ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE

Vincenzo Di Gennaro

Sono raccolti, in ordine cronologico, gli esercizi di Algebra Lineare proposti nelle prove scritte per i vari corsi di "Geometria 1" che ho tenuto presso la Facoltà di Ingegneria di Tor Vergata, a partire dal 2001. Gli esercizi sono svolti, e lo svolgimento tiene conto delle lezioni date durante i corsi. Nello svolgimento degli esercizi, alcuni dettagli sono lasciati alla cura dello studioso lettore.

Ringrazio tutti gli studenti che mi hanno indicato la presenza di errori.

Vincenzo Di Gennaro
Roma, 30 giugno 2008

Ultimo aggiornamento: 11 Gennaio 2019

Geometria ed Algebra 1, I esonero, 22 ottobre 2001.

Esercizio 1. *Stabilire se il sottoinsieme* $X := \{(x, y) : xy \geq 0\}$ *di* $\mathbf{R}^2$ *è oppure no un sottospazio.*

Svolgimento. X non è un sottospazio in quanto non è stabile rispetto alla somma. Infatti i vettori $(2, 3)$ e $(-1, -4)$ appartengono ad X, ma la loro somma $(2, 3) + (-1, -4) = (1, -1)$ no (per inciso, si osservi che X possiede il vettore nullo, ed è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna: infatti se $(x, y) \in X$ e c è uno scalare qualunque, allora $c \cdot (x, y) = (cx, cy)$, e $(cx)(cy) = c^2 xy \geq 0$ perché c^2 non altera il segno di xy). ■

Esercizio 2. *Si considerino i sottospazi* $U := Span((1, 2, 3, 4), (-1, 1, 1, 2))$ *e* $V := Span((1, 8, 11, 16))$ *di* $\mathbf{R}^4$. *Calcolare* $dim\, U$, $dim\, V$, $dim\,(U + V)$ *e* $dim\,(U \cap V)$.

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che $dim\, U = 2$ perché i due generatori di U non sono uno multiplo dell'altro, e che $dim\, V = 1$ in quanto il generatore di V non è il vettore nullo.

Sappiamo che $U + V = Span((1, 2, 3, 4), (-1, 1, 1, 2), (1, 8, 11, 16))$. Per calcolarne la dimensione andiamo a vedere se i tre generatori sono legati oppure no, cioè se essi ammettono, oppure no, una relazione non banale. A tale proposito, sia (x, y, z) una qualunque relazione tra i generatori di $U+V$. Allora si ha: $x(1, 2, 3, 4)+y(-1, 1, 1, 2)+z(1, 8, 11, 16) = \mathbf{0}$, cioè si ha il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + 8z = 0 \\ 3x + y + 11z = 0 \\ 4x + 2y + 16z = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ammette come soluzione non banale la terna $(x, y, z) = (3, 2, -1)$. Ciò significa che $3(1, 2, 3, 4) + 2(-1, 1, 1, 2) - 1(1, 8, 11, 16) = \mathbf{0}$, cioè i tre generatori sono legati. In particolare vediamo che $(1, 8, 11, 16)$ è sovrabbondante. Dunque:

$$U + V = Span((1, 2, 3, 4), (-1, 1, 1, 2), (1, 8, 11, 16)) = Span((1, 2, 3, 4), (-1, 1, 1, 2)) = U.$$

Quindi $dim\,(U + V) = dim\, U = 2$. Inoltre, poiché $V \subseteq U + V$, e $U + V = U$, allora $V \subseteq U$, quindi $V = U \cap V$, e $dim\,(U \cap V) = dim\, V = 1$. ■

Esercizio 3. *Per quali valori di* k *i vettori* $(1, 1, 1)$, $(1, k, 2)$, $(1, 1, k - 1)$ *sono linearmente dipendenti?*

Svolgimento. Se (x, y, z) è una relazione per i tre vettori assegnati, allora abbiamo: $x(1, 1, 1)+y(1, k, 2)+z(1, 1, k-1) = \mathbf{0}$. Ciò equivale a dire che:

$$(*) \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + 2y + (k - 1)z = 0. \end{cases}$$

Sottraendo dalla seconda equazione la prima, deduciamo che: $(k - 1)y = 0$. Quindi, se $k \neq 1$, allora $y = 0$. In tal caso, sostituendo $y = 0$, il sistema lineare diventa:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + (k - 1)z = 0. \end{cases}$$

Sottraendo dalla terza equazione la prima, otteniamo: $(k - 2)z = 0$. Quindi se $k \neq 2$, allora anche $z = 0$, a fortiori $x = 0$, e i vettori assegnati sono liberi. Rimangono da studiare i due casi $k = 1$ e $k = 2$.

Quando $k = 1$, il sistema $(*)$ diventa:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0, \end{cases}$$

ed un calcolo diretto mostra che $(-2, 1, 1)$ è una relazione non banale. In modo analogo si prova che, quando $k = 2$, $(1, 0, -1)$ è una relazione non banale.

In conclusione: i vettori assegnati sono linearmente dipendenti se e solo se $k = 1$, oppure $k = 2$. ■

Esercizio 4. *Calcolare le coordinate del vettore* $(1, 1, 1)$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} := \{(1, -1, 2), (1, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ *di* $\mathbf{R}^3$.

Svolgimento. Le coordinate $(x, y, z)^T$ si calcolano imponendo che $(1, 1, 1) = x(1, -1, 2) + y(1, 1, 0) + z(0, 0, 2)$, cioè che:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 1 \\ 2x + 2z = 1. \end{cases}$$

Risolvendo, si ottiene che le coordinate di $(1, 1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono: $(x, y, z)^T = (0, 1, \frac{1}{2})^T$. ■

Esercizio 5. *Calcolare la dimensione di* $U := Span((1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, -1, 2))$.

Svolgimento. Sia (x, y, z) una relazione per i tre vettori assegnati. Abbiamo: $x(1, 2, 3) + y(1, 1, 1) + z(1, -1, 2) = \mathbf{0}$, cioè:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Si deduce che $x = y = z = 0$, dunque i tre generatori sono liberi, e perciò la dimensione di U è 3 (in particolare $Span((1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, -1, 2)) = \mathbf{R}^3$). ■

Esercizio 6. *Provare che due sottospazi di* $\mathbf{R}^7$ *aventi dimensione* 4*, hanno in comune qualche vettore non nullo.*

Svolgimento. Siano U e V tali sottospazi. Dalla formula di Grassmann sappiamo che:

$$dim\,(U \cap V) = dim\,U + dim\,V - dim\,(U + V) = 8 - dim\,(U + V).$$

Poiché $U + V \subseteq \mathbf{R}^7$, allora $dim\,(U + V) \leq 7$, e dunque $-dim\,(U + V) \geq -7$. Per cui, dalla formula precedente otteniamo:

$$dim\,(U \cap V) \geq 8 - 7 = 1,$$

cioè $dim\,(U \cap V) > 0$. Ciò significa proprio che U e V hanno in comune qualche vettore non nullo. ■

Geometria ed Algebra 1, II esonero, 5 novembre 2001.

Esercizio 1. *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Svolgere la verifica.*

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_2(-\frac{1}{3})$, $e_{3,2}(2)$, $e_3(-3)$, $e_{2,3}(-\frac{1}{3})$, $e_{1,3}(-1)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Esercizio 2. *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(1)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-2)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Non avendo eseguito scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = -3$. $\blacksquare$

Esercizio 3. *Calcolare una base per il sottospazio* U *di* $\mathbf{R}^4$ *definito dal sistema lineare omogeneo:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x - y + 2z - 2t = 0 \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Ricordiamo che U è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}$. Quindi innanzitutto andiamo a risolvere $\mathcal{S}$. Riducendo a scala la matrice di $\mathcal{S}$, si ottiene la matrice: $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ (tale matrice ha rango 2, dunque già sappiamo che la dimensione di U è $2 \, (= 4 - rk(M)))$. Possiamo assumere z e t come variabili libere, ed il sistema assegnato è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x - y = -2z + 2t \\ y = 2z - 3t, \end{cases}$$

da cui deduciamo una rappresentazione parametrica per U:

$$\rho : (z, t) \in \mathbf{R}^2 \to (-t, 2z - 3t, z, t) \in U.$$

Una base per U si ottiene in corrispondenza della base canonica di $\mathbf{R}^2$, cioè una base per U è costituita dai vettori: $\rho(1, 0) = (0, 2, 1, 0)$ e $\rho(0, 1) = (-1, -3, 0, 1)$ (in particolare $U = Span((0, 2, 1, 0), (-1, -3, 0, 1)))$. $\blacksquare$

Esercizio 4. *Trovare una rappresentazione cartesiana per il sottospazio* U *di* $\mathbf{R}^3$ *generato da* $e_1+e_2+e_3$ *ed* $e_2+e_3-e_1$.

Svolgimento. Ricordiamo che una rappresentazione cartesiana per U è un sistema lineare omogeneo $\mathcal{S}$, il cui insieme delle soluzioni coincide con U. In altre parole, occorre trovare le equazioni lineari che definiscono U. A tale proposito, ricordiamo che un vettore $\mathbf{u} = (x, y, z)$ appartiene ad U se e solo se il rango della matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix}$$

è uguale alla dimensione di U (che nel nostro caso è 2), dove A è la matrice ottenuta mettendo in colonna i vettori che generano U, ed il vettore $\mathbf{u}$. Riducendo a scala A si ottiene la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & z-y \end{bmatrix}.$$

Quindi il rango di A è 2 se e solo se $y - z = 0$. In conclusione, una rappresentazione cartesiana per U è data dall'equazione: $y - z = 0$. ■

Esercizio 5. *Al variare del parametro $p \in \mathbf{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + y = 1 \\ x + py = p + 1. \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice incompleta di $\mathcal{S}$ ha determinante $p-1$. Per il Teorema di Cramer, se $p \neq 1$, allora il sistema è compatibile, ed ammette un'unica soluzione. Tale soluzione può essere calcolata con la Regola di Cramer, ed è $(\frac{-1}{p-1}, \frac{p}{p-1})$. Quando $p = 1$ è evidente che il sistema non ammette soluzioni.

Per cui, in conclusione: $\mathcal{S}$ è compatibile se e solo se $p \neq 1$, ed in tal caso ammette un'unica soluzione data da: $(\frac{-1}{p-1}, \frac{p}{p-1})$. ■

Esercizio 6. *Estendere a base di $\mathbf{R}^5$ il sistema di vettori $\mathcal{A} := \{(0,0,1,2,0), (0,1,1,1,0), (0,2,0,1,0)\}$.*

Svolgimento. Sia A la matrice ottenuta mettendo in riga i vettori di $\mathcal{A}$. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{3,2}(2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se aggiungiamo ad S le righe e_1 ed e_5, otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5. Per cui $\{(1,0,0,0,0), (0,0,1,2,0), (0,1,1,1,0), (0,2,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^5$ che estende $\mathcal{A}$. ■

Geometria ed Algebra 1, III esonero, 23 novembre 2001.

Esercizio 1. *Si considerino le basi di* $\mathbf{R}^2$ $\mathcal{B} := \{(2,1),(5,3)\}$ *e* $\mathcal{C} := \{(-1,3),(-1,2)\}$. *Calcolare la matrice del cambiamento delle coordinate da* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{C}$, *e da* $\mathcal{C}$ *a* $\mathcal{B}$.

Svolgimento. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2}) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ -7 & -18 \end{bmatrix}.$$

Infine, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^2}) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} = \begin{bmatrix} -18 & -13 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$. ■

Esercizio 2. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato da* $(1,2,0)$ *e* $(0,2,1)$. *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *rappresentato dall'equazione* $x+y+z=0$. *Determinare una base per* $U \cap V$.

Svolgimento. Sia (x,y,z) un generico vettore di $\mathbf{R}^3$. Allora $(x,y,z) \in V$ se e solo se la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix}$ ha rango ≤ 2, cioè se e solo se $2x - y + 2z = 0$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è data dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Tale sistema lineare ammette ∞^1 soluzioni, generate da $(1,0,-1)$. Quindi una base per $U \cap V$ è costituita dal vettore $(1,0,-1)$. ■

Esercizio 3. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $f(x,y,z) = (x+y+2z, 2x+y+z, 4x+3y+5z)$. *Calcolare una base per* $Ker(f)$ *ed una per* $Im(f)$.

Svolgimento. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, e come base $(1,2,4)$, $(1,1,3)$. Mentre $Ker(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base, ottenuta risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = -2z \\ -y = 3z, \end{cases}$$

è data dal vettore $(1,-3,1)$. ■

Esercizio 4. *Stabilire se l'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *definita ponendo* $f(x,y) = (3x+y, 3y)$, *è diagonalizzabile oppure no.*

Svolgimento. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è: $p_A(t) = (t-3)^2$. Dunque abbiamo solo l' autovalore $\lambda = 3$, con molteplicità algebrica $m_a(3) = 2$. D'altra parte:

$$m_g(3) = 2 - rk(A - 3I) = 2 - rk \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Poiché $m_a(3) \neq m_g(3)$, allora f non è diagonalizzabile. ■

Esercizio 5. *Posto* $A := \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, *determinare una matrice invertibile* P *tale che* $P^{-1}AP$ *sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t^2 - 2t - 15$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -3 e 5. L'autospazio V_{-3} ammette come base $(1,-1)$, mentre l'autospazio V_5 ammette come base $(1,1)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (una verifica diretta mostra che $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$). ■

Esercizio 6. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $e_1 - 2e_2$, $e_1 + e_3$. Sia $f : U \to U$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(e_1 - 2e_2) = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3$, $f(e_1 + e_3) = 6e_1 - 4e_2 + 4e_3$. Posto $\mathcal{B} = \{e_1 - 2e_2, e_1 + e_3\}$, calcolare $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$. Rappresentare f in termini delle coordinate x, y rispetto alla base $\mathcal{B}$. Calcolare una base per il nucleo di f.*

Svolgimento. Poiché $f(e_1-2e_2) = 1(e_1-2e_2)+2(e_1+e_3)$ e $f(e_1+e_3) = 2(e_1-2e_2)+4(e_1+e_3)$, allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
In termini di coordinate la funzione agisce nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \end{bmatrix}.$$

I vettori del nucleo sono quei vettori le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ soddisfano l'equazione: $x + 2y = 0$. Per cui una base per il nucleo di f è formata dal vettore di coordinate $(2, -1)^T$, cioè dal vettore $e_1 - 4e_2 - e_3$. ■

Geometria ed Algebra 1, II appello, 28 novembre 2001.

Esercizio 1. *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Non avendo eseguito scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = -4$. ■

Esercizio 2. *Determinare una rappresentazione parametrica per le soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + y + z + w = -1 \\ x + 2y + z + 2w = -1 \\ 2x + 3y + 2z + 3w = -2. \end{cases}$$

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette ∞^2 soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere z e w come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + y = -1 - z - w \\ y = -w. \end{cases}$$

In conclusione, una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}$ è:

$$(z, w) \in \mathbf{R}^2 \to (-1 - z, -w, z, w) \in Sol(\mathcal{S}). \blacksquare$$

Esercizio 3. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + z, x + y + z, x + 2y + z)$. *Determinare una base per* $Ker(f)$ *ed una base per* $Im(f)$. *Calcolare* $f(1, 3, -2)$. *Dire se il vettore* $(1, 4, 1, 4)$ *appartiene o non ad* $Im(f)$.

Svolgimento. Sostituendo si vede che $f(1, 3, -2) = (2, 5, 2, 5)$.

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ e di $\mathbf{R}^4$ è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, e come base $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 2)$. Mentre $Ker(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base, ottenuta risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = -z \\ y = 0, \end{cases}$$

è data dal vettore $(-1, 0, 1)$.

Infine, poiché $-2(1, 1, 1, 1) + 3(1, 2, 1, 2) = (1, 4, 1, 4)$, allora $(1, 4, 1, 4)$ appartiene ad $Im(f)$. ■

Esercizio 4. *Il vettore* $\mathbf{u}$ *ha coordinate* $(1, 1)^T$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} := \{(4, 1), (3, 1)\}$. *Calcolare le coordinate* $[\mathbf{u}]_{\mathcal{C}}$ *di* $\mathbf{u}$ *rispetto alla base* $\mathcal{C} := \{(7, 1), (6, 1)\}$.

Svolgimento. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Abbiamo:

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Esercizio 5. *Posto* $A := \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$*, determinare una matrice invertibile* P *tale che* $P^{-1}AP$ *sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t^2 - 2t - 63$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -7 e 9. L'autospazio V_{-7} ammette come base $(1, -1)$, mentre l'autospazio V_9 ammette come base $(1, 1)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (una verifica diretta mostra che $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$). $\blacksquare$

Esercizio 6. *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato da* $e_1 + e_3$, $e_2 - e_4$. *Sia* $f : U \to U$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $f(e_1 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$, $f(e_2 - e_4) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 - 2e_4$. *Determinare una base per* $Ker(f)$ *ed una per* $Im(f)$. *Determinare una base di autovettori per* f.

Svolgimento.

Consideriamo la base $\mathcal{B} := \{e_1 - 2e_2, e_1 + e_3\}$ di U. Allora $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. In termini delle coordinate x, y rispetto alla base $\mathcal{B}$, il nucleo di f è rappresentato dall'equazione: $x + 2y = 0$. Quindi una base per il nucleo di f è data dal vettore di coordinate $(-2, 1)^T$, cioè dal vettore $-2e_1 + e_2 - 2e_3 - e_4$. Inoltre la dimensione di $Im(f)$ è 1. Quindi una base per $Im(f)$ è data dal vettore: $e_1 + e_2 + e_3 - e_4$.

Infine, il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è: $p(t) = t^2 - 3t$. Quindi lo spettro è costituito dagli autovalori 0 e 3. L'autospazio V_0 (che altro non è che $Ker(f)$) ammette come base il vettore di coordinate $(-2, 1)^T$, mentre l'autospazio V_3 ammette come base il vettore di coordinate $(1, 1)^T$. Quindi una base di autovettori per f è costituita dai vettori $-2e_1 + e_2 - 2e_3 - e_4$ e $e_1 + e_2 + e_3 - e_4$. $\blacksquare$

Geometria ed Algebra 1, III appello, 5 dicembre 2001.

