## 2.- Método Geométrico

2.1.- Los vectores posición de los puntos 2 y 4:

```
In[•]:= p2 = {l1 Cos[θ1] + 15/2, l1 Sin[θ1]};
        p4 = {l4 Cos[θ4] - 15/2, l4 Sin[θ4]};
```

2.2.- Coordenadas de los puntos restantes

```
In[•]:= P1 = {15/2, 0};
        P3 = {X3, Y3};
        P5 = {-15/2, 0};
```

2.3.- Teniendo los valores de los vectores posición p2 y p4, se obtendrían las coordenadas, de esos respectivos puntos. Por lo que, se puede formar vectores desde P2 a P3 y de P4 a P3:

```
In[•]:= VP2P3 = P3 - p2 ;
        VP2P3 // MatrixForm
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{15}{2} + X3 - l1\,\mathrm{Cos}[\theta 1] \\ Y3 - l1\,\mathrm{Sin}[\theta 1] \end{pmatrix}$$

```
In[•]:= VP4P3 = P3 - p4;
        VP4P3 // MatrixForm
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{2} + X3 - l4\,\mathrm{Cos}[\theta 4] \\ Y3 - l4\,\mathrm{Sin}[\theta 4] \end{pmatrix}$$

2.4.- Sabemos que la magnitud de los dos vectores encontrados anteriormente son l2 y l3 respectivamente, por lo que:

$$l2 = \sqrt{VP2P3X^2 + VP2P3Y^2} \tag{0.1}$$

$$l3 = \sqrt{VP4P3X^2 + VP4P3Y^2} \tag{0.2}$$

Donde:

- VP2P3X: Componente en “x” del vector VP2P3
- VP2P3Y: Componente en “y” del vector VP2P3
- VP4P3X: Componente en “x” del vector VP4P3
- VP4P3Y: Componente en "y" del vector VP4P3
- l2 y l3: Magnitud de las barras 2 y 3, respectivamente.

```
In[•]:= EcL2 = VP2P3[[1]]^2 + VP2P3[[2]]^2 - l2^2 == 0;
        EcL3 = VP4P3[[1]]^2 + VP4P3[[2]]^2 - l3^2 == 0;
        {EcL2, EcL3} // MatrixForm
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -l2^2 + \left(-\frac{15}{2} + X3 - l1\,\mathrm{Cos}[\theta 1]\right)^2 + (Y3 - l1\,\mathrm{Sin}[\theta 1])^2 == 0 \\ -l3^2 + \left(\frac{15}{2} + X3 - l4\,\mathrm{Cos}[\theta 4]\right)^2 + (Y3 - l4\,\mathrm{Sin}[\theta 4])^2 == 0 \end{pmatrix}$$

2.5- Arreglando las ecuaciones (1) y (2) de la siguiente manera, se obtiene el sistema de ecuaciones a resolver:

$$0 = VP2P3X^2 + VP2P3Y^2 - l2^2 \tag{0.3}$$

$$0 = VP4P3X^2 + VP4P3Y^2 - l3^2 \tag{0.4}$$

#### 2.6.- Cinemática directa

2.6.1.- Igualando las ecuaciones (3) y (4), resolviendo para X3 y asignado el resultado a la variable P3X

```
In[•]:= P3X = X3 /. Solve[EcL2[[1]] == EcL3[[1]], X3][[1]]
```

Out[•]= $\left(l1^2 - l2^2 + l3^2 - l4^2 + l1\, l5 \,Cos[\theta 1] + l4\, l5\, Cos[\theta 4] - 2\, l1\, Y3\, Sin[\theta 1] + 2\, l4\, Y3\, Sin[\theta 4]\right) / (2\,(l5 + l1\, Cos[\theta 1] - l4\, Cos[\theta 4]))$

2.6.2.- Factorizando P3X:

