Cinemática Directa e Inversa

2.1.- Vectores posición del sistema a resolver

2.1.1- Los vectores posición de los puntos 2 y 4

In[•]:=
```
p2 = {l1 Cos[θ1] + l5/2, l1 Sin[θ1]};
p4 = {l4 Cos[θ4] - l5/2, l4 Sin[θ4]};
```

2.1.2- Coordenadas de los puntos restantes:

In[•]:=
```
P1 = {l5/2, 0};
P3 = {X3, Y3};
P5 = {-l5/2, 0};
```

2.1.3- Teniendo los valores de los vectores posición p2 y p4, se obtendrían las coordenadas, de esos respectivos puntos. Por lo que, se puede formar vectores desde P2 a P3 y de P4 a P3:

In[•]:=
```
VP2P3 = P3 - p2;
VP2P3 // MatrixForm
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{l5}{2} + X3 - l1\,Cos[\theta1] \\ Y3 - l1\,Sin[\theta1] \end{pmatrix}$$

In[•]:=
```
VP4P3 = P3 - p4;
VP4P3 // MatrixForm
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{l5}{2} + X3 - l4\,Cos[\theta4] \\ Y3 - l4\,Sin[\theta4] \end{pmatrix}$$

2.1.4- Sabemos que la magnitud de los dos vectores encontrados anteriormente son l2 y l3 respectivamente, por lo que:

$$l2 = \sqrt{VP2P3X^2 + VP2P3Y^2} \tag{0.1}$$

$$l3 = \sqrt{VP4P3X^2 + VP4P3Y^2} \tag{0.2}$$

Donde:

- VP2P3X: Componente en “x” del vector VP2P3
- VP2P3Y: Componente en “y” del vector VP2P3
- VP4P3X: Componente en “x” del vector VP4P3
- VP4P3Y: Componente en "y" del vector VP4P3
- l2 y l3: Magnitud de las barras 2 y 3, respectivamente.

2.1.5- Arreglando las ecuaciones (1) y (2) de la siguiente manera, se obtiene el sistema de ecuaciones a resolver:

