



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO  
ANÁLISE DE ALGORITMOS - DCC 606**



**GEORGE LUCAS MONÇÃO ZAMBONIN  
WANDRESSA DA SILVA REIS**

**ANÁLISE DESCRITIVA DO ARTIGO: APPROXIMATE GRAPH COLORING BY  
SEMIDEFINITE PROGRAMMING**

Trabalho apresentado para a disciplina de  
Análise de Algoritmos no curso de Ciência  
da Computação da Universidade Federal de  
Roraima, como parte dos requisitos para a  
aprovação do projeto final da disciplina.

**Boa Vista, RR  
2024**



## **Análise Descritiva do Artigo: Approximate Graph Coloring by Semidefinite Programming**

### **1. Título e Autores**

O artigo intitulado “*Approximate Graph Coloring by Semidefinite Programming*” foi escrito por David Karger (MIT), Rajeev Motwani (Stanford University) e Madhu Sudan (MIT). Os autores são pesquisadores renomados em ciência da computação.

### **2. Objetivo**

O artigo propõe um algoritmo polinomial randomizado para a coloração aproximada de grafos 3-coloríveis. O objetivo é minimizar o número de cores usadas para grafos  $k$ -coloríveis, com uma abordagem baseada em programação semidefinida.

### **3. Justificativa**

A coloração de grafos é um problema clássico de otimização NP-difícil, com diversas aplicações, como alocação de registradores e programação de horários. O problema consiste em colorir vértices de um grafo de forma que os vértices adjacentes tenham cores diferentes, no entanto, o impasse é resolver a coloração de maneira aproximada devido à sua dificuldade computacional.

### **4. Metodologia**

Os autores propõem um algoritmo baseado na programação semi-definida (SDP), inspirando-se em trabalhos anteriores sobre aproximação para problemas como MAX CUT e o MAX 2-SAT. A técnica deles utiliza uma versão relaxada do problema de coloração de grafos, resolvida via programação semi-definida, seguida por uma técnica de arredondamento aleatório para obter uma solução factível. O artigo explora a relação entre o valor ótimo da programação semi-definida e a função  $\vartheta$ -Lovász, usada para investigar limites inferiores entre o valor da solução e o número cromático real.

### **5. Resultados**

Os autores apresentam um algoritmo de tempo polinomial que colore um grafo 3-colorível com  $n$  vértices usando  $\min\{O(\Delta^{1/2} \log^{1/2} \Delta \log n), O(n^{1/4} \log^{1/2} n)\}$  cores, onde  $\Delta$  é o grau máximo de qualquer vértice. Esse resultado também se generaliza, oferecendo uma aproximação baseada tanto no número de vértices quanto no grau máximo.

#### **5.1. Outros Resultados**

- **Melhores Aproximações:** Segundo o artigo, o algoritmo dos autores oferece a

melhor razão de aproximação conhecida em termos do número de vértices  $n$  e é o primeiro a fornecer uma aproximação não trivial como função do grau máximo  $\Delta$  de um grafo. No entanto, é importante considerar que o artigo foi escrito em 1998.

- **Generalização para Grafos k-Coloríveis:** A técnica apresentada é aplicada para grafos  $k$ -coloríveis, mostrando que é possível obter uma coloração utilizando  $O(\Delta^{1-2/k} \log^{1/2} \Delta \log n)$  ou  $O(n^{1-3/(k+1)} \log^{1/2} n)$  cores.
- **Relação com a Função  $\vartheta$  de Lovász:** Um dos aspectos mais intrigantes do trabalho é a relação de dualidade estabelecida entre a solução ótima do programa semi-definido e a função  $\vartheta$ , usada para fornecer limites inferiores na lacuna entre a solução semidefinida e o número cromático real.

## 6. Conclusão

Os autores concluem que, além de melhorar a aproximação em função de  $n$ , o algoritmo oferece uma perspectiva inovadora sobre a coloração de grafos, introduzindo uma relação de dualidade interessante entre o valor ótimo da SDP e a função  $\theta$ . Eles também exploram a limitação de aproximação, sugerindo que o método tem um desempenho próximo do limite teórico.

## 7. Contribuição

O artigo oferece um avanço importante no estudo de coloração aproximada de grafos, utilizando a técnica e programação semi-definida para alcançar melhores aproximações em grafos  $k$ -coloríveis.

## 8. Crítica

A principal limitação do trabalho reside na complexidade dos cálculos e nas suposições necessárias para a implementação do algoritmo em sistemas práticos. Embora a melhoria teórica seja significativa, a aplicação em grafos grandes e de alta densidade pode ser desafiadora.

## 9. Referência Bibliográfica

KARGER, David; MOTWANI, Rajeev; SUDAN, Madhu. Approximate graph coloring by semidefinite programming. *arXiv preprint arXiv/9812008v1*, 1998. Disponível em: <http://arXiv.org/abs/cs/9812008v1>. Acesso em: 22 set. 2024.