```
Collect[P3X, Y3]
```

$$\frac{l1^2 - l2^2 + l3^2 - l4^2 + l1\, l5\, Cos[\theta 1] + l4\, l5\, Cos[\theta 4]}{2\,(l5 + l1\, Cos[\theta 1] - l4\, Cos[\theta 4])} + \frac{Y3\,(-2\, l1\, Sin[\theta 1] + 2\, l4\, Sin[\theta 4])}{2\,(l5 + l1\, Cos[\theta 1] - l4\, Cos[\theta 4])}$$

En el paso anterior (2.5.2) se pueden observar dos términos:

$$f = \frac{l1^2 - l2^2 + l3^2 - l4^2 + l1\, l5\, Cos[\theta 1] + l4\, l5\, Cos[\theta 4]}{2\,(l5 + l1\, Cos[\theta 1] - l4\, Cos[\theta 4])} \quad (0.5)$$

$$g = \frac{(-2\, l1\, Sin[\theta 1] + 2\, l4\, Sin[\theta 4])}{2\,(l5 + l1\, Cos[\theta 1] - l4\, Cos[\theta 4])} \quad (0.6)$$

Por lo que, P3X reducida, queda de la siguiente manera:

$$X3 = g\, Y3 + f \quad (0.7)$$

In[•]:= `P3Xred = (g) Y3 + f`

Out[•]= `f + g Y3`

2.6.3.- Sustituyendo este valor de P3X reducido en la ecuación (3)

In[•]:= `EcL2 /. X3 → P3Xred`

Out[•]= $-l2^2 + \left(f - \frac{l5}{2} + g\, Y3 - l1\, Cos[\theta 1]\right)^2 + (Y3 - l1\, Sin[\theta 1])^2 == 0$

2.6.4.- Resolviendo para Y3:

In[•]:=
```
SolP3Y = Solve[EcL2 /. X3 → P3Xred, Y3] // Simplify;
SolP3Y // MatrixForm
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Y3 \to \frac{-2 f g + g\, l5 + 2 g\, l1\, Cos[\theta 1] + 2\, l1\, Sin[\theta 1] - \sqrt{-(1+g^2)\left(4 f^2 + 4\, l1^2 - 4\, l2^2 - 4 f\, l5 + l5^2 + 4\, l1\,(-2 f + l5)\, Cos[\theta 1]\right) + \left(g\,(-2 f + l5) + 2 g\, l1\, Cos[\theta 1] + 2\, l1\, Sin[\theta 1]\right)^2}}{2\,(1+g^2)} \\ Y3 \to \frac{-2 f g + g\, l5 + 2 g\, l1\, Cos[\theta 1] + 2\, l1\, Sin[\theta 1] + \sqrt{-(1+g^2)\left(4 f^2 + 4\, l1^2 - 4\, l2^2 - 4 f\, l5 + l5^2 + 4\, l1\,(-2 f + l5)\, Cos[\theta 1]\right) + \left(g\,(-2 f + l5) + 2 g\, l1\, Cos[\theta 1] + 2\, l1\, Sin[\theta 1]\right)^2}}{2\,(1+g^2)} \end{pmatrix}$$

De la sentencia anterior se pueden observar dos soluciones:

```
(*Y positivo -Signo de la raíz positivo-*)
SolP3Y⟦2⟧ // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} Y3 \to \frac{-2 f g + g\, l5 + 2 g\, l1\, Cos[\theta 1] + 2\, l1\, Sin[\theta 1] + \sqrt{-(1+g^2)\left(4 f^2 + 4\, l1^2 - 4\, l2^2 - 4 f\, l5 + l5^2 + 4\, l1\,(-2 f + l5)\, Cos[\theta 1]\right) + \left(g\,(-2 f + l5) + 2 g\, l1\, Cos[\theta 1] + 2\, l1\, Sin[\theta 1]\right)^2}}{2\,(1+g^2)} \end{pmatrix}$$

