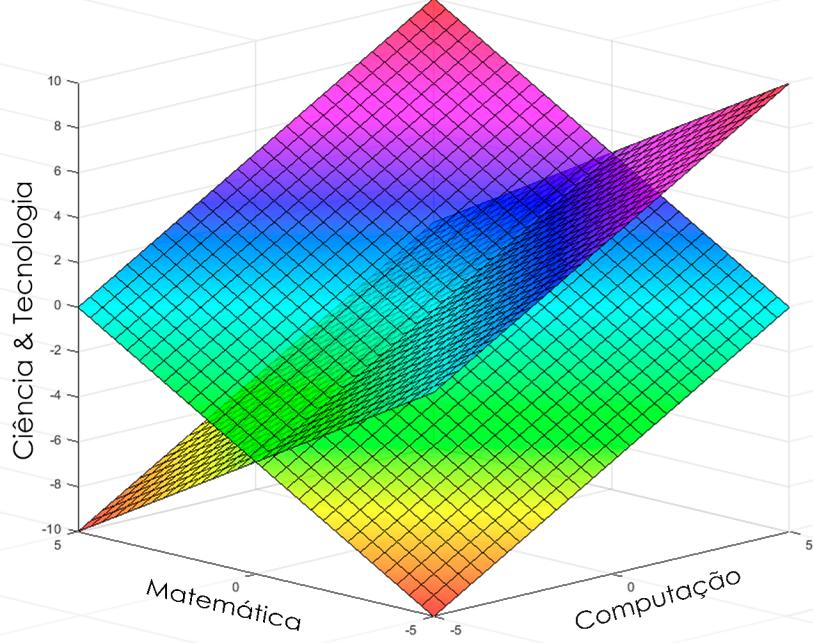
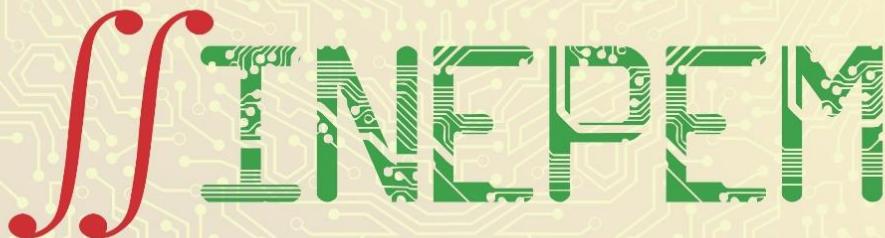


Matemática Computacional Aplicada à Ciência & Tecnologia



Denis Carlos Lima Costa
Heictor Alves de Oliveira Costa
Hugo Carlos Machado da Silva
Silvio Tadeu Teles da Silva

09 e 10 de setembro de 2021 - On-line



**II SIMPÓSIO NACIONAL SOBRE ENSINO E PESQUISA DE MATEMÁTICA
NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
EM TEMPOS DE PANDEMIA**

**Matemática Computacional aplicada
à Ciência e Tecnologia**

Denis C. L. Costa

Hugo Carlos Machado Silva

Sílvio Tadeu Teles da Silva

Heictor Alves de Oliveira Costa



INSTITUTO FEDERAL
Pará

Campus
Belém

**Diretoria de Pós-graduação, Pesquisa e Inovação
Grupo Interdisciplinar para a Educação
em Ciências e Matemática
Coordenação de Matemática**

ISBN: 978-65-00-29276-3

Fernando Cardoso de Matos (Org.)

Raimundo Otoni de Melo Figueiredo (Org.)

Reginaldo da Silva (Org.)

Denis C. L. Costa – Heictor A. de O. Costa – Hugo C. M. da Silva – Silvio T. T. da Silva

**DENIS CARLOS LIMA COSTA
HEICTOR ALVES DE OLIVEIRA COSTA
HUGO CARLOS MACHADO DA SILVA
SILVIO TADEU TELES DA SILVA**

**MATEMÁTICA COMPUTACIONAL
APLICADA À CIÊNCIA & TECNOLOGIA**

ORGANIZADORES

**Fernando Cardoso de Matos
Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Reginaldo da Silva**

BELÉM – PARÁ
Setembro de 2021

**Coordenação
II SINEPEM**

Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Reginaldo da Silva

**Comitê Científico
Coleção II**

Everaldo Raiol da Silva
Francisco Fialho Guedes Ferreira
Fernando Cardoso de Matos
Glauco Lira Pereira
José Emilio Medeiros dos Santos
Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Reginaldo da Silva

Copyright © 2021 by SINEPEM – 2º Edição
Revisão de Texto e Bibliográfica: Os autores
Capa e Projeto Gráfico: Ivo José Paes e Silva

Dados para catalogação na fonte – Setor de Processamento Técnico
Biblioteca IFPA – Campus Belém

M425	Matemática Computacional Aplicada à Ciência & Tecnologia / Denis Carlos Lima Costa, Heictor Alves de Oliveira Costa, Hugo Carlos Machado da Silva, Silvio Tadeu Teles da Silva.
	Coordenadores Fernando Cardoso de Matos Raimundo Otoni Melo Figueiredo e Reginaldo da Silva. - Belém: IFPA, 2021. 84 p. – (Coleção II SINEPEM; vol. 3)
	Suporte impresso e digital (PDF). ISBN: 978 – 65 – 00 – 29276 – 3
	1. Matemática aplicada – ensino e aprendizagem. 2. Ciência – formação acadêmica. 3. Tecnologia – formação profissional. I. Simpósio Nacional sobre Ensino e Pesquisa de Matemática no Contexto da Educação, Ciência e Tecnologia – SINEPEM (2: 2021: Belém, PA). II. Título. III. Série.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristine Vieira da Silva – Bibliotecária CRB-2 PA-01327/0

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

**SIMPÓSIO NACIONAL SOBRE O ENSINO E PESQUISA
DE MATEMÁTICA NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO,
CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

Diretoria Regional da SBEM-PA

Diretora: FERNANDO CARDOSO DE MATOS

Vice-Diretora: REGINALDO DA SILVA

1º. Secretário: DEMETRIUS GONÇALVES DE ARAÚJO

2º. Secretário: JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES

3º. Secretário: JOSÉ CARLOS DE SOUZA PEREIRA

4º. Secretário: NATANAEL FREITAS CABRAL

1º. Tesoureiro: ACYLENA COELHO COSTA

2º. Tesoureiro: MARIA ALICE DE VASCONCELOS FEIO
MESSIAS

Comissão Organizadora SINEPEM

EVERALDO RAIOL DA SILVA

FERNANDO CARDOSO DE MATOS

FRANCISCO FIALHO GUEDES FERREIRA

GLAUCO LIRA PEREIRA

IVO JOSÉ PAES E SILVA

JOSÉ EMILIO MEDEIROS DOS SANTOS

MARCO ANTONIO DE OLIVEIRA FREITAS

RAIMUNDO OTONI MELO FIGUEIREDO

REGINALDO DA SILVA

Epígrafes

A Matemática não se apropria do meu tempo. Ela dá sentido a ele. (Denis Costa.)

O propósito de uma vida é deixar seu legado para outras. (Heictor Costa.)

*O pensamento matemático bem orientado, nos leva a transcender limites que historicamente foram impostos, nos levando a uma transformação pessoal.
(Hugo da Silva.)*

*A Ciência é o universo que se expande a partir da reflexão e criatividade.
(Silvio Tadeu.)*

Dedicatórias

Aos meus pais, Carlos e Maria. Eles sempre me incentivaram a questionar a natureza da minha realidade. (*Denis Costa.*)

Àqueles nunca satisfeitos com seus conhecimentos, sempre buscando um porquê. (*Heictor Costa.*)

Aos meus pais, Ilda e Luís, fontes de inspiração que me fizeram chegar até aqui, e à minha sobrinha, Laís, que personifica nova força motriz para presentes e futuras produções e conquistas. (*Hugo da Silva.*)

À minha esposa, Ana Paula que me motivou em todos os momentos na divulgação da ciência e a meus pais e irmão pelo incentivo e oportunidades. Aos quadrinhos que permitiram aguçar minha imaginação. (*Silvio Tadeu.*)

Agradecimentos

Aos pesquisadores Heictor Costa, Hugo Silva e Silvio da Silva, por aceitarem os desafios de idealizar e produzir essa obra. (*Denis Costa.*)

Aos autores deste livro, que exercem em minha vida os papéis de amigos e professores. (*Heictor Costa.*)

A Deus, autor e detentor de todo o conhecimento, e aos colegas Denis Costa, Heictor Costa, e Silvio da Silva, que no âmbito de suas pesquisas e demais produções contribuíram de forma protagonista no desenvolvimento da presente obra. (*Hugo da Silva.*)

Ao pesquisador Denis Costa pela oportunidade de produção, também ao Heictor Costa e Hugo Silva por toda dedicação apresentada. (*Silvio Tadeu.*)

Prefácio

Nascida a partir da necessidade, cresceu pela curiosidade e reflexão, constituída por hipóteses, teoremas, axiomas, lemas e dentre tantas informações e demonstrações, esta é a matemática. Mãe de todas as Ciências e tem em seus ramos números que envolvem tudo. Mas, o que seria da Matemática sem a imaginação? Provavelmente, um amontoado de tabelas e informações soltas.

Vamos além, o que seria do homem sem a imaginação? E a pesquisa? Logo, podemos destacar que a Ciência é fruto do sonhar, do questionamento de mentes brilhantes frente a ideia abstrata. Podemos destacar a literatura, os livros e por que não os quadrinhos? Neste momento me pego olhando para um quadrinho é me indagando sobre a sua importância quanto ferramenta cognitiva. O que podem agregar em seu potencial latente, em outras palavras a materialização da imaginação que nos guia e nos proporciona informação. Viver aventuras em um multiverso que questiona a todo o instante os fenômenos naturais, dialoga com a lógica e produz informações. Cria sentido e significado e registra a ação por meio da reflexão. Isso tudo em um quadrinho? Sim, basta a reflexão no sonhar.

Produtos sociais que carregam a importante missão de perpetuar no tempo e espaço uma mensagem, uma informação, uma semente de mudança a partir da reflexão, um ensinamento. Então, temos Ensino, e este traz consigo a curiosidade que tem como consequência a transformação.

Vivemos atualmente em um mundo repleto por informação, que estão lá, amontoadas, soltas, e a Educação será a linha que conecta as informações e as pessoas. Essa é a intenção desse material, conectar informações e gerar a curiosidade, transformar o leitor e desafiá-lo a mais.

*Me. Silvio Tadeu Teles da Silva,
Professor de Matemática.*

Apresentação

O Grupo Interdisciplinar para a Educação em Ciências e Matemática (GINEM), do Instituto Federal do Pará (IFPA), apresenta a 1^a Edição do Simpósio Nacional sobre Ensino e Pesquisa de Matemática no Contexto da Educação, Ciência e Tecnologia (SINEPEM), com vistas à difusão de pesquisas e produções acadêmicas de professores, estudantes e pesquisadores que atuam no campo da Matemática, Matemática Aplicada e da Educação Matemática.

No contexto da Educação, Ciência e Tecnologia, esta edição deverá subsidiar importantes discussões que permitirão traçar novos rumos e definir novas perspectivas para o Ensino e Pesquisa da Matemática nos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia. O apoio financeiro da CAPES viabilizou esta publicação dos livros para os minicursos, que possibilitaram uma maior fundamentação e interação entre professores, pesquisadores e estudantes participantes.

Nesta primeira edição, a Coleção SINEPEM apresenta 12 volumes de livros distribuídos em três áreas do conhecimento: Educação, Ciência e Tecnologia, que buscam dar suporte e difundir os conhecimentos científicos sistematizados pelos professores e pesquisadores em forma de minicursos, ministrados no evento.

**Raimundo Otoni Melo Figueiredo
Reginaldo da Silva
(Coordenadores)**

SUMÁRIO

PREFÁCIO	06
APRESENTAÇÃO	07
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	09
1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA	09
1.2 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	09
1.3 O AMBIENTE MATLAB	10
1.4 COMANDOS BÁSICOS EM MATLAB	13
CAPÍTULO II – FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL	15
2.1 FUNÇÃO POLINOMIAL	15
2.2 FUNÇÃO NÃO-POLINOMIAL	28
2.3 SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E TRANSCENDENTES	35
CAPÍTULO III – MATRIZES E SISTEMAS LINEARES	40
3.1 MATRIZES	41
3.2 OPERAÇÕES COM MATRIZES	45
3.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	54
CAPÍTULO IV – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	56
4.1 LIMITES	56
4.2 DERIVADAS	60
4.3 DERIVADAS PARCIAIS	66
4.4 INTEGRAIS	76
REFLEXÕES	81
REFERÊNCIAS	82

Capítulo 1 - Introdução

1.1 Modelagem Matemática

Esse livro considera que a Modelagem Matemática está relacionada aos termos como sistema, modelo e simulação. Os leitores dessa obra perceberão que a Modelagem Matemática será desenvolvida e apresentada por meio de Simulação Computacional.

O principal ponto de motivação é a complexidade dos problemas tratados na Ciência e Tecnologia. Tais complexidades frequentemente se originam da multiplicidade dos sistemas que envolvem a linguagem de modelagem natural em Ciência e Tecnologia. Nesse livro, os Modelos Matemáticos são definidos por uma série de aplicações, exemplos e definições, a partir da importante distinção entre modelos fenomenológicos e mecanicistas.

Cientistas trabalham para entender, desenvolver e otimizar “Sistemas”. Neste livro, “sistema” se refere ao instrumento de interesse, que pode ser parte da Natureza ou de uma Tecnologia artificial.

Uma das principais particularidades desses problemas é a alta exigência de Tecnologia. A razão pela qual precisamos da Ciência está vinculada aos enigmáticos processos da Natureza, que poderão ser desvendados por uma das mais importantes tecnologias inventadas pela humanidade: A Matemática.

1.2 Simulação Computacional

Neste livro, usaremos sistematicamente conceitos matemáticos elementares que o leitor já deve saber, mas talvez não se recorde imediatamente. Condensaremos noções que são típicas de Funções Polinomiais e Não-Polinomiais, Matrizes, Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, reformulando-os de uma forma que seja adequada para a implementação de Simulações Computacionais. Simultaneamente, apresentaremos novos conceitos que pertencem ao campo da Computação Científica e começaremos a explorar seu significado e utilidade com a ajuda do MATLAB (*MAT*rix *LAB*oratory), um ambiente integrado de programação e visualização.

O MATLAB é um ambiente integrado para computação científica e visualização, escrito. Principalmente, nos idiomas C e C++. O MATLAB é distribuído pela *MathWorks*. O nome significa *MAT*rix *LAB*oratory, pois

originalmente foi desenvolvido para computação de matrizes (Mathworks, 2021).

No livro, frequentemente, faremos uso da expressão “comando MATLAB”: neste caso, o MATLAB deve ser entendido como a Linguagem designada à modelagem, ao desenvolvimento, à simulação e à execução de processos matemáticos.

O MATLAB é um programa de computador que proporciona ao pesquisador um ambiente harmonioso à realização de inúmeros modelos de cálculos. Em especial, ele fornece um instrumento excelente para implementar métodos numéricos.

A forma mais comum de executar o MATLAB é digitando os comandos um de cada vez na janela de comando. Nesta obra, usaremos este modo interativo para apresentar ao leitor operações comuns, como realizar cálculos e criar gráficos.

O MATLAB também possui uma grande quantidade de bibliotecas auxiliares, denominadas *Toolboxes*, que otimizam o tempo na execução de tarefas. Dessa forma, o pesquisador poderá usar diversas funções residentes, minimizando o tempo para desenvolve-las e maximizando os cenários criados nas simulações.

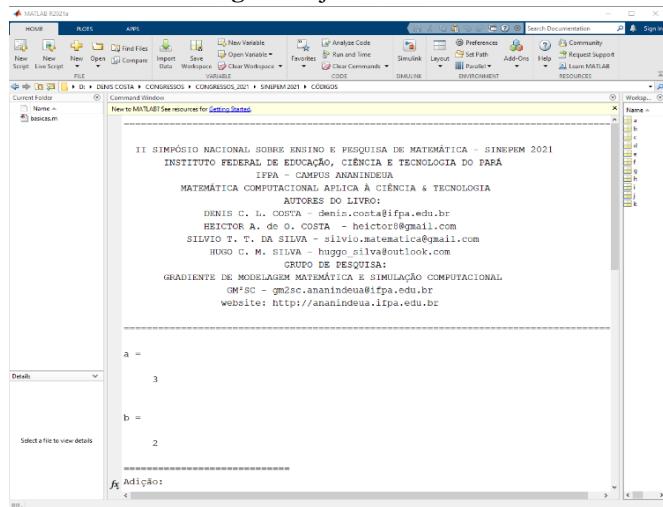
1.3 O Ambiente MATLAB

Este livro foi escrito com o objetivo primordial de facilitar a Modelagem Matemática-Computacional utilizando o programa MATLAB. Recomenda-se lê-lo e, simultaneamente, construir as atividades em um computador. O modo mais eficiente de se tornar proficiente é realmente implementar os comandos em ambiente MATLAB, conforme prossegue a seguinte obra.

O ambiente MATLAB de programação utiliza três janelas principais: comando, edição e de gráficos. Essas janelas estão expostas nas Figuras 1, 2 e 3:

- Janela de comando: usado para inserir comandos e dados.

Figura 1: janela de comando



Fonte: Autores.

