Дерево Штейнера

Глушенко Анатолий, 496

Постановка задачи Штейнера

Задача Штейнера состоит в поиске минимального дерева Штейнера — кратчайшей сети, соединяющей заданный конечный набор точек плоскости.

Дан ненаправленный связный граф $G = (V, E)$, в нем выделено множество вершин V_0. Также имеются веса на ребрах ω : E $\rightarrow R_+$. Требуется найти дерево T мининмального веса, покрывающее все вершины V_0.

NP-полнота задачи Штейнера

Теорема: задача Штейнера на графах NP-полна.

Приведем доказательство для задачи с заданным ограничением k на вес дерева Штейнера. Доказательство будет состоять из 4 шагов, описанных в статье Гэри и Джонсона [1]:

1. Проверить, что задача Штейнера лежит в NP;
2. Выбрать известную NP-полную задачу П;
3. Построить сведение П к задаче Штейнера;
4. Доказать, что построенное сведение полиномиально;

1 Задача Штейнера(Steiner Tree) лежит в NP

Сперва мы хотим убедиться в том, что ST лежит в NP. Пусть $\langle G, V_0, k\rangle \in ST$. При наличии некоторого решения T $\subseteq$ G, за полиномиальное время можно проверить, что

- T - дерево (ациклический связный граф)
- T содерджит в себе все вершины из V_0
- Вес T не превосходит k

2 Точное покрытие 3-элементными множествами(Exact Cover by 3-Sets)

Задача X3C - одна из классических NP-полных задач [1].
Дано конечное множество X, |X| = 3q, и семейство C 3-элементных подмножеств X, C = $\{C_1, ..., C_n \mid \forall$ i $\in [1, n]\ C_i \subseteq X,\ |C_i| = 3\}$.
Содержит ли C точное покрытие X, являющееся подсемейством C' $\subseteq$ C, для которого выполнено, что каждый элемент X содержится ровно одном множестве из C'?
Заметим, что для C' - решения $\langle X, C\rangle \in$ X3C выполнено:

- элементы C' формируют разбиение X
- |C'| = q

3 Сведение X3C к ST

Построим сведение X3C к ST. Для этого приведём набор правил, по которым из условий задачи X3C будут сформированы условия задачи ST [2], и докажем, что данное сведение можно выполнить за полиномиальное время.

Пусть имеется множество X = $\{x_1, ..., x_3q\}$ и семейство 3-элементных множеств C = $\{C_1, ..., C_n\}$ - условие задачи X3C. Нужно построить граф G = (V,E), множество вершин V_0 и ограничение k на вес дерева, покрывающего вершины из V_0.

- определим множество вершин V: V(G) = $\{v\}$ ∪ $\{c_1, ..., c_n\}$ ∪ $\{x_1, ..., x_{3q}\}$. Множество вершин состоит из новой вершины - v, вершины для каждого элемента C и вершины для каждого элемента X
- теперь определим множество ребер. E(G) = $\{vc_1, ..., vc_n\}$ ∪ $(\cup_{x_j \in C_i}\{c_i x_j\})$. Между вершиной v и каждой из вершин c_i есть ребро. Также, если элемент x_j лежит в множестве C_i в условии задачи X3C, то между c_i и x_j есть ребро.
- множество $V_0 = \{v, x_1, ..., x_{3q}\} \subseteq$ V.
- веса на ребрах определим так:

  $\omega(\{v, c_i\}) = |C_i|$.

  $\omega(\{c_i, x_j\}) = 0$
- положим k равным 3q.

Легко понять, что сведение X3C к ST может быть выполнено за полиномиальное время. Граф построенный по этим правилам показан на рисунке 1. Новая вершина v нужна для того, чтобы построенный граф был связным.