```
(*Y negativo -Signo de la raíz negativo-*)
SolP3Y⟦1⟧ // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} Y3 \to \frac{-2 f g + g\, l5 + 2 g\, l1\, Cos[\theta 1] + 2\, l1\, Sin[\theta 1] - \sqrt{-(1+g^2)\left(4 f^2 + 4\, l1^2 - 4\, l2^2 - 4 f\, l5 + l5^2 + 4\, l1\,(-2 f + l5)\, Cos[\theta 1]\right) + \left(g\,(-2 f + l5) + 2 g\, l1\, Cos[\theta 1] + 2\, l1\, Sin[\theta 1]\right)^2}}{2\,(1+g^2)} \end{pmatrix}$$

Realizando cambios de variables:

$$b = -2 f g + g\, l5 + 2 g\, l1\, Cos[\theta 1] + 2\, l1\, Sin[\theta 1]$$

$$a = (1 + g^2)$$

$$c = f^2 + l1^2 - l2^2 - f\, l5 + \frac{l5^2}{4} + l1\,(-2 f + l5)\, Cos[\theta 1]$$

$\sigma = -1$ o $\sigma = 1$ --> Depende de la solución

Las dos soluciones de Y3 quedan de la siguiente manera:

$$Y3 = \frac{b + \sigma \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} \tag{0.8}$$

En $\sigma$ se observa que hay dos posibles soluciones, esto corresponde a la configuración de brazos arriba y configuración de brazos abajo. Para la configuración de brazos arriba $\sigma$=1 y para la configuración de brazos abajo $\sigma$=-1

2.6.5.- Sustituyendo la ecuación (8) en (7):

$$X3 = g\left(\frac{-b + \sigma \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}\right) + f \tag{0.9}$$

Por lo que, resumiendo. Las coordenadas del efector final quedan definidas por

$$X3 = g\left(\frac{b + \sigma \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}\right) + f$$

$$Y3 = \frac{b + \sigma \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

#### 2.7.- Cinemática inversa

Usando las siguientes identidades: “half angle identities” en las ecuaciones (3) y (4):

$$\text{Sin}[\theta] = \frac{2\,\text{Tan}\left[\frac{\theta}{2}\right]}{1 + \text{Tan}\left[\frac{\theta}{2}\right]^2}$$

$$\text{Cos}[\theta] = \frac{1 - \text{Tan}\left[\frac{\theta}{2}\right]^2}{1 + \text{Tan}\left[\frac{\theta}{2}\right]^2}$$

##### 2.7.1.- Para la ecuación (3)

Desarrollando la ecuación (3)

In[]:= `EcL2 // Expand`

Out[]= $$-l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + l1\,l5\,\text{Cos}[\theta1] - 2\,l1\,X3\,\text{Cos}[\theta1] + l1^2\,\text{Cos}[\theta1]^2 - 2\,l1\,Y3\,\text{Sin}[\theta1] + l1^2\,\text{Sin}[\theta1]^2 == 0$$

$$\text{Simplify}\left[-l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + l1\,l5\,\text{Cos}[\theta1] - 2\,l1\,X3\,\text{Cos}[\theta1] + l1^2\,\text{Cos}[\theta1]^2 - 2\,l1\,Y3\,\text{Sin}[\theta1] + l1^2\,\text{Sin}[\theta1]^2\right] == 0$$

$$l1^2 - l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + l1\,(l5 - 2\,X3)\,\text{Cos}[\theta1] - 2\,l1\,Y3\,\text{Sin}[\theta1] == 0$$

2.7.1.1.- Sustituyendo Sin[$\theta$] y Cos[$\theta$] por las identidades “half angle identities”:

$$l1^2 - l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + l1\,(l5 - 2\,X3)\,\text{Cos}[\theta1] - 2\,l1\,Y3\,\text{Sin}[\theta1]\ /.\ \text{Cos}[\theta1] \to \frac{1 - \text{Tan}\left[\frac{\theta1}{2}\right]^2}{1 + \text{Tan}\left[\frac{\theta1}{2}\right]^2}\ /.$$
$$\text{Sin}[\theta1] \to \frac{2\,\text{Tan}\left[\frac{\theta1}{2}\right]}{1 + \text{Tan}\left[\frac{\theta1}{2}\right]^2}$$

$$l1^2 - l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - \frac{4\,l1\,Y3\,\text{Tan}\left[\frac{\theta1}{2}\right]}{1 + \text{Tan}\left[\frac{\theta1}{2}\right]^2} + \frac{l1\,(l5 - 2\,X3)\left(1 - \text{Tan}\left[\frac{\theta1}{2}\right]^2\right)}{1 + \text{Tan}\left[\frac{\theta1}{2}\right]^2}$$