Esercizio 1. *Stabilire se l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z) = (2x+y, 2y+z, 2z)$, è diagonalizzabile oppure no.*

Svolgimento. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è: $p_A(t) = (t-2)^3$. Dunque abbiamo solo l' autovalore $\lambda = 2$, con molteplicità algebrica $m_a(2) = 3$. D'altra parte:

$$m_g(2) = 3 - rk(A - 2I) = 3 - rk \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Poiché $m_a(2) \neq m_g(2)$, allora f non è diagonalizzabile. ■

Esercizio 2. *Sia $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita ponendo $g(1,0) = (1,0,-1,1)$ e $g(0,1) = (0,1,-1,2)$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(x,y,z) = (x+y, x-z)$. Calcolare $(g \circ f)(1,2,3)$. Calcolare la matrice di $g \circ f$ rispetto alle basi canoniche.*

Svolgimento. Indichiamo con $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ ed $\mathcal{E}_4$ le basi canoniche di $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ ed $\mathbf{R}^4$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{E}_3}(g \circ f) = M_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{E}_2}(g) \cdot M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

In particolare le coordinate di $(g \circ f)(1,2,3)$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_4$ sono:

$$[(g \circ f)(1,2,3)]_{\mathcal{E}_4} = M_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{E}_3}(g \circ f) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

cioè $(g \circ f)(1,2,3) = (3,-2,-1,-1)$. ■

Esercizio 3. *Posto $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t(t-1)(t-7)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori 0, 1 e 7. L'autospazio V_0 ammette come base $(2,0,-1)$, l'autospazio V_1 ammette come base $(0,1,0)$, e l'autospazio V_7 ammette come base $(1,0,3)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato ottenuto è corretto, è sufficiente verificare che P è invertibile (il che è ovvio in quanto $det(P) = 7 \neq 0$), e che $AP = PD$, dove D è la matrice diagonale: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. ■

Esercizio 4. *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ definita ponendo $f(x,y,z,t,u) = (x+y+z+t+u, 2x+2y+2z+2t+2u)$, determinare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

Svolgimento. La matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, una base è costituita dal vettore $(1,2)$, ed una sua rappresentazione cartesiana è data dall'equazione $2x - y = 0$. Il nucleo ha dimensione 4, ed è rappresentato dall'equazione: $x+y+z+t+u = 0$. Possiamo scegliere y,z,t,u come variabili libere. Quindi $x = -y-z-t-u$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(-1,1,0,0,0)$, $(-1,0,1,0,0)$, $(-1,0,0,1,0)$, $(-1,0,0,0,1)$. ■

Esercizio 5. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente come base $\mathcal{B} := \{e_1+e_2+e_3, e_1+e_2-e_4\}$. Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo di V definito ponendo $f(e_1+e_2+e_3) = e_3+e_4$ e $f(e_1+e_2-e_4) = 2(e_3+e_4)$. Calcolare una base di V costituita da autovettori per f.*

Svolgimento. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è: $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t(t+1)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -1 e 0. L'autospazio V_{-1} ammette come base il vettore di coordinate $(1, -1)^T$, mentre V_0 ammette come base il vettore di coordinate $(2, -1)^T$. Quindi una base di V costituita da autovettori per f è: $\{e_3 + e_4,\, e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4\}$. ■

Geometria ed Algebra 1, IV appello, 18 settembre 2002.

Esercizio 1. *Posto* $A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$*, determinare una matrice invertibile* P *tale che* $P^{-1}AP$ *sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t^2 - 2t$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori 0 e 2. L'autospazio V_0 ammette come base $(1,1)$, mentre l'autospazio V_2 ammette come base $(1,-1)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (una verifica diretta mostra che $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$). ■

Esercizio 2. *Calcolare una base per il sottospazio* U *di* $\mathbf{R}^3$ *definito dal sistema lineare omogeneo:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice del sistema $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi U ha dimensione 1, si può assumere z come variabile libera, e la generica soluzione di $\mathcal{S}$ è: $(-z, 0, z)$. Una base per U è data dal vettore: $(1, 0, -1)$. ■

Esercizio 3. *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-3)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto che abbiamo eseguito uno scambio, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -5$. ■

Esercizio 4. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *definito ponendo:* $f(3,1,0) = (3,5,0)$, $f(2,1,0) = (2,4,0)$, $f(0,0,1) = (0,-1,1)$. *Stabilire se* f *è, oppure no, diagonalizzabile.*

Svolgimento. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori: $(3,1,0)$, $(2,1,0)$, $(0,0,1)$, e con $\mathcal{E}$ la base canonica. Allora la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi il polinomio caratteristico di f è:

$$p_f(t) = det \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 1 & 2-t & -1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix} = -(t-1)^2(t-2),$$

e perciò lo spettro di f è costituito dagli autovalori 1 e 2. A priori sappiamo che $m_a(2) = m_g(2) = 1$. Poi osserviamo che $m_a(1) = 2$ e $m_g(1) = 3 - rk \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$. Dunque f è diagonalizzabile. ■

Esercizio 5. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato da* $(1,0,-1)$ *e* $(0,1,-1)$. *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *rappresentato dall'equazione* $x + y - z = 0$. *Determinare una base per* $U \cap V$.

Svolgimento. Una rappresentazione cartesiana di V si ottiene imponendo che il rango della matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & -1 & z \end{bmatrix}$ sia 2, cioè: $x + y + z = 0$. Una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ è data allora dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si vede che una base per $U \cap V$ è data dal vettore: $(1, -1, 0)$. ■

Geometria ed Algebra 1, V appello, 25 settembre 2002.

Esercizio 1. *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-3)$, $e_2(-1)$, $e_{2,3}(-2)$, $e_{1,3}(-1)$, $e_{1,2}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ■

Esercizio 2. *Determinare una rappresentazione parametrica per le soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + y + z + t + u = 1 \\ x + t + u = 2 \\ 5x + 2y + 2z + 5t + 5u = 8 \\ -x + 2y + 2z - t - u = -4. \end{cases}$$

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette ∞^3 soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere z, t ed u come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z - t - u \\ -y = 1 + z. \end{cases}$$

In conclusione, una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}$ è:

$$(z, t, u) \in \mathbf{R}^3 \to (2 - t - u, -1 - z, z, t, u) \in Sol(\mathcal{S}). \ ■$$

Esercizio 3. *Per l'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ *definita ponendo* $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y + z + t)$, *determinare una base per* $Ker(f)$ *ed una rappresentazione cartesiana per* $Im(f)$.

Svolgimento. Il nucleo di f è rappresentato dall'equazione: $x + y + z + t = 0$. Possiamo assumere y, z e t come variabili libere, e dunque il generico vettore di $Ker(f)$ si può mettere nella forma: $(-y - z - t, y, z, t)$. Quindi una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 1)$. Poi $Im(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base è data dal vettore $f(1, 0, 0, 0) = (1, 1)$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$ è data dall'equazione: $x - y = 0$. ■

Esercizio 4. *Estendere a base di* $\mathbf{R}^5$ *il sistema di vettori* $\mathcal{A} := \{(0, 1, 1, 1, 1), (0, 2, -1, 1, 3), (0, 3, 0, 1, 2)\}$.

Svolgimento. Sia A la matrice ottenuta mettendo in riga i vettori di $\mathcal{A}$. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-3)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Se aggiungiamo ad S le righe e_1 ed e_5, otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5. Per cui $\{(1,0,0,0,0),(0,0,1,1,1),(0,2,-1,1,3),(0,3,0,1,2),(0,0,0,0,1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^5$ che estende $\mathcal{A}$. ■

Esercizio 5. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione $x-y=0$. Sia $f: V \to V$ l'endomorfismo di V definito ponendo $f(x,y,z)=(x+2z, y+2z, x+y+4z)$. Calcolare una base di V costituita da autovettori per f.*

Svolgimento. Una base per V è: $\mathcal{B} := \{(1,1,0),(0,0,1)\}$. Poiché $f(1,1,0) = (1,1,2) = (1,1,0) + 2(0,0,1)$ e $f(0,0,1) = (2,2,4) = 2(1,1,0)+4(0,0,1)$, allora la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è: $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t(t-5)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori 0 e 5. L'autospazio V_0 ammette come base il vettore di coordinate $(2,-1)^T$, mentre V_5 ammette come base il vettore di coordinate $(1,2)^T$. Quindi una base di V costituita da autovettori per f è: $\{(2,2,-1),(1,1,2)\}$. ■

Geometria ed Algebra 1, I esonero, 17 ottobre 2002.

Esercizio 1. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^4$*:* $U := Span((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1))$, $V := Span((0,1,0,1),(0,0,0,1))$. *Calcolare una base e la dimensione per* U, V, $U \cap V$ *e* $U+V$.

Svolgimento. Poiché $U = Span((1,0,1,0),(1,1,1,1))$ ed i vettori $(1,0,1,0)$, $(1,1,1,1)$ non sono uno multiplo dell'altro, allora $dim(U) = 2$, e $\{(1,0,1,0),(1,1,1,1)\}$ è una base per U. Per lo stesso motivo, $dim(V) = 2$, e $\{(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$ è una base per V. Poi $U+V = Span((1,0,1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1))$. Per calcolare una base di $U+V$ andiamo a vedere se i generatori indicati sono liberi oppure no. A tale proposito, sia (x,y,z,t) una relazione tra tali generatori. Allora $x(1,0,1,0)+y(1,1,1,1)+z(0,1,0,1)+t(0,0,0,1) = \mathbf{0}$, cioè:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ y+z+t=0. \end{cases}$$

Deduciamo la relazione non banale $(1,-1,1,0)$. Dunque il generatore $(1,1,1,1)$ è sovrabbondante. Lo stesso calcolo mostra che i restanti generatori sono liberi: infatti, se $y=0$, allora $x=z=t=0$. Quindi $dim(U+V)=3$, ed una base per $U+V$ è $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$. Dalla formula di Grassmann deduciamo anche che $dim(U\cap V) = 1$, e poiché $-(1,0,1,0)+(1,1,1,1) = (0,1,0,1) \in U \cap V$, una base per $U \cap V$ è costituita dal vettore $(0,1,0,1)$. ■

Esercizio 2. *Calcolare le coordinate del vettore* $(6,-2,6)$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} := \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ *di* $\mathbf{R}^3$.

Svolgimento. Le coordinate $(x,y,z)^T$ si calcolano imponendo che $(6,-2,6) = x(1,1,0)+y(0,1,1)+z(1,0,1)$, cioè che:

$$\begin{cases} x+z=6 \\ x+y=-2 \\ y+z=6. \end{cases}$$

Risolvendo, si ottiene che le coordinate di $(6,-2,6)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono: $(x,y,z)^T = (-1,-1,7)^T$. ■

Esercizio 3. *Il vettore* $(3,-1,2)$ *appartiene al sottospazio* $U := Span((1,1,2),(2,1,3))$ *di* $\mathbf{R}^3$*?*

Svolgimento. Si tratta di vedere se esistono pesi x, y tali che $(3,-1,2) = x(1,1,2)+y(2,1,3)$, cioè tali che:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=-1 \\ 2x+3y=2. \end{cases}$$

Tali pesi esistono e sono $x=-5$ ed $y=4$. Dunque $(3,-1,2) \in U$. ■

Esercizio 4. *Determinare un sottospazio* V *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $Span((1,0,1)) \oplus V = \mathbf{R}^3$.

Svolgimento. Aggiungendo ad $(1,0,1)$ i vettori $(0,1,0)$ ed $(0,0,1)$, si forma un sistema libero in $\mathbf{R}^3$, costituito da 3 vettori. Dunque tale sistema è una base per $\mathbf{R}^3$. Poniamo $V := Span((0,1,0),(0,0,1))$. Allora: $Span((1,0,1)) + V = Span((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbf{R}^3$. Per provare che $Span((1,0,1)) \oplus V = \mathbf{R}^3$, resta da dimostrare che $Span((1,0,1)) \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Ma ciò segue dalla formula di Grassmann, tenuto conto che $dim(V) = 2$. ■

Esercizio 5. *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *costituito dai vettori* (x,y,z) *tali che* $x+y+z=0$. *Determinare una base per* U.

Svolgimento. Sia (x,y,z) il generico vettore di U. Possiamo scrivere:

$$(x,y,z) = (-y-z,y,z) = y(-1,1,0)+z(-1,0,1).$$

Poiché i vettori $(-1,1,0)$ ed $(-1,0,1)$ appartengono ad U, e sono liberi, dalla precedente espressione deduciamo che essi formano una base per U. ■

Esercizio 6. *Per quali valori di* k *i vettori* $(2,k)$, $(k,2)$ *sono linearmente indipendenti?*

Svolgimento. Sia (x,y) una relazione tra tali vettori. Allora $x(2,k)+y(k,2) = \mathbf{0}$, cioè:

$$\begin{cases} 2x+ky=0 \\ kx+2y=0. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\frac{-k}{2}$, e sommando alla seconda equazione, deduciamo che: $(2-\frac{k^2}{2})y = 0$. Quindi, se $k \notin \{-2,2\}$, allora $y=0$, anche $x=0$, ed i vettori assegnati sono liberi. È evidente che se $k \in \{-2,2\}$ i vettori sono legati. Quindi, in conclusione, i vettori $(2,k)$, $(k,2)$ sono linearmente indipendenti se e solo se $k \notin \{-2,2\}$. ■

Geometria ed Algebra 1, II esonero, 7 novembre 2002.

Esercizio 1. *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 3 & 14 & 13 & 20 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-3)$, $p_{2,3}$, $e_{3,2}(-2)$, $e_{4,2}(-1)$, $p_{3,4}$, $e_{4,3}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito 3 scambi, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -(-12) = 12$. ■

Esercizio 2. *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. *Svolgere la verifica.*

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, $p_{2,3}$, $e_3(-1)$, $e_{2,3}(-3)$, $e_{1,3}(-3)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ ■$$

Esercizio 3. *Estendere a base di* $\mathbf{R}^5$ *il sistema di vettori* $\mathcal{A} := \{(1,1,-1,-1,3),(2,2,1,1,0)\}$.

Svolgimento. Sia A la matrice ottenuta mettendo in riga i vettori di $\mathcal{A}$. Eseguendo l'operazione elementare $e_{2,1}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Se aggiungiamo ad S le righe e_2, e_4 ed e_5, otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5. Per cui $\{(1,1,-1,-1,3),(0,1,0,0,0),(2,2,1,1,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^5$ che estende $\mathcal{A}$. ■

Esercizio 4. *Al variare del parametro* $k \in \mathbf{R}$, *stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} (k-5)x - 2y = -1 \\ 3x + ky = k - 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Eseguendo sulla matrice completa le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(\frac{5-k}{3})$, $e_2(-3)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 3 & k & k-1 \\ 0 & (k-2)(k-3) & (k-2)(k-4) \end{bmatrix}.$$

Quindi, se $k \notin \{2,3\}$, allora $\mathcal{S}$ ammette un'unica soluzione data da $(\frac{1}{k-3}, \frac{k-4}{k-3})$. Se $k=2$ ci sono ∞^1 soluzioni, date da $(\frac{k-1-ky}{3}, y)$, al variare di $y \in \mathbf{R}$. Se invece $k=3$ il sistema non è compatibile. ■

Esercizio 5. *Determinare una rappresentazione parametrica per le soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x-y+z+t=2 \\ 5x-y+5z+5t=10 \\ x+z+t=2. \end{cases}$$

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ (e cancellando le righe nulle) si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette ∞^2 soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere z e t come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x+y=2-z-t \\ y=0. \end{cases}$$

In conclusione, una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}$ è:

$$(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (2-z-t, 0, z, t) \in Sol(\mathcal{S}). \ ■$$

Geometria ed Algebra 1, III esonero, 22 novembre 2002.

Esercizio 1. *Per l'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *definita ponendo* $f(x,y) = (x-y, 2x-2y, 3x-3y)$*, determinare una base per* $Ker(f)$*, una base per* $Im(f)$*, ed una rappresentazione cartesiana per* $Im(f)$*.*

Svolgimento. Il nucleo di f è rappresentato dall'equazione $x - y = 0$. Dunque una base per $Ker(f)$ è data dal vettore $(1,1)$. Anche $Im(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore: $f(1,0) = (1,2,3)$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$ è data dal sistema: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$. ■

Esercizio 2. *Dato l'operatore lineare* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *definito ponendo* $f(x,y) = (10x - 4y, 24x - 10y)$*, determinare una base* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbf{R}^2$ *tale che la matrice rappresentativa di* f *rispetto a* $\mathcal{B}$ *sia diagonale.*

Svolgimento. La matrice di f rispetto alla base canonica è $A := \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 24 & -10 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t^2 - 4$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -2 e 2. L'autospazio V_{-2} ammette come base $(1,3)$, mentre l'autospazio V_2 ammette come base $(1,2)$. La base cercata è: $\{(1,3),(1,2)\}$. ■

Esercizio 3. *Il vettore* $\mathbf{u}$ *di* $\mathbf{R}^2$ *ha coordinate* $(x,y)^T$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} := \{(1,4),(1,5)\}$*. Quali sono le coordinate di* $\mathbf{u}$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}' := \{(2,1),(3,2)\}$*?*

Svolgimento. Siano $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'}$ le coordinate di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, ed $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Allora abbiamo:

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -13 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10x - 13y \\ 7x + 9y \end{bmatrix}. \ ■$$

Esercizio 4. *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *definito dall'equazione* $x+y+z+t = 0$*. Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato dai vettori* $(1,1,0,0)$*,* $(1,0,1,0)$*,* $(1,0,0,1)$*. Determinare una base di* $U \cap V$*.*

Svolgimento. Una rappresentazione cartesiana di V è data dall'equazione $x - y - z - t = 0$. Quindi, per determinare una base di $U \cap V$ è sufficiente andare a risolvere il sistema lineare: $\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x-y-z-t = 0 \end{cases}$. Riducendo a scala, si perviene al sistema lineare equivalente: $\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ y+z+t = 0 \end{cases}$. Quindi ci sono ∞^2 soluzioni (cioè $dim(U \cap V) = 2$), possiamo assumere z e t come variabili libere, ed una rappresentazione parametrica di $U \cap V$ è: $\rho : (z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (0, -z-t, z, t) \in U \cap V$. Deduciamo che una base per $U \cap V$ è costituita dai vettori: $\rho(1,0)$, $\rho(0,1)$, cioè dai vettori: $(0,-1,1,0)$, $(0,-1,0,1)$. ■

Esercizio 5. *Quali sono i valori del parametro* k *per cui la seguente matrice* A_k *non è diagonalizzabile?*

$$A_k := \begin{bmatrix} 1 & k-3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A_k è: $p_{A_k}(t) = (t-1)^2$. Quindi lo spettro di A è costituito dall'autovalore 1, che ha sempre molteplicità algebrica 2. Invece, per quanto riguarda la molteplicità geometrica, osserviamo che:

$$m_g(1) = 2 - rk(A_k - I) = 2 - rk \begin{bmatrix} 0 & k-3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} == \begin{cases} 2 & \text{se } k = 3 \\ 1 & \text{se } k \neq 3. \end{cases}$$

In conclusione, la matrice A_k non è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 3$. ■

Esercizio 6. *Sia* V *lo spazio delle matrici* 2×2*. Sia* $f : V \to V$ *l'applicazione che ad ogni matrice* $M \in V$ *associa* $f(M) := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot M$*. Provare che* f *è lineare. Calcolare la matrice rappresentativa di* f *rispetto alla base* $\mathcal{E} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$*. Dire se* f *è, oppure no, diagonalizzabile.*

Svolgimento. Il fatto che f sia lineare, segue dalle proprietà di calcolo della moltiplicazione tra matrici.

Per calcolare la matrice rappresentativa, osserviamo che: $f\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix}$. Deduciamo che:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Infine, il polinomio caratteristico di f è: $p_f(t) = t^2(t-5)^2$. Poiché $m_a(0) = m_g(0) = 2$, e $m_a(5) = m_g(5) = 2$, possiamo dire che f è diagonalizzabile. ■

Geometria ed Algebra 1, II appello, 28 novembre 2002.