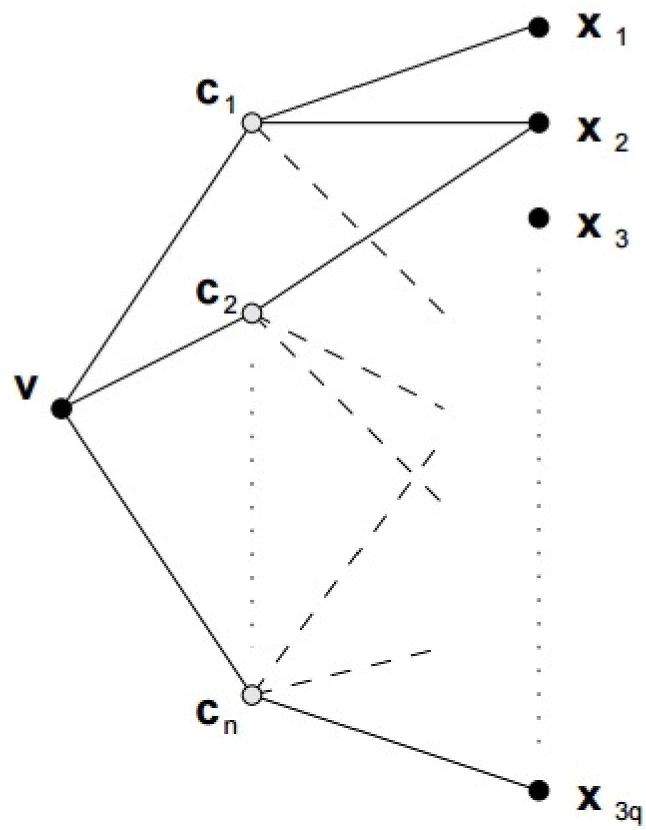

Рис. 1: Граф, построенный в результате сведения. Черные вершины - элементы множества V_0

Теперь докажем, что дерево Штейнера с весом не более k существует тогда и только тогда, когда существует точное покрытие удовлетворяющее условию задачи X3C.
Лемма: $\langle X, C \rangle$ лежит в X3C тогда и только тогда, когда $\langle G, V_0, k \rangle$ лежит в ST.
Доказательство:

- X3C $\Rightarrow$ ST
  Пусть C' - точное покрытие 3-элементными множествами. |C'| = q. Без ограничения общности $C_1, ..., C_q$ - элементы C'. Тогда дерево состоящее из 4q ребер:

  - $vc_1, ..., vc_q$, веса 3 каждое

– $c_i x_j$, если $x_j \in C_i$ и $1 \leq i \leq q$, веса 0

является деревом Штейнера веса 3q = k.

- X3C $\Leftarrow$ ST
Пусть T - дерево Штейнера веса не более 3q и не более чем с 4q ребрами. T содержит не более 4q+1 вершин. По определению T включает в себя вершины $x_1, ..., x_{3q}$ и v, следовательно T содержит не более q c-вершин. Но степень каждой c-вершины(учитывая только ребра $c_i x_j$, если $x_j \in C_i$) равна 3, следовательно дерево не может включать в себя все 3q x-вершин, если оно содержит менее 4q+1 ребер. Получили, что T содержит ровно 4q+1 ребер и ровно q c-вершин. Без ограничения общности предположим, что это вершины $c_1, ..., c_q$, тогда C' = $\{C_1, ..., C_q\}$ - решение задачи X3C.

Метрическая задача Штейнера

Дан полный граф $G = (V, E)$, в нем выделено множество вершин V_0. Имеются веса на ребрах ω : E $\rightarrow Q_+$, такие, что для любых трех вершин x, y и z выполнено неравенство: $\omega(x, z) \leq \omega(x, y) + \omega(y, z)$. Требуется найти дерево T наиментшего веса, покрывающее все вершины V_0.

Сведение задачи Штейнера к метрической версии

Теорема 1: Существование p-приближенного алгоритма для метрической задачи Штейнера влечет существование p-приближенного алгоритма для задачи Штейнера [3].
Доказательство: Пусть G = (V,E) - граф из условия задачи Штейнера. По G построим полный граф G' для метрической задачи Штейнера. Определим вес ребра (x,y) в G', как вес кратчайшего пути из x в y в G. Множество V_0 и V_0' совпадают.

Вес любого ребра (x,y) в G' не превосходит веса этого ребра в графе G(если такое есть). Поэтому вес дерева T, являющегося оптимальным решением задачи Штейнера, не превосходит веса дерева T' - оптимального решения метрической задачи.

Пусть задано дерево T'. Покажем как за полиномиальное время построить дерево T веса не большего, чем вес T'. Вес ребра (x,y) в графе G' соответствует весу кратчайшего пути в графе G. Заменим каждое ребро дерева T' на соответствующий путь, получим подграф графа G. Очевидно, что этот подграф содержит все вершины из V_0. Но этот подграф может содержать цикл. Если это так, то удалим лишние ребра, чтобы получить дерево T.

Пусть W' - вес решения, найденного p-приближенным алгоритмом для метрической задачи, O' - вес оптимального решения метрической задачи. Способом, описанным выше, найдем решение задачи Штейнера веса W, такое, что W $\leq$ W' $\leq$ pO' $\leq$ pO

Теорема 2: Пусть $V_0 \subseteq$ V - выделенное множество в метрической задаче Штейнера. Тогда вес минимального остовного дерева в V_0 не превосходит двух весов оптимального дерева Штейнера на графе G.
Доказательство: Рассмотрим дерево Штейнера оптимального веса(пример - Рис.2). Дублируя ребра, получим Эйлеров граф, связывающий все вершины из множества V_0, а также, возможно, и некоторые другие вершины графа G. Найдем Эйлеров обход в этом графе.

