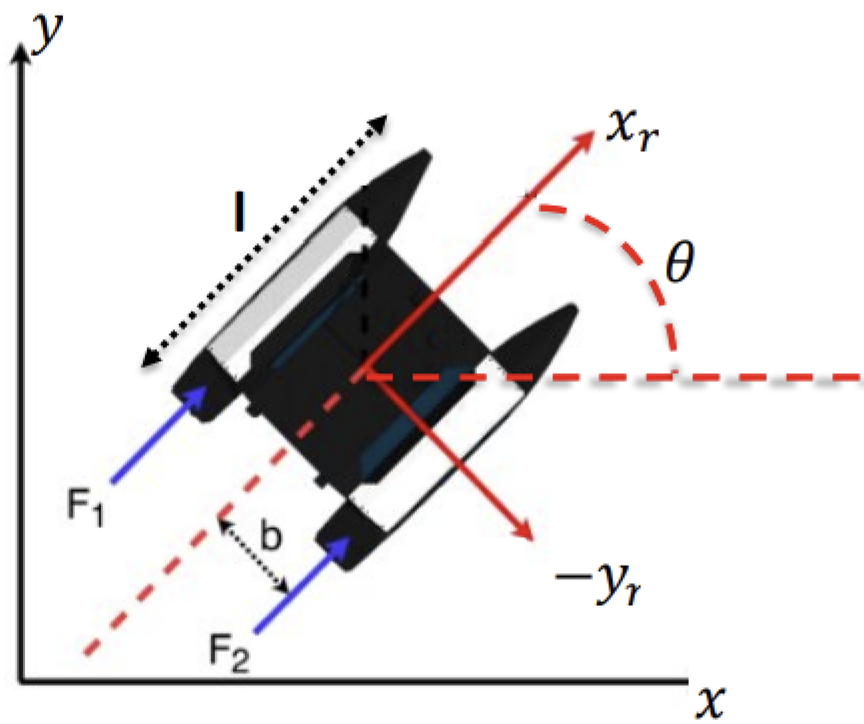
## Ejercicio 4

Obtener el modelo del siguiente robot de superficie tipo catamarán, impulsado por dos motores fijos y alineados con su respectivo casco:




*i. Obtenga un modelo cinemático simplificado, siendo las entradas al sistema la velocidad lineal v y la angular w*

El modelo lineal del catamarán a partir de la velocidad lineal y angular es semejante al del vehículo diferencial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

Notar que esta parte del modelo asume que la velocidad instantánea del catamarán es siempre colineal con su orientación. En la práctica, esto no es cierto, ya que el catamarán puede deslizarse lateralmente. Sin embargo, este modelo simplificado es útil para controlar el catamarán en un rango de velocidades y aceleraciones pequeñas.

*ii. Obtenga un modelo dinámico simplificado en función de las fuerzas ejercidas por sus dos propulsores F1 y F2. Establezca la relación entre estas fuerzas y las velocidades v y w*

Utilizando el método del Lagrangiano, empezamos por establecer cuales son las energías cinéticas y potenciales del sistema.

Asumiendo al totalidad de la masa del catamarán representada por una masa puntual $M$ en el centro de masa del catamarán, y un momento inercial $I$ alrededor de su centro de masa, la energía cinética del sistema es:

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Iw^2$$

Y expresando la velocidad en función las componentes $\dot{x} = v\cos(\theta)$ y $\dot{y} = v\sin(\theta)$, la energía cinética se puede expresar como:

$$K = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}Iw^2$$

El sistema no tiene energía potencial porque se desplaza sobre la superficie del agua.

Las varibles generalizadas son $x$, $y$ y $\theta$, de forma que el Lagrangiano del sistema es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i$$

Para la variable $x$:

$$M \cdot \ddot{x} = F_1\cos(\theta) + F_2\cos(\theta)$$

Para la variable $y$:

$$M \cdot \ddot{y} = F_1\sin(\theta) + F_2\sin(\theta)$$

Y finalmente para la variable $\theta$, a sabiendas de que las fuerzas realizan sendos momentos en el catamarán $\tau_1 = -F_1 \cdot b$ y $\tau_2 = F_2 \cdot b$, donde $b$ es la distancia ortogonal de los motores al eje de simetría, el Lagrangiano es:

$$I \cdot \ddot{\theta} = b \cdot (F_2 - F_1)$$

A partir de todo lo anterior, el modelo dinámico del catamarán, en función de las fuerzas ejercidas por sus dos propulsores $F_1$ y $F_2$ es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v\cos(\theta) \\ v\sin(\theta) \\ w \\ \frac{(F_1+F_2)}{M} \\ \frac{b\cdot(F_2-F_1)}{I} \end{bmatrix}$$