Esercizio 1. *Il vettore* $\mathbf{u}$ *di* $\mathbf{R}^2$ *ha coordinate* $(x,y)^T$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} := \{(1,6),(1,5)\}$*. Calcolare le coordinate* $(x',y')^T$ *di* $\mathbf{u}$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}' := \{(-1,6),(-1,5)\}$*.*

Svolgimento. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Allora abbiamo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11x+10y \\ -12x-11y \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Esercizio 2. *Per l'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *definita ponendo* $f(x,y,z) = (x+y+z, -x-y-z)$*, determinare una base per* $Ker(f)$*, una base per* $Im(f)$*, ed una rappresentazione cartesiana per* $Im(f)$*.*

Svolgimento. La matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, una base è costituita dal vettore $(1,-1)$, ed una sua rappresentazione cartesiana è data dall'equazione $x+y=0$. Il nucleo ha dimensione 2, ed è rappresentato dall'equazione: $x+y+z=0$. Possiamo scegliere y,z come variabili libere. Quindi $x=-y-z$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$. $\blacksquare$

Esercizio 3. *Dato l'operatore lineare* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *definito ponendo* $f(x,y) = (-35x-30y, 36x+31y)$*, determinare una base* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbf{R}^2$ *tale che la matrice rappresentativa di* f *rispetto alla base* $\mathcal{B}$ *sia diagonale.*

Svolgimento. La matrice di f rispetto alla base canonica è $A := \begin{bmatrix} -35 & -30 \\ 36 & 31 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t^2+4t-5$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -5 e 1. L'autospazio V_{-5} ammette come base $(1,-1)$, mentre l'autospazio V_1 ammette come base $(-5,6)$. La base cercata è: $\{(1,-1),(-5,6)\}$. $\blacksquare$

Esercizio 4. *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 13 \\ 2 & 4 & 8 & 11 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{4,1}(-2)$, $p_{3,4}$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito due scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = 10$. $\blacksquare$

Esercizio 5. *Calcolare una base per il sottospazio* U *di* $\mathbf{R}^4$ *definito dal seguente sistema lineare omogeneo:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+2z+2t=0 \\ 3x+y+4z+4t=0 \\ 5x+y+7z+7t=0. \end{cases}$$

Svolgimento. Riducendo a scala $\mathcal{S}$, si perviene al seguente sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2y-z-t=0. \end{cases}$$

Quindi $\mathcal{S}$ ammette ∞^2 soluzioni (cioè U ha dimensione 2), possiamo assumere come variabili libere z,t, ed una rappresentazione parametrica per U è data dalla funzione: $\rho : (z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-\frac{3(z+t)}{2}, \frac{z+t}{2}, z, t) \in U$. Allora una base per U è data dai vettori: $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0)$, $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$. $\blacksquare$

Esercizio 6. *L'operatore* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *soddisfa le condizioni:* $f(1,2,2) = (0,10,0)$*,* $f(1,-1,0) = (-12,-5,-36)$*,* $f(1,1,1) = (-6,5,-18)$*. Qual è la matrice* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *che rappresenta* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$*? Dire se* f *è, oppure no, diagonalizzabile.*

Svolgimento. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori $(1,2,2),(1,-1,0),(1,1,1)$. Sappiamo che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6 \\ 10 & -5 & 5 \\ 0 & -36 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ -36 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

Infine, poiché il polinomio caratteristico di f è: $p_f(t) = -t(t-5)(t-6)$, allora f ha tutti gli autovalori con molteplicità algebrica 1. Quindi possiamo dire che f è diagonalizzabile. ■

Geometria ed Algebra 1, III appello, 4 dicembre 2002.

Esercizio 1. *Per l'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ *definita ponendo* $f(x, y, z, t) = (x + z, 3x + 3z)$*, determinare una base per* $Ker(f)$*, una base per* $Im(f)$*, ed una rappresentazione cartesiana per* $Im(f)$*.*

Svolgimento. La matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, una base è costituita dal vettore $(1, 3)$, ed una sua rappresentazione cartesiana è data dall'equazione $3x - y = 0$. Il nucleo ha dimensione 3, ed è rappresentato dall'equazione: $x + z = 0$. Possiamo scegliere y, z, t come variabili libere. Quindi $x = -z$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(-1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. ■

Esercizio 2. *Fare un esempio di un'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ *il cui nucleo sia generato dai vettori* $(1, 1, 1, 1)$ *e* $(1, 0, 1, 0)$.

Svolgimento. Sia $U := Span((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0))$. Una rappresentazione cartesiana di U è data dal sistema: $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$. Allora un' applicazione lineare che soddisfa le condizioni richieste è la funzione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita ponendo: $f(x, y, z, t) := (x + y - z - t, y - t)$. ■

Esercizio 3. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato dai vettori* $(1, 1, 1, 1)$ *e* $(1, 0, -1, -1)$*. Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *definito dal sistema lineare* $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$*. Stabilire se il vettore* $\mathbf{w} := (-1, -1, 1, 1)$ *appartiene o no ad* $U \cap V$*.*

Svolgimento. Poiché le coordinate di $\mathbf{w}$ soddisfano le equazioni di U, allora $\mathbf{w} \in U$. Tuttavia il vettore $\mathbf{w}$ non si può scrivere come combinazione lineare di $(1, 1, 1, 1)$ e $(1, 0, -1, -1)$ (infatti l'equazione $(-1, -1, 1, 1) = x(1, 1, 1, 1) + y(1, 0, -1, -1)$ non ammette soluzioni). Quindi $\mathbf{w} \notin V$, e, a maggior ragione, $\mathbf{w} \notin U \cap V$. ■

Esercizio 4. *Dato l'operatore lineare* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *definito ponendo* $f(x, y) = (14x - 4y, 48x - 14y)$*, determinare una base* $\mathcal{B}$ *di* $\mathbf{R}^2$ *tale che* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ *sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. La matrice di f rispetto alla base canonica è $A := \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ 48 & -14 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t^2 - 4$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -2 e 2. L'autospazio V_{-2} ammette come base $(1, 4)$, mentre l'autospazio V_2 ammette come base $(1, 3)$. La base cercata è: $\mathcal{B} := \{(1, 4), (1, 3)\}$. ■

Esercizio 5. *Posto* $A := \begin{bmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & -cos\,\alpha \end{bmatrix}$*, determinare una matrice invertibile* P *tale che* $P^{-1}AP$ *sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che se α è un multiplo intero di π, allora la matrice A è diagonale, ed in tal caso si può porre $P = I$. Pertanto da ora in poi possiamo assumere che α non sia un multiplo intero di π.

Ciò premesso, osserviamo che il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t^2 - 1$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -1 e 1. L'autospazio V_{-1} ammette come base $(-sen\,\alpha, 1 + cos\,\alpha)$ (qui interviene l'ipotesi che α non è un multiplo intero di π), mentre l'autospazio V_1 ammette come base $(-sen\,\alpha, -1 + cos\,\alpha)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} -sen\,\alpha & -sen\,\alpha \\ 1 + cos\,\alpha & -1 + cos\,\alpha \end{bmatrix}$. ■

Esercizio 6. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'operatore definito ponendo* $f(x, y, z) = (4x + y - 2z, -4x + 2z, 14x + 2y - 7z)$*. Stabilire se* f *è oppure no diagonalizzabile.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di f è: $p_f(t) = -t^2(t + 3)$. Inoltre il rango della matrice rappresentativa $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 14 & 2 & -7 \end{bmatrix}$ è 2, quindi $m_g(0) = 1 \neq m_a(0) = 2$, ed f non è diagonalizzabile. ■

Geometria ed Algebra 1, appello straordinario, 7 maggio 2003.

Esercizio 1. *Sia A la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Calcolare gli autovalori di A, una base per ciascun autospazio, ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -(t+1)(t-1)(t-3)$. Quindi gli autovalori di A son $-1, 1, 3$. L'autospazio V_{-1} ammette come base $(1, 0, -1)$, l'autospazio V_1 ammette come base $(0, 1, 0)$, e l'autospazio V_3 ammette come base $(1, 0, 1)$. La matrice cercata è: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} (2+k)x + 5y = 1 \\ x + (3+k)y = 1 \\ 3x + 8y = 2 + k. \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice completa di $\mathcal{S}$ ha determinante pari a $k^2(k+7)$. Quindi, se $k \notin \{0, -7\}$, il sistema assegnato non è compatibile. Se $k = 0$, $\mathcal{S}$ ammette un'unica soluzione data da $(-2, 1)$. Se $k = -7$, $\mathcal{S}$ ammette un'unica soluzione data da $(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$. ■

Esercizio 3. *Provare che il vettore $(2, -2, -6)$ appartiene al sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1, 1, -1)$ e $(1, 2, 0)$. Quali sono le coordinate di $(2, -2, -6)$ rispetto a $(1, 1, -1)$ e $(1, 2, 0)$?*

Svolgimento. Poiché $(2, -2, -6) = 6(1, 1, -1) - 4(1, 2, 0)$, allora possiamo dire che $(2, -2, -6)$ appartiene al sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1, 1, -1)$ e $(1, 2, 0)$, e le coordinate cercate sono $(6, -4)^T$. ■

Esercizio 4. *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z, t) = (x+t, x+y-z, x+t)$, calcolare una base per il nucleo, una per l'immagine, e calcolare una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

Svolgimento. La matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, una base è costituita dai vettori $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, ed una sua rappresentazione cartesiana è data dall'equazione: $x - z = 0$. Il nucleo ha dimensione 2, ed è rappresentato dal sistema: $\begin{cases} x + t = 0 \\ y - z - t = 0 \end{cases}$. Possiamo scegliere z, t come variabili libere. Quindi $y = z + t$ e $x = -t$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(0, 1, 1, 0)$, $(-1, 1, 0, 1)$. ■

Esercizio 5. *L'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ trasforma il vettore $(2, 1)$ in (a, b), ed il vettore $(5, 3)$ in (c, d). Qual è la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base canonica?*

Svolgimento. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base $\{(2, 1), (5, 3)\}$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a - c & -5a + 2c \\ 3b - d & -5b + 2d \end{bmatrix}. \ ■$$

Geometria ed Algebra 1, IV appello, 17 settembre 2003.

Esercizio 1. *Il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ ha la seguente rappresentazione cartesiana:*

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \\ 3x+2t=0. \end{cases}$$

Calcolare una base di U.

Svolgimento. Riducendo a scala, si perviene alla seguente rappresentazione cartesiana di U:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -3y-3z-t=0. \end{cases}$$

Quindi U ha dimensione 2, possiamo assumere z,t come variabili libere, ed una rappresentazione parametrica di U è data dalla funzione: $\rho : (z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-\frac{2}{3}t, -z-\frac{t}{3}, z, t) \in U$. Una base per U è data dai vettori $\rho(1,0)$, $\rho(0,1)$, cioè dai vettori $(0,-1,1,0)$, $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1)$. ■

Esercizio 2. *Il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ è generato dai vettori $(0,1,0,-1)$ e $(1,0,1,0)$. Il sottospazio V ha rappresentazione cartesiana data dal sistema: $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ 2x-y-z-t=0 \end{cases}$. Calcolare una base per $U+V$.*

Svolgimento. Risolvendo il sistema che rappresenta V, troviamo che V ha base data dai vettori: $(2,1,3,0)$, $(0,-1,0,1)$. Quindi $U+V$ è generato dai vettori $(0,1,0,-1)$, $(1,0,1,0)$, $(2,1,3,0)$ e $(0,-1,0,1)$. Disponendo in riga tali vettori, e riducendo a scala, si vede che $(0,1,0,-1)$, $(1,0,1,0)$, $(2,1,3,0)$ formano una base per $U+V$. ■

Esercizio 3. *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(2)$, $e_1(-1)$, $p_{2,3}$, $e_2(-1)$, $e_{3,2}(-3)$, $e_3(\frac{1}{8})$, $e_{2,3}(1)$, $e_{1,3}(1)$, $e_{1,2}(1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. ■

Esercizio 4. *Sia $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo: $f(x,y,z,t,u) = (x+y+z+t+u, y+z+t+u, y+z+t+u)$. Determinare una base per $Im(f)$ ed una base per $Ker(f)$.*

Svolgimento. La matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, ed una sua base è costituita dai vettori $(1,0,0)$ e $(1,1,1)$. Il nucleo è rappresentato dal sistema: $\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ y+z+t+u=0 \end{cases}$. Possiamo scegliere z,t,u come variabili libere. Quindi $x=0$ e $y=-z-t-u$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(0,-1,1,0,0)$, $(0,-1,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,1)$. ■

Esercizio 5. *Determinare una base che diagonalizzi l'operatore: $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito ponendo: $f(x,y,z) = (-x, -4x-4y+z, -16x-12y+3z)$.*

Svolgimento. La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \\ -16 & -12 & 3 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di f è: $p_f(t) = -t(t+1)^2$. Quindi gli autovalori di f sono -1 e 0. L'autospazio V_{-1} ha per base $(-3,4,0)$, $(0,1,3)$. L'autospazio V_0 ha base data dal vettore $(0,1,4)$. Quindi una base che diagonalizza f è data dai vettori: $(-3,4,0)$, $(0,1,3)$, $(0,1,4)$. ■

Geometria ed Algebra 1, V appello, 24 settembre 2003.

Esercizio 1. *Il sottospazio V di $\mathbf{R}^5$ è generato dai vettori $(1,1,1,1,1)$ e $(2,2,2,5,-1)$. Il sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ ha rappresentazione cartesiana data dal sistema:* $\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ y+z+t+u=0 \\ z+t+u=0 \end{cases}$. *Calcolare una base per $U \cap V$.*

Svolgimento. Una rappresentazione cartesiana di V è data dal sistema: $\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ 2x-t-u=0 \end{cases}$. Per cui una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ è data dal sistema che si ottiene considerando sia le equazioni che definiscono U che quelle che definiscono V. Riducendo a scala tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di $U \cap V$:

$$\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ y+z+t+u=0 \\ z+t+u=0 \\ t+u=0. \end{cases}$$

Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base è data dal vettore: $(0,0,0,1,-1)$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} kx+2y=k \\ 2x+ky=4-k. \end{cases}$$

Svolgimento. Il determinante della matrice incompleta di $\mathcal{S}_k$ è k^2-4. Quindi, se $k \notin \{-2,2\}$, allora $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, che è data da: $(\frac{k+4}{k+2}, -\frac{k}{k+2})$. Se $k=-2$, il sistema $\mathcal{S}_{-2}$ non è compatibile. Se $k=2$, il sistema $\mathcal{S}_2$ ammette ∞^1 soluzioni, date da: $(1-t,t)$, $t \in \mathbf{R}$. ■

Esercizio 3. *Calcolare una base per il sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori* $(1,2,3,4,5)$, $(2,1,1,1,3)$, $(3,3,4,5,8)$, $(1,-1,-2,-3,-2)$, $(4,5,7,9,13)$.

Svolgimento. Mettendo in riga i vettori assegnati, e riducendo a scala per righe, si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base per U è: $\{(1,2,3,4,5),(0,-3,-5,-7,-7)\}$. ■

Esercizio 4. *Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3. Sia $f : V \to V$ l'operatore lineare che al polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ associa il polinomio $q(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$. Sia $\mathcal{B}$ la base di V costituita dai polinomi 1, $1+t$, t^2, t^3. Calcolare la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Svolgimento. Abbiamo: $f(1)=0$, $f(1+t)=1$, $f(t^2)=2t\,(=-2+2(1+t))$, $f(t^3)=3t^2$. Quindi:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. ■$$

Esercizio 5. *Posto* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -t^2(t-3)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori 0 e 3. L'autospazio V_0 ammette come base $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, mentre l'autospazio V_3 ammette come base $(1,1,1)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. ■

Geometria ed Algebra 1, I esonero, 27 ottobre 2003.

Esercizio 1. *Calcolare il determinante della seguente matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{5,1}(-1)$, $p_{2,4}$, $p_{4,5}$, $e_{5,4}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito 3 scambi, deduciamo: $det(A) = -det(S) = 3$. ∎

Esercizio 2. *Estendere a base di* $\mathbf{R}^5$ *il sistema di vettori* $\{(1,1,1,3,4),(1,1,0,2,3),(1,0,0,0,0),(-1,1,0,1,3)\}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, sulla matrice ottenuta mettendo in riga i vettori assegnati, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(1)$, $e_{3,2}(-1)$, $e_{4,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se aggiungiamo ad S la riga e_5, otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5. Per cui $\{(1,1,1,3,4),(1,1,0,2,3),(1,0,0,0,0),(-1,1,0,1,3),(0,0,0,0,1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^5$ che estende il sistema di vettori assegnato. ∎

Esercizio 3. *Dati i sottospazi* $U := Span((1,2,0,1),(0,1,-1,0))$ *e* $W := Span((1,3,0,-1),(2,4,1,0),(3,7,1,-1))$ *di* $\mathbf{R}^4$*, calcolare una base e la dimensione per* U*,* W*,* $U+W$ *e* $U \cap W$.

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che, poiché i due generatori di U non sono uno multiplo dell'altro, essi formano una base di U, ed U ha perciò dimensione 2.

Poi, tenuto conto che $(3,7,1,-1) = (1,3,0,-1) + (2,4,1,0)$, segue che $W = Span((1,3,0,-1),(2,4,1,0))$, e, per lo stesso motivo di prima, $(1,3,0,-1),(2,4,1,0)$ formano una base per W, e $dim(W) = 2$.

Sappiamo che $U+W = Span((1,2,0,1),(0,1,-1,0),(1,3,0,-1),(2,4,1,0))$. Per calcolarne la dimensione andiamo a vedere se i quattro generatori sono legati oppure no, cioè se essi ammettono, oppure no, una relazione non banale. A tale proposito, sia (x,y,z,t) una qualunque relazione tra i generatori di $U+W$. Allora si ha: $x(1,2,0,1) + y(0,1,-1,0) + z(1,3,0,-1) + t(2,4,1,0) = \mathbf{0}$, cioè si ha il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x + z + 2t = 0 \\ 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ -y + t = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ammette come soluzione non banale $(x,y,z,t) = (1,-1,1,-1)$. Ciò significa che:

$$(*) \qquad (1,2,0,1) - (0,1,-1,0) + (1,3,0,-1) - (2,4,1,0) = \mathbf{0},$$

cioè i quattro generatori sono legati. In particolare vediamo che $(2,4,1,0)$ è sovrabbondante. Dunque:

$$U + W = Span((1,2,0,1),(0,1,-1,0),(1,3,0,-1)).$$

Lo stesso calcolo precedente mostra che i tre generatori restanti sono liberi (infatti se $t = 0$ allora $x = y = z = 0$). Essi dunque formano una base per $U + W$, e $dim(U + W) = 3$.

Per la formula di Grassmann sappiamo che $dim(U \cap W) = 1$, e da (*) deduciamo che una base per $U \cap W$ è formata dal vettore $(1, 1, 1, 1)$. ■

Esercizio 4. *Dare la definizione di rango di una matrice. Inoltre, al variare del parametro k, calcolare il rango della matrice* $A_k := \begin{bmatrix} 3 & 6 & k+7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & k+2 & 1 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Data una matrice A, si definisce rango per righe di A, la dimensione dello spazio generato dalle righe di A. Analogamente, si definisce rango per colonne di A, la dimensione dello spazio generato dalle colonne A. Il Teorema del rango afferma che il rango per righe coincide con il rango per colonne. Tale numero si chiama il rango di A.

