CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Gabriel Bicalho Maroun

RELATÓRIO DE ATIVIDADE OFT - TURMA 3 - 24T34

Reconstrução de Imagens 2D utilizando

Transformada de Fourier Complexa

Novembro de 2025

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Transformada de Fourier é uma ferramenta matemática fundamental que permite decompor funções complexas em componentes mais simples - senos e cossenos de diferentes frequências. No contexto de processamento de imagens e sinais, esta técnica possibilita a análise e reconstrução de padrões complexos através de suas componentes harmônicas.

Este relatório apresenta a implementação de um algoritmo de síntese de Fourier complexa para reconstrução de imagens 2D utilizando o conceito de epiciclos. O objetivo é demonstrar visualmente como uma imagem pode ser reconstruída através da soma de círculos rotativos (epiciclos) cujas propriedades são determinadas pelos coeficientes da série de Fourier.

A atividade foi desenvolvida com base no tutorial disponibilizado no YouTube (https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k), utilizando a linguagem de programação Python e bibliotecas especializadas para processamento de imagens e visualização de dados. A imagem escolhida para reconstrução foi o logotipo do CEFET-MG, demonstrando a aplicabilidade prática da técnica em contextos institucionais.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Série de Fourier Complexa

A forma complexa da série de Fourier permite expressar uma função periódica f(t) como uma soma infinita de exponenciais complexas. Para uma função periódica de período T, os coeficientes c_n são números complexos calculados através da integral:

$$f(t) = \Sigma\, c_n\, exp(in\omega t) \quad \text{onde} \quad n \in [-\infty, +\infty]$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, exp(-in\omega t)\, dt$$

onde $\omega = 2\pi/T$ é a frequência angular fundamental. Cada coeficiente c_n contém informações sobre amplitude e fase da componente harmônica de frequência n.

2.2. Aplicação em Desenhos 2D

Para aplicar a série de Fourier em desenhos bidimensionais, o contorno da imagem é parametrizado como uma função complexa z(t) = x(t) + iy(t), onde x(t) e y(t) são as coordenadas cartesianas do contorno em função do parâmetro $t \in [0, 2\pi]$.

Os coeficientes c_n representam vetores rotativos (epiciclos) que, quando somados sequencialmente, reconstroem o contorno original. Cada coeficiente possui três propriedades fundamentais:

- Magnitude: $|c_n|$ determina o raio do círculo
- Frequência: n define a velocidade de rotação
- Fase: $\arg(c_n)$ estabelece a posição inicial do vetor

3. METODOLOGIA

3.1. Ferramentas Utilizadas

O projeto utilizou as seguintes tecnologias e bibliotecas:

- Python 3: Linguagem de programação principal
- OpenCV (cv2): Processamento de imagens e extração de contornos
- NumPy: Operações matemáticas e manipulação de arrays
- SciPy: Integração numérica para cálculo dos coeficientes
- Matplotlib: Visualização gráfica e geração de animações
- Pillow: Salvamento de animações em formato GIF

3.2. Etapas de Desenvolvimento

O algoritmo implementado segue quatro etapas principais:

I. Pré-processamento da Imagem
- Conversão para escala de cinza
- Aplicação de filtro Gaussiano (kernel 7x7)
- Binarização utilizando o método de Otsu

II. Extração do Contorno
- Detecção de contornos usando cv2.findContours()
- Seleção do maior contorno (contorno principal)
- Centralização das coordenadas na origem (0, 0)

III. Cálculo dos Coeficientes de Fourier
- Integração numérica usando scipy.integrate.quad_vec
- Cálculo de 2N+1 coeficientes (frequências positivas e negativas)
- Limite de 50 avaliações por integral para balancear precisão/desempenho

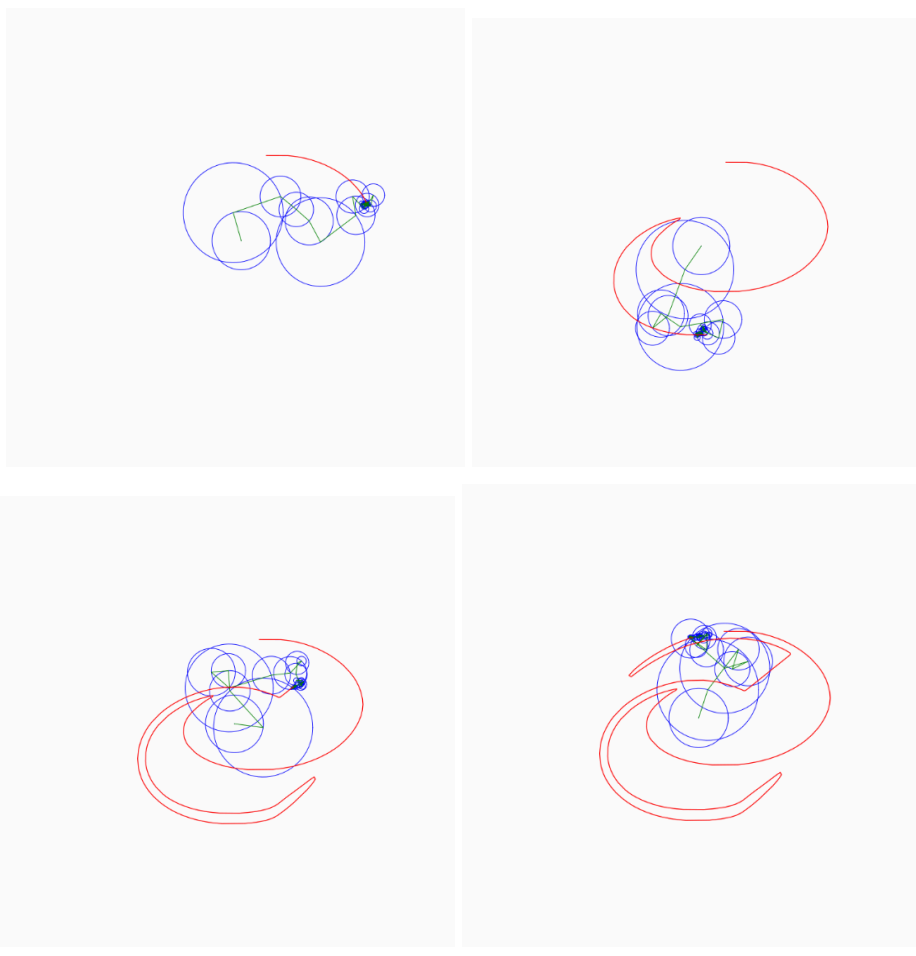
IV. Geração da Animação
- Renderização frame-a-frame dos epiciclos
- Desenho dos círculos rotativos e linhas conectoras
- Acumulação do traçado final que forma o desenho