$$0 = VP2P3X^2 + VP2P3Y^2 - l2^2 \tag{0.3}$$

$$0 = VP4P3X^2 + VP4P3Y^2 - l3^2 \tag{0.4}$$

In[•]:=
```
EcL2 = VP2P3[[1]]^2 + VP2P3[[2]]^2 - l2^2 == 0;
EcL3 = VP4P3[[1]]^2 + VP4P3[[2]]^2 - l3^2 == 0;
{EcL2, EcL3} // MatrixForm
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -l2^2 + \left(-\frac{l5}{2} + X3 - l1\,Cos[\theta1]\right)^2 + (Y3 - l1\,Sin[\theta1])^2 == 0 \\ -l3^2 + \left(\frac{l5}{2} + X3 - l4\,Cos[\theta4]\right)^2 + (Y3 - l4\,Sin[\theta4])^2 == 0 \end{pmatrix}$$

2.2.- Cinemática directa

2.2.1- Igualando las ecuaciones (3) y (4), resolviendo para X3 y asignado el resultado a la variable P3X

In[•]:=
```
EcL2[[1]] == EcL3[[1]]
P3X = X3 /. Solve[EcL2[[1]] == EcL3[[1]], X3][[1]]
```

Out[•]=
$$-l2^2 + \left(-\frac{l5}{2} + X3 - l1\, Cos[\theta 1]\right)^2 + (Y3 - l1\, Sin[\theta 1])^2 == -l3^2 + \left(\frac{l5}{2} + X3 - l4\, Cos[\theta 4]\right)^2 + (Y3 - l4\, Sin[\theta 4])^2$$

Out[•]=
$$\frac{l1^2 - l2^2 + l3^2 - l4^2 + l1\, l5\, Cos[\theta 1] + l4\, l5\, Cos[\theta 4] - 2\, l1\, Y3\, Sin[\theta 1] + 2\, l4\, Y3\, Sin[\theta 4]}{2\,(l5 + l1\, Cos[\theta 1] - l4\, Cos[\theta 4])}$$

2.2.2- Factorizando P3X:

In[•]:=
```
Collect[P3X, Y3]
```

Out[•]=
$$\frac{l1^2 - l2^2 + l3^2 - l4^2 + l1\, l5\, Cos[\theta 1] + l4\, l5\, Cos[\theta 4]}{2\,(l5 + l1\, Cos[\theta 1] - l4\, Cos[\theta 4])} + \frac{Y3\,(-2\, l1\, Sin[\theta 1] + 2\, l4\, Sin[\theta 4])}{2\,(l5 + l1\, Cos[\theta 1] - l4\, Cos[\theta 4])}$$

En el paso anterior se pueden observar dos términos:

$$f = \frac{l1^2 - l2^2 + l3^2 - l4^2 + l1\, l5\, Cos[\theta 1] + l4\, l5\, Cos[\theta 4]}{2\,(l5 + l1\, Cos[\theta 1] - l4\, Cos[\theta 4])} \tag{0.5}$$

$$g = \frac{(-2\, l1\, Sin[\theta 1] + 2\, l4\, Sin[\theta 4])}{2\,(l5 + l1\, Cos[\theta 1] - l4\, Cos[\theta 4])} \tag{0.6}$$

Por lo que, P3X reducida, queda de la siguiente manera:

$$X3red = g\, Y3 + f \tag{0.7}$$

In[•]:=
```
P3Xred = (g) Y3 + f;
```

2.2.3.- Sustituyendo este valor de P3X reducido en la ecuación (3)

In[•]:=
```
EcL3 /. X3 → P3Xred
```

Out[•]=
$$-L3^2 + \left(f + \frac{L5}{2} + g\, Y3 - L4\, Cos[\theta 4]\right)^2 + (Y3 - L4\, Sin[\theta 4])^2 == 0$$

2.2.4- Resolviendo para Y3:

In[•]:=
```
SolP3Y = Solve[EcL3 /. X3 → P3Xred, Y3] // Simplify;
SolP3Y // MatrixForm
```

Out[•]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} Y3 \to -\frac{2\, f\, g + g\, L5 - 2\, g\, L4\, Cos[\theta 4] - 2\, L4\, Sin[\theta 4] + \sqrt{-(1+g^2)\,(4\, f^2 - 4\, L3^2 + 4\, L4^2 + 4\, f\, L5 + L5^2 - 4\, L4\,(2\, f + L5)\, Cos[\theta 4]) + (g\,(2\, f + L5) - 2\, g\, L4\, Cos[\theta 4] - 2\, L4\, Sin[\theta 4])^2}}{2\,(1+g^2)} \\ Y3 \to \frac{-2\, f\, g - g\, L5 + 2\, g\, L4\, Cos[\theta 4] + 2\, L4\, Sin[\theta 4] + \sqrt{-(1+g^2)\,(4\, f^2 - 4\, L3^2 + 4\, L4^2 + 4\, f\, L5 + L5^2 - 4\, L4\,(2\, f + L5)\, Cos[\theta 4]) + (g\,(2\, f + L5) - 2\, g\, L4\, Cos[\theta 4] - 2\, L4\, Sin[\theta 4])^2}}{2\,(1+g^2)} \end{pmatrix}$$