Veniamo ora al nostro esempio. Poiché il determinante di A_k è: $det(A_k) = k(k + 1)$, allora, se $k \notin \{-1, 0\}$, il rango di $A_k = 3$. Invece il rango di A_0 e di A_{-1} è 2. ■

Esercizio 5. *Provare che se i vettori* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono linearmente indipendenti, allora anche* $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{w}$ *sono linearmente indipendenti.*

Svolgimento. Sia (x, y, z) una relazione per i vettori $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{w}$. Allora abbiamo: $x(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})+y(\mathbf{v}+\mathbf{w})+z\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Cioè: $x\mathbf{u} + (x+y)\mathbf{v} + (x+y+z)\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Ma i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti per ipotesi. Dunque deve essere:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Ma ciò implica $x = y = z = 0$. Quindi abbiamo provato che una qualunque relazione tra i vettori $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{w}$ deve essere banale. Ciò significa proprio che $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti. ■

Esercizio 5. *Sia* $X := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a = b = c = d \right\}$. *Provare che X è un sottospazio di $\mathcal{M}(2, 2)$, e calcolarne una base.*

Svolgimento. Osserviamo che $X = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbf{R} \right\}$. Quindi $X = Span\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$. Ciò prova che X è un sottospazio di $\mathcal{M}(2, 2)$, e che $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ne costituisce una base. ■

Geometria ed Algebra 1, II esonero, 21 novembre 2003.

Esercizio 1. *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *e verificare l'esattezza del risultato.*

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{3,1}(-1)$, $e_{3,2}(1)$, $e_{2,3}(-1)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Esercizio 2. *Sia* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $f(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 3y + 5z + 9t, 2x + y + 5z + 8t)$. *Calcolare una base per* $Ker(f)$ *ed una per* $Im(f)$, *ed una rappresentazione cartesiana per* $Im(f)$. *Dire se il vettore* $(0, 4, 3)$ *appartiene o no ad* $Im(f)$.

Svolgimento. La matrice rappresentativa di f rispetto alla basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, e come base $(1, 1, 2)$, $(-1, 3, 1)$. Una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dall'equazione: $5x + 3y - 4z = 0$. Poiché il vettore $(0, 4, 3)$ soddisfa tale equazione, possiamo dire che $(0, 4, 3)$ appartiene ad $Im(f)$.

Anche $Ker(f)$ ha dimensione 2, ed una sua base, ottenuta risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y = -z - t \\ y = -z - 2t, \end{cases}$$

è data dai vettori $(-2, -1, 1, 0)$, $(-3, -2, 0, 1)$. $\blacksquare$

Esercizio 3. *Sia* $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^3$. *L'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *soddisfa le seguenti condizioni:* $f(e_1 + e_3) = 2(e_1 + e_2 + e_3)$, $f(e_1 + e_2) = f(e_1 + e_3)$, *e* $f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$. *Qual è la matrice rappresentativa* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di* f*?*

Svolgimento. Tenuto conto che f è lineare, dai dati deduciamo che:

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_3) = 2(e_1 + e_2 + e_3) \\ f(e_1) + f(e_2) = 2(e_1 + e_2 + e_3) \\ f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Interpretando $f(e_1)$, $f(e_2)$ ed $f(e_3)$ come delle incognite, possiamo calcolarne il valore eseguendo operazioni elementari sulle formule precedenti. Si ottiene che $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$. Quindi la matrice cercata è:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Esercizio 4. *Determinare una matrice diagonale* D *ed una matrice invertibile* P *tale che* $D = P^{-1}AP$, *dove* $A := \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ -8 & -13 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = (t+5)(t-3)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -5 e 3. L'autospazio V_{-5} ammette come base $(1,-1)$, mentre l'autospazio V_3 ammette come base $(-2,1)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. ■

Esercizio 5. *Per quali valori del parametro k la seguente matrice A_k è diagonalizzabile?*

$$A_k := \begin{bmatrix} -k-4 & k+5 \\ -k-5 & k+6 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A_k è: $p_{A_k}(t) = (t-1)^2$. Quindi lo spettro di A è costituito dall'autovalore 1, che ha sempre molteplicità algebrica 2. Invece, per quanto riguarda la molteplicità geometrica, osserviamo che:

$$m_g(1) = 2 - rk(A_k - I) = 2 - rk \begin{bmatrix} -k-5 & k+5 \\ -k-5 & k+5 \end{bmatrix} = 2 - rk \begin{bmatrix} -k-5 & k+5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } k = -5 \\ 1 & \text{se } k \neq -5. \end{cases}$$

In conclusione, la matrice A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = -5$. ■

Geometria ed Algebra 1, II appello, 27 novembre 2003.

Esercizio 1. *Si consideri il seguente sottospazio di* $\mathbf{R}^4$, $U := Span((1,1,1,1),(2,1,1,1),(5,1,1,1))$. *Determinare un sottospazio* V *di* $\mathbf{R}^4$ *tale che* $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che una base di U è costituita dai vettori $(1,1,1,1),(0,1,1,1)$. Aggiungendo a tali vettori i vettori canonici e_3, e_4 si ottiene una base di $\mathbf{R}^4$. Allora il sottospazio cercato è $V := Span(e_3, e_4)$. $\blacksquare$

Esercizio 2. *Sia* W *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *definito dall'equazione:* $2x - y - z + w = 0$. *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato dai vettori:* $(1,-1,0,0),(2,-1,-1,0),(2,-2,1,-1)$. *Calcolare una base per* $U \cap W$.

Svolgimento. Una rappresentazione cartesiana di U è data dall'equazione: $x+y+z+w=0$. Per cui una rappresentazione cartesiana di $U \cap W$ è data dal sistema che si ottiene considerando sia l' equazione che definisce U che quella che definisce W. Riducendo a scala tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di $U \cap W$:

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ 3y+3z+w=0. \end{cases}$$

Per ottenere una base di $U \cap W$ andiamo a risolvere tale sistema. Possiamo assumere z e w come variabili libere, ed una rappresentazione parametrica di $U \cap W$ è data dalla funzione: $(z,w) \in \mathbf{R}^2 \to (-\frac{2w}{3}, -z - \frac{w}{3}, z, w) \in U \cap W$. Una base di $U \cap W$ si ottiene in corrispondenza della base canonica di $\mathbf{R}^2$, cioè una base di $U \cap W$ è costituita dai vettori: $(0,-1,1,0)$, $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1)$. $\blacksquare$

Esercizio 3. *Determinare una matrice diagonale* D *ed una matrice invertibile* P *tale che* $D = P^{-1}AP$, *dove* $A := \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -t^2(t+1)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -1 e 0. L'autospazio V_{-1} ammette come base $(1,1,1)$, mentre l'autospazio V_0 ammette come base $(1,-1,0),(0,3,2)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. $\blacksquare$

Esercizio 4. *Per l'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ *definita ponendo* $f(x,y,z,t) = (x-y+z-t, 6x-6y+6z-6t)$, *calcolare una base per* $Ker(f)$, *una base per* $Im(f)$, *ed una rappresentazione cartesiana per* $Im(f)$.

Svolgimento. La matrice rappresentativa di f rispetto alla basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & -6 & 6 & -6 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, e come base $(1,6)$. Una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dall'equazione: $6x - y = 0$. Per il Teorema della dimensione, possiamo dire che $Ker(f)$ ha dimensione 3, ed una sua base, ottenuta risolvendo l'equazione $x - y + z - t = 0$, è data dai vettori $(1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$. $\blacksquare$

Esercizio 5. *Il vettore* $\mathbf{u}$ *di* $\mathbf{R}^2$ *ha coordinate* $(5,-4)^T$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} := \{(2,2),(2,3)\}$. *Quali sono le coordinate di* $\mathbf{u}$ *rispetto alla base* $\mathcal{B}' := \{(1,1),(5,6)\}$*?*

Svolgimento. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$, e denotiamo con $(x', y')^T$ le coordinate di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Allora abbiamo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -4 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Geometria ed Algebra 1, III appello, 4 dicembre 2003.

Esercizio 1. *Calcolare il determinante della seguente matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 11 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,5}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{5,1}(-2)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito uno scambio, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -7$. ■

Esercizio 2. *Determinare una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1}AP$, dove* $A := \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = (t+5)(t+4)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -5 e -4. L'autospazio V_{-5} ammette come base $(-1,1)$, mentre l'autospazio V_{-4} ammette come base $(4,-3)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. ■

Esercizio 3. *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita ponendo $f(x,y) = (2x+3y, 2x+3y, -4x-6y)$, calcolare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

Svolgimento. La matrice rappresentativa di f rispetto alla basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, e come base $(2,2,-4)$. Una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dal sistema lineare: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$. Infine $Ker(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base, ottenuta risolvendo l'equazione $2x + 3y = 0$, è data dal vettore $(-3, 2)$. ■

Esercizio 4. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ha il nucleo definito dall'equazione $x + y + z = 0$. Inoltre si ha che $f(0,1,0) = (0,-9,0)$. Determinare una matrice diagonale D ed una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tali che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D$.*

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che il nucleo di f ha base data dai vettori $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita da $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$ e $(0,1,0)$. Allora $\mathcal{B}$ è la base cercata. Infatti:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}. \ ■$$

Esercizio 5. *Si consideri la base $\mathcal{B} := \{1, x, x^2, x^3\}$ per lo spazio dei polinomi $V := \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$. Sia $f : V \to V$ l'operatore lineare che al polinomio $p(x)$ associa il polinomio $p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x)$. Calcolare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, la dimensione di $Ker(f)$ e la dimensione di $Im(f)$.*

Svolgimento. Osserviamo che $f(1) = 1$, $f(x) = 1 + x$, $f(x^2) = 2 + 2x + x^2$, $f(x^3) = 6 + 6x + 3x^2 + x^3$. Quindi:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In particolare $dim(Im(f)) = 4$, e $dim(Ker(f)) = 0$. ■

Geometria ed Algebra 1, IV appello, 23 settembre 2004.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,1)$, $(1,0,1,-1)$, $(3,2,3,1)$, e sia V il sottospazio generato da $(1,-1,-1,1)$, $(3,-1,-1,3)$. Calcolare $dim(U+V)$, $dim(U\cap V)$, e calcolare una base per $U\cap V$.*

Svolgimento. Disponendo in riga i generatori di U, e riducendo a scala, si vede che U ammette come base i vettori: $(1,1,1,1)$, $(0,1,0,2)$. Osserviamo anche che $(1,-1,-1,1)$, $(3,-1,-1,3)$ formano una base per V. Mettendo insieme questi 4 vettori, otteniamo un sistema di generatori per $U+V$. E disponendoli in riga, e riducendo a scala, vediamo che una base per $U+V$ è data dai vettori: $(1,1,1,1)$, $(0,1,0,2)$, $(0,1,1,0)$. Per cui $dim(U+V)=3$, e per la formula di Grassmann, $dim(U\cap V)=1$.

Per calcolare una base di $U\cap V$, andiamo alla ricerca di pesi x,y,z,w tali che:

$$(*)\qquad x(1,1,1,1)+y(0,1,0,2)=z(1,-1,-1,1)+w(3,-1,-1,3),$$

cioè tali che:

$$\begin{cases} x-z-3w=0\\ x+y+z+w=0\\ x+z+w=0\\ x+2y-z-3w=0\end{cases}$$

(si osservi che il vettore rappresentato dall'uguaglianza $(^*)$ rappresenta il generico vettore di $U\cap V$). Una soluzione non banale di tale sistema è $(x,y,z,w)=(1,0,-2,1)$. In corrispondenza di tali pesi, otteniamo da $(^*)$ che un vettore non nullo appartenente ad $U\cap V$ è $(1,1,1,1)$, che pertanto forma una base per $U\cap V$. ■

Esercizio 2. *Calcolare il determinante della matrice* $A:=\begin{bmatrix}8&10&11&12\\2&3&3&3\\3&4&5&5\\1&1&1&1\end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,4}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-3)$, $e_{4,1}(-8)$, $e_{3,2}(-1)$, $e_{4,2}(-2)$, $e_{4,3}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S:=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito uno scambio, deduciamo: $det(A)=-det(S)=-1$. ■

Esercizio 3. *Determinare una rappresentazione parametrica per le soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S}:=\begin{cases} x-y-z-t=1\\ 2x+y+z+t=0\\ 4x-y-z-t=2.\end{cases}$$

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1&1\\0&3&3&3&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette ∞^2 soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere z e t come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x-y=z+t+1\\ 3y=-3z-3t-2.\end{cases}$$

In conclusione, una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}$ è data dall'applicazione:

$$(z,t)\in\mathbf{R}^2\to(\frac{1}{3},-z-t-\frac{2}{3},z,t)\in Sol(\mathcal{S}).\ ■$$

Esercizio 4. *Determinare una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tale che $D=P^{-1}AP$, dove* $A:=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$. *Verificare l'esattezza del risultato.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -t^2(t-2)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori 0 e 2. L'autospazio V_0 ammette come base $\{(1,0,0),(0,1,-1)\}$, mentre l'autospazio V_2 ammette come base $\{(1,1,1)\}$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Come verifica, è sufficiente osservare che P è invertibile (infatti $det(P) = 2 \neq 0$), e che $PD = AP$, cioè che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Esercizio 4. *Si consideri la base* $\mathcal{B} := \{1+x, 1+2x\}$ *per lo spazio dei polinomi* $V := \mathbf{R}[x]_{\leq 1}$. *Sia* $f : V \to V$ *l'operatore lineare che al polinomio* $p(x)$ *associa la sua derivata. Determinare la matrice rappresentativa* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ *di* f *rispetto alla base* $\mathcal{B}$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(1+x) = 1$, e che $f(1+2x) = 2$. D'altra parte $1 = 2(1+x) - (1+2x)$, e $2 = 4(1+x) - 2(1+2x)$. Per cui $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. $\blacksquare$

Geometria ed Algebra 1, V appello, 30 settembre 2004.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$. Stabilire se il vettore $(2,2,-4)$ appartiene o non ad U.*

Svolgimento. Si tratta di vedere se esistono pesi x, y tali che $(2,2,-4) = x(1,-1,0) + y(0,1,-1)$. Ciò accade per $x = 2$ ed $y = 4$. Quindi il vettore $(2,2,-4)$ appartiene ad U. ■

Esercizio 2. *Calcolare l'inversa della matrice $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, e verificare l'esattezza del risultato.*

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-3)$, $e_{3,2}(-1)$, $e_{2,3}(-1)$, $e_{1,3}(-1)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Esercizio 3. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(0,-1,1,0)$ e $(0,-1,0,1)$. Determinare una rappresentazione cartesiana per U.*

Svolgimento. Mettiamo in colonna i vettori assegnati, e affianchiamo la colonna $(x,y,z,t)^T$ che rappresenta il generico vettore di $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ -1 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala, otteniamo la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & y+z \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y+z+t \end{bmatrix}.$$

Il vettore $(x,y,z,t)^T$ appartiene ad U se e solo se tale matrice ha rango pari alla dimensione di U, che è 2. Ma tale matrice ha rango 2 se e solo se:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y+z+t = 0. \end{cases}$$

Questa è la rappresentazione cartesiana cercata di U. ■

Esercizio 4. *Determinare una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1}AP$, dove $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Verificare l'esattezza del risultato.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -t^2(t-3)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori 0 e 3. L'autospazio V_0 ammette come base $\{(0,1,0),(2,0,-1)\}$, mentre l'autospazio V_3 ammette come base $\{(1,1,1)\}$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Come verifica, è sufficiente osservare che P è invertibile (infatti $det(P) = -3 \neq 0$), e che $PD = AP$, cioè che:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Esercizio 5. *Sia* $U := \mathbf{R}[x]_{\leq 2}$ *lo spazio dei polinomi di grado al piú* 2*, e* $V := \mathbf{R}[x]_{\leq 1}$ *lo spazio dei polinomi di grado al piú* 1*. Fissiamo la base* $\mathcal{B} = \{1, x, x + x^2\}$ *per* U*, e la base* $\mathcal{E} = \{1, x\}$ *per* V*. Sia* $f : U \to V$ *l'applicazione lineare definita ponendo:*

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcolare una base per $Ker(f)$ *ed una base per* $Im(f)$*.*

Svolgimento. Denotiamo con $(b_0, b_1, b_2)^T$ le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Allora, in termini di coordinate, la funzione f agisce nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b_0 + b_1 + b_2 \\ -b_0 - b_1 - b_2 \end{bmatrix}.$$

Quindi il nucleo di f è descritto dall'equazione: $b_0 + b_1 + b_2 = 0$. Tale equazione ammette ∞^2 soluzioni, generate da $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, -1)$. Tali coordinate corrispondono ai vettori $1 - x$, e $1 - x - x^2$, che formano una base per $Ker(f)$. Per il Teorema della dimensione sappiamo che $dim(Im(f)) = 1$. Dunque una base per $Im(f)$ è costituita dal vettore di coordinate $(1, -1)^T$, cioè una base per $Im(f)$ è costituita dal vettore $1 - x$. ∎

Geometria ed Algebra 1, I esonero, 4 novembre 2004.

Esercizio 1. *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{4,2}(-1)$, $p_{3,4}$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito due scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = -5$. ■

Esercizio 2. *In quanti modi si può esprimere* $(1, 3, -2)$ *come combinazione lineare dei vettori* $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$*? E il vettore* $(1, 3, 2)$*?*

Svolgimento. Dire che il vettore $(1, 3, -2)$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, significa dire che esistono pesi x, y tali che $(1, 3, -2) = x(1, 1, 0) + y(1, 0, 1)$. Ciò equivale a dire che esistono pesi x, y tali che:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 3 \\ y = -2. \end{cases}$$

Deduciamo che esistono pesi x, y per esprimere $(1, 3, -2)$ come combinazione lineare dei vettori $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, e tali pesi sono univocamente determinati: deve essere $x = 3$ ed $y = -2$. Questo significa proprio che il vettore $(1, 3, -2)$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ in un sol modo.

Studiando il vettore $(1, 3, 2)$ invece si perviene alle condizioni:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

In questo caso il sistema non ammette soluzioni, e dunque il vettore $(1, 3, 2)$ non si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ in nessun modo. ■

Esercizio 3. *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato dai vettori* $(1, 0, -1)$, $(3, -1, -2)$, $(0, 1, -1)$. *Sia* V *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato dai vettori* $(1, -1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(2, 2, 4)$. *Calcolare dimensione e base per* U, V, $U + V$, $U \cap V$.

Svolgimento. Per calcolare una base e la dimensione di U, andiamo a vedere se i generatori assegnati sono liberi oppure no. A tale proposito, sia (x, y, z) una relazione tra di essi. Deve essere: $x(1, 0, -1) + y(3, -1, -2) + z(0, 1, -1) = \mathbf{0}$. Cioè:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0. \end{cases}$$

Una soluzione non banale è data da $(3, -1, -1)$. Quindi il generatore $(0, 1, -1)$ è sovrabbondante, e si ha: $U = Span((1, 0, -1), (3, -1, -2))$. Poiché $(1, 0, -1)$ e $(3, -1, -2)$ sono linearmente indipendenti, allora $dim(U) = 2$, ed una base per U è costituita dai vettori $(1, 0, -1)$, $(3, -1, -2)$.

Un'analisi analoga prova che $dim(V) = 2$, ed una base per V è costituita dai vettori $(1, -1, 0)$, $(1, 0, 1)$.