- Janela de edição: usado para criar e editar arquivos M.
- Figura 2:** janela de edição

```

Editor: D:\DENIS COSTA\CONGRESOS\CONGRESOS_2021\SINEPEM 2021\CODE030\animat_integr.m
EDITOR FILENAMES VIEW
New Open Save Print Preview Comment % Run Disposers Run Run & Advance Run & Time
File Edit Insert Run Run & Advance Run & Time
1 basica.m future integral_anima.m animat_anim.m animat_integr.m
1
2 clc;
3 disp('
4 II SIMPÓSIO NACIONAL SOBRE ENSINO E PESQUISA DE MATEMÁTICA - SINEPEM 2021 ')
5 IFRITO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÉNCIA E TECNOLOGIA DO PARÁ
6 IFRATO - CAMPUS ANANINDEUA
7 MATEMÁTICA COMPUTACIONAL APLICA A CIÉNCIA E TECNOLOGIA'
8 AUTORES DO LIVRO:
9 DENIS C. L. COSTA, denis Costa@ifpa.edu.br
10 HEITOR A. DE O. COSTA, heitor0@gmail.com
11 SILVIO T. F. DA SILVA, silvio.matematica@gmail.com
12 HUGO C. M. SILVA, hugo.silvaoutlook.com
13 GRUPO DE PESQUISA:
14 GRADIENTE DE MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL"
15 GMSC - gmsc.ananindeua@ifpa.edu.br
16 website: http://ananindeua.ifpa.edu.br')
17 disp('
18 pause
19 % Operações Básicas
20 % Adição --> +
21 a = 3;
22 b = 2;
23 c = a + b;
24 disp('
25 fprintf('c = %d',c)
26 disp('
27 % Subtração --> -
28 d = a - b;
29
30 % Multiplicação --> *
31 e = a * b;
32

```

Fonte: Autores.

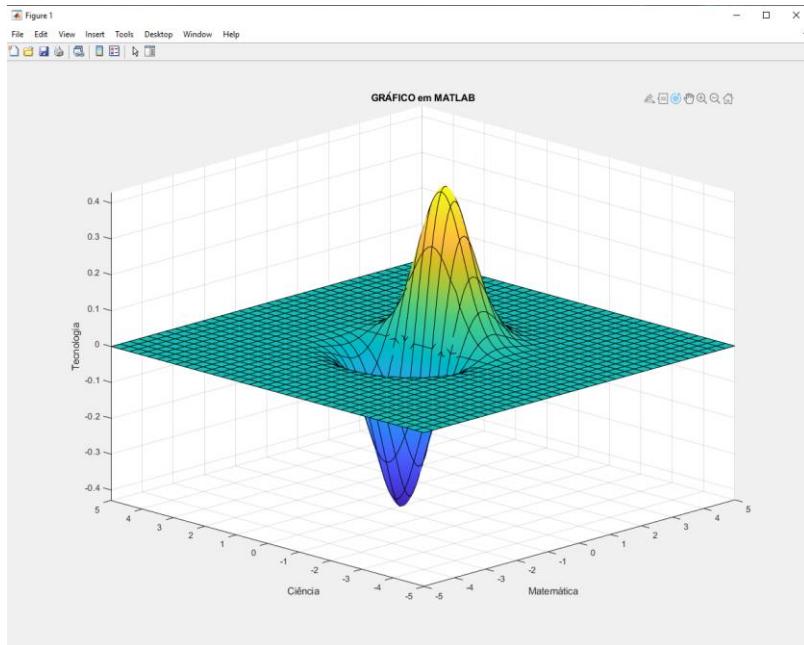
As duas primeiras janelas apresentadas, respectivamente nas Figuras 1 e 2, são responsáveis pela execução de operações.

Na janela de comando, as operações podem ser diretamente realizadas. Nessa janela, o pesquisador poderá criar novos *scripts* e acessar a janela de edição. Também poderá acessar a função *Preferences* e adaptar a tela do MATLAB a fim de maximizar o conforto visual, como por exemplo, ajustar o tamanho e a cor da fonte, bem como a cor do fundo da tela.

Na janela de edição, os arquivos salvos, são executados na extensão *.m* (por exemplo: **matriz.m**). Nessa janela, o pesquisador também poderá criar novos editores utilizando a função *New*. A utilização de *scripts*, na janela edição, permite que o pesquisador tenha maior controle sobre a manipulação dos programas desenvolvidos em ambiente MATLAB.

- Janela de gráficos: usado para exibir plotagens e gráficos.

Figura 3: janela de gráficos



Fonte: Autores.

1.4 Comandos básicos em MATLAB

Os comandos que serão apresentados servirão como fundamento às demais operações realizadas em ambiente MATLAB, e mostráram como atribuir números Reais (R) e Complexos (C) às variáveis.

- Compreender as regras de prioridade para construir expressões matemáticas.
- Aprender como vetores e matrizes são atribuídos a valores usando atribuição simples, o operador de dois pontos e ponto e vírgula.
- Aprender como usar vetores e matrizes para criar gráficos de 2 e 3 dimensões com base em uma equação.
- Obter uma compreensão geral das funções integradas e como você pode aprender mais sobre eles com o recurso *Help* do MATLAB.

O modo, *calculadora* do MATLAB opera sequencialmente, conforme os comandos são digitados, linha por linha. Para cada comando, obtém-se um resultado. Todavia, pode-se pensar nele como operando como uma otimizada calculadora. Nesse caso, é possível atribuir nomes às variáveis. Isso resulta no armazenamento dos valores na memória, correspondente ao nome da variável. A Tabela 1 apresenta operadores básicos para execução em ambiente MATLAB.

Tabela 1: Operadores básicos

Operação	Símbolo
Adição	+
Subtração	-
Multiplicação	*
Divisão	/ ou \
Potenciação	^

Fonte: Autores.

A Tabela 2 destaca os comandos e descrição das principais funções matemáticas aplicadas nas Ciências.

Tabela 2: Funções e comandos

abs(x)	Valor absoluto ou módulo de um número complexo
cos(x)	Cosseno de um ângulo em radianos
cosd(x)	Cosseno de um ângulo em graus
sen(x)	Seno de um ângulo em radianos
send(x)	Seno de um ângulo em graus
tan(x)	Tangente de um ângulo em radianos
tand(x)	Tangente de um ângulo em graus
exp(x)	Exponencial
log(x)	Logaritmo natural
log10(x)	Logaritmo na base 10
angle(x)	Ângulo de um número complexo
conj(x)	Conjugado de um número complexo
real(x)	Parte real de um número complexo
imag(x)	Parte imaginária de um número complexo

sqrt(x)

Raiz quadrada

Fonte: Autores.

Capítulo 2 – Função de uma variável

2.1 Função Polinomial

É todo conjunto de pares ordenados de números (x, y) , em que, dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , $x_1 \neq x_2$. O conjunto de todos os valores plausíveis de x é chamado **Domínio** da função e o conjunto de todos os valores resultantes de y é chamado a **Imagem** da função (Leithold, 1994). Neste caso, $y = f(x)$ será representada por um polinômio $P: C \rightarrow C$, de somas finitas das potências inteiras e não negativas da variável x , ou seja:

$$P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + a_{(n-2)} x^{(n-2)} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

sendo $n \in Z_+$, $x \in C$ e $a_i \in C$ ($i = n, n - 1, n - 2, \dots, 2, 1, 0$). Os números a_i são denominados coeficientes do polinômio.

2.1.1 Modelando com Polinômio

Uma das mais importantes contribuições científicas dos Métodos Computacionais é encontrar soluções numéricas para problemas matemáticos que têm (ou não) soluções analíticas. Dessa forma, usaremos a Modelagem Matemática-Computacional para encontrar as soluções de fenômenos que podem ser descritos por polinômios.

Situação 1: Consideremos uma partícula em movimento unidimensional (no Sistema Internacional de medidas - SI). Pode-se demonstrar que a equação da posição em função do tempo é dada pela expressão (2.1)

$$p(t) = p_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \frac{1}{6} A_0 t^3 + \frac{1}{12} a_p t^4 \quad (2.1)$$

em que,

$p_0 \rightarrow$ é a posição inicial (m);

$v_0 \rightarrow$ é a velocidade inicial ($\frac{m}{s}$);
 $t \rightarrow$ é o instante de tempo (s);
 $a_0 \rightarrow$ é a aceleração inicial ($\frac{m}{s^2}$);
 $A_0 \rightarrow$ é o arranque inicial ($\frac{m}{s^3}$);
 $a_p \rightarrow$ é a aceleração ponderada ($\frac{m}{s^4}$).

Na análise dos movimentos mais complexos temos que considerar os fatores intermitentes (Moraes, 2019). Quando o movimento não é uniforme, ou uniformemente variado, ele deverá ser quantificado usando o valor estimado da frequência da aceleração, também chamado de aceleração ponderada (Griffin, 1990).

Para representar o polinômio, em ambiente MATLAB, usaremos a sequência de códigos reproduzida pelo Quadro 1. O caractere % é utilizado para inserir comentário ao *script*.

Salvamos esse *script* com o nome *polinomio* (sem acento mesmo), a fim de indicar a sua operação. Os nomes dos arquivos deverão começar, sempre, com letras e não deverão conter caracteres como acentos ou pontos. Uma sugestão para nomes compostos é utilizar o *underscore*, por exemplo: mat_fin (para Matemática Financeira); poli_2grau (para polinômio de grau 2); mov_unif (para movimento uniforme).

Outra recomendação orienta que os scripts apresentem comentários pertinentes à declaração das variáveis e das constantes, aplicadas na modelagem. Essa boa prática facilitará a interpretação do código, seja por você ou por outro cientista.

Quadro 1: *Script 1 → polinomios*

Comandos	Observações
% Função Polinomial de grau 4 % Grandezas relacionadas ao movimento p0=2; v0=-13; a0=-1; A0=0.6; ap=0.05;	O caractere “;” é utilizado para ocultar o comando na Janela de comando.
% Domínio da função: t --> variável independente t = [-25:0.1:12];	Para definir o conjunto

	utiliza-se colchetes: [VI:INC:VF] → VI valor inicial; INC incremento; VF valor final.
% Polinômio: $p(t) \rightarrow pt$ $pt=p0+v0*t+1/2*a0*t.^2+1/6*A0*t.^3+1/12*ap*t.^4;$	O caractere “.” aplicado à direita da variável t garante que todos os valores do domínio serão aplicados.
% Coeficientes do Polinômio pt: cp $cp = [1/12*ap \ 1/6*A0 \ 1/2*a0 \ v0 \ p0];$	Coeficiente em ordem decrescente dos expoentes e separados por um “espaço”.
% Cálculo das raízes (zeros) de $p(t)$: roots(cp) $zeros = roots(cp)$	Resultado na Janela de comando: $\gg polinomios$ $zeros =$ -23.3900 11.2072 -11.9701 0.1530
% Representação Gráfica de $p(t)$ $plot(t,pt,'-b','LineWidth',2)$ $xlabel('Valores de t')$ $ylabel('Valores de p(t)')$ $title('Função Polinomial de grau 4')$ $legend('p=f(t)','Location','NorthEast',1)$ $grid on$	plot → Construir o gráfico; $xlabel \rightarrow$ Inserir o título do eixo x; $ylabel \rightarrow$ Inserir o título do eixo y;

	title → Inserir o título do diagrama; Legenda → Inserir legenda no diagrama; grid on → Inserir linhas de grade.
Comandos especiais → 'ob','linewidth',2	o → Estilo da linha b → Cor da linha linewidth, 2 → Espessura da linha e seu valor

Fonte: Autores.

As Tabela 3 e 4 expõem, respectivamente, alguns exemplos para o estilo e cor da linha empregados em gráficos. Lembrando não há obrigatoriedade do uso simultâneo de ambos comandos. Entretanto, é indispensável declará-los, em conjunto ou não, entre aspas simples.

Tabela 3: Comando de cores das linhas

Cor	Comando
Vermelha	r
Verde	g
Amarela	y
Branca	w
Azul	b
Lilás	m
Preta	k
Ciano	c

Fonte: Autores.

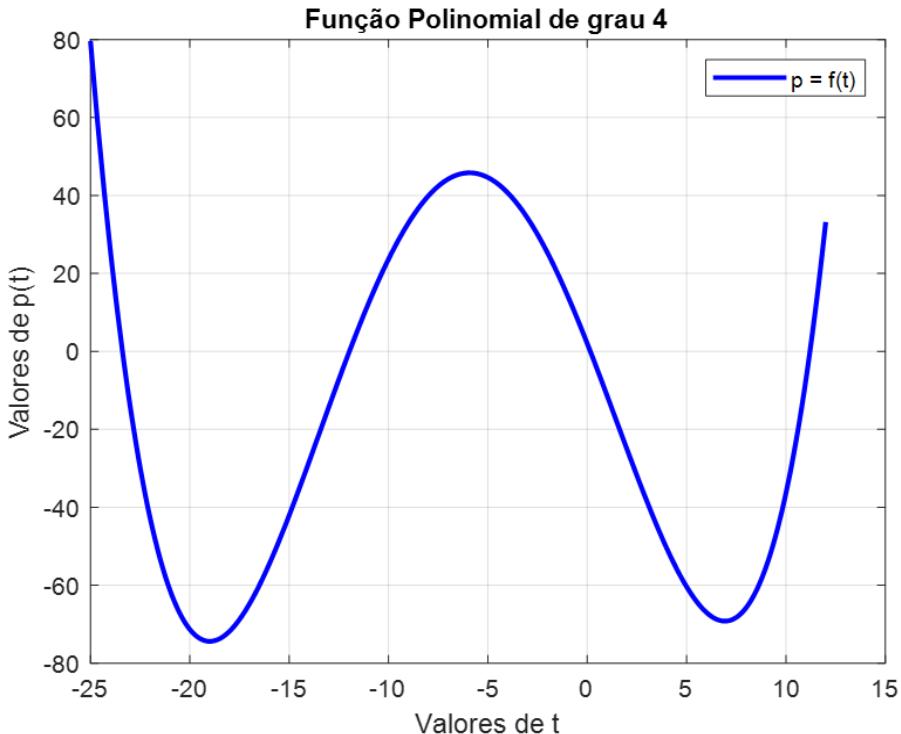
Tabela 4: Comando para estilos da linha

Estilo	Comando
Contínua	-
Ponto nos pontos	.
Tracejada	--
Cruz nos pontos	+
Pontilhada	:
Asterisco nos pontos	*
Traço e ponto	-.
Quadrado nos pontos	s
Círculo nos pontos	o
Seta para direita nos pontos	>
Seta para esquerda nos pontos	<
Seta para cima nos pontos	^
Losango nos pontos	d
X nos pontos	x
Espessura da linha (ex: 2)	'linewidth', 2

Fonte: Autores.

O gráfico do *script polinomios* está representado na Figura 4, sem as restrições da Física.

Figura 4: Gráfico do *script 1*



Fonte: Autores.

Considerando as condições estipuladas pela Mecânica Clássica, a análise da expressão (2.1) terá o conjunto Domínio reescrito para: $t = [0: 0.1: 12]$. As raízes $t_1 = -23.3900$ e $t_3 = -11.9701$ serão desconsideradas pelo fato de indicarem valores negativos para t . Dessa forma, a Figura 5 é a nova representação gráfica do *script polinomios*, executado como mostra o Quadro 2.

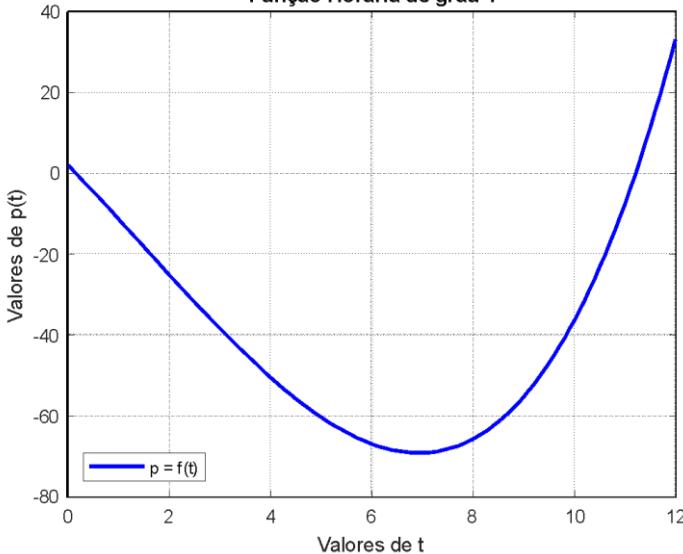
Quadro 2: Script 2 → polinomios*polinomios*

```
% Função Polinomial de grau 4
% Grandezas relacionadas ao movimento
p0 = 2;
v0 = -13;
a0 = -1;
A0 = 0.6;
ap = 0.05;
% Domínio da função: t --> variável independente
t = [0:0.1:12];
% Polinômio: p(t) --> pt
pt= p0 + v0*t + 1/2*a0*t.^2 + 1/6*A0*t.^3 + 1/12*ap*t.^4;
% Coeficientes do Polinômio pt: cp
cp = [1/12*ap 1/6*A0 1/2*a0 v0 p0];
% Cálculo das raízes (zeros) de p(t): roots(cp)
zeros = roots(cp)
% Representação Gráfica de p(t): plot
plot(t,pt,'b', 'LineWidth', 2)
% Título do eixo x
xlabel('Valores de t')
% Título do eixo y
ylabel('Valores de p(t)')
% Título do diagrama
title('Função horária de grau 4')
% Legenda do diagrama
legend('p = f(t)', 'Location', 'Southwest', 'NumColumns', 1)
% Linhas de grade
grid on
```

Resultado na Janela de comando:	>> polinomios
	zeros = -23.3900 11.2072 -11.9701 0.1530

Fonte: Autores.