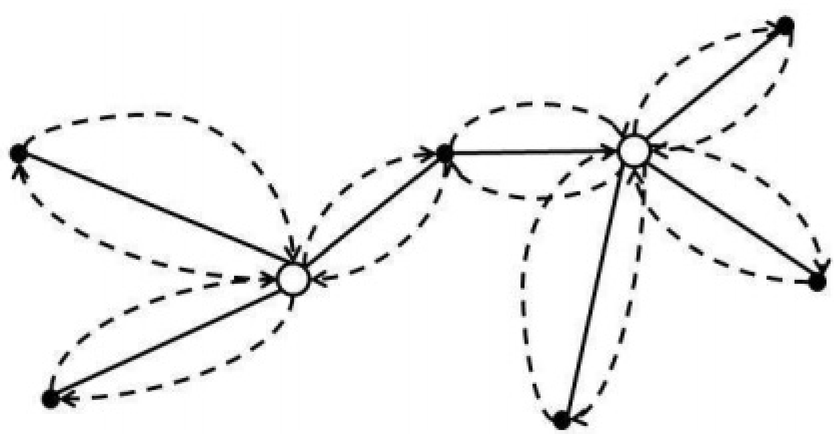

Рис. 2: Двойной обход

Стоймость этого обхода равна 2*вес оптимального решения. Затем, используя порядок вершин в Эйлеровом обходе, получим

Гамильтонов цикл, методом срезания углов, пропуская вершины не из V_0 и уже пройденные вершины (Рис. 3).

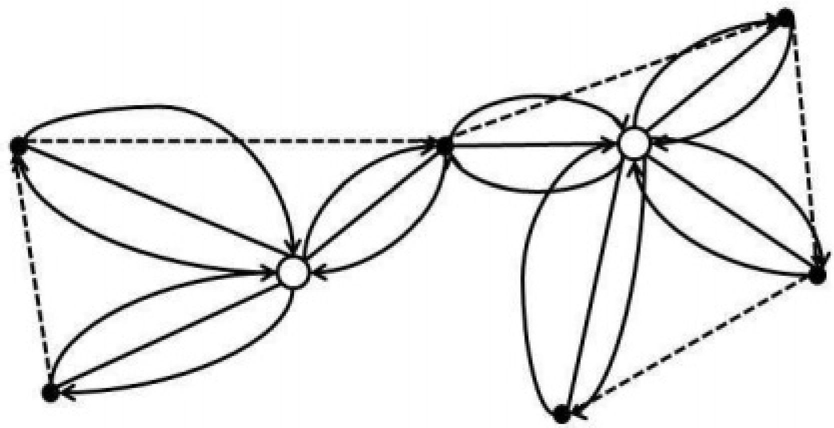

Рис. 3: Метод срезания углов

Из неравенства треугольника следует, что стоимость нового цикла не может превышать стоимости Эйлерова обхода. Удалив одно ребро Гамильтонового цикла, получим путь P по вершинам V_0 веса превышающего 2*вес оптимального решения. P является остовным деревон на V_0. Поэтому вес минимального остовного дерева не превышает 2*вес оптимального решения.

Приближенный алгоритм для задачи Штейнера

Используя результат теоремы 2, построим простой приближенный алгоритм для задачи Штейнера. Алгоритм Остовное дерево (G =(V,E), V_0, ω: E $\to Q_+$)

1. Найти минимальное остовное дерево T на множестве вершин V_0
2. return T

Следствие: Алгоритм остовное дерево является 2-приближенным алгоритмом для задачи Штейнера.

На Рис. 4 приведен пример, на котором эта оценка достигается. Рассмотрим граф в котором n вершин из V_0 и одна вершина не из V_0. Вес ребра между любой парой вершин из V_0 равен 2; между вершиной не из V_0 и из V_0 равен 1. В этом графе остовное дерево на множестве вершин V_0 имеет стоймость 2(n-1), а оптимальное дерево Штейнера имеет вес n.

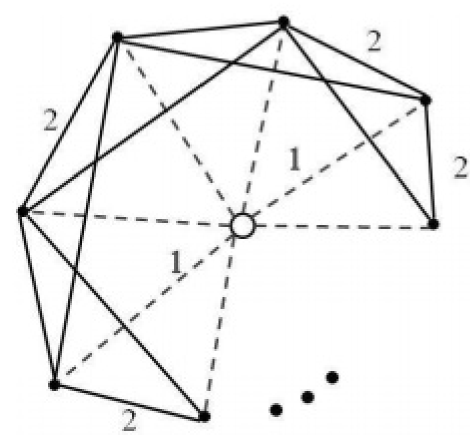

Рис. 4: Пример точности оценки алгоритма остовное дерево

Список литературы

[1] Garey Michael R., Johnson David S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W.H. Freeman and Company, 1979.

[2] Karp Richard M. Reducibility among combinatorial problems. University of California at Berkeley.

[3] А. В. Кононов П. А. Кононова. Приближенные алгоритмы для NP-полных задач. 2014.