Poiché $U = Span((1, 0, -1), (3, -1, -2))$ e $V = Span((1, -1, 0), (1, 0, 1))$, allora $U + V$ è generato dai vettori $(1, 0, -1), (3, -1, -2), (1, -1, 0), (1, 0, 1)$. Come prima, per calcolare una base e la dimensione di $U + V$, andiamo a vedere se tali generatori sono liberi oppure no. Con un calcolo analogo a quello precedente, si vede che $(3, -1, -2)$ è sovrabbondante, che $U + V = Span((1, 0, -1), (1, -1, 0), (1, 0, 1))$, e che tali generatori sono liberi. Dunque $dim(U + V) = 3$ (e perciò $U + V = \mathbf{R}^3$), ed una base per $U + V$ è: $\{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (1, 0, 1)\}$.

Infine, dalla formula di Grassmann sappiamo che $dim(U \cap V) = 1$. Quindi per trovare una base di $U \cap V$, è sufficiente trovare un vettore non nullo di $U \cap V$. A tale proposito, sia $\mathbf{w}$ un vettore appartenente sia ad U che a V. Allora esistono pesi (x, y, z, t) tali che:

$$\mathbf{w} = x(1, 0, -1) + y(3, -1, -2) = z(1, -1, 0) + t(1, 0, 1).$$

L'equazione precedente conduce al sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 3y = z + t \\ -y = -z \\ -x - 2y = t. \end{cases}$$

Una soluzione non banale è: $(-2, 1, 1, 0)$. Quindi una base per $U \cap V$ è data dal vettore $\mathbf{w} := (1, -1, 0)$. ■

Esercizio 4. *Provare che:* $Span((1,2,3),(1,-1,2)) = Span((0,-3,-1),(3,3,8))$.

Svolgimento. Denotiamo con $S = \{(1,2,3),(1,-1,2)\}$, e con $T = \{(0,-3,-1),(3,3,8)\}$. Vogliamo provare che $Span(S) = Span(T)$.

Cominciamo con il provare che $S \subseteq Span(T)$. Ciò si prova trovando pesi x, y, z, t per cui: $(1,2,3) = x(0,-3,-1)+ y(3,3,8)$ e $(1,-1,2) = z(0,-3,-1)+t(3,3,8)$. Tali pesi esistono: basta porre $(x,y,z,t) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Ciò dimostra che $S \subseteq Span(T)$, da cui segue che $Span(S) \subseteq Span(Span(T)) = Span(T)$.

In maniera analoga si vede che $Span(T) \subseteq Span(S)$.

Ma se $Span(S) \subseteq Span(T)$ e $Span(T) \subseteq Span(S)$, allora $Span(S) = Span(T)$. ■

Esercizio 5. *Sia X il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito dalle coppie del tipo (a^2, a), al variare di a in $\mathbf{R}$. Stabilire se X è, oppure no, un sottospazio di $\mathbf{R}^2$.*

Svolgimento. Consideriamo il vettore $(4, 2)$, che appartiene ad X. Il vettore $(-1) \cdot (4, 2) = (-4, -2)$ non appartiene ad X, in quanto non esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $(-4, -2) = (a^2, a)$. Dunque X non è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, e quindi X non è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. ■

Esercizio 6. *Al variare dell'istante di tempo t in $\mathbf{R}$, calcolare il rango della matrice:* $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & t & 3 \\ 4 & t & -t \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo le operazioni elementari $e_{2,1}(-3)$ ed $e_{3,1}(-4)$ si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 0 & t-4 & -t-4 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che tale matrice non è (in generale) a scala. Per renderla tale, assumiamo $t \neq 3$, ed eseguiamo l'operazione $e_{3,2}(-\frac{t-4}{t-3})$. Otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & -t-4 \end{bmatrix}.$$

Poiché è a scala, possiamo leggerne il rango, e dedurne che: se $t \notin \{3, -4\}$, allora il rango di $A(t)$ è 3, e se $t = -4$ il rango di $A(-4)$ è 2.

Rimane da esaminare il caso $t = 3$. In tal caso, eseguendo su $A(3)$ le operazioni elementari $e_{2,1}(-3)$, $e_{3,1}(-4)$ e $p_{2,3}$, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi il rango di $A(3)$ è 2.

In conclusione:

$$rk(A(t)) = \begin{cases} 3 & \text{se } t \notin \{3, -4\} \\ 2 & \text{se } t \in \{3, -4\}. \end{cases}$$ ■

Geometria ed Algebra 1, II esonero, 26 novembre 2004.

Esercizio 1. *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, *e verificare l'esattezza del risultato.*

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_{3,1}(-2)$, $e_3(-1)$, $e_{1,3}(-3)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Esercizio 2. *Determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} 2x + y + z + t = -1 \\ x + 2y + 2z + 2t = 4 \\ x + y + z + t = 1. \end{cases}$$

Dire se $Sol(\mathcal{S})$ è, oppure no, un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette ∞^2 soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere z e t come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z - t \\ y = 3 - z - t. \end{cases}$$

Per cui una rappresentazione parametrica per $Sol(\mathcal{S})$, è data dall'applicazione:

$$(z, t) \in \mathbf{R}^2 \to (-2, 3 - z - t, z, t) \in Sol(\mathcal{S}).$$

Infine, $Sol(\mathcal{S})$ non è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ in quanto $\mathbf{0} \notin Sol(\mathcal{S})$ (infatti il sistema $\mathcal{S}$ non è omogeneo). $\blacksquare$

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y - z)$. Calcolare una base per $Ker(f)$ ed una base per $Im(f)$. Quali sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ che sono trasformati, tramite f, in $(1, 2)$?*

Svolgimento. La matrice rappresentativa di f rispetto alla basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, cioè $Im(f) = \mathbf{R}^2$, ed una sua base è la base canonica di $\mathbf{R}^2$. $Ker(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base, ottenuta risolvendo il sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$, è data dal vettore $(2, -3, 1)$.

I vettori di $\mathbf{R}^3$ che sono trasformati, tramite f, in $(1, 2)$, sono quei vettori $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tali che:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si vede che ce ne sono ∞^1, e precisamente sono i vettori $(1 + 2z, -3z, z)$, al variare di z in $\mathbf{R}$. $\blacksquare$

Esercizio 4. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1, -1, 2)$. Determinare una rappresentazione cartesiana per U.*

Svolgimento. Sia (x, y, z) il generico vettore di $\mathbf{R}^3$. Allora $(x, y, z) \in U$ se e solo se il rango della matrice: $\begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \\ 2 & z \end{bmatrix}$ è 1. Riducendo a scala, ciò equivale a dire che il rango della matrice: $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & x+y \\ 0 & -2x+z \end{bmatrix}$ è 1. Cioè che: $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$. Quest'ultimo sistema è la rappresentazione cartesiana cercata di U. ■

Esercizio 5. *Posto* $A := \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$*, determinare una matrice invertibile* P *tale che* $P^{-1}AP$ *sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = t^2 - 2t - 48$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -6 e 8. L'autospazio V_{-6} ammette come base $(1, -1)$, mentre l'autospazio V_8 ammette come base $(1, 1)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. ■

Esercizio 6. *L'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *ha il nucleo definito dall'equazione* $x + z = 0$*. Sapendo che* $f(1, 0, 0) = (-5, 3, 5)$*, calcolare la matrice rappresentativa* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$*. Dire se* f *è, oppure no, diagonalizzabile.*

Svolgimento. Nel nucleo di f ci sono i vettori $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, 0)$. Poiché $f(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$, ed f è lineare, allora $f(1, 0, 0) = f(0, 0, 1)$. Deduciamo che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di f è: $p_f(t) = -t^3$. Quindi $m_a(0) = 3$. Ma $m_g(0) = 2$, e dunque f non è diagonalizzabile. ■

Geometria ed Algebra 1, II appello, 1^0 dicembre 2004.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(0,0,0,1,)$, $(3,3,3,4)$. Posto $\mathcal{B} := \{(1,1,1,1),(1,1,1,2)\}$, provare che $\mathcal{B}$ è una base per U. Provare che il vettore $\mathbf{u} := (5,5,5,7)$ appartiene ad U, e calcolarne le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Svolgimento. Disponendo i quattro vettori assegnati in riga nell'ordine dato, si forma la matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala per righe A, *senza effettuare scambi*, si perviene alla matrice a scala: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ciò prova che le prime due righe di A formano una base per lo spazio delle sue righe, cioè che $\mathcal{B}$ è una base per U.

Infine osserviamo che $(5,5,5,7) = 3(1,1,1,1)+2(1,1,1,2)$, il che prova che $\mathbf{u} \in U$, e che le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono: $(3,2)^T$. ■

Esercizio 2. *Aggiungere ai vettori $(1,1,1,0,0)$, $(1,1,1,1,0)$, $(1,1,1,0,1)$ opportuni vettori della base canonica in modo da formare una base per $\mathbf{R}^5$.*

Svolgimento. Sia A la matrice ottenuta mettendo in riga i vettori assegnati. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se aggiungiamo ad S le righe e_2 ed e_3, otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5. Per cui $\{(1,1,1,0,0),(1,1,1,1,0),(1,1,1,0,1),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0)\}$ è una base di $\mathbf{R}^5$. Quindi, per formare una base di $\mathbf{R}^5$ a partire dai vettori assegnati, è sufficiente aggiungere i vettori canonici e_2 ed e_3. ■

Esercizio 3. *Stabilire se la seguente matrice $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile oppure no.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Per l' autovalore 1 abbiamo $m_a(1) = 2$, ma $m_g(1) = 3 - rk(A-I) = 3 - rk \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq m_a(1)$. Dunque A non è diagonalizzabile. ■

Esercizio 4. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(1,1) = (1,4)$, $f(1,2) = (2,2)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Dire se f è iniettiva oppure no. Dire se f è suriettiva oppure no.*

Svolgimento. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^2$ costituita dai vettori $(1,1)$, $(1,2)$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiché il rango di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è 2, allora $dim(Im(f)) = 2$ e quindi $Im(f) = \mathbf{R}^2$. Per cui f è suriettiva. Per il Teorema della dimensione $dim(Ker(f)) = 0$, e quindi f è anche iniettiva. ■

Esercizio 5. *Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'operatore lineare che trasforma il generico vettore (x, y, z, t) in $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y + z + 2t, t, 3x + 3y + 3z + 4t)$. Calcolare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

Svolgimento. La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, ed una base per $Im(f)$ è costituita dai vettori $(1, 1, 0, 3)$, $(1, 2, 1, 4)$. Per ottenere una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$, disponiamo in colonna i due vettori precedenti $(1, 1, 0, 3)$, $(1, 2, 1, 4)$, vi aggiungiamo il vettore generico (x, y, z, t), riduciamo a scala, ed infine imponiamo che il rango della matrice ottenuta sia 2. Si ottiene che una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$ è data dal sistema lineare $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - t = 0 \end{cases}$.

Il nucleo ha dimensione 2, ed è rappresentato dal sistema lineare $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$. Possiamo scegliere y e z come variabili libere. Una rappresentazione parametrica di $Ker(f)$ è data dalla funzione: $(y, z) \in \mathbf{R}^2 \to (-y - z, y, z, 0) \in Ker(f)$. In corrispondenza della base canonica di $\mathbf{R}^2$ otteniamo una base per $Ker(f)$. Cioè, una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$. $\blacksquare$

Geometria ed Algebra 1, III appello, 9 dicembre 2004.

Esercizio 1. *Calcolare il determinante della seguente matrice* $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -8 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,5}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{5,2}(1)$, $p_{3,5}$, $p_{4,5}$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito 3 scambi, deduciamo: $det(A) = -det(S) = 9$. ■

Esercizio 2. *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{3,4}(-1)$, $e_{2,4}(-1)$, $e_{1,4}(-1)$, $e_{2,3}(-1)$, $e_{1,3}(-1)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ■

Esercizio 3. *Si consideri il seguente operatore lineare:* $f : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \to (x+z, x+z, x+z) \in \mathbf{R}^3$. *Calcolare una base* $\mathcal{A}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ *sia diagonale.*

Svolgimento. La matrice di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Quindi il polinomio caratteristico di f è: $p_f(t) = -t^2(t-2)$. Gli autovalori di f sono 0 e 2. Una base per l'autospazio V_0 è data dai vettori $e_1 - e_3$, e_2. Una base per l'autospazio V_2 è data dal vettore $e_1 + e_3$. In conclusione, la base cercata è: $\mathcal{A} := \{e_1 - e_3, e_2, e_1 + e_3\}$. ■

Esercizio 4. *Sia* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ *l'operatore lineare definito ponendo:* $f(x, y, z, t) = (x - y - z - t, 2x - 2y - 2z - 2t)$. *Calcolare la dimensione ed una base per* $Ker(f)$ *ed* $Im(f)$. *Determinare una rappresentazione cartesiana per* $Im(f)$.

Svolgimento. La matrice che rappresenta f rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, una base è costituita dal vettore $(1, 2)$, ed una sua rappresentazione cartesiana è data dall'equazione $2x - y = 0$. Il nucleo ha dimensione 3, ed è rappresentato dall'equazione: $x - y - z - t = 0$. Possiamo scegliere y, z, t come variabili libere. Quindi $x = y + z + t$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$. ■

Esercizio 5. *Per quali valori del parametro* k *il seguente sistema lineare ammette infinite soluzioni?*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + 9y = -3. \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice incompleta di $\mathcal{S}$ ha determinante $9 - k^2$. Per il Teorema di Cramer, se $k \notin \{-3, 3\}$, allora il sistema è compatibile, ed ammette un'unica soluzione. Quando $k = 3$ è evidente che il sistema non ammette soluzioni. Quando $k = -3$, ci sono ∞^1 soluzioni.

Per cui, in conclusione: $\mathcal{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se $k = -3$. ■

Esercizio 6. *Si consideri la base $\mathcal{B} := \{3 + x, 2 + x\}$ per lo spazio dei polinomi $V := \mathbf{R}[x]_{\leq 1}$. Sia $f : V \to V$ l'operatore lineare che al polinomio $p(x)$ associa la sua derivata. Determinare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ di f rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Svolgimento. Osserviamo che $f(3 + x) = 1 = (3 + x) - (2 + x)$, $f(2 + x) = 1 = (3 + x) - (2 + x)$. Quindi:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Geometria ed Algebra 1, IV appello, 22 settembre 2005.

Esercizio 1. *Si considerino il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,1)$ e $(2,0,1,3)$, ed il sottospazio V definito dalle equazioni:* $\begin{cases} 2y+t=0 \\ z=0 \end{cases}$. *Calcolare una base per $U \cap V$.*

Svolgimento. Innanzitutto calcoliamo una rappresentazione cartesiana di U. Essa è data dal sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} 2x-z-t=0 \\ 3x-y-2t=0 \end{cases}$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è data dal sistema lineare che si ottiene considerando sia le equazioni di U che quelle V:

$$\begin{cases} 2y+t=0 \\ z=0 \\ 2x-z-t=0 \\ 3x-y-2t=0. \end{cases}$$

Riducendo a scala, si ottiene il sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} 2x-z-t=0 \\ 2y-3z+t=0 \\ z=0. \end{cases}$$

Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, possiamo assumere come variabile libera t, ed il generico vettore di $U \cap V$ si può mettere nella forma $(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, 0, t)$, $t \in \mathbf{R}$. In conclusione, una base per $U \cap V$ è data dal vettore $(1,-1,0,2)$. ■

Esercizio 2. *Calcolare il determinante della seguente matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{5,1}(-3)$, $e_{5,2}(-1)$, $e_{4,3}(-1)$, $e_{5,3}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Non avendo eseguito scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = -3$. ■

Esercizio 3. *Determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x+y-z+t=1 \\ 2x+y+z-t=1 \\ x+2z-2t=0 \\ 3x+2y=2. \end{cases}$$

Dire se $Sol(\mathcal{S})$ è, oppure no, un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette ∞^2 soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere z e t come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x+y=z-t+1 \\ y=3z-3t+1. \end{cases}$$

Per cui una rappresentazione parametrica per $Sol(\mathcal{S})$, è data dall'applicazione:

$$(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-2z+2t, 3z-3t+1, z, t) \in Sol(\mathcal{S}).$$

Infine, $Sol(\mathcal{S})$ non è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ in quanto $\mathbf{0} \notin Sol(\mathcal{S})$ (infatti il sistema $\mathcal{S}$ non è omogeneo). ■

Esercizio 4. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ avente come base $\mathcal{B} := \{(1,0,0),(2,4,6)\}$. Sia $f : U \to U$ l'applicazione lineare che al generico vettore (x,y,z) di U associa il vettore $f(x,y,z) = (-x+2y-z, -2x+4y-2z, -3x+6y-3z)$. Calcolare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.*

Svolgimento. Osserviamo che $f(1,0,0) = (-1,-2,-3) = 0\cdot(1,0,0) - \frac{1}{2}\cdot(2,4,6)$, e $f(2,4,6) = (0,0,0) = 0\cdot(1,0,0) + 0\cdot(2,4,6)$. Dunque:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Esercizio 5. *Si consideri la matrice:*

$$A_k := \begin{bmatrix} k & 2 & -k-1 \\ k & 4 & -k-3 \\ k-1 & 2 & -k \end{bmatrix}.$$

Sapendo che il polinomio caratteristico di A_k è $p(t) = -(t-1)^2(t-2)$, determinare per quali valori del parametro k la matrice A_k è diagonalizzabile.

Svolgimento. La matrice A_k è diagonalizzabile se e solo se $m_g(1) = 2$. Ma:

$$m_g(1) = 3 - rk(A_k - I) = 3 - rk\begin{bmatrix} k-1 & 2 & -k-1 \\ k & 3 & -k-3 \\ k-1 & 2 & -k-1 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 3 \\ 2 & \text{se } k = 3 \end{cases}.$$

Quindi la matrice A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = 3$. ■

Geometria ed Algebra 1, V appello, 29 settembre 2005.

Esercizio 1. *Sia V il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici del tipo* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *verificanti la proprietà $a+b+c+d=0$. Verificare che V è un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$, e calcolarne una base.*

Svolgimento. Osserviamo che poiché $a+b+c+d=0$, allora possiamo scrivere:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b-c-d & b \\ c & d \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto che le matrici $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ appartengono a V, l'uguaglianza precedente $(^*)$ dimostra che $V = Span\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Ciò prova che V è un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$, e che le matrici $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ne costituiscono un sistema di generatori. La stessa uguaglianza $(^*)$ prova che tali generatori sono liberi, quindi formano una base per V. ■

Esercizio 2. *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, *e verificare l'esattezza del risultato.*

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{2,3}(-2)$, $e_{1,3}(-3)$, $e_{1,2}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ ■$$

Esercizio 3. *Al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} ax + 4y = a \\ x + ay = 3 - a. \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice incompleta di $\mathcal{S}$ ha determinante $a^2 - 4$. Per il Teorema di Cramer, se $a \notin \{-2, 2\}$, allora il sistema è compatibile, ed ammette un'unica soluzione. Tale soluzione può essere calcolata con la Regola di Cramer, ed è $(\frac{a+6}{a+2}, -\frac{a}{a+2})$.

Quando $a = -2$ è evidente che il sistema non ammette soluzioni.

Quando $a = 2$, il sistema ammette ∞^1 soluzioni, date da $(1-2t, t)$, $t \in \mathbf{R}$.

