}\boldsymbol{f} = \mathscr{R}_y\left(\theta_p\right) \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\sin\theta_p \\ 0 \\ T\cos\theta_p \end{pmatrix}$$

- Analizando la componente en la dirección x de esta fuerza podemos realizar la siguiente aproximación:

$$^{B'}\boldsymbol{f}_x = T\sin\theta_p \approx T\theta_p$$

- Proponiendo un control proporcional para controlar esta fuerza podemos controlar la velocidad en esta dirección (con $k_f > 0$):

$$^{B'}\boldsymbol{f}_x^* = mK_f\left({}^{B'}v_x^* - {}^{B'}v_x^\#\right)$$

- Podemos despejar el ángulo de pitch deseado como:

$$\theta_p^* \approx \frac{m}{T}K_f\left({}^{B'}v_x^* - {}^{B'}v_x^\#\right)$$

Para un equilibrio vertical el empuje total es igual al peso: $T = m \cdot g$ Con esto en cuenta podemos reescribir esta ecuación como $\frac{m}{T} = \frac{1}{g}$

Modelo quadrotor.

- Podemos generar la velocidad deseada a partir de la posición actual y deseada en el plano xy del marco mundo con una ley de control proporcional.

$$ {}^{0}\boldsymbol{v}^{*} = K_{p}\left({}^{0}\boldsymbol{p}^{*} - {}^{0}\boldsymbol{p}^{\#}\right) $$

- Luego podemos obtener la velocidad deseada en el marco del robot a partir de la relación entre ambos marcos dependiente del ángulo θ_y (angulo de yaw):

$$ {}^{B'}\boldsymbol{v} = \ominus {}^{0}\mathscr{R}_{B'}\left(\theta_{y}\right) \bullet {}^{0}\boldsymbol{v},\ \mathscr{R} \in \mathbf{SO}(2) $$

$$ \begin{pmatrix} {}^{B'}v_{x} \\ {}^{B'}v_{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{y} & -\sin\theta_{y} \\ \sin\theta_{y} & \cos\theta_{y} \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} v_{x} \\ v_{y} \end{pmatrix} $$

- Para la dirección de desplazamiento en el eje y se puede realizar un desarrollo similar controlando el ángulo de roll.
- Para el control de altitud se propone un control proporcional derivativo, con una acción feedforward $T_0 = mg$ que compensa el peso del vehículo.

$$ T = K_{p}\left(z^{*} - z^{\#}\right) + K_{d}\left(\dot{z}^{*} - \dot{z}^{\#}\right) + T_{0} $$

Lo visto…

- Modelos clásicos.
- Metodologías para modelado.
- Discretización de modelos.

Próxima clase:

- Robots manipuladores.

Bibliografía:

- Robotics, Vision and Control Fundamental Algorithms in MATLAB. Peter Corke. 2da edición Springers.
- Mobile Robotics. Luc Jaulin.
- Automation for Robotics. Luc Jaulin.
- Howie Choset. Principles of robot motion: Theory, Algoritms, and Implementation.