4.
RESULTADOS

A. Execução do Algoritmo

O algoritmo foi executado com sucesso utilizando o logotipo do CEFET-MG como imagem de entrada. Os parâmetros utilizados foram: 500 coeficientes de Fourier, 500 frames de animação, adequada para demonstração e testes iniciais. O tempo de processamento foi de aproximadamente 2-3 minutos em hardware convencional.

Imagens da figura sendo formada:



4.
RESULTADOS

B. Análise dos Coeficientes

O processo de cálculo produziu 601 coeficientes complexos (de n = -300 até n = 300, incluindo n = 0). A análise da magnitude dos coeficientes revela que:

- Coeficientes de baixa frequência ($|n| < 50$) possuem maior magnitude
- Representam as características principais da forma do logotipo
- Coeficientes de alta frequência ($|n| > 200$) têm menor amplitude
- Responsáveis por detalhes finos e bordas nítidas
- Distribuição decrescente típica de formas suaves e contínuas

C. Visualização da Animação

A animação gerada demonstra visualmente o processo de reconstrução através dos epiciclos. Observa-se que os círculos maiores (baixas frequências) definem a forma geral, enquanto os círculos menores (altas frequências) adicionam detalhes finos ao contorno. A soma vetorial de todos os epiciclos traça com precisão o logotipo do CEFET-MG. O movimento é suave e periódico, completando um ciclo completo em $T = 2\pi$ segundos.

5. DISCUSSÃO

5.1. Convergência da Série de Fourier

A qualidade da reconstrução depende diretamente do número de coeficientes utilizados. Com 500 coeficientes obtém-se uma representação bastante fiel do logotipo original, suficiente para a maioria das aplicações práticas. Aumentar para 600 ou 1000 coeficientes melhora incrementalmente os detalhes, mas aumenta significativamente o tempo de processamento (quadraticamente em relação ao número de coeficientes).

5.2. Aspectos Computacionais

O cálculo dos coeficientes é a etapa mais custosa computacionalmente, pois envolve integrações numéricas complexas. O algoritmo utiliza a função quad_vec do SciPy com limite de 50 avaliações por integração, equilibrando precisão numérica e desempenho computacional. Otimizações possíveis incluem paralelização do cálculo dos coeficientes e uso de FFT (Fast Fourier Transform) para contornos uniformemente espaçados.

5.3. Aplicações Práticas

A técnica de reconstrução por epiciclos tem diversas aplicações:

- Visualização educacional de conceitos de Fourier e análise harmônica
- Compressão de imagens vetoriais e representação eficiente de formas
- Animações artísticas e motion graphics para design e publicidade
- Análise de formas e padrões em processamento de imagens médicas
- Reconhecimento de padrões em visão computacional
- Síntese de trajetórias robóticas e controle de movimento

6. CONCLUSÃO

Este trabalho demonstrou com sucesso a implementação de um algoritmo de síntese de Fourier complexa para reconstrução de imagens 2D utilizando o conceito de epiciclos. O logotipo do CEFET-MG foi reconstruído com alta precisão através da soma de 500 círculos rotativos, cada um representando uma componente harmônica da forma original extraída do contorno da imagem.

A atividade proporcionou uma compreensão profunda dos conceitos teóricos da Transformada de Fourier e sua aplicação prática em processamento de imagens. A visualização dinâmica dos epiciclos torna tangível um conceito matemático abstrato, reforçando o aprendizado significativo através da conexão entre teoria e prática. A decomposição de uma forma complexa em componentes harmônicas simples ilustra perfeitamente o poder da análise de Fourier.

Os resultados obtidos confirmam que a série de Fourier converge adequadamente para representar formas suaves e fechadas, com qualidade proporcional ao número de coeficientes calculados. O equilíbrio entre precisão e custo computacional é um aspecto importante a considerar em aplicações práticas.

7. REFERÊNCIAS

[1] 3Blue1Brown (2019). But what is a Fourier series? From heat flow to drawing with circles | DE4. Youtube. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k

8. APÊNDICE: CÓDIGO PYTHON

Arquivos do projeto: fourier-draw.py, logo_cefet.png, requirements.txt

Repositório GitHub: https://github.com/gmaroun1/FourierGabrielMaroun.git