Figura 5: Gráfico do *script 2*
Função Horária de grau 4



Fonte: Autores.

Situação 2: Consideremos uma partícula em movimento ao longo de uma reta, de acordo com a função horária dada pela expressão (2.2) (no SI), em que P é posição da partícula em um instante t .

$$P(t) = t^3 - 7t^2 + 12t \quad (2.2)$$

Encontrar os valores de t e as respectivas posições em que a partícula muda o sentido do seu movimento.

O *script polinomio1* modela a resolução desse problema destinado ao cálculo das raízes (zeros) do polinômio representado na expressão (2.2).

```
% Função Polinomial de grau 3
% Domínio da função: t --> variável independente
t = [0:0.05:5];
% Polinômio: p(t) --> pt
pt= t.^3-7*t.^2+12*t;
% Coeficientes do Polinômio pt: cp
cp = [1 -7 12 0];
```

```
% Cálculo das raízes (zeros) de p(t): roots(cp)
```

```
zeros = roots(cp)
```

```
% Valor numérico do polinômio para t=x: polyval(cp,x)
```

```
x = 2; px = polyval(cp,x)
```

```
% Representação Gráfica de p(t): plot
```

```
plot(t,pt,'or','LineWidth',1)
```

```
xlabel('t [s]') % Título do eixo x
```

```
ylabel('P [m]') % Título do eixo y
```

```
title('Função Horária de grau 3') % Título do diagrama
```

```
% Legenda do diagrama
```

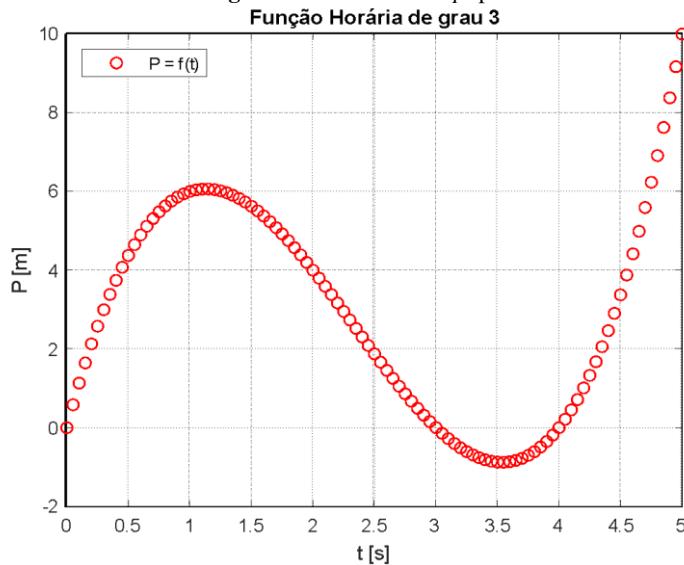
```
legend('P = f(t)', 'Location', 'Northwest', 'NumColumns', 1)
```

```
grid on % Linhas de grade
```

Note que o termo independente do polinômio, embora não aparece na expressão (2.2), foi definido no *script*, conforme mostra a linha de comando *cp = [1 -7 12 0];*. Caso isso não ocorra, o programa identificará o polinômio como sendo de grau 2.

A Figura 6 expõe a representação gráfica do polinômio descrito na expressão (2.2).

Figura 6: Gráfico do *script* polinomio1



Fonte: Autores.

O resultado na Janela de comando apresenta os seguintes valores para expressão (2.2), modelada no script **polinomio1**:

```
>> polinomio1
```

```
zeros =
```

```
0
```

```
4
```

```
3
```

```
px =
```

```
4
```

Esse resultado ratifica as informações apresentadas no gráfico da Figura 6: raízes 0, 3 e 4; $P(2) = 4$.

Situação 3: Assim como é possível determinar as raízes do polinômio a partir dos seus coeficientes, também é possível determinar os coeficientes do polinômio a partir das suas raízes. O script **polinomio2** apresenta o conjunto de códigos implementados para esta operação. Considere as raízes do polinômio $P(t)$:

$$t_1 = 0; t_2 = 1; t_3 = -0.5 + 0.866i; t_4 = -0.5 - 0.866i.$$

% Determinar o polinômio a partir das suas raízes

% Raízes (zeros) de $P(t)$

```
raizes = [0 1 -0.5+0.866i -0.5-0.866i];
```

% Cálculo dos coeficientes

```
P = poly(raizes)
```

% Valor numérico do polinômio para $t=x$: polyval(P,x)

```
x = 3; px = polyval(P,x)
```

O resultado na Janela de comando apresenta os seguintes valores: $P \rightarrow$ coeficientes do polinômio; $px \rightarrow$ valor numérico do polinômio $P(t)$ para $t = 3$, ou seja, $P(3)$.

```
>> polinomio2
```

```
P =
```

```
1.0000 0 -0.0000 -1.0000 0
```

```
px =
```

77.9997

Os coeficientes estão na ordem decrescente dos expoentes da variável independente. Sendo assim, o polinômio resultante é dado pela expressão (2.3), em que $P(3) = px \cong 78$.

$$P(t) = t^4 - t \quad (2.3)$$

Doravante os dados discretos fornecidos por dois conjuntos X e Y , podemos engendrar um polinômio que produza um ajuste ótimo entre os valores desses conjuntos, através de um contínuo de possibilidades. Vamos apresentar o comando $\text{polyfit}(X, Y, n)$ do MATLAB, em que n representa o grau do polinômio a ser interpolado.

Situação 4: A Tabela 5 apresenta o resultado de um experimento que relaciona a previsão da concentração de oxigênio dissolvido $\left(\frac{mg}{L}\right)$ em função da temperatura, considerando como premissa que a concentração de cloreto é igual a $10\frac{g}{L}$ (Chapra, 2018).

Tabela 5: Concentração de oxigênio em função da temperatura

$T(^{\circ}C)$	$c\left(\frac{g}{L}\right)$
0	12.9
5	11.3
10	10.1
15	9.03
20	8.17
25	7.46
30	6.85

Fonte: Chapra, 2018.

No script **polinomio3** podemos perceber novos e importantes comandos do MATLAB. O comando $\text{polyfit}(X, Y, n)$ faz a relação entre os conjuntos e o polinômio de grau n a ser interpolado. O comando $\text{polyval}(P_n, X)$, já apresentado, estima os novos valores conjunto Y , no

polinômio interpolador P_n . O comando `subplot(a, b, c)`, cria uma sequência de gráficos definidos por:

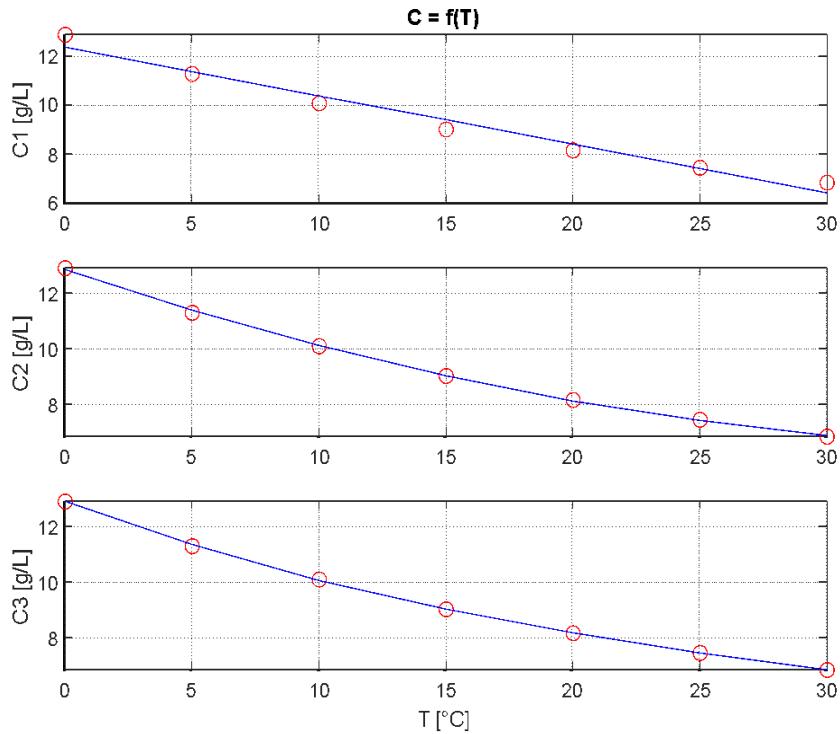
$a \rightarrow$ número de linhas;

$b \rightarrow$ número de colunas;

$c \rightarrow$ posição do diagrama.

A Figura 6, gerada pelo código *polinomio3*, exibe essas representações gráficas.

Figura 6: Concentração de Oxigênio em função da Temperatura



Fonte: Autores.

As grandezas $C1, C2$ e $C3$, representam, respectivamente, as concentrações de oxigênio estimadas por polinômio de graus 1, 2 e 3.

A linha, na cor azul, indica o polinômio interpolador, ou seja, os valores estimados para função. As circunferências, na cor vermelha, representam os valores originais dos pontos (x, y) .

% Composição de Polinômio a partir dos conjuntos X e Y

% Valores da Temperatura (em °C): X

X = [0 5 10 15 20 25 30];

% Valores da concentração de Oxigênio (em g/L): Y

Y = [12.9 11.3 10.1 9.03 8.17 7.46 6.85];

% Ajuste via Polinômio de grau 1: P1

P1 = polyfit(X,Y,1)

% Valores estimados de Y em P1: Ye1

Ye1 = polyval(P1,X);

% Ajuste via Polinômio de grau 2: P2

P2 = polyfit(X,Y,2)

% Valores estimados de Y em P2: Ye2

Ye2 = polyval(P2,X);

% Ajuste via Polinômio de grau 3: P3

P3 = polyfit(X,Y,3)

% Valores estimados de Y em P3: Ye3

Ye3 = polyval(P3,X);

% Representações Gráficas:

% Concentração estimada por P1

subplot(3,1,1)

plot(X,Y,'or',X,Ye1,'-b')

title('C = f(T)')

ylabel('C1 [g/L]')

grid on

% Concentração estimada por P2

subplot(3,1,2)

plot(X,Y,'or',X,Ye2,'-b')

ylabel('C1 [g/L]')

grid on

% Concentração estimada por P3

subplot(3,1,3)

plot(X,Y,'or',X,Ye3,'-b')

xlabel('T [°C]')

ylabel('C3 [g/L]')

grid on

Os resultados na Janela de comando simbolizam os coeficientes dos polinômios interpoladores **P1**, **P2** e **P3**, respectivamente.

>> polinomio3

P1 =

-0.1983 12.3757

P2 =

0.0037 -0.3100 12.8412

P3 =

-0.0001 0.0065 -0.3411 12.8879

Representando, algebricamente, os polinômios interpoladores teremos as seguintes expressões:

$$y_1 = -0.1983x + 12.3757$$

$$y_2 = 0.0037x^2 - 0.31x + 12.8412$$

$$y_3 = -0.0001x^3 + 0.0065x^2 - 0.3411x + 12.8879$$

2.2 Função Não-Polinomial

2.2.1 Função Exponencial e Função Logarítmica

A Função Exponencial Natural (FEN) é a inversa da Função Logarítmica Natural (FLN). Consequentemente, ela é pode definida pela relação (2.4) (Leithold, 1994).

$$\exp(x) = y \leftrightarrow x = \ln y \quad (2.4)$$

No ambiente MATLAB, $\exp(x) = e^x$, sendo $e \cong 2.718281828459$.

O conjunto domínio da *FEN* é igual ao conjunto imagem da *FLN*, ou seja, o conjunto dos números Reais: $D_{fen} = I_{fln} = R$. Da mesma forma que, o conjunto domínio da *FLN* é igual ao conjunto imagem da *FEN*, isto é, o conjunto dos números Reais positivos: $D_{fln} = I_{fen} = R_+^*$.

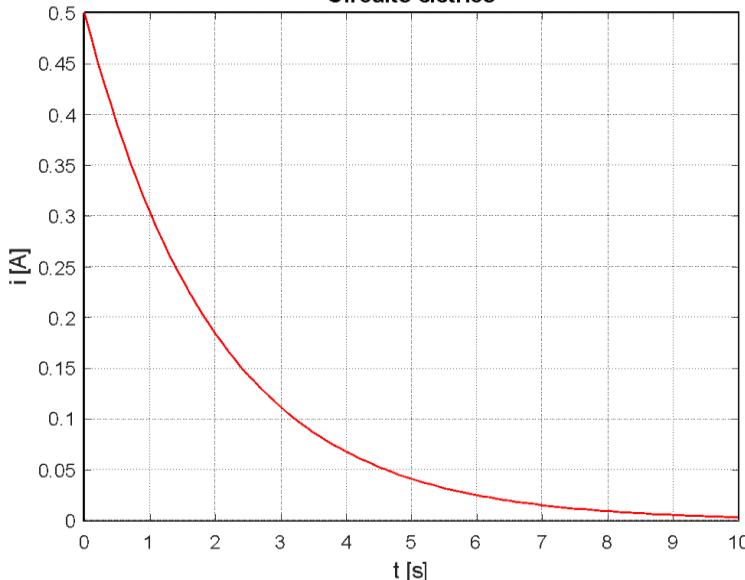
Situação 5: Um circuito elétrico simples apresenta uma resistência $R = 2.5 \Omega$, uma indutância $L = 5 H$, sem condensadores. Sabe-se que a força eletromotriz é descontinuada quando a corrente elétrica i_0 assume 0.5 A. A corrente é dissipada, de modo que no instante t é dada pela expressão (2.5)

$$i(t) = i_0 e^{-(\frac{R}{L})t} \quad (2.5)$$

Represente, graficamente, o comportamento da corrente elétrica e determine o seu valor médio no intervalo $t = [0; 10]s$.

O script **fexp** apresenta o código utilizado para gerar o gráfico da Figura 6 e calcular o valor médio da corrente elétrica.

Figura 6: Aplicação de Função Exponencial
Círcuito elétrico



Fonte: Autores.

```
% Função Exponencial
% Domínio da função
t=[0.0:0.1:10];
% Corrente elétrica: i=f(t)
```

```
io = 0.5;
R = 2.5;
L = 5;
i = io*exp(-(R/L)*t);
% Valor médio da Corrente elétrica: im
im = mean(i)
plot(t,i,'r','linewidth',1)
xlabel('t [s]')
ylabel('i [A]')
title('Círculo elétrico')
grid on
```

Os resultados na Janela de comando simbolizam o valor médio da corrente elétrica, isto é, i_m .

```
>> fexp
```

```
im =
```

```
0.1009
```

Situação 6: A pressão atmosférica, a certa altitude h , é dada pelo peso da coluna de ar de base horizontal, área unitária e altura h (Halliday e Resnick, 2011). Fundamentado na Lei de Boyle, pode-se estimar a altitude h , baseado nas grandezas expostas na equação (2.6) (Roballo, 2014).

$$h(p) = \frac{1}{\alpha} \ln \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \quad (2.6)$$

em que,

$p_0 \rightarrow$ é a pressão atmosférica ao nível do mar;

$p_1 \rightarrow$ é a pressão atmosférica na altitude h ;

$\alpha \rightarrow$ é a taxa de decaimento da pressão atmosférica.

Dados:

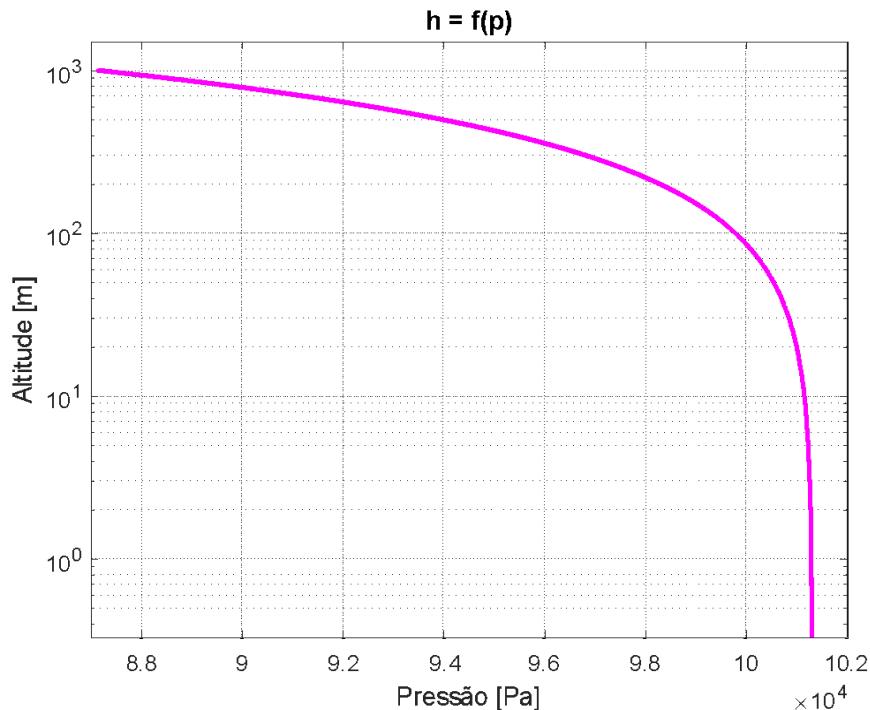
$$p_0 = 101.3 \text{ kPa}$$

$$p_1 = 87.14 \text{ kPa}$$

$$\alpha = -1.5057 \times 10^{-4}$$

O gráfico da Figura 7 foi estabelecido no intervalo $p = [p_0; p_1]$, tendo em conta a taxa de decaimento da pressão atmosférica. Para o eixo y, isto é, os valores da altitude, foi incorporado uma escala logarítmica com o propósito de realçar o comportamento dessa grandeza.