2.7.1.2.- Realizando las operaciones y multiplicando ambos extremos de la igualdad por $1 + \text{Tan}\left[\frac{\theta1}{2}\right]^2$ :

$$\left(l1^2 - l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2\right)\left(1 + \text{Tan}\left[\frac{\theta1}{2}\right]^2\right)\ //\ \text{Expand}$$

$$l1^2 - l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + l1^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 - l2^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4}\,l5^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 - l5\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + X3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + Y3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2$$

$$\mathbf{l1\,(l5 - 2\,X3)\left(1 - \mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2\right) //\ Expand}$$

$$l1\,l5 - 2\,l1\,X3 - l1\,l5\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + 2\,l1\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2$$

$$\mathbf{Collect\left[l1^2 - l2^2 + \frac{l5^2}{4} - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 + l1^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 - l2^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4}\,l5^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 - l5\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + X3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + Y3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 - 4\,l1\,Y3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right] + l1\,l5 - 2\,l1\,X3 - l1\,l5\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 + 2\,l1\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 == 0,\ \mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2\right]}$$

$$l1^2 - l2^2 + l1\,l5 + \frac{l5^2}{4} - 2\,l1\,X3 - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - 4\,l1\,Y3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right] + \left(l1^2 - l2^2 - l1\,l5 + \frac{l5^2}{4} + 2\,l1\,X3 - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2\right)\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]^2 == 0$$

2.7.1.3.- Del resultado anterior(2.7.1.2) se puede realizar los siguientes cambios de variable:

$$c1 = l1^2 - l2^2 + l1\,l5 + \frac{l5^2}{4} - 2\,l1\,X3 - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2$$

$$b1 = -4\,l1\,Y3$$

$$a1 = l1^2 - l2^2 - l1\,l5 + \frac{l5^2}{4} + 2\,l1\,X3 - l5\,X3 + X3^2 + Y3^2$$

$$\alpha 1 = \mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 1}{2}\right]$$

Por lo que, el resultado de 2.7.1.2, puede expresarse:

$$a1\alpha 1^2 + b1\,\alpha 1 + c1 = 0 \tag{0.10}$$

2.7.1.4.- Resolviendo la ecuación 10:

$$\theta 1 = 2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-b1 + \sigma 1\sqrt{b1^2 - (4\,a1\,c1)}}{2\,a1}\right] \tag{0.11}$$

Donde $\sigma 1$, puede tomar el valor de: $\sigma 1$=1 o $\sigma 1$=-1

**2.7.2.- Para la ecuación (4)**

Desarrollando la ecuación (4)

In[ ]:= **EcL3 // Expand**

Out[ ]= $-l3^2 + \frac{l5^2}{4} + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - l4\,l5\,\mathrm{Cos}[\theta 4] - 2\,l4\,X3\,\mathrm{Cos}[\theta 4] + l4^2\,\mathrm{Cos}[\theta 4]^2 - 2\,l4\,Y3\,\mathrm{Sin}[\theta 4] + l4^2\,\mathrm{Sin}[\theta 4]^2 == 0$

$$\mathbf{Simplify\left[-l3^2 + \frac{l5^2}{4} + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - l4\,l5\,\mathrm{Cos}[\theta 4] - 2\,l4\,X3\,\mathrm{Cos}[\theta 4] + l4^2\,\mathrm{Cos}[\theta 4]^2 - 2\,l4\,Y3\,\mathrm{Sin}[\theta 4] + l4^2\,\mathrm{Sin}[\theta 4]^2\right] == 0}$$

$$-l3^2 + l4^2 + \frac{l5^2}{4} + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - l4\,(l5 + 2\,X3)\,\mathrm{Cos}[\theta 4] - 2\,l4\,Y3\,\mathrm{Sin}[\theta 4] == 0$$