In conclusione: $\mathcal{S}$ è compatibile se e solo se $a \neq -2$. In tal caso, se $a \neq 2$, ammette un'unica soluzione data da: $(\frac{a+6}{a+2}, -\frac{a}{a+2})$. Se invece $a = 2$, il sistema ammette ∞^1 soluzioni, date da $(1-2t, t)$, $t \in \mathbf{R}$. ■

Esercizio 4. *L'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ trasforma il vettore $(1,1,1)$ in $(3,0)$, ed ha come nucleo il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione $x+y+z=0$. Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche.*

Svolgimento. I vettori $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$ formano una base per il nucleo di f, e l'insieme $\mathcal{B}$ formato dai vettori $(1,-1,0), (1,0,-1), (1,1,1)$ forma una base per $\mathbf{R}^3$. Ora denotiamo con $\mathcal{E}_2$ ed $\mathcal{E}_3$ le basi canoniche di $\mathbf{R}^2$ e di $\mathbf{R}^3$. La matrice cercata è:

$$M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_2}(f) \cdot M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_2}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Esercizio 5. *Sia* $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Dire se A è, oppure no, diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -(t+6)t(t-8)$. Quindi la matrice A è 3×3 e possiede 3 autovalori distinti. Ciò implica che la matrice A è diagonalizzabile.

Allo scopo di determinare la matrice P, osserviamo che l'autospazio V_{-6} ammette come base il vettore $(1, 0, -1)$, l'autospazio V_0 ammette come base il vettore $(0, 1, 0)$, e l'autospazio V_8 ammette come base il vettore $(1, 0, 1)$. Quindi la matrice invertibile cercata è la matrice:

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Geometria, I esonero, 4 aprile 2007.

Esercizio 1. *Sia X il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito dalle coppie (x_1, x_2) tali che $x_1 \leq x_2$. Dire se X è, oppure non è, un sottospazio di $\mathbf{R}^2$.*

Svolgimento. La coppia $(1,2) \in X$. Ma $(-1)\cdot(1,2) = (-1,-2) \notin X$. Quindi X non è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, e perciò non è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, calcolare il rango della seguente matrice:*

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 3 & 6 \\ 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Poiché A_k possiede la sottomatrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ che ha rango 2, possiamo dire a priori che A_k ha rango ≥ 2, per ogni k. D'altra parte, il determinante di A_k è $-2(k-2)(k-3)$. Quindi il rango di A è 3 se e solo se $k \notin \{2,3\}$.

In conclusione:

$$rk(A_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \notin \{2,3\} \\ 2 & \text{se } k \in \{2,3\}. \end{cases} \quad ■$$

Esercizio 3. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(5,-2,10)$, $(2,1,1)$ e $(1,-1,3)$. Sia V il sottospazio generato dai vettori $(0,1,2)$, $(2,0,1)$ e $(2,4,9)$. Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U+V$ e $U \cap V$.*

Svolgimento. Disponendo in riga i generatori di U, e riducendo a scala, si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ciò implica che $dim(U) = 2$, ed una sua base è data dai vettori: $(1,-1,3)$, $(0,3,-5)$.

Un'analisi analoga prova che $dim(V) = 2$, ed una base per V è costituita dai vettori $(0,1,2)$, $(2,0,1)$.

Poiché $U = Span((1,-1,3), (0,3,-5))$ e $V = Span((0,1,2),(2,0,1))$, allora $U+V$ è generato dai vettori $(1,-1,3)$, $(0,3,-5)$, $(0,1,2)$, $(2,0,1)$. Come prima, per calcolare una base e la dimensione di $U+V$, disponiamo in riga i generatori di $U+V$ e riduciamo a scala. Si ottiene che $dim(U+V) = 3$, perciò $U+V = \mathbf{R}^3$, ed una sua base è data dalla base canonica.

Infine, dalla formula di Grassmann sappiamo che $dim(U \cap V) = 1$. Quindi per trovare una base di $U \cap V$, è sufficiente trovare un vettore non nullo di $U \cap V$. A tale proposito, sia $\mathbf{w}$ un vettore appartenente sia ad U che a V. Allora esistono pesi (x,y,z,t) tali che:

$$\mathbf{w} = x(1,-1,3) + y(0,3,-5) = z(0,1,2) + t(2,0,1).$$

L'equazione precedente conduce al sistema lineare:

$$\begin{cases} x = 2t \\ -x + 3y = z \\ 3x - 5y = 2z + t. \end{cases}$$

Una soluzione non banale è: $(22,9,5,11)$. Quindi una base per $U \cap V$ è data dal vettore $\mathbf{w} := (22,5,21)$. ■

Esercizio 4. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(0,1,2,1)$, $(0,1,2,3)$ e $(0,0,0,1)$. Calcolare una base di U, ed estenderla a base di $\mathbf{R}^4$. Infine determinare un sottospazio V di $\mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.*

Svolgimento. Disponendo i generatori assegnati in riga e riducendo a scala, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base per U è: $\mathcal{B} := \{(0,1,2,1),(0,0,0,1)\}$. Inoltre, disponendo i vettori di $\mathcal{B}$ in riga, ed aggiungendo i vettori canonici e_1 ed e_3, si ottiene una matrice 4×4 di rango 4. Quindi una base di $\mathbf{R}^4$ che estende $\mathcal{B}$ è: $\{(0,1,2,1),(0,0,0,1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}$. Il sottospazio cercato è quello generato dai vettori aggiunti, cioè è $V := Span(e_1, e_3)$. ■

Esercizio 5. *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{4,1}(-1)$, $p_{2,4}$, $e_{3,2}(-1)$, $p_{3,4}$, $e_{4,3}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito un numero dispari di scambi, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -2$. ■

Esercizio 6. *Fare un esempio di due matrici A e B equivalenti per righe, per le quali i rispettivi spazi generati dalle colonne non coincidono.*

Svolgimento. Poniamo $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. La matrice B è la riduzione a scala per righe di A. Quindi A e B sono equivalenti per righe (e $Span((1,1,1))$ è lo spazio generato dalle righe di A, che coincide con lo spazio generato dalle righe di B). Ma lo spazio generato dalle colonne di A, cioè $Span((1,1))$, è diverso dallo spazio generato dalle colonne di B, che è $Span((1,0))$. ■

Geometria, II esonero e II appello, 4 maggio 2007.

Esercizio 1. *Utilizzando il Teorema degli Orlati, discutere il rango della seguente matrice A_t in funzione del parametro t, ed individuarne una base per lo spazio generato dalle righe, ed una per lo spazio generato dalle colonne.*

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -t & t \\ 0 & t & -t & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Partiamo dal minore $[-t]$ di posto $1,2$. Se $t \neq 0$, tale minore è nonsingolare. Per cui, se $t \neq 0$ allora $rk(A_t) \geq 1$. Orliamolo con la seconda riga e la terza colonna. Otteniamo il minore $\begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix}$, il cui determinante è t^2, che è non nullo se $t \neq 0$. Per cui, se $t \neq 0$ allora $rk(A_t) \geq 2$. Orliamo tale minore con la terza riga e la quarta colonna. Otteniamo il minore $\begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & -t & t \\ t & -t & 1 \end{bmatrix}$, il cui determinante è $-t^2(t-1)$. Quindi, se $t \notin \{0,1\}$, $rk(A_t) \geq 3$. Poiché non è possibile orlare ulteriormente quest'ultimo minore, deduciamo, in base al Teorema degli Orlati, che esso è un minore fondamentale per A_t. Perciò, se $t \notin \{0,1\}$, allora $rk(A_t) = 3$, e una base per lo spazio delle righe è data dalle righe di A_t, mentre una base per lo spazio delle colonne è data dalla seconda, terza e quarta colonna.

Per completare l'analisi del rango di A_t, occorre esaminare i casi restanti $t = 0$, e $t = 1$.

Se $t = 0$, la matrice A_t diviene: $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. In questo caso partiamo dal minore nonsingolare $[1]$, di posto $1,1$. Orliamo tale minore con la terza riga e la quarta colonna. Otteniamo il minore nonsingolare $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Poiché tutti gli orlati di questo minore sono singolari (cioè hanno determinante nullo), allora $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è un minore fondamentale, e quindi $rk(A_0) = 2$, e una base per lo spazio delle righe è data dalla prima e dalla terza riga, mentre una base per lo spazio delle colonne è data dalla prima e dalla quarta colonna.

Infine supponiamo $t = 1$. La matrice A_t diviene: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Un ragionamento analogo mostra che $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è un minore fondamentale. Quindi $rk(A_1) = 2$, e una base per lo spazio delle righe è data dalla prima e dalla seconda riga, mentre una base per lo spazio delle colonne è data dalla prima e dalla seconda colonna. $\blacksquare$

Esercizio 2. *Calcolare l'inversa della seguente matrice A, e verificare che il risultato è corretto.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,4}$, $p_{2,4}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-4)$, $e_{3,4}(-7)$, $e_{2,4}(3)$, $e_{2,3}(1)$, $e_{1,3}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Esercizio 3. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-1,2,0,0)$, $(1,0,2,0)$ e $(3,2,2,2)$. Sia V il sottospazio definito dall'equazione $4x+y+z+2t=0$. Calcolare una rappresentazione cartesiana di U, una base per $U\cap V$, e dire se è vero oppure no che $\mathbf{R}^4=U+V$.*

Svolgimento. I generatori assegnati formano una base per U. Per cui, detto (x,y,z,t) il generico vettore di $\mathbf{R}^4$, allora $(x,y,z,t)\in U$ se e solo se:

$$det\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3 & x\\ 2 & 0 & 2 & y\\ 0 & 2 & 2 & z\\ 0 & 0 & 2 & t\end{bmatrix}=0,$$

cioè se e solo se $2x+y-z-3t=0$. Questa equazione è la rappresentazione cartesiana di U. Quindi $U\cap V$ è rappresentato dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases}2x+y-z-3t=0\\ 4x+y+z+2t=0.\end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U\cap V$: $(z,t)\in\mathbf{R}^2\to(-z-\frac{5}{2}t, 3z+8t, z, t)\in U\cap V$. Deduciamo che una base per $U\cap V$ è data dai vettori: $(-1,3,1,0)$, $(-5,16,0,2)$. In particolare $dim(U\cap V)=2$, e dalla formula di Grassmann deduciamo che $dim(U+V)=4$, per cui è vero che $\mathbf{R}^4=U+V$. ∎

Esercizio 4. *Calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $D=P^{-1}AP$, dove A è la seguente matrice:*

$$A=\begin{bmatrix}8 & -3 & -4\\ 18 & -7 & -8\\ 6 & -2 & -4\end{bmatrix}.$$

Verificare che il risultato ottenuto è corretto.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è $p_A(t)=-t(t+1)(t+2)$. L'autospazio V_{-2} è generato da $(1,2,1)$, l'autospazio V_{-1} è generato da $(1,3,0)$, e l'autospazio V_0 è generato da $(2,4,1)$. Quindi le matrici cercate sono: $P:=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ e $D:=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Per verificare che il risultato è corretto, è sufficiente osservare che P è invertibile (infatti $det(P)=-1\neq 0$), e che $PD=AP$. ∎

Esercizio 5. *Sia X il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito da tutte le coppie del tipo (t^2,t^2), $t\in\mathbf{R}$. Sia inoltre Y il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito da tutte le coppie del tipo (t^3,t^3), $t\in\mathbf{R}$. Dire se X ed Y sono sottospazi di $\mathbf{R}^2$ oppure no.*

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che $(1,1)\in X$, ma $(-1)\cdot(1,1)=(-1,-1)\notin X$, in quanto non esiste un $t\in\mathbf{R}$ tale che $t^2=-1$ (in altre parole, in $\mathbf{R}$ non esiste la radice quadrata di un numero negativo). Per cui X non è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, e quindi X non è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$.

Invece ogni numero reale ammette una (unica) radice cubica reale. Ciò comporta che Y è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. Infatti $\mathbf{0}\in Y$. Poi, se $(t^3,t^3)\in Y$ e $(s^3,s^3)\in Y$, allora $(t^3,t^3)+(s^3,s^3)=(t^3+s^3,t^3+s^3)=(u^3,u^3)\in Y$, dove u è la radice reale cubica di t^3+s^3 (che esiste, ed è unica, per ogni numero reale). Ciò prova che Y è stabile rispetto all'addizione. Infine, se $(t^3,t^3)\in Y$ e $a\in\mathbf{R}$, allora $a\cdot(t^3,t^3)=(at^3,at^3)=(v^3,v^3)\in Y$, dove v è la radice reale cubica di at^3. Ciò prova che Y è anche stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, e dunque che Y è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. ∎

Esercizio 6. *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,4}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{4,1}(-2)$, $p_{2,4}$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S:=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito un numero pari di scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = -3$. ■

Esercizio 7. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito dal sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + z + t = 0. \end{cases}$$

Determinare un sottospazio V di $\mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta U, si perviene alla seguente rappresentazione parametrica di U: $(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-z-t, 0, z, t) \in U$. Quindi una base per U è data dai vettori: $(-1,0,1,0)$, $(-1,0,0,1)$. Disponendo in riga tali vettori, e riducendo a scala, si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Aggiungendo alle righe di tale matrice i vettori canonici e_2 ed e_4, si forma una matrice a scala di rango 4. Quindi $\{(-1,0,1,0), (-1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^4$ che estende la base di U. Allora il sottospazio cercato è il sottospazio generato dai vettori che abbiamo aggiunto, cioè $V := Span((0,1,0,0), (0,0,0,1))$. ■

Geometria, III appello, 11 maggio 2007.

Esercizio 1. *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-3)$, $e_{3,1}(-4)$, $e_{4,1}(-5)$, $e_{3,2}(-1)$, $e_{4,2}(-1)$, $e_{4,3}(-\frac{7}{3})$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito un numero dispari di scambi, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -24$. ■

Esercizio 2. *Calcolare l'inversa della seguente matrice A, e verificare che il risultato è corretto.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,4}$, $e_{2,1}(-2)$, $p_{3,4}$, $e_3(-1)$, $e_{3,4}(5)$, $e_{2,4}(2)$, $e_{1,4}(3)$, $e_{1,3}(-3)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -12 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -12 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -12 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Esercizio 3. *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, calcolare il rango della seguente matrice:*

$$A_k = \begin{bmatrix} -k & 3-k & 3k \\ 1 & 2 & k \\ 1 & k+5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Eseguendo le operazioni elementari $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-k)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice:

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & k+3 & k(k+3) \\ 0 & 0 & -(k+1)(k+3) \end{bmatrix}.$$

Se $k \notin \{-1, -3\}$, allora S_k è a scala, ed ha 3 righe non nulle: quindi in tal caso il rango di A_k è 3. Se $k = -1$, allora S_{-1} è a scala, ed ha 2 righe non nulle: in tal caso il rango di A_{-1} è 2. Se $k = -3$, allora S_{-3} è a scala, ed ha soltanto una riga non nulla: in tal caso il rango di A_{-3} è 1. In conclusione:

$$rk(A_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = -3 \\ 2 & \text{se } k = -1 \\ 3 & \text{se } k \notin \{-3, -1\}. \ \blacksquare \end{cases}$$

Esercizio 4. *Calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$, dove A è la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} -49 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 0 \\ -27 & 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

Verificare che il risultato ottenuto è corretto.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = -t(t+4)(t-5)$. L'autospazio V_{-4} è generato da $(2,0,1)$, l'autospazio V_0 è generato da $(0,1,0)$, e l'autospazio V_5 è generato da $(5,0,3)$. Quindi le matrici cercate sono: $P := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $D := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Per verificare che il risultato è corretto, è sufficiente osservare che P è invertibile (infatti $det(P) = 1 \neq 0$), e che $PD = AP$. ■

Esercizio 5. *Per quali valori del parametro $k \in \mathbf{R}$ la seguente matrice è diagonalizzabile?*

$$A_k = \begin{bmatrix} 3-2k & 4k-4 \\ 1-k & 2k-1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A_k è $p_{A_k}(t) = (t-1)^2$. Quindi, indipendentemente da k, la matrice A_k ha solo l'autovalore 1, con molteplicità algebrica 2. D'altra parte:

$$m_g(1) = 2 - rk(A_k - I) = 2 - rk \begin{bmatrix} 2-2k & 4k-4 \\ 1-k & 2k-2 \end{bmatrix} = 2 - rk \left((k-1) \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 1 \\ 1 & \text{se } k \neq 1. \end{cases}$$

Quindi la matrice A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = 1$. ■

Esercizio 6. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato di vettori $(1,2,-1,1)$ e $(2,1,1,1)$, e sia V il sottospazio rappresentato dal sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x + 2y + z + 5t = 0 \\ 2x + 3y + z + 9t = 0 \\ x + y + z + 4t = 0. \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione cartesiana per $U + V$. Dire se è vero oppure no che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta V si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di V: $t \in \mathbf{R} \to (-3t, -t, 0, t) \in V$. Quindi una base per V è costituita dal vettore $(-3,-1,0,1)$. Ne consegue che $U + V = Span((1,2,-1,1),(2,1,1,1),(-3,-1,0,1))$. Disponendo in riga i tre generatori di $U+V$, e riducendo a scala, si ottiene una matrice di rango 3. Dunque $\{(1,2,-1,1),(2,1,1,1),(-3,-1,0,1)\}$ è una base per $U+V$, che allora ha dimensione 3, e perciò $\mathbf{R}^4 \neq U \oplus V$. Una rappresentazione cartesiana di $U+V$ si ottiene imponendo che il generico vettore (x,y,z,t) di $\mathbf{R}^4$ dipenda linearmente da $(1,2,-1,1),(2,1,1,1),(-3,-1,0,1)$, cioè imponendo che per la matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & x \\ 2 & 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}$$

si abbia: $det(A) = 0$. Poiché $det(A) = -(5x - 9y - 7z + 6t)$, ciò equivale a dire che:

$$5x - 9y - 7z + 6t = 0.$$

Questa è la rappresentazione cartesiana cercata di $U + V$. ■

Esercizio 7. *Si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}$:*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 4t = 1 \\ x + 2y + z + t = 3 \\ 3x + 5y + 5t = 4 \\ x + y - 2z + 3t = -2. \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S})$ di $\mathcal{S}$. Dedurne una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Dire infine se $Sol(\mathcal{S})$ è oppure no un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$, si ottiene il seguente sistema lineare equivalente ad $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 5. \end{cases}$$

La matrice completa ed incompleta di tale sistema lineare hanno lo stesso rango 2. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ammette ∞^2 soluzioni, e, per descriverle parametricamente, possiamo scegliere z, t come variabili libere. La rappresentazione parametrica cercata è: $\rho : (z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-7 + 5z - 5t, 5 - 3z + 2t, z, t) \in Sol(\mathcal{S})$.

Per ottenere una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\mathcal{S}^*$, associato ad $\mathcal{S}$, ricordiamo che essa si ottiene da ρ "togliendo i termini costanti". Cioè una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato è la funzione: $(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (5z-5t, -3z+2t, z, t) \in Sol(\mathcal{S}^*)$.

Infine, $Sol(\mathcal{S})$ non è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ in quanto non è un sistema omogeneo (e quindi $\mathbf{0} \notin Sol(\mathcal{S})$). ■

Geometria, appello straordinario, 18 luglio 2007.