Figura 7: Aplicação de Função Logarítmica



Fonte: Autores.

O script *flog* apresenta o código utilizado para gerar o gráfico da Figura 7 e calcular os valores máximo, mínimo e médio da altitude em função da variação da pressão atmosférica.

```
% Função Logarítmica
p0 = 101.3*10^(3);
p1 = 87.14*10^(3);
alpha = 1.5057*10^-4; % Taxa de decaimento
% Intervalo da Pressão: p
p = [p0:-5.0:p1];
% Relação entre Altitude e Pressão
h = (1/alpha)*log(p0./p);
hmax = max(h) % Altitude máxima
hmin = min(h) % Altitude mínima
hm = mean(h) % Altitude média
% Representação Gráfica
% Escala logarítmica para o eixo y (Altitude)
semilogy(p,h,'-m','linewidth',2)
 xlabel('Pressão [Pa]')
 ylabel('Altitude [m]')
 title('h = f(p)')
% Limites dos eixos: [Xmin Xmax Ymin Ymax]
axis([87*10^3 102*10^3 0 1.5*10^3])
grid on
```

Os resultados na Janela de comando para o *script flog*.

```
>> flog
```

```
hmax =
```

```
1.0000e+03
```

```
hmin =
```

```
0
```

```
hm =
```

```
487.4629
```

2.2.2 Funções Trigonométricas: seno e cosseno

De acordo com Leithold (1994), sendo $t \in R$, inserido na posição de um ângulo e seja P a intersecção do lado final do ângulo com circunferência do

círculo unitário com centro na origem. Se P for o ponto (x, y) , então a função seno e a função cosseno, serão definidas, respectivamente, pelas equações (2.7) e (2.8)

$$y = \operatorname{sen}(t) \quad (2.7)$$

$$x = \cos(t) \quad (2.8)$$

Situação 7: Considere um corpo de peso 200 kgf , arrastado, horizontalmente sobre um assoalho, por uma força de intensidade $F(\text{kgf})$ e em uma direção que faz com o solo um ângulo $\theta(\text{rad})$. A magnitude de F é dada pela equação (2.9)

$$F = \frac{kP}{k \operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)} \quad (2.9)$$

sendo,

$k \rightarrow$ o coeficiente de atrito;

$P \rightarrow$ o peso do corpo.

Sabendo que $k = 0.5$ e $P = 200\text{kgf}$, represente, graficamente, o comportamento de F para $\theta = [0; \frac{\pi}{2}] \text{ rad}$, indicado os seus valores mínimo, máximo e médio (Halliday e Resnick, 2011).

O script *seno_cos* descreve a modelagem e a Figura 7 exibe o comportamento da força.

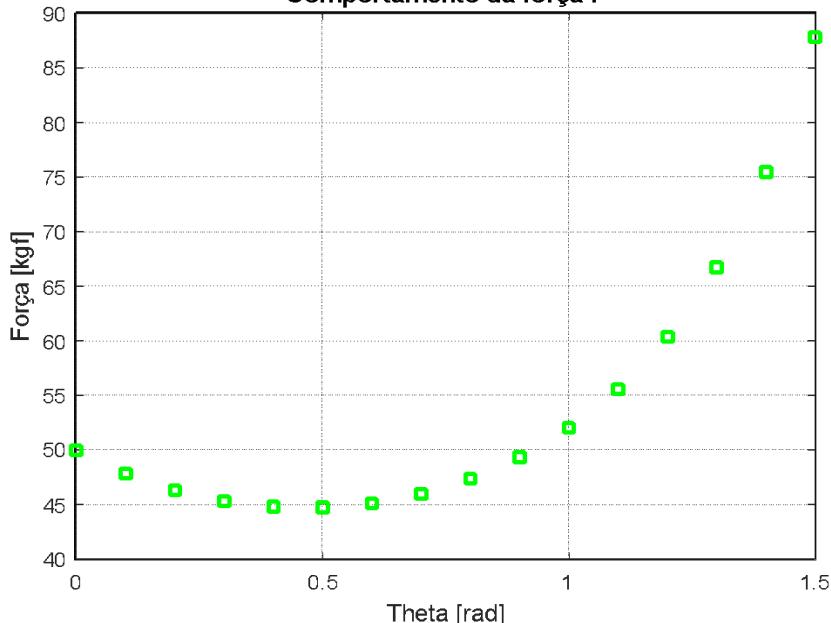
```
% Funções Seno e Cosseno
% Domínio das funções: 0 a pi/2
theta = [0:0.1:pi/2];
% Função seno: sin(theta)
% Função cosseno: cos(theta)
% Coeficient de atrito: k
k = 0.5;
% Intensidade do peso do corpo: P
P = 100;
% Intensidade da Força: F
F = k*P./(k*sin(theta) + cos(theta));
Fmin = min(F)
Fmax = max(F)
Fm = mean(F)
```

```
plot(theta,F,'sg','linewidth',2)
xlabel('Theta [rad]')
ylabel('Força [kgf]')
title('Comportamento da força F')
grid on
```

Os resultados na Janela de comando simbolizam F_{min} , F_{max} e F_m , respectivamente, valores mínimo, máximo e médio para força F .

```
>> seno_cos
Fmin =
    44.7509
Fmax =
    87.7987
Fm =
    54.0559
```

Figura 7: Aplicação das Funções Trigonométricas
Comportamento da força F



Fonte: Autores.

2.3 Solução de Equações Algébricas e Transcendentais

Nesse item apresentaremos um método de resolução de Equações Algébricas e Transcendentais. Para executar esse processo o MATLAB utiliza objetos simbólicos para representar variáveis e expressões. Uma expressão simbólica é aquela que contém variáveis simbólicas. Por sua vez, uma variável simbólica é aquela convertida para uma estrutura de dados do tipo cadeia de caracteres, também conhecida por *string*.

O comando *syms* (*symbolic variable*) no MATLAB é utilizado para declarar as variáveis simbólicas. Por sua vez, o comando *vpasolve* (*Variable-Precision Arithmetic*) é aplicado para resolver a equação ou o sistema de equações. Enquanto que, o comando *subs* calcula o valor numérico da equação em um dado ponto.

O script *sol_eq* demonstrará a sequência de comandos úteis na resolução das Equações Algébricas e Transcendentais.

Exemplo 01: $f1(x) = x^2 - 10x + 21$

```
% Soluções de Equações
% Variáveis Simbólicas declaradas: x e t
syms x t
% Exemplos com Funções Algébricas:
% Ex 01: Função quadrática
f1 = x^2-10*x+21;
% Resolução de f1
sol = vpasolve(f1)
% Valor de f1 no ponto 3.5: f1(3.5)
val_num = subs(f1,3.5)
% Representação Gráfica
fplot(x,f1,[2 8],'-c','LineWidth',2)
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de f1(x)')
title('f1 = x^2-10x+21')
grid on
```

Os resultados na Janela de comando simbolizam as raízes da equação (*sol*) e $f1(3.5)$.

O gráfico da Figura 8 exibe o comportamento da função dada por $f1(x)$.

```
>> sol_eq
```

```
sol =
```

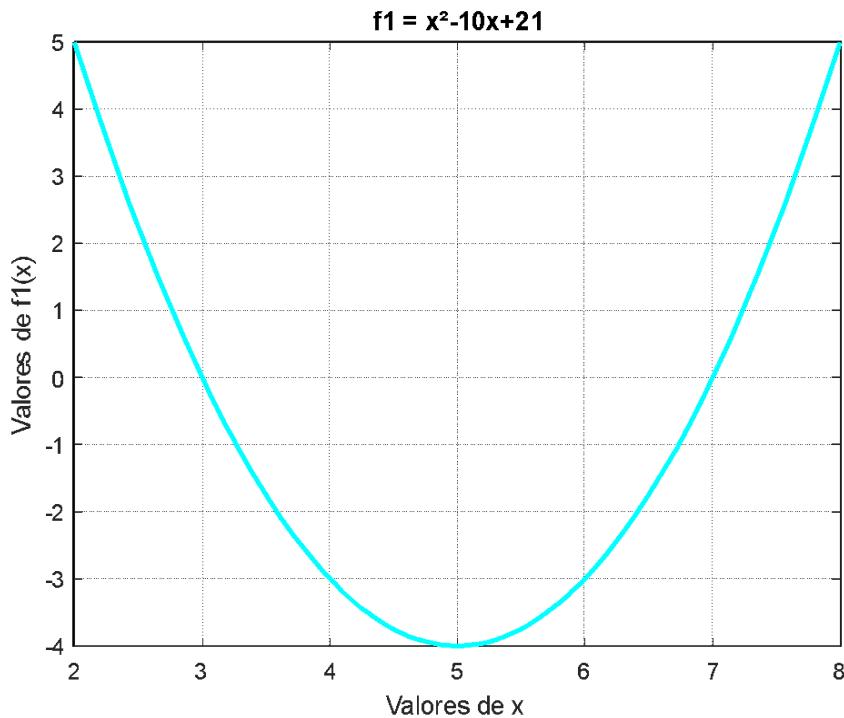
```
3.0
```

```
7.0
```

```
val_num =
```

```
-7/4
```

Figura 8: Solução de Equação Algébrica



Fonte: Autores.

O script *sol_eq* será atualizado a cada novo exemplo, a fim de atender as características de cada equação.

Exemplo 02: $f2(x) = 20\sin(x) - x^3 + 1$.

Os gráficos das Figuras 9 e 10, exibem o comportamento da função $f2(x)$, por partes e completa, respectivamente. Na Figura 9, é possível visualizar, com mais precisão, todas as raízes de $f2(x)$. Entretanto, cada valor foi encontrado separadamente.

Note que, nessa nova versão do script *sol_eq*, foram acrescentados novos comandos, como por exemplo o *round*, utilizado para o arredondamento dos valores.

```
% Soluções de Equações
% Variáveis Simbólicas declaradas: x e t
syms x t
% Exemplos com Funções Algébricas e Transcendentas
% Ex 02: Funções Seno e Quadrática
f2 = 20*sin(x) - x^3 + 1 ;
f2a = 20*sin(x); % à esquerda da igualdade
f2b = x^3-1; % à direita da igualdade
% Resolução de f2
% Valor da aproximação inicial: x0
x0 = 0;
% Valor de f
sol = vpasolve(f2,x,[x0]);
% Valor arredondado de f
Sol = round(sol,6)
% Valor de f no ponto a: f(a)
% Valor de a
a = 0;
val_num = subs(f2,a); % Sem arredondamento
Val_num = round(val_num,6) % Com arredondamento
% Representações Gráficas
figure(1)
fpplot([f2a f2b],[-3 3],'Linewidth',2)
% [-3 3] --> intervalo do eixo x
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de f2(x)')
title('f2a = 20sen(x) & f2b = x^3-1')
```

```
legend('20sen(x)','x^3-1','Location','Northwest','NumColumns',2)
grid on
figure (2)
fplot(x,f2,[-3 3],'-k','Linewidth',2)
% [-3 3] --> intervalo do eixo x
 xlabel('Valores de x')
 ylabel('Valores de f2(x)')
 title('f2 = 20sen(x)-x^3+1')
 legend('20sen(x)-x^3+1','Location','Northeast','NumColumns',1)
grid on
```

Os resultados apresentados na Janela de comando foram obtidos em diferentes simulações.

Simulação 01 → Aproximação inicial para cálculo da raiz: $x_0 = 0$. Valor de $f2$ no ponto $a = 0$.

```
>> sol_eq
Sol =
-0.050027
Val_num =
1.0
```

Simulação 02 → Aproximação inicial para cálculo da raiz: $x_0 = -2$. Valor de $f2$ no ponto $a = 1$.

```
>> sol_eq
Sol =
-2.358185
Val_num =
16.82942
```

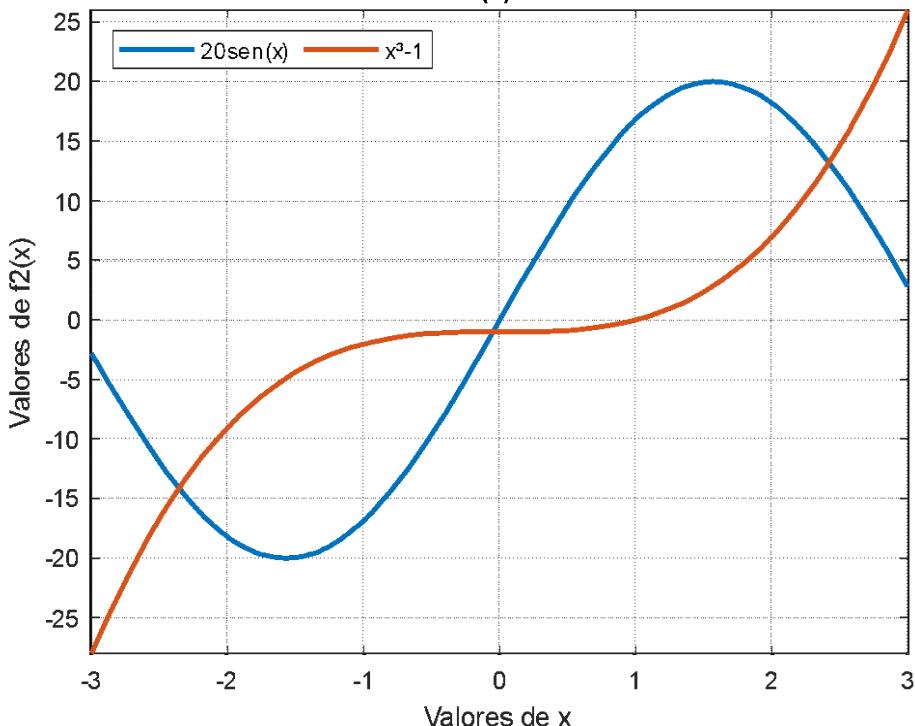
Simulação 03 → Aproximação inicial para cálculo da raiz: $x_0 = 2$. Valor de $f2$ no ponto $a = 0.5$.

```
>> sol_eq
Sol =
2.4212
Val_num =
10.463511
```

A Figura 9 apresenta a equação transcendente $f2(x)$, destacando cada estrutura: trigonométrica e polinomial de grau 3.

Figura 9: Equação Transcendente em partes

$$f2a = 20\sin(x) \text{ & } f2b = x^3 - 1$$



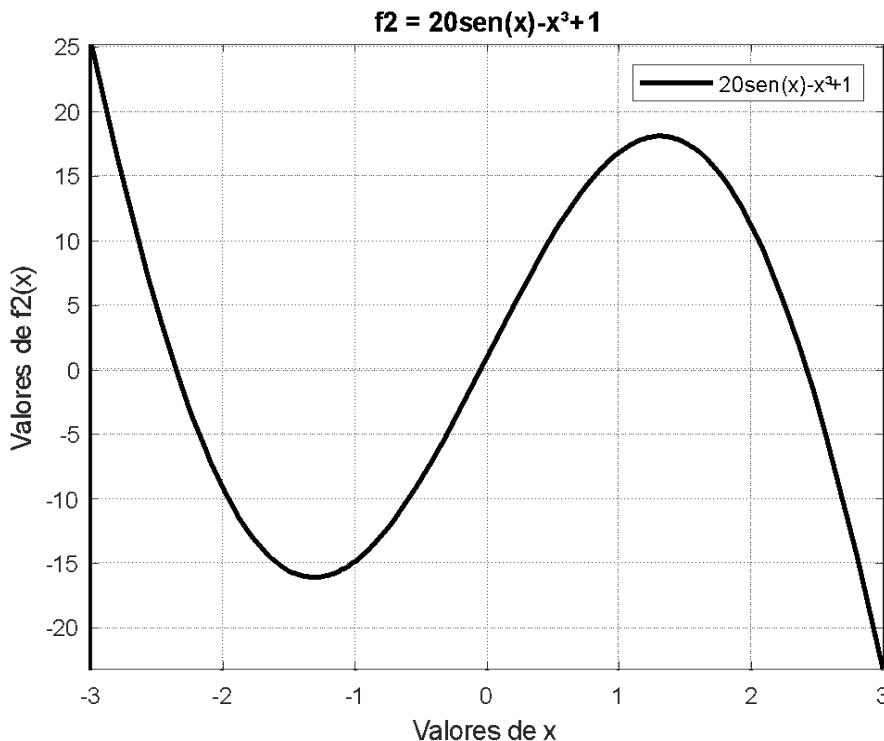
Fonte: Autores.

As raízes da equação podem ser visualizadas pelas interseções entre as estruturas de $f2a(x) = 20\sin(x)$ e $f2b(x) = x^3 - 1$. Os valores são, em ordem crescente, -2.358185 ; -0.050027 e 2.4212 .

A Figura 10 apresenta a equação transcendente $f2(x)$ com a sua total magnitude.

Nessa perspectiva, é possível notar que as posições das raízes estão localizadas sobre o eixo das abscissas. Pode parecer redundante, todavia, no gráfico da Figura 9, essa informação não se apresentava tão evidente. Por esta razão, foi necessário a dupla representação gráfica da equação $f2(x)$.

Figura 10: Equação Transcendente completa



Fonte: Autores.

Capítulo 3 – Matrizes e Sistemas Lineares

A partir deste momento, será iniciado a abordagem voltada para o estudo de matrizes e sistemas de equações lineares. Tais assuntos são muito úteis em tarefas diversas, como na gestão da qualidade de processos (Análise G.U.T.), otimização da produção, análise de circuitos elétricos, do comportamento variante no tempo de sistemas de comunicações sem fio, de melhoramento de tempo e distâncias em transportes, de sistemas mecânicos e da distribuição de forças em estruturas seja de materiais ou da construção civil, entre outros. Assim, estes assuntos se configuram como de grande importância a profissionais e estudantes das diversas áreas, pois tais são largamente utilizados em modelos físicos e econômicos de interesse.