De la sentencia anterior se pueden observar dos soluciones:

In[•]:=
```
(*Y positivo -Signo de la raíz positivo-*)
SolP3Y[[2]] // MatrixForm
```

Out[•]//MatrixForm=
$$\left(Y3 \to \frac{-2\, f\, g - g\, L5 + 2\, g\, L4\, Cos[\theta 4] + 2\, L4\, Sin[\theta 4] + \sqrt{-(1+g^2)\,(4\, f^2 - 4\, L3^2 + 4\, L4^2 + 4\, f\, L5 + L5^2 - 4\, L4\,(2\, f + L5)\, Cos[\theta 4]) + (g\,(2\, f + L5) - 2\, g\, L4\, Cos[\theta 4] - 2\, L4\, Sin[\theta 4])^2}}{2\,(1+g^2)} \right)$$

In[•]:=
```
(*Y negativo -Signo de la raíz negativo-*)
SolP3Y[[1]] // MatrixForm
```

Out[•]//MatrixForm=
$$\left(Y3 \to -\frac{2\, f\, g + g\, L5 - 2\, g\, L4\, Cos[\theta 4] - 2\, L4\, Sin[\theta 4] + \sqrt{-(1+g^2)\,(4\, f^2 - 4\, L3^2 + 4\, L4^2 + 4\, f\, L5 + L5^2 - 4\, L4\,(2\, f + L5)\, Cos[\theta 4]) + (g\,(2\, f + L5) - 2\, g\, L4\, Cos[\theta 4] - 2\, L4\, Sin[\theta 4])^2}}{2\,(1+g^2)} \right)$$

Realizando cambios de variables:

$$b = 2\, f\, g + g\, l5 - 2\, g\, l4\, Cos[\theta 4] - 2\, l4\, Sin[\theta 4]$$

$$a = (1 + g^2)$$

$$c = f^2 - l3^2 + l4^2 + f\, l5 + \frac{l5^2}{4} - l4\,(2\,f + l5)\, Cos[\theta 4]$$

$$\sigma = -1 \text{ o } \sigma = 1 \text{ --> Depende de la solución}$$

Las dos soluciones de Y3 quedan de la siguiente manera:

$$Y3 = \frac{-b + \sigma\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \tag{0.8}$$

En σ se observa que hay dos posibles soluciones, esto corresponde a la configuración de brazos arriba y configuración de brazos abajo. Para la configuración de brazos arriba σ=1 y para la configuración de brazos abajo σ=-1

2.2.5.- Sustituyendo la ecuación (8) en (7):

$$X3 = g\left(\frac{b + \sigma\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right) + f \tag{0.9}$$

Resumiendo, las coordenadas del efector final quedan definidas por

$$X3 = g\left(\frac{-b + \sigma\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right) + f$$

$$Y3 = \frac{-b + \sigma\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

2.3.- Cinemática inversa

Usando las siguientes identidades: “half angle identities” en las ecuaciones (3) y (4):

$$Sin[\theta] = \frac{2\,Tan\left[\frac{\theta}{2}\right]}{1 + Tan\left[\frac{\theta}{2}\right]^2}$$

$$Cos[\theta] = \frac{1 - Tan\left[\frac{\theta}{2}\right]^2}{1 + Tan\left[\frac{\theta}{2}\right]^2}$$

■ 2.3.1.- Para la ecuación (3)

Desarrollando la ecuación (3)