Esercizio 1. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato di vettori* $(1,-1,0,0)$, $(6,-3,-2,-1)$ *e* $(4,-2,-1,-1)$, *e sia U il sottospazio rappresentato dal sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=0 \\ x+2y+z-t=0. \end{cases}$$

Provare che U è contenuto in V.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta U, otteniamo la seguente rappresentazione parametrica di U: $(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-z-3t, 2t, z, t) \in U$. Una base per U è costituita dai vettori corrispondenti alla base canonica di $\mathbf{R}^2$, cioè dai vettori $(-1,0,1,0)$, $(-3,2,0,1)$.

Per provare che U è contenuto in V è sufficiente provare che i vettori $(-1,0,1,0)$ e $(-3,2,0,1)$ appartengono a V. Per fare ciò, disponiamo in riga, ordinatamente, i generatori di V, e poi la base di U. Formiamo in tal modo la matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala, e senza effettuare scambi di riga, si ottiene la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, nella riduzione a scala, i vettori $(-1,0,1,0)$ e $(-3,2,0,1)$ si sono trasformati in $\mathbf{0}$. Poiché non abbiamo effettuato scambi di riga, ciò implica che essi dipendono linearmente dalle prime tre righe di A, cioè che appartengono a V.

Un metodo alternativo per provare che i vettori $(-1,0,1,0)$ e $(-3,2,0,1)$ appartengono a V è il seguente: possiamo innanzitutto calcolare una rappresentazione cartesiana di V. Poiché i generatori di V sono indipendenti, allora tale rappresentazione è data dall'equazione:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & x \\ -1 & -3 & -2 & y \\ 0 & -2 & -1 & z \\ 0 & -1 & -1 & t \end{bmatrix} = 0,$$

cioè dall'equazione: $x+y+z+t=0$. Poiché i vettori $(-1,0,1,0)$ e $(-3,2,0,1)$ soddisfano tale equazione, allora essi appartengono a V. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$, calcolare il rango della seguente matrice:*

$$A_t = \begin{bmatrix} t^2+1 & 2t(t+1) & -t^2 & 2 \\ 1 & -6 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Effettuando le operazioni elementari $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-t^2-1)$, si perviene alla seguente matrice equivalente per righe ad A_t:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & t^2+2t-1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice possiede il minore di ordine 3 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, che è nonsingolare. Quindi A_t ha rango almeno 3. D'altra parte, poiché A_t ha 3 righe, allora deve anche essere $rk(A_t) \leq 3$. In conclusione, possiamo dire che, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la matrice A_t ha rango 3. ■

Esercizio 3. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato di vettori $(1,2,2,2)$, $(2,3,3,3)$ e $(0,1,1,1)$, e sia V il sottospazio rappresentato dal sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-2y+t=0 \\ 2x-4y+z+t=0 \\ z-t=0. \end{cases}$$

Calcolare una base per U, V, $U\cap V$ e $U+V$. Infine determinare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.

Svolgimento. Disponendo in riga i generatori di U, e riducendo a scala, si ottiene la matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi una base per U è formata dai vettori $(1,2,2,2)$ e $(0,1,1,1)$.

Riducendo a scala la matrice del sistema che rappresenta V, otteniamo il seguente sistema lineare equivalente e ridotto a scala:

$$(*) \qquad \begin{cases} x-2y+z=0 \\ z-t=0. \end{cases}$$

Possiamo assumere y e t come variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per V è data dalla funzione: $(y,t)\in\mathbf{R}^2 \to (2y-t,y,t,t)\in V$. Una base per V è formata dai vettori $(2,1,0,0)$, $(-1,0,1,1)$.

Per calcolare una base di $U\cap V$, andiamo innanzitutto a calcolare una rappresentazione cartesiana di U. Essa si ottiene imponendo che:

$$rk\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \\ 2 & 1 & t \end{bmatrix}=2.$$

Quindi una rappresentazione cartesiana di U è: $\begin{cases} y-z=0 \\ y-t=0 \end{cases}$. Considerando sia le equazioni di U che le equazioni $(*)$ di V, si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di $U\cap V$:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ z-t=0 \\ y-z=0 \\ y-t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U\cap V$: $t\in\mathbf{R}\to(t,t,t,t)\in U\cap V$. Perciò una base di $U\cap V$ è data dal vettore: $(1,1,1,1)$.

Sappiamo che $U+V$ è generato dai vettori $(1,2,2,2)$, $(0,1,1,1)$, $(2,1,0,0)$, $(-1,0,1,1)$. Disponendo in riga tali vettori, e riducendo a scala, si ottiene la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base per $U+V$ è data dai vettori: $(1,2,2,2)$, $(0,1,1,1)$, $(0,0,1,1)$.

Infine, una rappresentazione cartesiana per $U+V$ è data dall'equazione:

$$det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ 2 & 1 & 1 & z \\ 2 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}=0,$$

cioè dall'equazione: $z-t=0$. ■

Esercizio 4. *Calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $D=P^{-1}AP$, dove A è la seguente matrice:*

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolare P^{-1}, e verificare che i risultati ottenuti sono corretti.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -t(t+3)(t+1)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -3, -1 e 0. L'autospazio V_{-3} ammette come base $(0,1,0)$, l'autospazio V_{-1} ammette come base $(1,0,1)$, e l'autospazio V_0 ammette come base $(1,0,2)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

L'inversa della matrice P è: $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Come verifica conclusiva, osserviamo che:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Geometria, IV appello, 12 settembre 2007.

Esercizio 1. *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-3)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-2)$, $e_{4,2}(-1)$, $p_{3,4}$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito uno scambio, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -8$. ■

Esercizio 2. *Calcolare l'inversa della seguente matrice A, e verificare che il risultato è corretto.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_1(-1)$, $e_{2,1}(-2)$, $p_{2,4}$, $e_{1,4}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ ■$$

Esercizio 3. *Calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$, dove A è la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & -20 \\ 0 & 10 & 13 \end{bmatrix}.$$

Verificare che il risultato ottenuto è corretto.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -t(t+7)(t-3)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -7, 0 e 3. L'autospazio V_{-7} ammette come base $(0, -2, 1)$, l'autospazio V_0 ammette come base $(1, 0, 0)$, e l'autospazio V_3 ammette come base $(0, 1, -1)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Come verifica, osserviamo che:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & -20 \\ 0 & 10 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D. \ ■$$

Esercizio 4. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^4$ rappresentati rispettivamente dai seguenti sistemi lineari:*

$$U := \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad e \qquad V := \begin{cases} x+3y-z+t=0 \\ x+4y-2z+2t=0 \\ y-z+t=0. \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice del sistema che rappresenta U, si ottiene il seguente sistema ridotto a scala:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ t=0. \end{cases}$$

Quindi U ha dimensione 2, e possiamo rappresentare parametricamente U con le variabili libere y e z: $(y,z) \in \mathbf{R}^2 \to (-y-z, y, z, 0) \in U$. Una base per U è costituita dai vettori: $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$.

Con un ragionamento analogo si vede che una base per V è costituita dai vettori: $(-2,1,1,0)$, $(2,-1,0,1)$.

Deduciamo che $U+V$ è generato dai vettori $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$, $(-2,1,1,0)$, $(2,-1,0,1)$. Disponendo in riga tali vettori, e riducendo a scala, vediamo che una base per $U+V$ è formata dai vettori: $(-1,1,0,0)$, $(0,-1,1,0)$, $(0,1,0,1)$. Quindi un vettore (x,y,z,t) di $\mathbf{R}^4$ appartiene ad $U+V$ se e solo se la seguente matrice:

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

ha determinante nullo, cioè se e solo se $x+y+z-t=0$. Questa equazione è la rappresentazione cartesiana cercata di $U+V$. ■

Geometria, V appello, 26 settembre 2007.

Esercizio 1. *Calcolare l'inversa della seguente matrice A, e verificare che il risultato è corretto.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{3,1}(-1)$, $p_{2,4}$, $p_{3,4}$, $e_{2,4}(-2)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Esercizio 2. *Calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$, dove A è la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Verificare che il risultato ottenuto è corretto.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -(t+5)(t+1)(t-1)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori -5, -1 e 1. L'autospazio V_{-5} ammette come base $(1,0,0)$, l'autospazio V_{-1} ammette come base $(0,1,-1)$, e l'autospazio V_1 ammette come base $(0,-2,1)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Come verifica, osserviamo che:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D. \ \blacksquare$$

Esercizio 3. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,-1,1)$, $(1,2,0,1)$ e $(0,1,1,0)$, e sia U il sottospazio generato da $(2,3,-1,2)$ e $(2,4,0,2)$. Provare che V è contenuto in U. Vale il viceversa?*

Svolgimento. Una rappresentazione cartesiana per U è data dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

Poiché i generatori di V soddisfano tali equazioni, possiamo dire che V è contenuto in U.

Infine, poiché $dim(U) = dim(V) = 2$ e $V \subseteq U$, allora $U = V$. Quindi vale anche il viceversa, cioè anche U è contenuto in V. $\blacksquare$

Esercizio 4. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(2,1,-2,-1)$, $(3,2,-3,-2)$ e $(5,3,-5,-3)$, e V il sottospazio rappresentato dal sistema lineare:*

$$V := \begin{cases} 3x + z + 2t = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

(a) *Calcolare una base per U ed una per V.*

(b) *Calcolare una rappresentazione cartesiana per U ed una per V.*

(c) *Calcolare una rappresentazione cartesiana ed una base per $U \cap V$.*

(d) *Calcolare una rappresentazione cartesiana ed una base per $U + V$.*

(e) *Determinare un sottospazio W di $U + V$ tale che $U + V = U \oplus W$.*

Svolgimento. (a) Disponendo i generatori di U in riga, e riducendo a scala, si ottiene la matrice: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, da cui deduciamo che una base per U è costituita dai vettori $(2,1,-2,-1)$, $(0,1,0,-1)$. Per ottenere una base di V, andiamo a risolvere il sistema che lo rappresenta: risulta che una base per V è data dai vettori $(1,1,-3,0)$, $(0,0,-2,1)$.

(b) Una rappresentazione cartesiana per V è data dal testo dell'esercizio. Per ottenerne una per U, andiamo ad imporre che la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 0 & z \\ -1 & -1 & t \end{bmatrix}$ abbia rango 2. Ne risulta che una rappresentazione cartesiana per V è data dal sistema lineare: $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$.

(c) Una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ si ottiene considerando sia le equazioni che definiscono V che quelle che definiscono U, cioè è:

$$\begin{cases} 3x + z + 2t = 0 \\ x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $x \in \mathbf{R} \to (x, x, -x, -x) \in U \cap V$. Quindi una base per $U \cap V$ è data dal vettore $(1,1,-1,-1)$.

(d) Riunendo i generatori di U e quelli di V otteniamo un sistema di generatori per $U + V$: $(2,1,-2,-1)$, $(0,1,0,-1)$, $(1,1,-3,0)$, $(0,0,-2,1)$. Disponendo in riga tali generatori, e riducendo a scala, si vede che una base per $U + V$ è data dai vettori: $(2,1,-2,-1)$, $(0,1,0,-1)$, $(1,1,-3,0)$. Allora una rappresentazione cartesiana per $U + V$ si ottiene imponendo che:

$$det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ -2 & 0 & -3 & z \\ -1 & -1 & 0 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Deduciamo che una rappresentazione cartesiana per $U + V$ è l'equazione: $x + 2y + z + 2t = 0$.

(e) Poiché $(2,1,-2,-1)$, $(0,1,0,-1)$, $(1,1,-3,0)$ formano una base per $U+V$, e $(2,1,-2,-1)$, $(0,1,0,-1)$ formano una base per U, possiamo porre $W := Span((1,1,-3,0))$. ■

Geometria ed Algebra 1, I esonero, 9 novembre 2007.

Esercizio 1. *Sia X il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito dalle coppie (x_1, x_2) tali che $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Dire quali delle condizioni richieste ad un sottospazio sono soddisfatte da X. Dedurne che X è, oppure non è, un sottospazio di $\mathbf{R}^2$.*

Svolgimento. È evidente che il vettore nullo $(0,0)$ appartiene ad X. Inoltre, se (x_1, x_2), (y_1, y_2) sono due vettori in X, poiché $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$, allora deve anche essere $x_1 + y_1 \geq 0$, e $x_2 + y_2 \geq 0$. Per cui $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ appartiene ancora ad X, cioè X è stabile rispetto all'addizione. Invece X non è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna. Infatti $(1,0) \in X$, ma $(-1) \cdot (1,0) = (-1,0) \notin X$. In particolare, X non è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$, calcolare il rango della seguente matrice A_t, e calcolarne una base per lo spazio delle righe, ed una per lo spazio delle colonne.*

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ 2 & 5 & t+4 \\ t & t & t \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Eseguendo sulle righe di A_t le operazioni elementari $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-t)$ e $p_{2,3}$, si perviene alla seguente matrice:

$$B_t := \begin{bmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 \\ 0 & 3-2t & t+2 \end{bmatrix}.$$

Se $t \neq 0$, allora possiamo assumere l'entrata $-t^2$ come pivot della seconda riga, e con l'ulteriore operazione elementare $e_{3,2}(\frac{3-2t}{t^2})$ si ottiene la seguente matrice a scala:

$$C_t := \begin{bmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t+2 \end{bmatrix}.$$

Deduciamo che, se $t \notin \{-2, 0\}$, allora il rango di A_t è 3, ed una base per lo spazio delle righe e delle colonne è la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Se $t = -2$, allora il rango di A_{-2} è 2, una base per lo spazio delle sue righe è data da $(1,-1,1)$, $(0,-4,0)$, ed una base per lo spazio delle sue colonne è data dalle prime due colonne di A_{-2}, cioè da $(1,2,-2)^T$, $(-1,5,-2)^T$ (le prime due colonne di B_{-2}, o di C_{-2}, non vanno bene, perché le operazioni sulle righe di A_t, mentre lasciano invariato lo spazio delle righe di A_t, ne alterano lo spazio delle colonne).

Se $t = 0$, allora il rango di A_{-2} è 2, una base per lo spazio delle sue righe è data dalle prime due righe di A_0, $(1,1,1)$, $(2,5,4)$, ed una base per lo spazio delle sue colonne è data dalle prime due colonne di A_0, cioè da $(1,2,0)^T$, $(1,5,0)^T$. ■

Esercizio 3. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,0,-2)$, $(0,1,-1)$ e $(1,1,-3)$. Sia V il sottospazio generato dai vettori $(1,1,0)$, $(0,2,1)$ e $(1,3,1)$. Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U+V$ e $U \cap V$. Dire se è vero oppure no che: $\mathbf{R}^3 = U \oplus V$, $\mathbf{R}^3 = U + V$, $\mathbf{R}^3 \neq U + V$.*

Svolgimento. Disponendo in riga i generatori di U, e riducendo a scala per righe, si perviene alla seguente matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi U ha dimensione 2, ed una sua base è data dai vettori: $(1,0,-2)$, $(0,1,-1)$. Con un ragionamento analogo, si vede che V ha dimensione 2, ed una sua base è data dai vettori: $(1,1,0)$, $(0,2,1)$. Un sistema di generatori di $U+V$ si ottiene unendo la base di U con quella di V, cioè $U+V$ è generato dai vettori $(1,0,-2)$, $(0,1,-1)$, $(1,1,0)$, $(0,2,1)$. Disponendo in riga e riducendo a scala si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Quindi $U+V$ ha dimensione 3, $U+V = \mathbf{R}^3$, ed una sua base è la base canonica. Dalla formula di Grassmann sappiamo che $U \cap V$ ha dimensione 1. Per ottenerne una base è sufficiente calcolarne un vettore non nullo $\mathbf{w}$. Per una tale vettore devono esistere pesi x, y, z, t non tutti nulli tali che:

$$\mathbf{w} = x(1,0,-2) + y(0,1,-1) = z(1,1,0) + t(0,2,1),$$

cioè tali che:

$$\begin{cases} x = z \\ y = z + 2t \\ -2x - y = t. \end{cases}$$

Una soluzione non nulla di tale sistema è $(x, y, z, t) = (1, -1, 1, -1)$. Quindi una base per $U \cap V$ è data dal vettore $\mathbf{w} := (1, -1, -1)$.

Abbiamo già visto che $\mathbf{R}^3 = U + V$, che è quindi vero. Allora è falso che $\mathbf{R}^3 \neq U + V$, ed è anche falso che $\mathbf{R}^3 = U \oplus V$ in quanto $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$. ■

Esercizio 4. *Calcolare l'inversa della seguente matrice, e verificare che il risultato ottenuto è corretto:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{3,4}(-3)$, $e_{2,4}(-2)$, $e_{1,4}(-1)$, $e_{2,3}(-1)$, $e_{1,3}(-1)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Esercizio 5. *Siano* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vettori di uno spazio vettoriale. Si considerino i vettori* $\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{s} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ *e* $\mathbf{t} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$. *Provare che* $Span(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}) = Span(\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\})$, *e che il sistema di vettori* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *è linearmente indipendente se e solo se lo è il sistema* $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$.

Svolgimento. Poiché i vettori $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ dipendono linearmente da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, allora $Span(\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}) \subseteq Span(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\})$. D'altra parte le formule assegnate si possono invertire, e si ottiene:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s} + \mathbf{t}}{2}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{r} + \mathbf{s} - \mathbf{t}}{2}, \quad \mathbf{w} = \frac{-\mathbf{r} + \mathbf{s} + \mathbf{t}}{2}.$$

Quindi, per lo stesso motivo di prima, deve anche essere $Span(\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}) \supseteq Span(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\})$. In virtù della doppia inclusione, possiamo dire di aver provato che $Span(\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}) = Span(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\})$.

Infine, se il sistema di vettori $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è linearmente indipendente, allora $Span(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\})$ ha dimensione 3. Quindi anche $Span(\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\})$ ha dimensione 3. Ma noi sappiamo che se uno spazio vettoriale ha dimensione 3, e tre dati vettori lo generano, allora tali vettori sono linearmante indipendenti. Ciò prova che anche $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ è linearmente indipendente, e viceversa. ■

Geometria ed Algebra 1, II esonero e II appello, 29 novembre 2007.

Esercizio 1. *Sia X il sottoinsieme dello spazio delle matrici quadrate $\mathcal{M}(n,n)$ formato dalle matrici A con $det(A) = 0$. Dire quali delle condizioni richieste ad un sottospazio sono soddisfatte da X. Dedurne che X è, oppure non è, un sottospazio di $\mathcal{M}(n,n)$.*

Svolgimento. Poiché il determinante della matrice nulla è 0, allora il vettore nullo appartiene ad X. Inoltre, poiché $det(k \cdot A) = k^n det(A)$, allora X è anche stabile rispetto alla moltiplicazione esterna. Ma X non è stabile rispetto alla somma (quando $n > 1$). Infatti (per semplicità assumiamo $n = 2$) le matrici $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ appartengono ad X, ma $A + B = I \notin X$ (un esempio analogo si può fare per ogni $n > 1$).