As representações de situações reais por meio de modelos matriciais e equações são bastante utilizadas, por conseguirem apresentar um modelo matemático de forma simples, rápida e, ao mesmo tempo, bastante expressiva e poderosa, pois transcendem algumas limitações da resolução usual, que seria feita com a lógica do passo a passo da caneta e papel, sem utilização de algoritmos que otimizam o processo, a teoria das matrizes e a resolução de sistemas lineares disponibilizam um conjunto variado de métodos de solução simples e eficazes.

Desta forma, este capítulo se propõe a apresentar as principais definições e formas de representação, leitura e interpretação de matrizes, bem como, os principais métodos de representação e solução de sistemas de equações lineares, seguidos. Da resolução de situações a nível algébrico e com suporte da linguagem MATLAB de programação. Nos limites deste texto, serão expostas situações voltadas para aplicações no âmbito da gestão de negócios, porém a mesma forma de abordagem é aplicável em quaisquer das áreas mencionadas anteriormente.

3.1 Matrizes

Definição 1 - Dados dois números naturais diferentes de zero m e n , Matriz é toda a tabela $m \times n$ (lê-se m por n) com m linhas e n colunas.

Definição 2 - Em uma matriz qualquer, cada elemento é indicado por a_{ij} , onde o índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento pertence.

Definição 3 - Duas matrizes são iguais se, e somente se, têm a mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais (DANTE, 2005, p.224)

3.1.1 Modelando com Matrizes

Situação 1 - MATRIZ GUT (Adaptado de Dante, 2016) - Um empresário, próximo ao final do ano, listou os principais problemas de sua organização e elaborou uma matriz GUT, conforme mostra a seguir:

A Matriz GUT é uma ferramenta bastante utilizada pelas empresas, principalmente com o intuito de priorizar os problemas e consequentemente tratá-los, levando em conta suas Gravidades, Urgências e Tendências. [...] o processo de montagem da matriz é dividido em três etapas:

- Primeira Etapa (Listagem dos Problemas)
- Segunda Etapa (Pontuação dos Problemas) - Nesta etapa, é dada uma pontuação (de 1 a 5) para cada um dos problemas de acordo com o Grau de Gravidade, de Urgência, e de Tendência.
- Terceira Etapa (Classificação dos Problemas) - Após identificar, listar e, através da multiplicação dos fatores (gravidade, urgência e tendência), ou seja, multiplicar os números em cada linha, então se atribui as notas de cada um dos principais problemas identificados, e prioriza-se aquele que tem maior pontuação.

Veja, na Tabela 6, como ficou a distribuição da empresa, em questão:

Tabela 6: Valores de GTU

Problemas	G Gravidade	U Urgência	T Tendência	GUT
Rever contrato de locação	3	3	1	9
Treinar novo operador no sistema	4	4	2	32
Ampliar rede com mais de 2 equipamentos	2	2	4	16
Fazer backup do banco de dados	5	5	2	75

Fonte: Dante, 2016.

A partir deste contexto, podemos analisar que:

- a) o problema de maior urgência é:.....
- b) o que menos deve preocupar o empresário em relação a tendência de piora é:.....
- c) o principal problema que o empresário deve resolver é:.....

Solução do problema sem o uso do conteúdo sistematizado

Segundo o contexto, é preciso interpretar e localizar o maior valor numérico na coluna que corresponde as urgências de cada problema e concluir que o problema de maior urgência é FAZER BACKUP COMPLETO DO

BANCO DE DADOS, respondendo assim o que é pedido no item a). Da mesma forma, ao localizar o menor valor numérico na coluna que corresponde as tendencias de cada problema, é possível perceber que o que menos deve preocupar o empresário em relação a tendencia de piora é REVER O CONTRATO DE LOCAÇÃO. E por fim, utilizando a técnica da multiplicação dos fatores **G x U x T** conclui-se que o principal problema que o empresário deve resolver é FAZER BACKUP COMPLETO DO BANCO DE DADOS já que este apresenta o resultado 75, que configura como o maior valor de prioridade para a organização.

Solução do problema com o uso do conteúdo sistematizado

G	U	T	
3	3	1	REVER O CONTRATO DE LOCAÇÃO
4	4	2	TREINAR NOVO OPERADOR NO SISTEMA
2	2	4	AMPLIAR REDE COM MAIS DE 2 EQUIPAMENTOS
5	5	3	FAZER BACKUP COMPLETO DO BANCO DE DADOS

- a) Elemento a_{42}
- b) Elemento a_{13}
- c) Maior valor de Multiplicação dos elementos das linhas – 75 (última linha)

Solução na linguagem computacional → script MatrizGUT

```
% Matriz GUT (Situação 1)
```

```
% Montando a Matriz GUT
```

```
GUT = [3, 3, 1; ...
```

```
4, 4, 2; ...
```

```
2, 2, 4; ...
```

```
5, 5, 3];
```

```
% Multiplicação dos Fatores G*U*T (Método 1)
```

```
% prod() é o comando responsável pelo produtório
```

```
% Multiplicação da Linha 1
```

```
Linha = 1;
```

```
Colunas = 1:3;
```

```
GUT1 = prod(GUT(Linha,Colunas))
```

% Multiplicação da Linha 2

Linha = 2;
Colunas = 1:3;
GUT2 = prod(GUT(Linha,Colunas))

% Multiplicação da Linha 3

Linha = 3;
Colunas = 1:3;
GUT3 = prod(GUT(Linha,Colunas))

% Multiplicação da Linha 4

Linha = 4;
Colunas = 1:3;
GUT4 = prod(GUT(Linha,Colunas))

%Concatenação das multiplicações

Mult_GUT = [GUT1; GUT2; GUT3; GUT4]

% Multiplicação dos Fatores G*U*T (Método 2)

Mult_GUT = prod(GUT)'

Resultado apresentado na Janela de Comando mostra a seguir:

>> MatrizGUT

GUT1 =

9

GUT2 =

32

GUT3 =

16

GUT4 =

75

Mult_GUT =

9

32

16

75

Mult_GUT =

9

32

16

75

3.2 Operações com Matrizes

Definição 4 - Dadas duas matrizes A e B do mesmo tipo $m \times n$, denomina-se soma da matriz A com a matriz B , que representamos $A + B$, a matriz C do tipo $m \times n$ na qual cada elemento é obtido adicionando os elementos correspondentes de A e B . (DANTE, 2005, p.224).

Definição 5 - Sendo A e B duas matrizes do tipo $m \times n$, denomina-se diferença entre A e B (representada $A - B$) a soma da matriz A com a matriz oposta de B . (DANTE, 2005, p.245).

Definição 6 - Se A é uma matriz $m \times n$, de elementos a_{ij} , e k é um número real, então $k.A$ é uma matriz $m \times n$ cujos elementos são $k.a_{ij}$. (DANTE, 2005, p.245).

Definição 7 - Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ do tipo $m \times n$ e uma matriz $B = (b_{ij})$ do tipo $n \times p$, o produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})$ do tipo $m \times p$ tal que o elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B , e somando-se os produtos obtidos. (DANTE, 2005, p.247)

3.2.1 Modelando com as operações entre Matrizes

Situação 2 – PRODUÇÃO DE SORVETES (Adaptado de Batista, 2008).

As tabelas abaixo mostram as produções de sorvete de três sabores (A, B e C) de uma sorveteria artesanal nos meses de janeiro e fevereiro, eles são distribuídos em 3 potes diferentes com as seguintes quantidades 500ml, 1000ml e 2000ml. Monte uma tabela que represente a produção total dos dois meses?

	A	B	C	JAN
500ml	131	200	150	
1000ml	89	75	60	
2000ml	50	50	50	

	A	B	C	FEV
500ml	150	250	175	
1000ml	73	100	144	
2000ml	610	70	50	

Solução do problema com o uso do conteúdo sistematizado

Ao considerar J e F matrizes que representam as produções dos meses de janeiro e fevereiro respectivamente, podemos fazer a soma $J+F$ e encontrar a resposta solicitada no comando da questão.

Sejam,

$$J = \begin{pmatrix} 131 & 200 & 150 \\ 89 & 75 & 60 \\ 50 & 50 & 50 \end{pmatrix} \begin{matrix} 500 \text{ ml} \\ 1000 \text{ ml} \\ 2000 \text{ ml} \end{matrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{pmatrix} 150 & 250 & 175 \\ 73 & 100 & 144 \\ 610 & 70 & 50 \end{pmatrix} \begin{matrix} 500 \text{ ml} \\ 1000 \text{ ml} \\ 2000 \text{ ml} \end{matrix}$$

$$J+F = \begin{pmatrix} 131 & 200 & 150 \\ 89 & 75 & 60 \\ 50 & 50 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 150 & 250 & 175 \\ 73 & 100 & 144 \\ 610 & 70 & 50 \end{pmatrix}$$

$$J+F = \begin{pmatrix} 131 + 150 & 200 + 250 & 150 + 175 \\ 89 + 73 & 75 + 100 & 60 + 144 \\ 50 + 610 & 50 + 70 & 50 + 50 \end{pmatrix}$$

$$J+F = \begin{pmatrix} 281 & 450 & 325 \\ 162 & 175 & 204 \\ 660 & 120 & 100 \end{pmatrix}$$

Solução na linguagem computacional → script *MatrizOperacoes*

% Operações com Matrizes (Situação 1)

% Montando as Matrizes

```
J = [131, 200, 150;...  
     89, 75, 60;...  
     50, 50, 50]
```

```
F = [150, 250, 175;...  
     73, 100, 144;...  
     610, 70, 50]
```

% Operação de Soma das Matrizes

JF = J+F

Resultado apresentado na Janela de Comando para *MatrizOperacoes*:

```
>> MatrizOperacoes
```

J =

```
131 200 150  
89 75 60  
50 50 50
```

F =

```
150 250 175  
73 100 144
```

610 70 50

JF =

281	450	325
162	175	204
660	120	100

Situação 3 – CUSTOS NA PRODUÇÃO DE SORVETES

A matriz abaixo mostra os valores médios do custo mensal de uma sorveteria artesanal para a produção de sorvetes de três sabores (A, B e C), e que são distribuídos em 3 potes diferentes com as seguintes quantidades 500ml, 1000ml e 2000ml. Monte uma nova matriz que represente o custo total (dividida por sabores e tamanhos de potes) de três meses consecutivos.

$$\begin{array}{ccc}
 A & B & C \\
 \left[\begin{matrix} 200 & 300 & 220 \\ 250 & 340 & 310 \\ 300 & 400 & 400 \end{matrix} \right] & \begin{matrix} \textbf{500ml} \\ \textbf{1000ml} \\ \textbf{2000ml} \end{matrix}
 \end{array}$$

Solução do problema sem o uso do conteúdo sistematizado

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{matrix} 200 & 300 & 220 \\ 250 & 340 & 310 \\ 300 & 400 & 400 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} 200 & 300 & 220 \\ 250 & 340 & 310 \\ 300 & 400 & 400 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} 200 & 300 & 220 \\ 250 & 340 & 310 \\ 300 & 400 & 400 \end{matrix} \right] = \\
 & = \left[\begin{matrix} 3 \times (200) & 3 \times 300 & 3 \times 220 \\ 3 \times (250) & 3 \times 340 & 3 \times 310 \\ 3 \times (300) & 3 \times 400 & 3 \times 400 \end{matrix} \right] \\
 & = \left[\begin{matrix} 600 & 900 & 660 \\ 750 & 1020 & 930 \\ 900 & 1200 & 1200 \end{matrix} \right]
 \end{aligned}$$

Solução do problema com o uso do conteúdo sistematizado

Ao utilizar a multiplicação de matrizes por um escalar é possível chegar a nova tabela solicitada no problema. Representados os dados na forma matricial teríamos

$$3 \times \begin{bmatrix} 200 & 300 & 220 \\ 250 & 340 & 310 \\ 300 & 400 & 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & 900 & 660 \\ 750 & 1020 & 930 \\ 900 & 1200 & 1200 \end{bmatrix}$$

Solução na linguagem computacional → script *MatrizOperacoes2*

% Operações com Matrizes (Situação 3)

% Sem uso do conteúdo sistematizado

cont_nsist=[200, 300, 220; 250, 340, 310; 300, 400, 400]+...

[200, 300, 220; 250, 340, 310; 300, 400, 400]+...

[200, 300, 220; 250, 340, 310; 300, 400, 400]

% Com uso do conteúdo sistematizado

cont_sist = 3 * [200, 300, 220; 250, 340, 310; 300, 400, 400]

Resultado apresentado na Janela de Comando para *MatrizOperacoes2*:

>> MatrizOperacoes2

cont_nsist =

600	900	660
750	1020	930
900	1200	1200

cont_sist =

600	900	660
750	1020	930
900	1200	1200

Situação 4 – FABRICAÇÃO DE BOLOS (adaptado de Lima, 1998).

Uma empresa que possui duas confeitorias, chamadas A e B, fabrica três tipos de bolo: Comum, Formigueiro e Brigadeiro, os quais são feitos de farinha, açúcar, leite, manteiga e ovos. Em cada semana, as vendas das duas confeitorias são estimadas conforme a tabela de venda semanal abaixo:

Confeitoria/Tipo	Bolo comum	Bolo Formigueiro	Bolo Brigadeiro
A	50 unidades	30 unidades	20 unidades
B	20 unidades	20 unidades	40 unidades

Para a fabricação desses bolos, o material é usado de acordo com a tabela seguinte:

Bolo/ ingrediente	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Comum	500 g	200 g	500 ml	150g	4
Formigueiro	400 g	100 g	300 ml	250g	5
Brigadeiro	450 g	150 g	600 ml	0	6

A direção da empresa, a fim de atender à demanda quer saber a quantidade de cada uma das cinco matérias primas que deve alocar as suas duas confeitarias. Determine a tabela que possui estas informações separadas por matéria prima e por confeitaria.

Solução do problema sem o uso do conteúdo sistematizado

	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Confeitaria A	50x500 g	50x200 g	50x500 ml	50x150g	50x4
	30x400 g	30x100 g	30x300 ml	30x250g	30x5
	20x450 g	20x150 g	20x600 ml	20x0g	20x6

	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Confeitaria A	25000 g	1000 g	25000 ml	7500g	200
	12000 g	3000 g	9000 ml	7500g	150
	9000 g	300 g	12000 ml	0g	120

	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Confeitaria A	46000 g	4300 g	46000 ml	1500g	470

	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Confeitaria	20x500 g	20x200 g	20x500 ml	20x150g	20x4

B	20x400 g	20x100 g	20x300 ml	20x250g	20x5
	40x450 g	40x150 g	40x600 ml	40x0g	40x6

	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Confeitoria	10000 g	4000 g	10000 ml	3000g	80
B	8000 g	2000 g	6000 ml	5000g	100
	18000 g	6000 g	24000 ml	0g	240

	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Confeitoria B	36000 g	12000 g	40000 ml	8000g	420

Assim, temos uma nova tabela com os valores totais de cada matéria prima para cada confeitoria.

	Farinha	Açúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Confeitoria A	46000 g	4300 g	46000 ml	1500g	470
Confeitoria B	36000 g	12000 g	40000 ml	8000g	420

Solução do problema com o uso do conteúdo sistematizado

Devido a limitação de espaço iremos suprimir algumas colunas, porém o cálculo para estes segue a mesma lógica.

$$\begin{array}{lll}
 [50 \times 500 + 30 \times 400 + 20 \times 450] & 50 \times 200 + 30 \times 100 + 20 \times 150 & \dots \\
 [20 \times 500 + 20 \times 400 + 40 \times 450] & 20 \times 200 + 20 \times 100 + 40 \times 150 & \dots \\
 & 50 \times 4 + 30 \times 5 + 20 \times 6] & \\
 & 20 \times 4 + 20 \times 5 + 40 \times 6] &
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 46000 & 4300 & 46000 & 1500 & 470 \\ 36000 & 12000 & 40000 & 8000 & 420 \end{pmatrix}$$

Solução na linguagem computacional → script *MatrizOperacoes3*

% Construindo Matrizes

% Matriz Confeitaria/Tipo

```
Confeitaria_Tipo = [50, 30, 20;...  
                    20, 20, 40];
```

% Isolando Confeitaria A e B para simplificar código

```
A = Confeitaria_Tipo(1,:);
```

```
B = Confeitaria_Tipo(2,:);
```

%Matriz Bolo/Ingrediente

```
Bolo_Ingrediente = [500, 200, 500, 150, 4;...  
                     400, 100, 300, 250, 5;...  
                     450, 150, 600, 0, 6]
```

% Isolando lista de ingredientes por tipo de Bolo

```
Comum = Bolo_Ingrediente(1,:);
```

```
Formigueiro = Bolo_Ingrediente(2,:);
```

```
Brigadeiro = Bolo_Ingrediente(3,:);
```

% Obter a quantidade de cada uma das matérias primas

% que deve-se alocar nas confeitorias

%Qtd_A: Linhas = Tipo de Bolo e Colunas = Matéria Prima

```
Qtd_A = [A(1)*Comum; A(2)*Formigueiro; A(3)*Brigadeiro]
```

%Confeitaria_A = Demanda de matérias primas semanais

```
Confeitaria_A = [sum(Qtd_A(:,1)), sum(Qtd_A(:,2)),...  
                 sum(Qtd_A(:,3)),sum(Qtd_A(:,4)),...  
                 sum(Qtd_A(:,5))]
```

%Qtd_BA: Linhas = Tipo de Bolo e Colunas = Matéria Prima

```
Qtd_B = [B(1)*Comum; B(2)*Formigueiro; B(3)*Brigadeiro]
```

%Confeitaria_B = Demanda de matérias primas semanais

```
Confeitaria_B = [sum(Qtd_B(:,1)), sum(Qtd_B(:,2)),...  
                 sum(Qtd_B(:,3)),sum(Qtd_B(:,4)),...  
                 sum(Qtd_B(:,5))]
```

%Materia_Prima = Total de matéria prima necessária em cada confeitoria

% Linhas = Confeitaria e Coluna = Matéria Prima

```
Materia_Prima = [Confeitaria_A; Confeitaria_B]
```

Resultado apresentado na Janela de Comando para **MatrizOperacoes3**:

>> MatrizOperacoes3

Bolo_Ingrediente =

500 200 500 150 4

400 100 300 250 5

450 150 600 0 6

Qtd_A =

25000 10000 25000 7500 200

12000 3000 9000 7500 150

9000 3000 12000 0 120

Confeitoraria_A =

46000 16000 46000 15000 470

Qtd_B =

10000 4000 10000 3000 80

8000 2000 6000 5000 100

18000 6000 24000 0 240

Confeitoria_B =

36000	12000	40000	8000	420
-------	-------	-------	------	-----

Materia_Prima =

46000	16000	46000	15000	470
36000	12000	40000	8000	420

3.3 Sistemas de Equações Lineares

São modelos matemáticos destinados a satisfazer, simultaneamente, um conjunto de equações, conforme o sistema de expressões (3.1)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que,

a_{nn} → são os coeficientes constantes;

b_n → são constantes;

x_n → são as incógnitas;

n → representa o número de equações.