```
In[•]:= EcL2 // Expand
        Simplify[EcL2[[1]] // Expand] == 0
```

Out[•]= $-L2^2 + \frac{L5^2}{4} - L5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + L1\,L5\,Cos[\theta 1] - 2\,L1\,X3\,Cos[\theta 1] + L1^2\,Cos[\theta 1]^2 - 2\,L1\,Y3\,Sin[\theta 1] + L1^2\,Sin[\theta 1]^2 == 0$

Out[•]= $L1^2 - L2^2 + \frac{L5^2}{4} - L5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + L1\,(L5 - 2\,X3)\,Cos[\theta 1] - 2\,L1\,Y3\,Sin[\theta 1] == 0$

2.3.1.1.- Sustituyendo Sin[θ] y Cos[θ] por las identidades “half angle identities”:

In[•]:= $l1^2 - l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + l1\,(l5 - 2\,X3)\,Cos[\theta 1] - 2\,l1\,Y3\,Sin[\theta 1]\ /.\ Cos[\theta 1] \to \frac{1 - Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2}{1 + Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2}\ /.$

$Sin[\theta 1] \to \frac{2\,Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]}{1 + Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2}$

Out[•]= $L1^2 - L2^2 + \frac{L5^2}{4} - L5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - \frac{4\,L1\,Y3\,Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]}{1 + Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2} + \frac{L1\,(L5 - 2\,X3)\left(1 - Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2\right)}{1 + Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2}$

2.3.1.2.- Realizando las operaciones y multiplicando ambos extremos de la igualdad por $1 + Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2$:

In[•]:= $\left(l1^2 - l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2\right)\left(1 + Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2\right)$ // Expand

Out[ ]= $$l1^2 - l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + l1^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 - l2^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4}\,l5^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 - l5\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + X3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + Y3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2$$

In[ ]:= $$l1\,(l5 - 2\,X3)\left(1 - \mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2\right) \,//\, \mathrm{Expand}$$

Out[ ]= $$l1\,l5 - 2\,l1\,X3 - l1\,l5\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + 2\,l1\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2$$

In[ ]:= $$\mathrm{Collect}\Big[l1^2 - l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + l1^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 - l2^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4}\,l5^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 - l5\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + X3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + Y3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 - 4\,l1\,Y3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right] + l1\,l5 - 2\,l1\,X3 - l1\,l5\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + 2\,l1\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 == 0,\ \mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2\Big]$$

Out[ ]= $$l1^2 - l2^2 + l1\,l5 + \frac{l5^2}{4} - 2\,l1\,X3 - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - 4\,l1\,Y3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right] + \left(l1^2 - l2^2 - l1\,l5 + \frac{l5^2}{4} + 2\,l1\,X3 - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2\right)\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 == 0$$

2.3.1.3.- Del resultado anterior, se puede realizar los siguientes cambios de variable:

$$c1 = l1^2 - l2^2 + l1\,l5 + \frac{l5^2}{4} - 2\,l1\,X3 - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2$$

$$b1 = -4\,l1\,Y3$$

$$a1 = l1^2 - l2^2 - l1\,l5 + \frac{l5^2}{4} + 2\,l1\,X3 - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2$$

$$\alpha 1 = Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]$$

Por lo que, el resultado para la eq. (3), puede expresarse de la siguiente manera:

$$a1\,\alpha 1^2 + b1\,\alpha 1 + c1 = 0 \tag{0.10}$$

2.3.1.4.- Resolviendo la ecuación 10:

$$\theta 1 = 2\,ArcTan\left[\frac{-b1 + \sigma 1\sqrt{b1^2 - (4\,a1\,c1)}}{2\,a1}\right] \tag{0.11}$$

Donde $\sigma 1$, puede tomar el valor de: $\sigma 1$=1 o $\sigma 1$=-1

■ 2.3.2.- Para la ecuación (4)

Desarrollando la ecuación (4)

In[ ]:=
```
EcL3 // Expand
Simplify[EcL3[[1]] // Expand] == 0
```