2.7.2.1.- Realizando el cambio de Sen[$\theta$4] y Cos[$\theta$4] por las identidades “half angle identities”

$$\mathbf{-l3^2 + l4^2 + \frac{l5^2}{4} + l5\,X3 + X3^2 + Y3^2 - l4\,(l5 + 2\,X3)\,\mathrm{Cos}[\theta 4] - 2\,l4\,Y3\,\mathrm{Sin}[\theta 4]\ /.\ \mathrm{Sin}[\theta 4] \to \frac{2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]}{1 + \mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2}\ /.\ \mathrm{Cos}[\theta 4] \to \frac{1 - \mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2}{1 + \mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2}}$$

$$-13^2+14^2+\frac{15^2}{4}+15\,X3+X3^2+Y3^2-\frac{4\,14\,Y3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]}{1+\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2}-\frac{14\,(15+2\,X3)\left(1-\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2\right)}{1+\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2}$$

2.7.2.2.- Realizando las operaciones entre paréntesis y multiplicando ambos términos de la igualdad por: $1+\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2$

$$\left(-13^2+14^2+\frac{15^2}{4}+15\,X3+X3^2+Y3^2\right)\left(1+\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2\right)\ //\ \mathrm{Expand}$$

$$-13^2+14^2+\frac{15^2}{4}+15\,X3+X3^2+Y3^2-13^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+14^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+\frac{1}{4}15^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+15\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+X3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+Y3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2$$

$$-14\,(15+2\,X3)\left(1-\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2\right)\ //\ \mathrm{Expand}$$

$$-14\,15-2\,14\,X3+14\,15\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+2\,14\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2$$

$$\mathrm{Collect}\left[-13^2+14^2+\frac{15^2}{4}+15\,X3+X3^2+Y3^2-13^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+14^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+\frac{1}{4}15^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+15\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+X3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+Y3^2\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2-4\,14\,Y3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]-14\,15-2\,14\,X3+14\,15\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2+2\,14\,X3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2==0,\ \mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2\right]$$

$$-13^2+14^2-14\,15+\frac{15^2}{4}-2\,14\,X3+15\,X3+X3^2+Y3^2-4\,14\,Y3\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]+\left(-13^2+14^2+14\,15+\frac{15^2}{4}+2\,14\,X3+15\,X3+X3^2+Y3^2\right)\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]^2==0$$

2.7.2.3.- Del resultado anterior(2.7.2.2) se puede realizar los siguientes cambios de variable:

$$a2=-l3^2+l4^2+l4\,l5+\frac{l5^2}{4}+2\,l4\,X3+l5\,X3+X3^2+Y3^2$$

$$b2=-4\,l4\,Y3$$

$$c2=-l3^2+l4^2-l4\,l5+\frac{l5^2}{4}-2\,l4\,X3+l5\,X3+X3^2+Y3^2$$

$$\alpha 2=\mathrm{Tan}\left[\frac{\theta 4}{2}\right]$$

El resultado 2.7.2.2 se expresa de la siguiente manera

$$a2\,\alpha 2^2+b2\,\alpha 2+c2=0 \qquad (0.12)$$

15.- Resolviendo la ecuación 12

$$\theta 4=2\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{-b2+\sigma 2\sqrt{b2^2-(4\,a2\,c2)}}{2\,a2}\right] \qquad (0.13)$$

Donde $\sigma 2$, puede tomar el valor de: $\sigma 2$=1 o $\sigma 2$=-1

2.7.2.4.- De la ecuación 11 y 13 se observa que pueden existir 4 posibles soluciones:

1. $\sigma 1$=1 $\sigma 2$=1
2. $\sigma 1$=-1 $\sigma 2$=1
3. $\sigma 1$=1 $\sigma 2$=-1
4. $\sigma 1$=-1 $\sigma 2$=-1

Estas combinaciones corresponden a los 4 diferentes modos de trabajo.