Situação 1: (Chapra, 2018) Considere três saltadores de *bungee jumping* conectados por cordas, mantidos verticalmente, de forma que cada corda se mantém estendida, mas não totalmente esticada. Define-se três comprimentos: x_1 , x_2 e x_3 . A partir da 2ª Lei de Newton e supondo que cada corda se comporta como uma mola linear, segundo a Lei de Hooke, o comportamento das forças pode ser modelado, conforme a expressão (3.2):

$$\begin{cases} m_1a_1 = m_1g + k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 \\ m_2a_2 = m_2g + k_3(x_3 - x_2) + k_2(x_1 - x_2) \\ m_3a_3 = m_3g + k_3(x_2 - x_3) \end{cases} \quad (3.2)$$

A Tabela 7 exibe os valores das grandezas que caracterizam esse fenômeno.

Tabela 7: Dados do problema do *bungee jumping*

Saltador	Massa (kg)	Constante Elástica da corda (N/m)	Comprimento da corda (m)
S1	60	50	20
S2	70	100	20
S3	80	50	20

Fonte: Chapra, 2018.

Qual o deslocamento percorrido por cada saltador até o momento do equilíbrio?

O script ***bung_jump*** será apresentado considerando a substituição dos valores da Tabela 6 no sistema representado por (3.2)

% Sistema de Equações Lineares

% Matriz dos coeficientes: A

$$A = [150 \ -100 \ 0; \\ -100 \ 150 \ -50; \\ 0 \ -50 \ 50];$$

% Matriz das constantes: B

$$B = [588.6; \\ 686.7; \\ 784.8];$$

% Matriz solução das incógnitas: X

$$\text{disp}(\text{'Deslocamento de cada saltador (m):'}) \\ X = \text{inv}(A) * B$$

disp('Respectivamente x1, x2 e x3')

% inv(A): Mariz inversa de A

Capítulo 4 – Cálculo Diferencial e Integral

4.1 Limites

A partir dos conceitos apresentados sobre função, bem como sua composição em forma de relações entre dois conjuntos $A \times B$, podemos desenvolver a ideia sobre Limites. Na tentativa de buscar mais significado e sentido ao conceito abstrato, vamos tratar as funções, neste momento, como sequências $(X_n)_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Logo, podemos construir a seguinte sequência: $X_n = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right\}$ e assim por empiria percebemos que o primeiro termo: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$ e assim sucessivamente para cada **n temos apenas um valor numérico**. Assim, generalizando temos:

$$X_n = \frac{1}{n}$$

Resgatando a formalidade da notação de Euler (1707-17883) de funções podemos reescrever essa generalização como: $f(x) = \frac{1}{x}$

Assim, iniciaremos o estudo do comportamento dessa função se prolongarmos *infinitamente* a quantidade de termos assim obteremos valores cada vez menores a medida que aumenta os valores de x . Compreendendo assim que a função, construída inicialmente como sequência, converge a um valor cada vez mais próximo de zero. Conceito esse que define a ideia de **Limites**.

Seja uma função f e a um ponto contido no domínio da função. Diz-se que f tem limite no ponto, se dado qualquer $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ / $\forall x$ pertence ao domínio de f . Satisfazendo assim a condição:

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

O limite pode ser representado por:

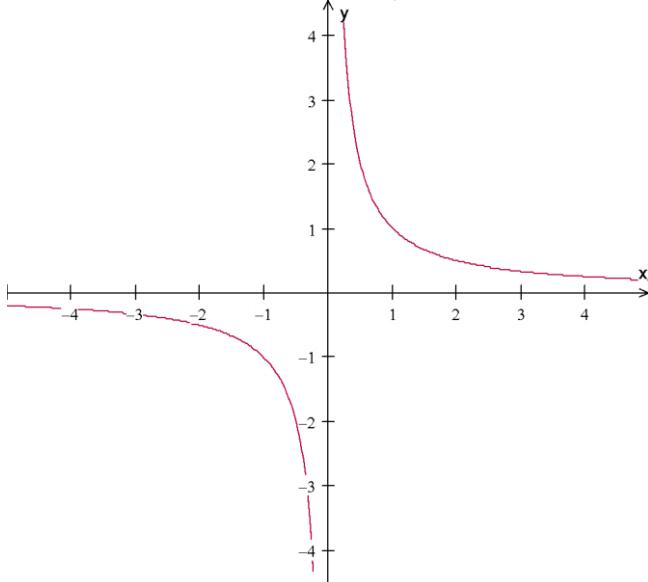
$$f(x) = L$$

Adequando assim a nossa situação motivadora

$$\frac{1}{x} = 0$$

O mais interessante é percebermos que o limite para a função é igual a zero, entretanto para $x = 0$ teremos uma indeterminação que comprova a descontinuidade da função no ponto como mostrado no gráfico da Figura 11.

Figura 11: Gráfico da função $f(x) = 1/x$



Fonte: Autores.

Assim podemos estudar as funções e as sequências em suas condições de convergência e continuidade.

4.1.1 Propriedades dos limites

A seguir algumas propriedades para o estudo de limites. Supondo inicialmente que para f_1 e f_2 contínuas e para a um número real, temos:

$$f_1 = L_1$$

$$\text{e } f_2 = L_2$$

i. $(f_1 \pm f_2) = f_1 \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2 = L_1 \pm L_2$

ii. $(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2 = L_1 \cdot L_2$

iii. $\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{L_1}{L_2}$

iv. $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$

4.1.2 Aplicações do conceito de limites:

Situação 1: Anos atrás alguns cientistas iniciaram os estudos sobre a velocidade da gosta de chuva e sua deformidade em queda, dentre os quais podemos ressaltar Philipp Lenard, fisico alemão, em seus estudos “cientista construiu um túnel de vento vertical, onde foi possível mudar a velocidade ascendente do fluxo de ar para simular as correntes reais presentes na atmosfera.” (FONTE: <https://www.tempo.com/noticias/ciencia/qual-e-a-velocidade-das-gotas-de-chuva-.html>)

Além de analisar a velocidade e o formato foi possível relacionar as forças aerodinâmicas às gotas de água. Supondo que a velocidade, em função do tempo, de uma gota de chuva é dada por:

$$v(t) = v_f \left(1 - e^{-\frac{g \cdot t}{v_f}} \right)$$

Assumindo a gravidade constante de $9,8 \text{ m/s}^2$ e que a gota de água cai em um túnel de vento muito extenso de tal forma que podemos considerar o tempo de queda infinito. Podemos afirmar que sua velocidade $v(t)$ equivale a:

Resolução Trivial:

Observamos que a função pode ser reescrita como:

$$v(t) = v_f - v_f \cdot \frac{1}{e^{\frac{g \cdot t}{v_f}}}$$

e assumindo o tempo tornando-se cada vez maior, logo definimos que o denominador se torna cada vez maior e o resultado de sua divisão cada vez menor tendendo a zero. Assim, aplicando as propriedades de limites:

$$v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(v_f - vf \cdot \frac{1}{e^{\frac{g \cdot t}{v_f}}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} v_f - \lim_{t \rightarrow \infty} vf \cdot \frac{1}{e^{\frac{g \cdot t}{v_f}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} v_f - 0 =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_f = v_f$$

Situação 2: Uma máquina funciona a partir de uma quantidade mínima de insumos, sendo essa quantidade definida por x. Assim torna-se necessário o controle e monitoramento de sua “alimentação” para o processo de produção se mantenha com a máquina em ótimo estado de funcionamento.

Supondo que a produção, em milhares, é definida por uma função f(x) respeitando o seguinte modelo:

$$\frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$$

Em que x é a quantidade de insumos para o funcionamento da máquina.

Assumindo que a máquina não poderá ser desligada. Em outras palavras, o fornecimento de insumo será constante (infinito), podemos afirmar que o valor de produção limite deste equipamento é:

Resolução Trivial:

$$\frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} \text{ por propriedade } \frac{1}{x} = 0$$

Temos:

$$\frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3 \text{ milhões de unidades}$$

Apresentação do *script limites* a seguir:

% Cálculo do Limite de uma função

syms x % x é Variável simbólica

% Declarando a função f(x)

```
f = (3*x^2-x-10)/(x^2-4);  
% Determinando valor do Limite  
val_lim=limit(f,Inf)
```

Resultado apresentado na Janela de Comando:

```
>> limites
```

```
val_lim =
```

```
3
```

4.2 Derivadas

As funções são interpretações matemáticas de fenômenos e assim possuem condições e ferramentas para interpretação de análise. Vamos estudar a posição de um veículo que se desloca entre dois pontos, suponhamos que a função que descreve esse fenômeno é constituída por $f(x) = x^3 + 1$ e que $f(x)$ representa a posição em metros e x o tempo em segundos, partindo da premissa do Sistema Métrico Internacional, agora analisaremos a velocidade em seu deslocamento durante 12 segundos. A sua velocidade média é a variação entre as condições de deslocamento (espaço e tempo), portanto:

$$Vm = \frac{f(12)-f(0)}{12-0} = \frac{12^3}{12} = 144 \text{ m/s}$$

Interpretando que a velocidade instantânea é a variação da posição, de um ponto $f(x)$ até $f(x + \Delta x)$, em um pequeno intervalo de tempo, x até $(x + \Delta x)$ equivalente a Δx , a partir dos conhecimentos de limite, definimos que:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Tendo assim a concepção da derivada como taxa de variação. Em sua definição formal:

A derivada de uma função $f: IR \rightarrow IR$ definida em um intervalo aberto (a, b) contínua é derivável no ponto $x \in (a, b)$ se dada por:

Assim definimos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Notações usuais:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{df}{dx}$$

As derivadas possuem propriedades que facilitam a aplicação de seu conceito, sendo as mais utilizadas:

i) $\frac{d\{cf(x)\}}{dx} = c \cdot \frac{d[f(x)]}{dx}$, com c uma constante.

ii) $\frac{d\{f(x) \pm g(x)\}}{dx} = \frac{d[f(x)]}{dx} \pm \frac{d[g(x)]}{dx}$

iii) $\frac{d[c]}{dx} = 0$, com c constante

iv) $\frac{d[x]}{dx} = 1$

v) $\frac{d[x^n]}{dx} = nx^{n-1}$

Ainda em suas propriedades temos as adequações realizadas por Leibiniz (1646 – 1716) sobre a derivação das funções compostas $y = u(x)$, para tal tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Além das implicações da derivada no cálculo da variação média da função, descrito pelo Teorema do Valor Médio, onde uma reta secante possui pelo menos uma reta tangente paralela em um intervalo fechado definido.

As derivadas podem ser classificadas por sua ordem, analogamente aos polinômios, logo a quantidade de derivadas realizadas na função definem sua ordem assim: uma derivada na função, derivada de primeira ordem, duas derivadas da função, derivada de segunda ordem e um fato curioso é que temos derivadas de *ordem não inteira* que podem ser interpretadas graficamente de maneira computacional.

Iniciamos nossa análise do conceito de derivada a partir de uma aplicação na física no estudo do movimento de um móvel, seguiremos com algumas outras situações.

Situação 1: Um móvel tem sua posição descrita pela função $f(x) = x^2 + 2x + 1$, sendo $f(x)$ dados em metros e x em segundos. Os valores referentes a velocidade, $v(x)$, e aceleração, $a(x)$, quando o tempo for de 2 segundos é:

Resolução Trivial:

Primeiro, buscamos as funções velocidade e aceleração em função do tempo (x) a partir das derivadas primeira e segunda, respectivamente.

$$v(x) = f'(x) = 2x + 2$$

$$a(x) = f''(x) = 2$$

Para $x = 2$ segundos.

$$v(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6 \text{ m/s}$$

$$a(2) = 2 \text{ m/s}^2$$

Apresentação do *script derivadas* a seguir:

```
% Cálculo da Derivada de uma função
syms x % x é Variável simbólica
% Função analisada
f = x^2+2*x+1;
```

```
% Comando diff(f,x,n): f é a função; x é a variável independente;  
% n é a ordem da derivada  
v = diff(f,x,1) % Derivada de ordem 1: Velocidade  
% Valor da função no ponto p: subs(f,x,p)  
p = 2; % Ponto p de análise  
v_p = subs(z,x,p) % Valor da velocidade no ponto p  
a = diff(f,x,2) % Derivada de ordem 2: Aceleração  
a_p = subs(a,x,p) % Valor da aceleração no ponto p
```

Resultado apresentado na Janela de Comando:

>> derivadas

v =

$2*x + 2$

v_p =

4

a =

2

a_p =

2

Situação 2: Uma empresa desenvolve uma função para acompanhar o desempenho em sua fábrica, para tal leva em consideração algumas variáveis como custo e tempo para produção. A partir dessas condições iniciou-se a modelagem matemática, resultando na seguinte função: $C(x) = -x^2 + 1800x + 1000$, em que $C(X)$ é dado em reais e x é a quantidade de produtos. Portanto, pode-se definir que o custo máximo é dado para uma quantidade de produtos igual a:

Resolução Trivial

Os pontos críticos são definidos a partir de $f'(x) = 0$, para as funções polinomiais de segundo grau. Logo:

$$C'(x) = -2x + 1800$$

$$-2x + 1800 = 0$$

$$x = 900 \text{ produtos.}$$

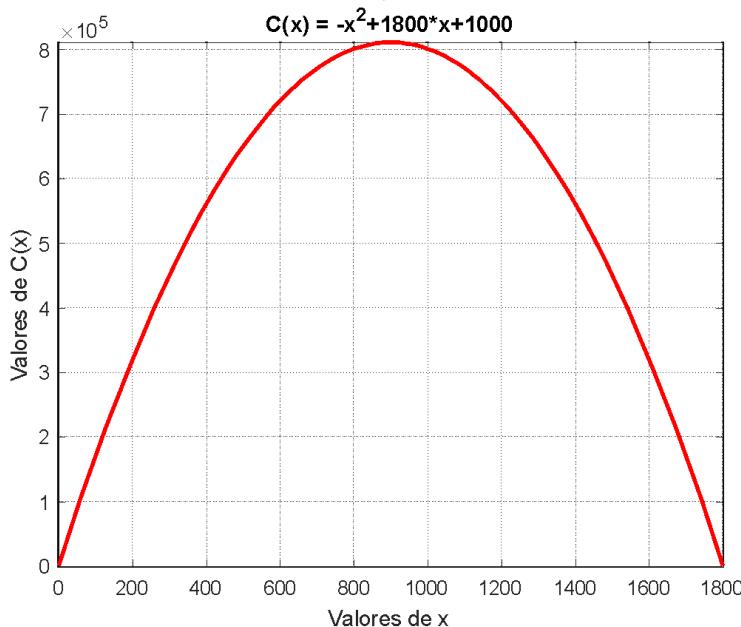
Um ponto importante sobre as derivadas é que a sua aplicação em uma função nos fornece o coeficiente angular da reta tangente à própria função. Sendo assim, podemos encontrar a equação da reta tangente em um ponto de uma função contínua e definida em um intervalo.

Apresentação do *script deriv_sit2* a seguir:

```
% Cálculo da Derivada de uma função
syms x % x é Variável simbólica
% Função analisada
C = @(x) -x^2+1800*x+1000;
dC = diff(C,x,1) % Derivada de ordem 1
% Para encontrar o valor máximo: C1=-1*C
C1 = @(x) x^2-1800*x-1000;
% Cálculo do valor Crítico xc: comando fminbnd
% a , b extremos do intervalo de busca
a = 0; b = 1800;
[xc]=fminbnd(C1,a,b)
fplot(x,C,[0 1800],'-r','Linewidth',2)
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de C(x)')
title('C(x) = -x^2+1800*x+1000')
grid on
```

Resultado apresentado na Janela de Comando são referendados pelo gráfico da Figura 12.

Figura 12: Função Custo



Fonte: Autores.

>> deriv_sit2

dC =

$$1800 - 2*x$$

xC =

$$900.0000$$

Situação 3: Encontre a reta tangente a parábola definida pela função $f(x) = x^2 + 3$ no ponto P (2,3).

