Tianjin University

第二章：

复习与思考题

1. 插值基函数：(拉格朗日)
$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

由 $l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ 推得 a_i，性质是 $i=j$ 时，$l_i(x_j)=1$

$i\neq j$ 时，$l_i(x_j)=0$.

2. 牛顿基函数：$(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_{n-1})$. 即 $\{1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \cdots\cdots(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\}$

比单项式基插值更方便，可增加节点逐步递推得到高次的插值多项式。

3. n阶均差：
$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_0,\cdots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

差商具有对称性：差商与节点的排列次序无关。

② $$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

③ n阶均差与导数的关系：
$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\ \xi\in[a,b]$$

4. 拉格朗日：$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$ 其中 $l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)$，$k=0,1$

牛顿：$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

其中 $a_k=f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$，$k=0,1,\cdots n$ 为$f(x)$在点$x_0,x_1,\cdots x_k$上的阶均差。

7. 余项表达式：$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)$

$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

若有 $\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|=M_{n+1}$，即$L_n(x)$逼近$f(x)$的截断误差

$$R_n(x)\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|w_{n+1}(x)\right|$$

9. 对于任意插值节点，$n\to\infty$时，$L_n(x)$不一定收敛于$f(x)$，如对龙格函数做高次插值时就会出现振荡现象，因而插值多项式次数升高，插值效果不一定令人满意。

分段插值多项式为多段低次多项式，可避免单个高次插值的振荡现象。

习题.

7. ~~利用~~牛顿插值，取靠近0.54的点 0.5, 0.6, 0.4, 建立差商表

$x_0=0.5$ -0.693147 > 1.823210 > -0.204115

$x_1=0.6$ -0.510826 > 2.027325

$x_2=0.4$ -0.916291

$N_1(x)=-0.693147+1.823210(x-0.5)$

$N_2(x)=N_1(x)+(-0.204115)(x-0.5)(x-0.6)$

$N_1(0.54)\approx-0.620219$ $N_2(0.54)\approx-0.616839$

14. $p(0)=1$, $p(1)=1$ ~~用牛顿插值 $N_1(x)=$~~ ⇒ 牛顿插值 $N_1(x)=x$

~~令$P(x)=H_3(x)$~~   设 $H_3(x)=(ax+b)(x-0)(x-1)+N_1(x)$

$=ax^3+(b-a)x^2-bx+x$

$H_3'(x)=3ax^2+2(b-a)x-b+1$

$H_3'(0)=1$, $H_3'(1)=2$ $\begin{cases}1-b=1\\3a+2(b-a)-b+1=2\end{cases}$

$\therefore a=1, b=0$

故 $P(x)=x^3-x^2+x$

16. $H_3(x) = H_3(0)\cdot\alpha_0(x) + H_3(1)\,\alpha_1(x) + H_3'(0)\cdot\beta_0(x) + H_3'(1)\cdot\beta_1(x)$

$= \alpha_1(x) + \beta_1(x).$

$= \left[1-2\frac{x-1}{1-0}\right]\cdot\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2 + (x-1)\left[\frac{x-0}{1-0}\right]^2.$

$= 2x^2 - x^3.$

$P(x) = H_3(x) + Ax^2(x-1)^2$ · 令 $p(2)=1$

$A = \frac{1}{4}$

$\therefore p(x) = 2x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^2(x-1)^2 = \frac{1}{4}x^2(x-3)^2.$

17. 步长 $h = \frac{5-(-5)}{10} = 1$，$x_i = -5 + ih = -5+i \ (0 \le i \le 10)$

在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上：

$I_h^{(i)}(x) = f(x_i)\cdot\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} + f(x_{i+1})\cdot\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$

$= \frac{x_{i+1}-x}{1+x_i^2} + \frac{x-x_i}{1+x_{i+1}^2}$，$i=0,1,\cdots 9$

x	± 0.5	± 1.5	± 2.5	± 3.5	± 4.5
$f(x)$	0.80000	0.30769	0.13793	0.07547	0.04706
$I_h(x)$	0.75000	0.35000	0.15000	0.07941	0.04864

估计误差：在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上.

$|f(x) - I_h^{(i)}(x)| = \left|\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$

$\le \frac{1}{2}\max_{-5\le x\le 5}|f''(x)|\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|$

而 $\max\limits_{x_i\le x\le x_{i+1}}|(x-x_i)(x-x_{i+1})| \xlongequal{x=x_i+sh} \max\limits_{0\le s\le 1}|s(s-1)|=\frac{1}{4}$

$f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$

令 $f'''(x)=\frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=0$ 得 $f''(x)$ 驻点 $0,\pm 1$ 于是

$\max\limits_{-5\le x\le 5}\{|f''(x)|\}=\max\{|f''(0)|,|f''(\pm 1)|,|f''(\pm 5)|\}=2$

故 $|f(x)-I_h^i(x)|\le\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{4}=0.25$

即 $|f(x)-I_h(x)|\le 0.25$, $x\in[-5,5]$