天津大学 Tianjin University

1. $\|f\|_1=\int_a^b |f(x)|\,dx$

$\|f\|_2=\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

$\|f\|_\infty=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$

2. 内积：$(f(x),g(x))=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\,dx$

格拉姆矩阵：

$$G=G(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\varphi_n)=\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & & & \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}$$

$\det G(\varphi_0,\varphi_1,\cdots\varphi_n)\neq 0$

即 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots\varphi_n$ 在 $[a,b]$ 上线性无关

3. 给定 $f(x)\in C[a,b]$，若 $P^*(x)\in H_n$ 使误差 $\|f(x)-P^*(x)\|_\infty=$

$\min\limits_{P\in H_n}\|f(x)-P(x)\|_\infty=\min\limits_{P\in H_n}\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)|$

则称 $P^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 n 次最佳一致逼近多项式.

4. $f(x)\in C[a,b]$，若 $p^*(x)\in H_n$ 使

$$\|f(x)-p^*(x)\|_2^2=\min\|f(x)-p(x)\|_2^2=\min_{p\in H_n}\int_a^b (f(x)-p(x))^2dx$$

则称 $p^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的n次最佳平方逼近多项式.

~~6~~ 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的列表函数，要求 $p^*\in\phi$ 使

$$\|f-p^*\|_2^2=\min_{p\in\phi}\|f-p\|_2^2=\min_{p\in\phi}\sum_{i=0}^{m}[f(x_i)-p(x_i)]^2,$$

称 $p^*(x)$ 为 $f(x)$ 的最小二乘拟合.

2. (1) 对，由weierstrass定理可知.

(7) ~~对，数~~ 错，当一个函数由给定的一组可能不精确表示函数的数据来确定时，使用最小二乘法比较合适.

习题：

4.

(1) $\|f\|_\infty = \max\limits_{0\le x\le 1} |(x-1)^3| = 1$　　$\|f\|_1 = \int_0^1 |(x-1)^3|\, dx = \frac{1}{4}$

$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 (x-1)^6\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

(2) $\|f\|_\infty = \max\limits_{0\le x\le 1}(|x-\frac{1}{2}|) = \frac{1}{2}$　　$\|f\|_1 = \int_0^1 |x-\frac{1}{2}|\, dx = \frac{1}{4}$

$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |x-\frac{1}{2}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

12. $d_0 = \int_0^1 (x^2+3x+2)\, dx = \frac{23}{6}$

$d_1 = \int_0^1 x(x^2+3x+2)\, dx = \frac{9}{4}$

$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$　　$H\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{6} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$

解得 $a_0 = \frac{11}{6}$，$a_1 = 4$　　故最佳平方逼近多项式为 $p_1(x) = 4x + \frac{11}{6}$

取 $\Phi = \text{span}\{1, x, x^2\}$

$\cancel{d_2 = \int_0^1 x^2(x^2+3x+2)\, dx}$　由插值多项式唯一

可知 $p_2(x) = x^2+3x+2$

13. $d_0=\int_{-1}^{1}x^3dx=0$

$d_1=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}$

$d_2=\int_{-1}^{1}x^5dx=0$

$(1,x)=0$ $(1,1)=2$ $(1,x^2)=\frac{2}{3}$ $(x,x)=\frac{2}{3}$

$(x,x^2)=0$ $(x^2,x^2)=\frac{2}{5}$

$\therefore H=\begin{bmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$ $Ha=d$

解得 $a_0=0$ $a_1=\frac{3}{5}$ $a_2=0$.

$\therefore p_2(x)=\frac{3}{5}x$

17. $\varphi=\mathrm{span}\{1,x^2\}$ $(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{j=0}^{4}1^2=5$ $(1,x^2)=\sum_{j=0}^{4}x_j^2=5327$

$(x^2,x^2)=\sum_{j=0}^{4}x_j^4=7277699$

$(1,f)=\sum_{j=0}^{4}y_j=271.4$ $(x^2,f)=\sum_{j=0}^{4}x_j^2y_j=369321.5$

解: $\begin{bmatrix}5 & 5327\\ 5327 & 7277699\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}271.4\\ 369321.5\end{bmatrix}$

得 $a\simeq0.972604$, $b=0.050035$ $\therefore y=0.972604+0.050035x^2$

均方误差 $\delta=\{\sum_{j=0}^{4}[y(x_j)-y_j]^2\}=0.1226$

18. 取拟合函数 $y=ae^{-\frac{b}{t}}$，两边取对数

$\cancel{\Phi=spa}$ $\ln y=\ln a-\frac{1}{t}b$ 记 $\ln a=A$

$\Phi=span\{1,-\frac{1}{t}\}$

$(1,1)=11$ $(1,-\frac{1}{t})=\sum\limits_{j=0}^{11}(-\frac{1}{t})=-0.603975$

$(-\frac{1}{t},-\frac{1}{t})=\sum\limits_{j=0}^{11}\frac{1}{t^2}=0.06232$

$(1,f)=\sum\limits_{j=0}^{11}\ln y=-87.674095$ $(-\frac{1}{t},\ln y)=\sum\limits_{j=0}^{11}\frac{\ln y}{-t}=5.032489$

解 $\begin{bmatrix}11, & -0.603975\\ -0.603975, & 0.62321\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-87.674095\\ 5.032489\end{bmatrix}$

得 $A=-7.558781$ $b=7.4961692$ $a=e^{A}=5.215148\times10^{-4}$

$\therefore y=5.215148e^{-\frac{7.4961692}{t}}\times10^{-4}$

拟合平方误差 $\delta^2=\sum\limits_{i=0}^{11}[y(t_i)-y_i]^2=3.376\times10^{-9}$