Resolução Trivial

Partindo da equação da reta definida por $y - y_0 = m(x - x_0)$, para $m = f'(x_0)$

Temos: $f'(2) = 2(2) = 4 = m$, logo: $y - 3 = 4(x - 2)$, assim: $y = 4x - 5$ como a equação da reta tangente.

A seguir discutiremos um pouco mais sobre derivadas, entretanto em seu caráter de acréscimo parcial.

4.3 Derivadas Parciais

As derivadas parciais, diferentes das derivadas ordinárias funções que podem ter incremento total em seus gráficos por ter apenas uma variável, entende-se $f(x)$, são constituídas a partir de um incremento parcial de suas variáveis pois neste aspecto tratamos de funções com mais de uma variável, na forma $f(x,y)$.

Definimos como uma função $f: A \subset R \rightarrow R^2$ e $(x_0, y_0) \in A$. Mantendo $y = y_0$ temos uma função de uma variável $g(x) = f(x_0, y_0)$ e a derivada dessa função no ponto x_0 denomina-se derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0) . Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \frac{g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Se o limite existir.

Analogamente temos as derivada parcial para y .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{g(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Notações:

Para derivadas parciais em relação a x as formas mais usuais de representar são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = fx$$

Para derivadas parciais em relação a y as formas mais usuais de representar são:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial y} = fy$$

As derivadas parciais possuem as mesmas propriedades usuais das derivadas ordinárias, com a seguintes características em suas derivações de ordem superior:

Derivada parcial de primeira ordem para x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Derivada Parcial de segunda ordem para x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Derivada parcial de primeira ordem para x:

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

Derivada Parcial de segunda ordem para x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

A implicação mais importante das derivadas parciais de ordem superior é o *Teorema de Schwartz* que descreve seja $f: A \subset R \rightarrow R^2$, A é aberto. Se f tiver suas derivadas parciais existirem e forem contínuas em A então:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)$$

As derivadas parciais facilitam a análise de situações no contexto vetorial, seguem alguns exemplos.

O vetor gradiente é um recurso analítico com base nas derivadas parciais que apontam para a região de maior variação.

$$\nabla f(x_o, y_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \right)$$

Situação 1: Em análise de partículas em um recipiente com a intenção de entender o movimento delas e identificar o movimento e como se configura esse comportamento. Para tal podemos utilizar o vetor gradiente de concentração. Em outras palavras, compreender o sentido do gradiente de concentração para a difusão das partículas durante o seu movimento.

Supondo que a função que representa o movimento das partículas é dada por uma função multivariável representada pela expressão (4.1), em um ponto P (1,2).

$$f(x, y) = 2x^2 - 4y^2 + 3 \quad (4.1)$$

Assim definimos que o vetor movimento que representa a maior concentração das partículas é:

Resolução Trivial

Derivando parcialmente para x, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x$$

Derivando parcialmente para y, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -8y$$

Assim para o ponto P, o vetor gradiente é:

$$\nabla f(1,2) = (4, -16)$$

Vetor quer representa o movimento das partículas no recipiente, que indica a maior probabilidade de movimento de qualquer partícula do recipiente.

O script ***deriv_parc*** exibe os comandos destinados ao cálculo computacional das Derivadas Parciais.

```
% Derivadas Parciais
syms x y % Variáveis simbólicas
f = @(x,y) 2*x^2-4*y^2+3; % Função de 2 variáveis
disp('Derivada 1ª de f em função de x')
dfx = diff(f,x,1)
disp('Derivada 1ª de f em função de y')
dfy = diff(f,y,1)
a = 1 ; b = 2;
p = [a,b]; % Ponto no vetor gradiente
dfx_p = subs(dfx,x,a);
dfy_p = subs(dfy,y,b);
disp('Vetor Gradiente no Ponto P(a,b)')
[Grad_f]=[dfx_p, dfy_p]
```

Os resultados na Janela de Comando estão apresentados a seguir:

```
>> deriv_parc
Derivada 1ª de f em função de x
```

```
dfx =
```

```
4*x
```

```
Derivada 1ª de f em função de y
```

```
dfy =
-8*y
```

```
Vetor Gradiente no Ponto P(a,b)
```

```
Grad_f =
[4, -16]
```

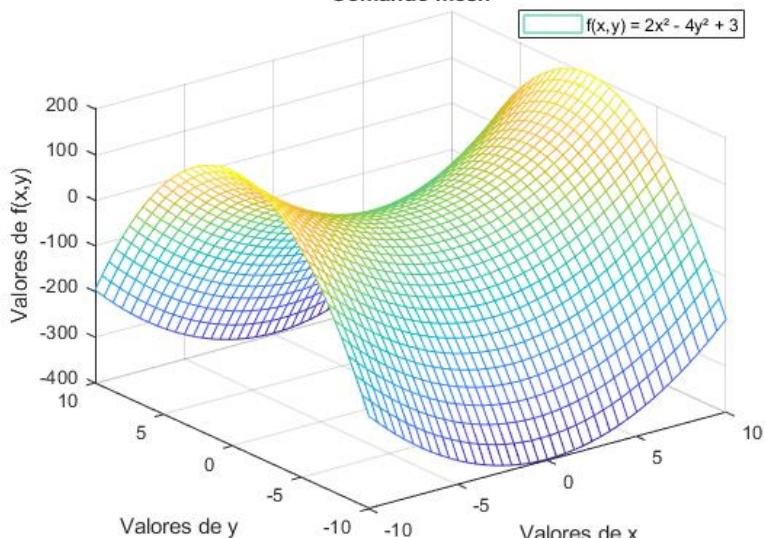
O Gráfico da expressão (4.1) está, devidamente, representado nas Figuras 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 20. Cada figura destaca uma função gráfica do MATLAB, conforme expõe o *script deriv_parc2*.

```
% Derivadas Parciais: Representação gráfica
% Variáveis envolvidas
[x,y] = meshgrid(-10:0.5:10);
% Função plotada
f = 2*x.^2-4*y.^2+3;
% Gráfico 01: comando mesh
figure (1)
mesh(x,y,f)
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de y')
zlabel('Valores de f(x,y)')
title('Comando mesh')
legend('f(x,y) = 2x^2 - 4y^2 + 3','Location','Northeast')
grid on
% Gráfico 02: comando meshc
figure (2)
meshc(x,y,f)
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de y')
zlabel('Valores de f(x,y)')
title('Comando meshc')
legend('f(x,y) = 2x^2 - 4y^2 + 3','Location','Northeast')
grid on
% Gráfico 03: comando meshz
figure (3)
meshz(x,y,f)
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de y')
zlabel('Valores de f(x,y)')
title('Comando meshz')
legend('f(x,y) = 2x^2 - 4y^2 + 3','Location','Northeast')
grid on
% Gráfico 04: comando surf
figure (4)
surf(x,y,f)
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de y')
```

```
zlabel('Valores de f(x,y)')
title('Comando surf')
legend('f(x,y) = 2x2 - 4y2 + 3','Location','Northeast')
grid on
% Gráfico 05: comando surf
figure (5)
surf(x,y,f)
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de y')
zlabel('Valores de f(x,y)')
title('Comando surf')
legend('f(x,y) = 2x2 - 4y2 + 3','Location','Northeast')
grid on
% Gráfico 06: comando contour
figure (6)
contour(x,y,f)
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de y')
zlabel('Valores de f(x,y)')
title('Comando contour')
legend('f(x,y) = 2x2 - 4y2 + 3','Location','Northeast')
grid on
% Gráfico 07: comando contourf
figure (7)
contourf(x,y,f)
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de y')
zlabel('Valores de f(x,y)')
title('Comando contourf')
legend('f(x,y) = 2x2 - 4y2 + 3','Location','Northeast')
grid on
% Gráfico 08: comando waterfall
figure (8)
waterfall(x,y,f)
xlabel('Valores de x')
ylabel('Valores de y')
zlabel('Valores de f(x,y)')
title('Comando waterfall')
legend('f(x,y) = 2x2 - 4y2 + 3','Location','Northeast')
grid on
```

Figura 13: Difusão das Partículas - Gráfico 1

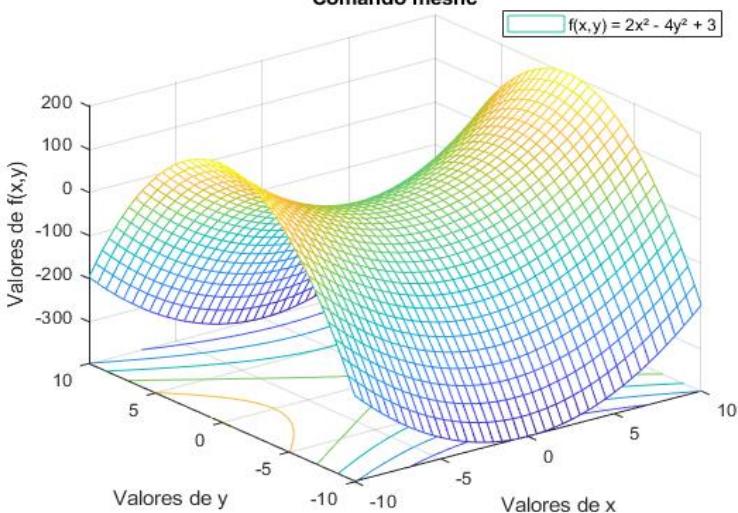
Comando mesh



Fonte: Autores.

Figura 14: Difusão das Partículas - Gráfico 2

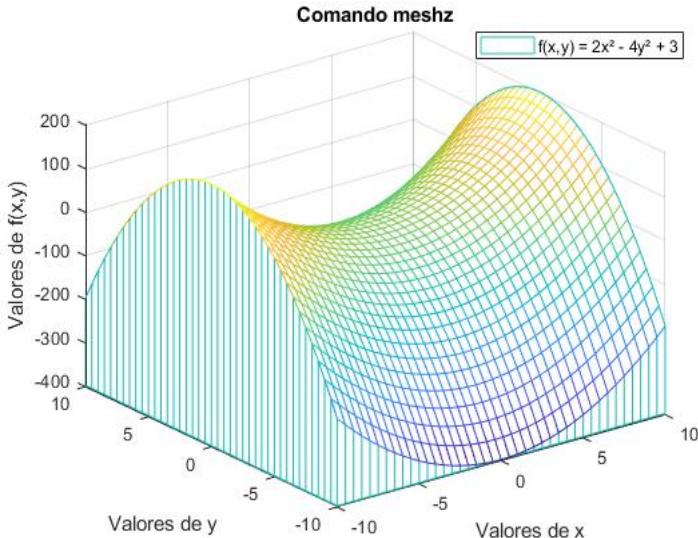
Comando meshc



Fonte: Autores.

As Figuras 13, 14 e 15 foram *plotadas* mediante o comando *mesh* e suas variantes. Essa função estabelece uma superfície no modelo *rede* para as coordenadas do eixo *z*, sobre o plano *x – y*.

Figura 15: Difusão das Partículas - Gráfico 3



Fonte: Autores.

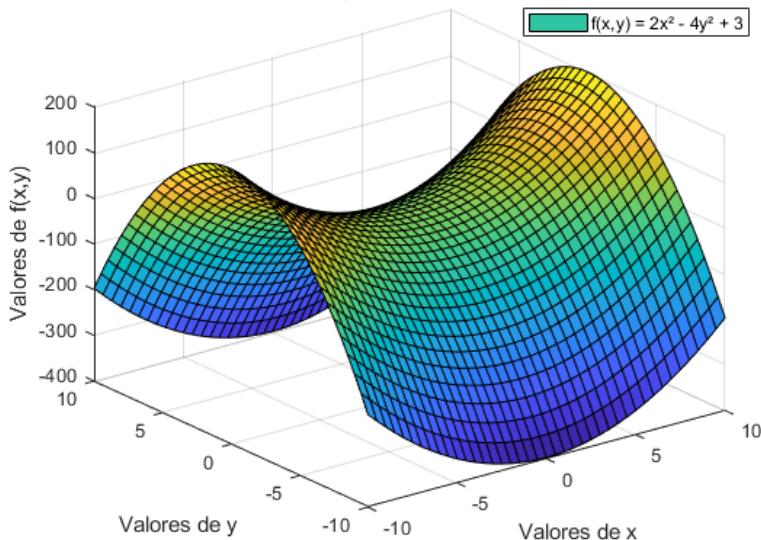
Essa categoria de superfície é extremamente proficiente na visualização matrizes com alta magnitude numérica.

O comando *meshgrid* converte o domínio da função, especificado pelos dois vetores *x* e *y*, em duas matrizes *X* e *Y*. Em seguida, as matrizes são empregadas para examinar a função de duas variáveis.

O comando *surf* e suas variantes *plota* uma superfície parametrizada, em várias cores, utilizando uma grade retangular definida pelas coordenadas *x* e *y*. Esta grade retangular é utilizada para se construir o suporte da superfície real sobre o plano *X – Y*.

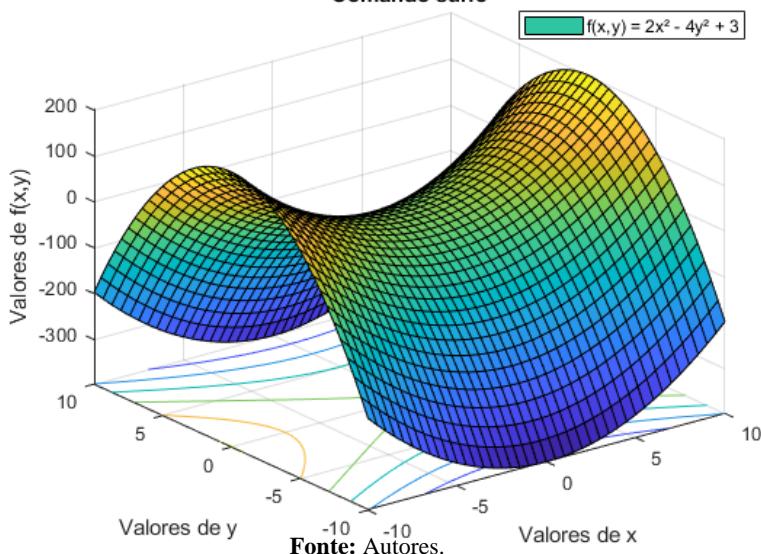
Considerando que *x* e *y* sejam vetores, então eles, internamente, serão tratados para produzir excelentes matrizes de dimensões correspondentes às dimensões da matriz *Z*. Em todos os casos as grades serão, obrigatoriamente, uma região retangular.

Figura 16: Difusão das Partículas - Gráfico 4
Comando surf



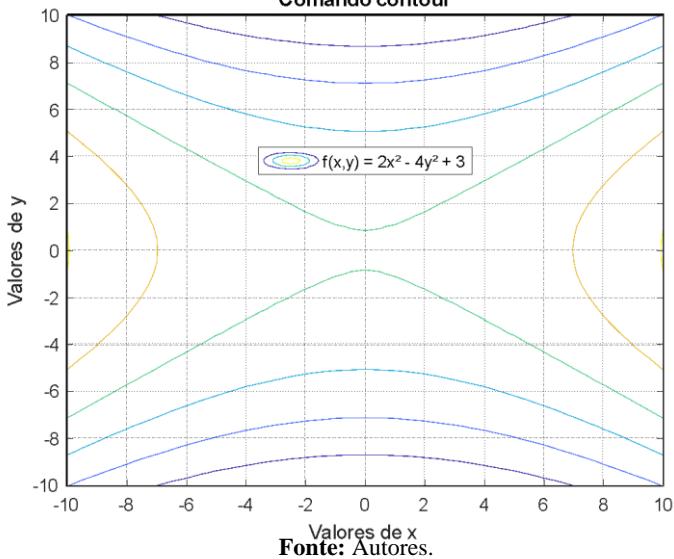
Fonte: Autores.

Figura 17: Difusão das Partículas - Gráfico 5
Comando surf



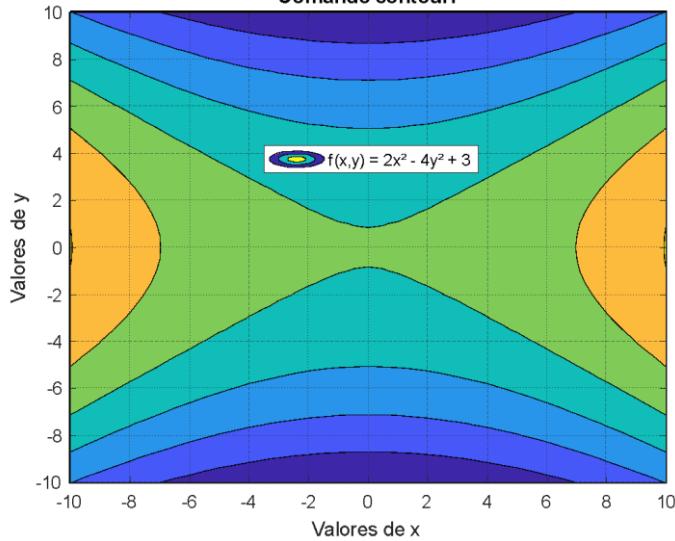
Fonte: Autores.

Figura 18: Difusão das Partículas - Gráfico 6
Comando contour



Fonte: Autores.

