Reporte Técnico: Resolución de Mínimos Cuadrados mediante la Pseudo-Inversa de Moore-Penrose

Gabriela López Gutiérrez
Escuela de Matemática Aplicada
Universidad Nacional Autónoma de Honduras
e-mail: gmargothlopez@gmail.com

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

Reporte Técnico: Resolución de Mínimos Cuadrados mediante la Pseudo-Inversa de Moore-Penrose

***Resumen*—En este reporte se introduce, define y ejemplifica el uso de la pseudoinversa de Moore-Penrose para resolver problemas de mínimos cuadrados en sistemas lineales. Se presenta un enfoque matemáticamente riguroso utilizando la descomposición en valores singulares (SVD) como herramienta central para calcular la pseudoinversa. Este método garantiza una solución óptima en el sentido de los mínimos cuadrados y encuentra aplicaciones en diversos campos.**

I. Introducción

En la resolución de sistemas lineales, la inversa de una matriz es una herramienta fundamental. Sin embargo, cuando la matriz no es cuadrada o no es invertible, se requiere una generalización: la pseudoinversa de Moore-Penrose. Este concepto es crucial para abordar problemas en sistemas, sobre en sistemas donde el número de ecuaciones excede el número de incógnitas, lo que hace que no existan soluciones exactas.

El problema de mínimos cuadrados surge en este contexto. Matemáticamente, consiste en encontrar una solución x que minimice la norma cuadrática del error:

$$\min_x \|b - Ax\|_2^2,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es una matriz de diseño, $b \in \mathbb{R}^m$ un vector de observaciones y $x \in \mathbb{R}^n$ un vector de parámetros. Este reporte explora cómo la pseudoinversa de Moore-Penrose, calculada mediante la descomposición en valores singulares (SVD), proporciona una solución óptima a este problema.

II. Preliminares y Notación

Denotamos $\mathbb{R}^{m\times n}$ como el espacio de matrices reales de dimensiones $m \times n$. Dados $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, el problema de mínimos cuadrados se formula como:

$$\min_x \|b - Ax\|_2^2.$$

La solución x está dada por:

$$x = A^+ b,$$

donde A^+ es la pseudoinversa de Moore-Penrose de A.

La descomposición en valores singulares (SVD) de A se escribe como:

$$A = U\Sigma V^T,$$

donde:

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices ortogonales.
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es una matriz diagonal con los valores singulares $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ en su diagonal.

III. Definición del Problema

Se busca resolver un sistema sobredeterminado $Ax \approx b$, minimizando el error cuadrático. Esto equivale a encontrar x que satisfaga:

$$\|b - Ax\|_2 = \min .$$

Cuando A no es invertible o no es cuadrada, se utiliza A^+, la pseudoinversa de Moore-Penrose, para obtener una solución única que minimice el error.

IV. Pseudo-Inversa mediante SVD

La pseudoinversa A^+ se calcula usando la descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$ como:

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T,$$

donde Σ^+ es la pseudoinversa de Σ, calculada como:

$$\Sigma^+_{ij} = \begin{cases} 1/\sigma_i & \text{si } \sigma_i \neq 0, \\ 0 & \text{si } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

V. Algoritmo

Para resolver el problema de mínimos cuadrados:

1. Calcular la descomposición $A = U\Sigma V^T$.
2. Formar Σ^+ invirtiendo los valores singulares no nulos.
3. Calcular $A^+ = V\Sigma^+ U^T$.
4. Resolver $x = A^+ b$.

VI. Resultados

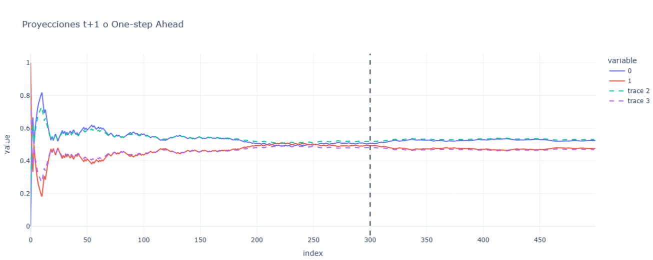

Figura 1. Representación gráfica de las estimaciones en $t + 1$.

VI-A. *Análisis e Interpretación*

El método basado en SVD garantiza estabilidad numérica y precisión al resolver problemas de mínimos cuadrados, especialmente en sistemas mal condicionados.

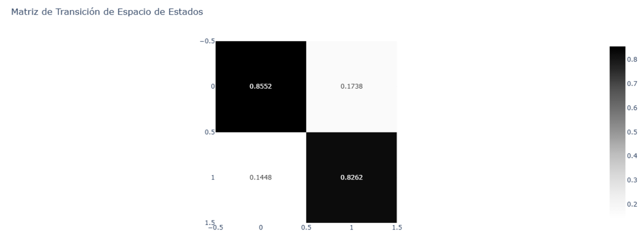

Figura 2. Resultados de la matriz T para los cálculos intermedios.

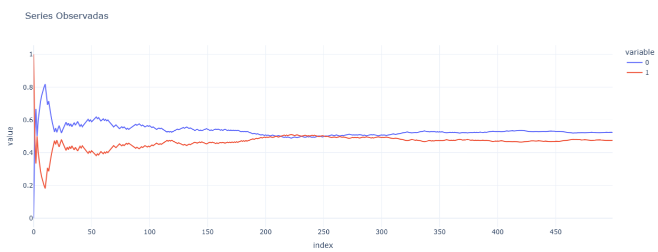

Figura 3. Distribución gráfica de los datos procesados.

VII. Conclusiones y Recomendaciones

La pseudoinversa de Moore-Penrose, calculada mediante SVD, es una herramienta efectiva para resolver problemas de mínimos cuadrados. Se recomienda su uso en aplicaciones que requieran soluciones robustas y eficientes a sistemas sobredeterminados.

Agradecimientos

Agradezco el apoyo de la Escuela de Matemática Aplicada de la UNAH.

Disponibilidad de Datos

El código y datos están disponibles en https://github.com/gmargothlopez/minimos-cuadrados.

Referencias

[1] H. Kopka and P. W. Daly, *A Guide to LaTeX*, 3rd ed. Harlow, England: Addison-Wesley, 1999.
[2] I. Markovsky, S. Van Huffel, J. C. Willems, B. De Moor (2005). *Exact and Approximate Modeling of Linear Systems: A Behavioral Approach.* SIAM.
[3] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 4th ed. Johns Hopkins University Press, 2013.
[4] GitHub Docs. Crear un repositorio. https://docs.github.com/es/github/getting-started-with-github/quickstart/create-a-repo.