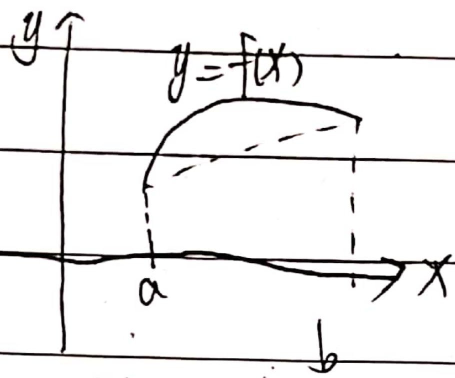
1. 梯形公式: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

几何意义:



中矩形公式: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot f(\frac{a+b}{2})$

几何意义:

~~2.~~

2. 代数精度: 若某个求积公式对于次数不超过m的多项式均能准确成立，但对于m+1次多项式就不准确成立，则称该求积公式具有m次代数精度。

梯形公式: 代数精度为1

中矩形公式: 代数精度为1

4. 将积分区间[a,b]划分为n等份，步长$h=\frac{b-a}{n}$，选取等距节点$x_k=a+kh$

构造出的插值型求积公式: $I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)$

称为牛顿-柯特斯公式，式中$C_k^{(n)}$称为柯特斯系数

求积结点等距分布。代数精确度: 至少具有n次求积精度，当n为偶数时，至少有n+1次代数精度。

5. 牛顿-柯斯特公式，$n=2$ 时对应求积公式为辛普森公式

$$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

余项：$R[f]=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta),\ \eta\in(a,b)$

代数精度为3.

6. 把积分区间分成若干子区间（通常是等分），再在每个子区间上用低阶求积公式，此方法称为复合求积法。

复合梯形公式：$T_n=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]$

余项：$R_n(f)=I-T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{h^3}{12}f''(\eta_k)\right],\ \eta_k\in(x_k,x_{k+1})$

14. (2) 错，不一定。

(3) 错，二者无明显关系

(4) 对.

(6) 对

(9) 错，精度不同

习题：

1. (1) 3个参数，首先满足2次代数精度，取 $f(x)=1, x, x^2$ 代入令其左右相等.

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2h \\ -hA_{-1}+hA_1=0 \\ h^2A_{-1}+h^2A_1=\frac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解得：$A_{-1}=A_1=\frac{h}{3}$，$A_0=\frac{4h}{3}$。

另取 $f(x)=x^3$，$\int_{-h}^{h}x^3dx=\frac{h}{3}(-h)^3+\frac{h}{3}\cdot h^3$

$f(x)=x^4$，$\int_{-h}^{h}x^4dx\neq\frac{h}{3}(-h)^4+\frac{h}{3}\cdot h^4$

$\therefore$ 最高具有3次代数精度，当 $A_{-1}=A_1=\frac{h}{3}$，$A_0=\frac{4h}{3}$ 时.

(2). 同(1)中方法，三个方程解出 $A_{-1}=A_1=\frac{8}{3}h$，$A_0=-\frac{4}{3}h$.

另取 $f(x)=x^3$ 满足，$f(x)=x^4$ 不满足

因此具有3次代数精度.

(3). 取 $f(x)=1, x, x^2$

$$\begin{cases} \frac{1+2+3}{3}=2 \\ \frac{-1+2x_1+3x_2}{3}=0 \\ 1+2x_1^2+3x_2^2=2 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_1=-0.289897 \\ x_2=0.526598 \end{cases}$

或 $\begin{cases} x_1=0.689897 \\ x_2=-0.126598 \end{cases}$

另取 $f(x)=x^3$ 代入 $\int_{-1}^{1} x^3 dx \neq \frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$

$\therefore$ 求积公式具有2次代数精度，所求 x_1, x_2 结果如上。

(4). 取 $f(x)=1, x, x^2$

$$\begin{cases} \int_0^h 1dx = \frac{h}{2}[1+1]+0 \\ \int_0^h x dx = \frac{h}{2}[0+h]+ah^2[1-1] \\ \int_0^h x^2 dx = \frac{h}{2}[0+h^2]+ah^2[2\times 0-2h] \end{cases}$$

~~取f~~

解得 $a=\frac{1}{12}$

另取 $f(x)=x^3, x^4$

$$\int_0^h x^3 dx = \frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{h^2}{12}[0-3h^2]$$

$$\int_0^h x^4 dx \neq \frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{h^2}{12}[0-4h^3]$$

故求积公式具有3次代数精度。

6. $f''(x)=e^x$，$b-a=1$。

$|R_T(f)| = \left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\right| \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n^2}\right)e \leq \frac{1}{2}\times 10^{-5}$

$n^2 \geq \frac{e}{6}\times 10^5$ $\therefore n \geq 212.85$ 取 $n=213$，即将区间 $[0,1]$ 213 等分时，截断误差小于等于 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$。

复合辛普森：$f^{(4)}(x)=e^x$

$|R_S(f)| = \left|-\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)\right| \leq \frac{1}{180\times 2^4}\left(\frac{1}{n}\right)^4 e \leq \frac{1}{2}\times 10^{-5}$

$n^4 \geq \frac{e}{144}\times 10^{-4}$ $n \geq 3.706$ 即区间8等分时，误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$。