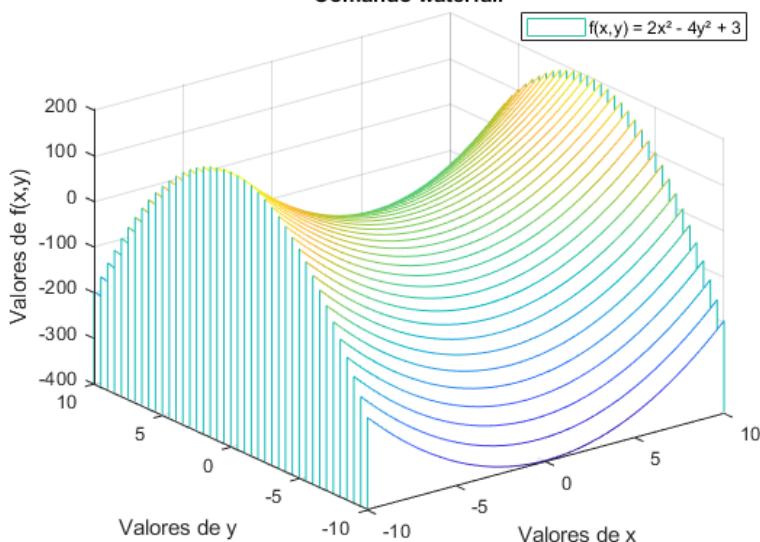
Figura 19: Difusão das Partículas - Gráfico 7
Comando contourf



Fonte: Autores.

Figura 20: Difusão das Partículas - Gráfico 8

Comando waterfall



Fonte: Autores.

4.4 Integrais

Para iniciarmos os estudos sobre integral se faz necessário destacar o seguinte conceito uma função $F(x)$ é chamada de função primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I se para todo $x \in I$ temos $F'(x) = f(x)$. Assim definimos a integral por:

Se $F(x)$ é uma função primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + C$ é chamada integral indefinida da função $f(x)$ e é representada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Seguindo algumas propriedades usuais:

i) $\int Kf(x)dx = k \int f(x)dx$, para K uma constante

ii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

iii) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, para C uma constante.

Quando se define um intervalo para as integrais dispondo de um limite inferior e superior, temos as Integrais Definidas.

Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $[a,b]$ e seja P uma partição qualquer de $[a,b]$. A integral definida de f de a até b , é denotada por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

O *Teorema Fundamental do Cálculo* descreve que se f é contínua sobre $[a,b]$ e se F é primitiva de f neste intervalo então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

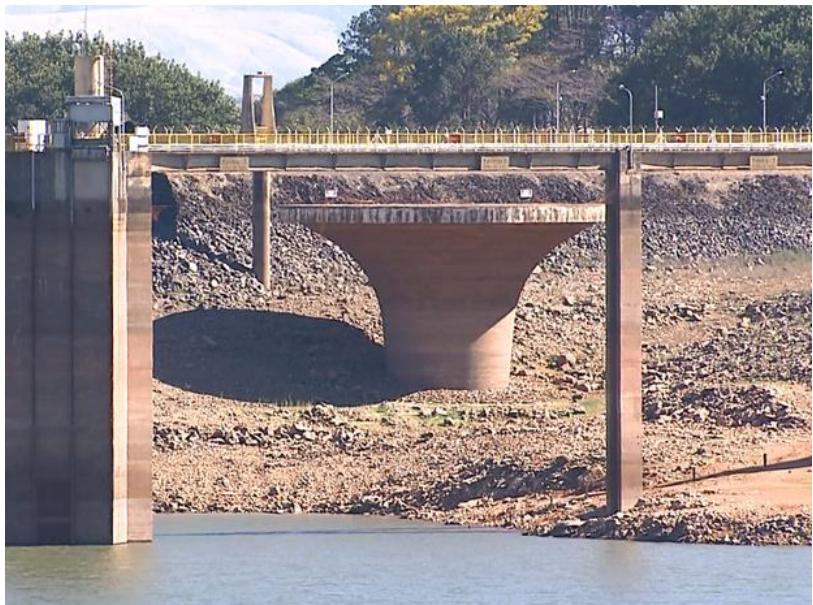
O que permite buscar aproximações com as áreas descritas pela função em relação ao eixo das ordenadas (x). Desde então desenvolveu-se inúmeras aplicações que possibilitam o cálculo de áreas definidas por uma função contínua em um intervalo. Vejamos uma a seguir.

Situação 1: A represa de Caconde, localizada em São Paulo, apresenta em uma das suas estruturas um funil em concreto, como mostra a Figura 21. Um engenheiro com o objetivo de calcular o volume da estrutura para iniciar uma réplica, iniciou os estudos com a análise de sua forma. Assim, foi percebida que sua forma lembra o gráfico de uma função:

$$y = \sqrt{x},$$

e que em um sistema cartesiano seu comprimento é aproximado a distância de 0 a 2 no eixo x.

Figura 21: Gráfico da função $f(x) = 1/x$



Fonte: <http://g1.globo.com/sp/sao-carlos-regiao/noticia/2014/09/nivel-de-represa-de-caconde-sp-cai-25-metros-e-navegacao-e-suspensa.html>

Utilizando os conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral, com uso do método dos invólucros cilíndrico, cuja expressão é mostrada em abaixo

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

o volume poderia ser calculado sem uso de *software*. Seguindo essa premissa, podemos afirmar que o volume da estrutura é:

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Resolução

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx = \int_0^2 2\pi x \sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^2 x(x)^{\frac{1}{2}} dx = 2\pi \int_0^2 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{16\sqrt{2}}{5}\pi$$

A modelagem Matemática-Computacional, para esse problema, está apresentada no script *cal_integral*.

O resultado da Janela de Comando retrata o valor da integral, dado por

$$\frac{16\sqrt{2}}{5}\pi \cong 14.2172 m^3$$

>> cal_integral

Integral =

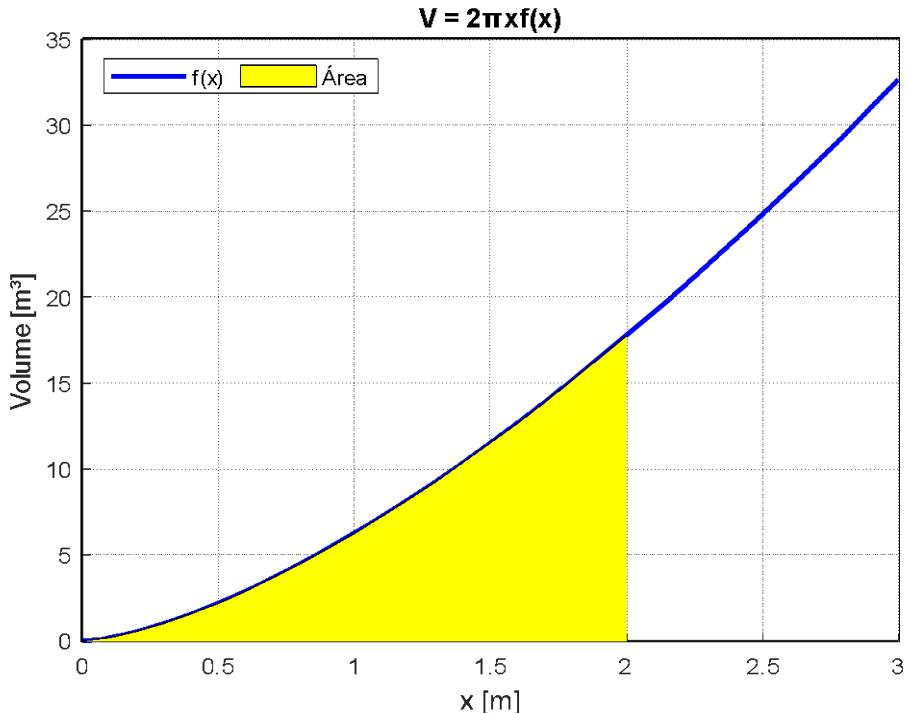
14.2172

```
% Cálculo Integral
syms x % Variável simbólica
f = 2*pi*x*sqrt(x); % Função a ser integrada
a = 0; b = 2; % Limites de Integração
% Comando para Integrar: int
val_int = int(f,x,a,b);
% Valor da Integral
Integral = double(val_int)
% Representação Gráfica
hold on
fplot(x,f,[0 3], 'b', 'Linewidth',2)
x1 = [0:0.1:2];
f1 = 2*pi*x1.*sqrt(x1);
area(x1,f1,'FaceColor','y')
xlabel('x [m]')
ylabel('Volume [m³]')
title('V = 2πxf(x)')
```

```
legend('f(x)','Área','Location','Northwest','NumColumns',2)  
grid on  
hold off
```

A representação gráfica da Integral Definida está exposta na Figura 22.

Figura 22: Gráfico da Integral Definida



Fonte: Autores.

REFLEXÕES

O mundo atual dá vários indícios da necessidade de tratamento das informações, e construção do conhecimento, para além dos limites que os sentidos humanos podem alcançar. Até um tempo atrás, pensar em algo prático com matrizes, por exemplo, era possível até ordem três, pois, a partir da quarta dimensão é extremamente difícil representação geométrica de algumas funções e figuras, o que limitava a visualização prática e os cálculos de raízes de equações de graus superiores a 4, em razão do exaustivo processo de desenhar à mão livre.

Neste sentido, este texto traz como contribuição um avanço, caminhando na mesma direção que indica um dos principais documentos que norteiam a educação básica no Brasil nos dias de hoje: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esse documento expõe que a álgebra mantém estreita relação com o pensamento computacional, principalmente, na identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. Dessa forma, o trabalho pedagógico que explora ambas as linguagens possuem excelentes possibilidades no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra, da Geometria entre outros, configurando-se como uma via de mão dupla, tendo em vista também que os alunos precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em linguagens diferentes desde a educação básica até chegar a maior profundidade no ensino superior. (BRASIL, 2018, p.271).

A proposição aqui é que professores da educação básica possam ter acesso a materiais com possibilidades de serem usados no “chão” de suas salas de aula. Assim, foram apresentadas várias situações contextualizadas e suas respectivas resoluções usuais e na linguagem computacional, na expectativa de servirem como subsídios práticos para o uso do professor em sua sequência didática, fomentando também a ampliação desse formato para novos assuntos e situações a partir da necessidade do docente.

Assim, espera-se um destacável posicionamento no aumento do arsenal de avanços no que diz respeito a metodologias alternativas de ensino de Matemática, que ainda possui, predominantemente, a forma tradicional das etapas, exposição da definição, visualização de exemplos e resolução de exercícios de fixação no caderno, mas que aos poucos tem tomado novos rumos.

**Me. Hugo Carlos Machado da Silva,
Professor de Matemática.**

REFERÊNCIAS

- BATISTA, Sabrina Inês. **Resolução de problemas e o ensino: aprendizagem de matrizes.** Universidade do Extremo Sul Catarinense – Unesc Curso de Pós – Graduação Em Matemática, 2008.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** 2018.
- CHAPRA, Steven C. **Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists.** Berger Chair in Computing and Engineering, Tufts University. Fourth edition. New York, NY: McGraw-Hill Education. 2018.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: ensino médio.** 1^a ed. São Paulo: Ática, 2005.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações.** 3^a ed. São Paulo: Ática, 2016.
- GRIFFIN, M. J. **Handbook of Human Vibration.** Academic Press Limited. London. British Library Cataloguing in Publication Data. 1990.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentals of Physics.** Textbooks. 2011. Jearl Walker. - 9th ed. Printed in the United States of America.
- LEITHOLD, Louis. **Cálculo com Geometria Analítica.** Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Harbra, 1994.
- MATHWORKS. **MathWorks leading developer of Mathematical Computing software for Engineers and Scientists.** <https://www.mathworks.com/>. 2021.
- MORAES, Erelaine P.; SILVA, Ladário da. **Sequência Didática para o Ensino de Conceitos Básicos de Cinemática E De Energia.** Porto Alegre: UFRGS, 2019.
- ROBALLO, Murilo Sergio. **Aplicações de Funções Exponenciais e Logarítmicas.** Dissertação (Mestrado) - Universidade de Brasília, Departamento de Matemática. 2014.



Denis Carlos Lima Costa

Graduado em Ciência com Habilitação em Matemática, realiza pesquisas na área de Matemática Computacional aplicada ao desenvolvimento de Inteligência Artificial. Especialista em Física, com inúmeros artigos publicados no campo da geração de energia. Mestre em Geofísica, no âmbito dos Métodos Potenciais, com estudo dos campos gravimétrico e magnético. Doutor em Engenharia Elétrica na área de Sistemas de Energia, com atividades em geração termelétrica a gás natural. Docente em efetivo exercício, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA), *Campus Ananindeua*. É membro do grupo de pesquisa Linguagens, Culturas, Tecnologias e Inclusão - LICTI e Líder do grupo de pesquisa Gradiente de Modelagem Matemática e Simulação Computacional – GM²SC, no qual desenvolve pesquisa no âmbito da Computação BioInspirada: Algoritmo Genético, Exame de Partículas, Evolução Diferencial, Redes Neurais Artificiais e Árvore de Decisão. Autor do livro Métodos Matemáticos Aplicados nas Engenharias via Sistemas Computacionais.



Heictor Alves de Oliveira Costa

Graduação em Engenharia da Computação, possui artigos publicados em modelagem Matemática Computacional. Amplo conhecimento das ferramentas de linguagens de programação Python, C, C++, Ruby, Julia, SQL, MATLAB, R, Java e Potigol. Coautor da linguagem de programação EGUA. Autor do livro Métodos Matemáticos Aplicados nas Engenharias via Sistemas Computacionais. Áreas de atuação incluem participação nos projetos Diagnóstico Socioterritorial de Segurança Pública no Município de Ananindeua, e Análise de Cristais Orgânicos MBANP via espectroscopia Raman. Membro do grupo de pesquisa Gradiente de Modelagem Matemática e Simulação Computacional – GM²SC, no qual desenvolve pesquisa no âmbito da Computação BioInspirada: Algoritmo Genético, Exame de Partículas, Evolução Diferencial e Redes Neurais Artificiais.



Hugo Carlos Machado da Silva

Possui Mestrado em Educação pela Universidade do Estado do Pará (2016) e graduação em licenciatura em matemática pela Universidade do Estado do Pará (2012), é graduando em Engenharia de Produção pela Faculdade Estácio Belém (2017-2021), atua como pesquisador no grupo de pesquisa Gradiente de Modelagem Matemática e Simulação Computacional – GM²SC, vinculado ao Instituto Federal de Educação do Pará (IFPA) desenvolvendo pesquisas sobre Modelagem, otimização e simulação computacional de sistemas e processos. Possui experiência na área de Matemática, com ênfase em ensino de Matemática e educação especial e otimização de processos via modelagem matemática. Atualmente é docente da faculdade Estácio Castanhal, atuando nos cursos de licenciaturas, gestão e negócios e engenharias, bem como, atua como professor na educação Básico em uma rede particular de ensino fundamental e médio.



Silvio Tadeu Teles da Silva

Mestre em Educação pelo Programa de Pós Graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará. Graduado em Licenciatura plena em Matemática pela Universidade do Estado do Pará. Membro do Comitê Institucional de Iniciação Científica, Desenvolvimento Tecnológico e Inovação (CIICDTI). Professor e pesquisador das áreas de Engenharia, Saúde e Gestão da Faculdade Estácio Nazaré. Com experiência na área da Educação Matemática, com ênfase em Ensino por Atividade, atuante na área de metodologias ativas para o ensino superior. Membro do grupo de pesquisa Gradiente de Modelagem Matemática e Simulação Computacional – GM²SC, vinculado ao Instituto Federal de Educação do Pará (IFPA) desenvolvendo pesquisas sobre Modelagem, otimização e simulação computacional de sistemas e processos.

Coleção II - SINEPEM

Coleção II - SINEPEM

**Vol. 1 – EDUCAÇÃO E PROPRIEDADE INTELECTUAL:
convergência formativa e suas possibilidades**

Me. Ivo José Paes e Silva

**Vol. 2 - Possibilidades de Resolução de Problemas em
Aulas de Matemática**

Prof. Dr. Pedro Franco Sá

**Vol. 3 - Matemática Computacional aplicada à Ciência e
Tecnologia**

Prof. Dr. Denis C. L. Costa

Me. Hugo Carlos Machado Silva

Me. Sílvio Tadeu Teles da Silva

Eng. Heictor Alves de Oliveira Costa

**Vol. 4 - Intervenção didática de métodos numéricos com o
auxílio de ferramentas computacionais**

Prof. Me. Edson Costa Cruz

Prof Dra. Maria Manuel Da Silva Nascimento

Prof Dr. João Luís Honório Matias

Vol. 5 - Sistemas Lineares: do passado ao contemporâneo

Prof. Dr. Fernando Cardoso de Matos e

Prof. Dr. Glauco Lira Pereira

**Vol. 6 - Ideais Fundamentais de Limites Presentes na
Matemática Básica**

Prof. Dr. Reginaldo da Silva

Prof. Dr. Francisco Fialho Guedes Ferreira

Prof Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha

Vol. 7 - MATLAB: A Matemática nas Engenharias
Prof. Dr. Laércio Gouvêa Gomes

Vol. 8 - Viagem Afrofuturista pela Educação Matemática
Profa. Ma. Helena do Socorro Campos da Rocha

Vol. 9 - Cálculos de ANOVA de Experimentos fatoriais complexos
Prof. Dr. Alessandro Corrêa

Vol. 10 - Gamificação no ensino de Matemática
Prof. Dr. Saul Rodrigo da Costa Barreto
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Prof. Dr. Deusarino Oliveira Almeida Júnior

Vol. 11 - Competências multiplicativas em situações problema de multiplicação e divisão
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Prof. Dr. Reginaldo da Silva
Prof. Dr. Jorge Williams Cunha Ferreira

GM²SC

**Gradiente de Modelagem
Matemática e
Simulação Computacional**