Out[ ]= $$-l3^2 + \frac{l5^2}{4} + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - l4\,l5\,\mathrm{Cos}[\theta 4] - 2\,l4\,X3\,\mathrm{Cos}[\theta 4] + l4^2\,\mathrm{Cos}[\theta 4]^2 - 2\,l4\,Y3\,\mathrm{Sin}[\theta 4] + l4^2\,\mathrm{Sin}[\theta 4]^2 == 0$$

Out[ ]= $$-l3^2 + l4^2 + \frac{l5^2}{4} + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - l4\,(l5 + 2\,X3)\,\mathrm{Cos}[\theta 4] - 2\,l4\,Y3\,\mathrm{Sin}[\theta 4] == 0$$

2.3.2.1.- Realizando el cambio de Sen[θ4] y Cos[θ4] por las identidades “half angle identities”

In[ ]:= $$\mathbf{-l3^2 + l4^2 + \frac{l5^2}{4} + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - l4\,(l5 + 2\,X3)\,Cos[\theta 4] - 2\,l4\,Y3\,Sin[\theta 4]\ /.\ Cos[\theta 1] \to \frac{1 - Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2}{1 + Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2}\ /.\ Sin[\theta 1] \to \frac{2\,Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]}{1 + Tan\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2}}$$

Out[ ]= $$-l3^2 + l4^2 + \frac{l5^2}{4} + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - l4\,(l5 + 2\,X3)\,\mathrm{Cos}[\theta 4] - 2\,l4\,Y3\,\mathrm{Sin}[\theta 4]$$

2.3.2.2.- Realizando las operaciones entre paréntesis y multiplicando ambos términos de la igualdad por: $1 + \mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2$

In[*]:= $\left(-13^2 + 14^2 + \frac{15^2}{4} + 15\,X3 + X3^2 + Y3^2\right)\left(1 + Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2\right)$ // Expand

Out[*]= $-l3^2 + l4^2 + \frac{l5^2}{4} + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - l3^2\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + l4^2\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + \frac{1}{4}\,l5^2\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + l5\,X3\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + X3^2\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + Y3^2\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2$

In[*]:= $-14\,(15 + 2\,X3)\left(1 - Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2\right)$ // Expand

Out[*]= $-l4\,l5 - 2\,l4\,X3 + l4\,l5\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + 2\,l4\,X3\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2$

In[*]:= Collect$\left[-13^2 + 14^2 + \frac{15^2}{4} + 15\,X3 + X3^2 + Y3^2 - 13^2\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + 14^2\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + \frac{1}{4}\,15^2\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + 15\,X3\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + X3^2\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + Y3^2\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 - 4\,14\,Y3\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right] - 14\,15 - 2\,14\,X3 + 14\,15\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 + 2\,14\,X3\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 == 0,\ Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2\right]$

Out[*]= $-l3^2 + l4^2 - l4\,l5 + \frac{l5^2}{4} - 2\,l4\,X3 + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - 4\,l4\,Y3\,Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right] + \left(-l3^2 + l4^2 + l4\,l5 + \frac{l5^2}{4} + 2\,l4\,X3 + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2\right)Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2 == 0$

2.3.2.3.- Del resultado anterior se puede realizar los siguientes cambios de variable:

$$a2 = -l3^2 + l4^2 + l4\,l5 + \frac{l5^2}{4} + 2\,l4\,X3 + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2$$

$$b2 = -4\,l4\,Y3$$

$$c2 = -l3^2 + l4^2 - l4\,l5 + \frac{l5^2}{4} - 2\,l4\,X3 + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2$$

$$\alpha 2 = Tan\left[\frac{\theta 4}{2}\right]$$

Por lo que, el resultado para la eq. (4), puede expresarse de la siguiente manera:

$$a2\,\alpha 2^2 + b2\,\alpha 2 + c2 = 0 \qquad (0.12)$$

2.3.2.4.- Resolviendo la ecuación 12

$$\theta 4 = 2\,ArcTan\left[\frac{-b2 + \sigma 2\sqrt{b2^2 - (4\,a2\,c2)}}{2\,a2}\right] \qquad (0.13)$$

Donde $\sigma 2$, puede tomar el valor de: $\sigma 2=1$ o $\sigma 2=-1$

■ 2.3.3.- De la ecuación 11 y 13 se observa que pueden existir 4 posibles soluciones:

$$\theta 1 = 2\,ArcTan\left[\frac{-b1 + \sigma 1\sqrt{b1^2 - (4\,a1\,c1)}}{2\,a1}\right]$$

$$\theta 4 = 2\,ArcTan\left[\frac{-b2 + \sigma 2\sqrt{b2^2 - (4\,a2\,c2)}}{2\,a2}\right]$$

1. $\sigma 1=1$ $\sigma 2=1$
2. $\sigma 1=-1$ $\sigma 2=1$
3. $\sigma 1=1$ $\sigma 2=-1$
4. $\sigma 1=-1$ $\sigma 2=-1$

Estas combinaciones corresponden a los 4 diferentes modos de trabajo.