Osserviamo infine che quando $n = 1$, allora $X = \{0\}$, e perciò in tal caso X è un sottospazio di $\mathcal{M}(1,1) \simeq \mathbf{R}$. ■

Esercizio 2. *Estendere a base di $\mathbf{R}^4$ il sistema $(0,1,2,3)$, $(0,1,2,4)$ e, posto $U = Span((0,1,2,3),(0,1,2,4))$, determinare un sottospazio V di $\mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$. Infine determinare un sottospazio W tale che $\mathbf{R}^4 = U + W$ ma $\mathbf{R}^4 \neq U \oplus W$.*

Svolgimento. Disponendo in riga i generatori di U, e riducendo a scala per righe, si ottiene la matrice: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Aggiungendo a tale matrice le righe e_1 ed e_3, si ottiene una matrice di rango 4. Per cui una base di $\mathbf{R}^4$ che estende la base di U è data dai vettori: $(0,1,2,3)$, $(0,1,2,4)$, $(1,0,0,0)$, $(0,0,1,0)$. Come sottospazio V possiamo porre $V := Span(e_1, e_3)$. Invece come sottospazio W possiamo porre $W := Span((0,1,2,4),(1,0,0,0),(0,0,1,0))$. ■

Esercizio 3. *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{5,1}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito uno scambio, deduciamo: $det(A) = -det(S) = 1$. ■

Esercizio 4. *L'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le condizioni $f(1,2,0) = (4,4,2)$, $f(2,5,0) = (8,8,4)$, $f(0,0,1) = (-4,-4,-2)$.*

a) Calcolare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.
b) Calcolare una base per $Ker(f)$, ed una per $Im(f)$.
c) Calcolare la dimensione di $Ker(f) \cap Im(f)$ e la dimensione di $Ker(f) + Im(f)$.
d) Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ oppure ad $Im(f)$: $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(2,2,1)$.
e) Trovare una base $\mathcal{B}$ tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale.

Svolgimento. $a)$ Denotiamo con $\mathcal{C}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,2,0)$, $(2,5,0)$, $(0,0,1)$. Allora abbiamo:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$b)$ $Im(f)$ è generato dalle colonne della matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, quindi una base per $Im(f)$ è costituita dal vettore $(4,4,2)$. Il nucleo di f è rappresentato dall'equazione $x - z = 0$. Quindi una base per $Ker(f)$ è costituita dai vettori: $(1,0,1)$, $(0,1,0)$.

$c)$ $Ker(f) + Im(f)$ è generato dai vettori $(4,4,2),(1,0,1),(0,1,0)$, che sono linearmente indipendenti. Quindi $dim(Ker(f)+Im(f)) = 3$ (e $Ker(f)+Im(f) = \mathbf{R}^3$). Per la formula di Grassmann si ha anche $dim(Ker(f) \cap Im(f)) = 0$.

$d)$ Dei vettori assegnati, solo $(1,1,1)$ appartiene a $Ker(f)$, e solo $(2,2,1)$ appartiene ad $Im(f)$.

e) Il polinomio caratteristico di f è: $p_f(t) = -t^2(t-2)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori 0 e 2. L'autospazio V_0 (che coincide con $Ker(f)$) ammette come base $(1,0,1)$, $(0,1,0)$, mentre l'autospazio V_2 ammette come base $(2,2,1)$. Allora la base cercata è $\mathcal{B} := \{(1,0,1),(0,1,0),(2,2,1)\}$. ■

Esercizio 5. *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare:*

$$\mathcal{S}_k : \begin{cases} kx + ky = 1 \\ 4kx + (k^2-5)y = k+5. \end{cases}$$

a) Dire per quali valori di k il sistema $\mathcal{S}_k$ è compatibile, e per quali non lo è.

b) Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ sia compatibile, determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k$.

c) Dire per quali valori di k il sistema $\mathcal{S}_k$ è omogeneo.

d) Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta infinite soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.

e) Infine dimostrare che un sistema lineare omogeneo quadrato $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette qualche soluzione non nulla se e solo se $det(A) = 0$.

Svolgimento. a) La matrice incompleta del sistema ha determinante $k(k+1)(k-5)$. Quindi se $k \notin \{-1,0,5\}$ il sistema è compatibile per il Teorema di Cramer (ed ammette un'unica soluzione). Se $k=0$ oppure se $k=5$, il sistema è incompatibile perché la matrice completa ha rango 2, mentre quella incompleta ha rango 1. Se $k=-1$, invece, la matrice completa e quella incompleta hanno lo stesso rango 1. Quindi in tal caso il sistema è compatibile (ed ammette ∞^1 soluzioni). In conclusione, il sistema $\mathcal{S}_k$ è compatibile se e solo se $k \notin \{0,5\}$.

b) Quando $k \notin \{-1,0,5\}$, allora $\mathcal{S}_k$ ammette l'unica soluzione: $(\frac{-5}{k(k-5)}, \frac{1}{k-5})$. Quando $k=-1$, una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S}_{-1})$ di $\mathcal{S}_{-1}$ è: $y \in \mathbf{R} \to (-1-y, y) \in Sol(\mathcal{S}_{-1})$.

c) Il sistema $\mathcal{S}_k$ non è mai omogeneo, perché, indipendentemente da k, il termine noto 1 è non nullo.

d) $(-1-y,y) = (-1,0) + y(-1,1)$.

e) Assumiamo che A sia $n \times n$. L'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è un sottosapzio di $\mathbf{R}^n$ di dimensione $n-p$, dove p è il rango di A. Allora il sistema ammette qualche soluzione non banale se e solo se $n-p>0$, cioè se e solo se A non ha rango massimo, il che equivale a dire che $det(A) = 0$. ■

Esercizio 6. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1,1,5)$, e sia V il sottospazio avente come rappresentazione cartesiana il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} 7x - y - z = 0 \\ 13x - 2y - z = 0. \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta V, si vede che V ammette come base il vettore $(1,6,1)$. Quindi $U+V$ ammette come base $(1,1,5)$, $(1,6,1)$. Per cui il generico vettore (x,y,z) di $\mathbf{R}^3$ appartiene ad $U+V$ se e solo se:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 6 & y \\ 5 & 1 & z \end{bmatrix} = 0.$$

Cioè se e solo se $29x - 4y - 5z = 0$. Questa è la rappresentazione cartesiana cercata di $U+V$. ■

Geometria ed Algebra 1, III appello, 7 dicembre 2007.

Esercizio 1. *Sia V l'insieme di tutte le coppie di numeri reali. Si definisca la somma " $+$ " in V come in $\mathbf{R}^2$, e la moltiplicazione esterna " $\cdot$ " al seguente modo: $a\cdot(x_1,x_2) := (ax_2, ax_1)$. Dire se V, con le operazioni appena definite, è uno spazio vettoriale, oppure no.*

Svolgimento. No, perché non è soddisfatta la proprietà secondo cui deve essere, per ogni $\mathbf{u} \in V$, $1\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Infatti, consideriamo la coppia $\mathbf{u} := (1,2)$. Allora, stante la definizione della nuova moltiplicazione esterna, si ha: $1\cdot\mathbf{u} = 1\cdot(1,2) = (2,1) \neq \mathbf{u}$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$, calcolare il rango della seguente matrice A_t:*

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 2 & -1 \\ t & t+2 & 5 & -t-2 \\ t & 1 & t-2 & t-5 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Eseguendo le operazioni elementari $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, si perviene alla seguente matrice:

$$B_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 2 & -1 \\ 0 & t+1 & 3 & -t-1 \\ 0 & 0 & t-4 & t-4 \end{bmatrix}.$$

Se $t \notin \{-1,0,4\}$, allora B_t è a scala, con 3 righe non nulle. Quindi il rango di A_t è 3. Per i casi rimanenti, un calcolo a parte prova che il rango di A_t è ancora 3 se $t \in \{-1,0\}$, mentre il rango di A_4 è 2. In conclusione:

$$rk(A_t) = \begin{cases} 3 & \text{se } t \neq 4 \\ 2 & \text{se } t = 4 \,. \end{cases} \quad ■$$

Esercizio 3. *Calcolare l'inversa della seguente matrice, e verificare che il risultato ottenuto è corretto:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Affiancando alla matrice A la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{4,1}(-2)$, $e_{4,2}(2)$, $e_{3,4}(-3)$, $e_{2,4}(2)$, $e_{1,4}(2)$, $e_{1,2}(-1)$ si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di A è la matrice: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & -6 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & -6 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 4. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,3,0)$, $(0,1,-1)$ e $(2,7,-1)$. Sia V il sottospazio generato dai vettori $(1,-3,0)$, $(0,2,1)$ e $(1,3,3)$. Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U+V$ e $U\cap V$, e calcolare una rappresentazione cartesiana per U.*

Svolgimento. Disponendo i generatori di U in riga, e riducendo a scala per righe, si ottiene la matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Quindi una base per U è formata dai vettori $(1,3,0)$, $(0,1,-1)$, e la dimensione di U è 2. Con un calcolo analogo si vede che una base per V è formata dai vettori $(1,-3,0)$, $(0,2,1)$, e la dimensione di V è 2. Il sottospazio $U+V$ è generato dai vettori $(1,3,0)$, $(0,1,-1)$, $(1,-3,0)$, $(0,2,1)$. Come prima, si vede che $dim(U+V)=3$, quindi $U+V=\mathbf{R}^3$, ed una base per $U+V$ è la base canonica. Per la formula di Grassmann $dim(U\cap V)=1$. Per ottenere una base di $U\cap V$, è sufficiente calcolarne un vettore non nullo $\mathbf{w}$. Per un tale vettore devono esistere pesi x,y,z,t non tutti nulli tali che:

$$\mathbf{w}=x(1,3,0)+y(0,1,-1)=z(1,-3,0)+t(0,2,1),$$

cioè tali che:

$$\begin{cases} x=z \\ 3x+y=-3z+2t \\ -y=t. \end{cases}$$

Una soluzione non nulla di tale sistema è $(x,y,z,t)=(1,-2,1,2)$. Quindi una base per $U\cap V$ è data dal vettore $\mathbf{w}:=(1,1,2)$. Una rappresentazione cartesiana per U si ottiene imponendo che il generico vettore (x,y,z) di $\mathbf{R}^3$ sia linearmente dipendente da $(1,-3,0)$, $(0,2,1)$. Cioè che:

$$det\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -3 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix}=0.$$

Il che equivale a dire che: $3x+y-2z=0$. Questa è la rappresentazione cartesiana cercata di U. ■

Esercizio 5. *Determinare una rappresentazione parametrica per le soluzioni del seguente sistema lineare:*

$$\mathcal{S}:\begin{cases} 2x+2y+3z+4t-u=-1 \\ 2x+3y+3z+3t+4u=3 \\ x+2y+2z+2t+3u=2 \\ x+y+2z+3t-2u=-2 \\ x+y+z+t+u=1. \end{cases}$$

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema, si perviene al seguente sistema equivalente ad $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} x+y+z+t+u=1 \\ y+z+t+2u=1 \\ z+2t-3u=-3. \end{cases}$$

Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette ∞^2 soluzioni. Per descrivere parametricamente l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ di tali soluzioni, possiamo assumere t ed u come variabili libere, e la rappresentazione parametrica cercata è:

$$(t,u)\in\mathbf{R}^2\to(u,4+t-5u,-3-2t+3u,t,u)\in Sol(\mathcal{S}).\ ■$$

Esercizio 6. *L'applicazione lineare* $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ *soddisfa le condizioni* $f(1,0,0)=(0,0,-2)$, $f(0,1,-2)=(2,2,-2)$, $f(0,-1,3)=(-2,-2,4)$.

a) Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$.

b) Calcolare una base per $Ker(f)$, *ed una per* $Im(f)$.

c) Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ *oppure ad* $Im(f)$: $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(2,2,4)$.

d) Trovare una base $\mathcal{B}$ *tale che* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ *sia diagonale.*

e) Provare che se un'applicazione lineare $f:U\to V$ *è iniettiva e i vettori* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ *e* $\mathbf{u}_3$ *di* U *sono liberi, allora anche i vettori* $f(\mathbf{u}_1)$, $f(\mathbf{u}_2)$ *e* $f(\mathbf{u}_3)$ *sono liberi.*

Svolgimento. $a)$ Denotiamo con $\mathcal{C}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,0)$, $(0,1,-2)$, $(0,-1,3)$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(f)\cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$b)$ $Im(f)$ è generato dalle colonne della matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, quindi una base per $Im(f)$ è costituita dai vettori $(0,0,1)$, $(1,1,1)$. Il nucleo di f è rappresentato dal sistema $\begin{cases} y=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$. Quindi una base per $Ker(f)$ è costituita dal vettore $(1,0,1)$.

c) Dei vettori assegnati, solo $(1,1,1)$ e $(2,2,4)$ appartengono a $Im(f)$, e solo $(1,0,1)$ appartiene ad $Ker(f)$.

d) Il polinomio caratteristico di f è: $p_f(t) = -t(t-2)^2$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori 0 e 2. L'autospazio V_0 (che coincide con $Ker(f)$) ammette come base $(1,0,1)$, mentre l'autospazio V_2 ammette come base $(1,1,0)$, $(0,0,1)$. Allora la base cercata è $\mathcal{B} := \{(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$.

e) Sia (x,y,z) una relazione per $f(\mathbf{u}_1)$, $f(\mathbf{u}_2)$ e $f(\mathbf{u}_3)$. Allora, tenuto conto che f è lineare, abbiamo:

$$\mathbf{0} = xf(\mathbf{u}_1) + yf(\mathbf{u}_2) + zf(\mathbf{u}_3) = f(x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3).$$

Quindi il vettore $x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3$ appartiene al nucleo di f. Per ipotesi sappiamo che f è iniettiva, quindi $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, e perciò $x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Ancora per ipotesi, sappiamo che i vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ sono liberi. Ne consegue che $x = y = z = 0$. Pertanto abbiamo provato che una qualunque relazione (x,y,z) per $f(\mathbf{u}_1)$, $f(\mathbf{u}_2)$ e $f(\mathbf{u}_3)$ deve essere banale. Ciò significa proprio che i vettori $f(\mathbf{u}_1)$, $f(\mathbf{u}_2)$ e $f(\mathbf{u}_3)$ sono liberi. ■

Geometria ed Algebra 1, appello straordinario, 10 luglio 2008.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori* $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$, $(-1,-7,7,7)$, *e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare:* $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x-z-t=0 \end{cases}$.

a) Calcolare una base e la dimensione per U, V, e $U+V$.
b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per U, V, e $U+V$.
c) Calcolare una base e la dimensione per $U \cap V$.
d) Determinare sottospazi X, Y e Z di $\mathbf{R}^4$ tali che: $U+V=U\oplus X$, $\mathbf{R}^4=U\oplus Y$, e $\mathbf{R}^4=(U+V)\oplus Z$. Dire se il sottospazio X può essere determinato in modo tale che $dim(X)=2$.
e) Siano $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ tre vettori di $\mathbf{R}^4$ linearmente indipendenti. Provare che se $\mathbf{b}$ è un vettore di $\mathbf{R}^4$ non appartenente a $Span(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$, allora i vettori $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}$ formano una base per $\mathbf{R}^4$.

Svolgimento. $a)$ Disponendo in riga i generatori di U, e riducendo a scala, si vede che $(-1,-7,7,7)$ è sovrabbondante. Quindi i due vettori $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$ formano una base per U, e la dimensione di U è 2. Invece per ottenere una base di V, andiamo a risolvere il sistema che rappresenta V. Si deduce che una rappresentazione parametrica di V è data dalla funzione: $(z,t)\in\mathbf{R}^2\to(z+t,4z+5t,z,t)\in V$. Quindi V ha dimensione 2, ed una base per V è data dai vettori $(1,4,1,0)$, $(1,5,0,1)$. Riunendo la base per U con la base per V, otteniamo un sistema di generatori per $U+V$: $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$, $(1,4,1,0)$, $(1,5,0,1)$. Disponendo in riga tali generatori, e riducendo a scala senza effettuare scambi di riga, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $U+V$ ha dimensione 3, ed una sua base è data dai vettori $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$, $(1,4,1,0)$.

$b)$ Una rappresentazione cartesiana per U si ottiene mettendo in colonna i due vettori che formano una base di U, aggiungendo la colonna $(x,y,z,t)^T$ del generico vettore di $\mathbf{R}^4$, riducendo a scala, ed imponendo che il rango della matrice sia 2. Si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di U: $\begin{cases} 7x-2y-z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$. Una rappresentazione cartesiana per V è data dal testo dell'esercizio. Infine, in modo analogo a quanto fatto per U, si ottiene la rappresentazione cartesiana per $U+V$, che è: $14x-3y-2z+t=0$.

$c)$ Una rappresentazione cartesiana per $U\cap V$ si ottiene considerando simultaneamente le equazioni di U e le equazioni di V. Cioè una rappresentazione cartesiana per $U\cap V$ è:

$$\begin{cases} 7x-2y-z=0 \\ y+t=0 \\ 5x-y-z=0 \\ x-z-t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U\cap V$: $t\in\mathbf{R}\to(\frac{-t}{2},-t,\frac{-3t}{2},t)\in U\cap V$. Quindi $U\cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(1,2,3,-2)$.

$d)$ Poiché $\{(1,0,7,0),(-2,-7,0,7),(1,4,1,0)\}$ è una base per $U+V$, e $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$ formano una base di U, il sottospazio X cercato è $X:=Span((1,4,1,0))$. Inoltre dalla rappresentazione cartesiana di $U+V$ vediamo che $(1,0,0,0)\notin U+V$. Quindi possiamo assumere $Y:=Span((1,4,1,0),(1,0,0,0))$ e $Z:=Span((1,0,0,0))$. La risposta all'ultima domanda è no, perché altrimenti si avrebbe $dim(U+V)=4$.

$e)$ È sufficiente provare che i quattro vettori sono linearmente indipendenti. Sia allora (x,y,z,t) una loro relazione. Abbiamo $x\mathbf{b}_1+y\mathbf{b}_2+z\mathbf{b}_3+t\mathbf{b}=\mathbf{0}$. Se il peso t fosse non nullo, potremmo scrivere: $\mathbf{b}=-\frac{1}{t}(x\mathbf{b}_1+y\mathbf{b}_2+z\mathbf{b}_3)$. Ma ciò è in contrasto con il fatto che $\mathbf{b}\notin Span(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$. Quindi deve essere $t=0$, e dunque anche $x=y=z=0$, in quanto i tre vettori $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ sono linearmente indipendenti. ■

Esercizio 2. *L'applicazione lineare $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ soddisfa le condizioni $f(1,4,0)=(-1,-48,48)$, $f(1,3,0)=(-1,-36,36)$, $f(0,0,1)=(0,-14,14)$.*

a) Posto $\mathcal{B}:=\{(1,4,0),(1,3,0),(0,0,1)\}$, provare che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
b) Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, calcolare le seguenti matrici: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.
c) Rappresentare f in termini delle coordinate canoniche. Calcolare una base per $Ker(f)$, una per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$. Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ oppure ad $Im(f)$: $(0,0,1)$, $(8,-1,1)$, $(0,7,-6)$.

d) Calcolare il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, e le sue radici. Inoltre determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale, e verificare che il risultato ottenuto è esatto.

e) Utilizzando il Teorema della dimensione, provare che se $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è un'applicazione lineare, allora f è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Svolgimento. a) Disponendo in colonna i vettori assegnati, si forma una matrice 3×3 con determinante non nullo. Ciò è sufficiente per dire che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Ovviamente si ha $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = I$. Poi abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -48 & -36 & -14 \\ 48 & 36 & 14 \end{bmatrix},$$

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -14 \\ 0 & 12 & 14 \end{bmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -45 & -33 & -14 \\ 44 & 32 & 14 \\ 48 & 36 & 14 \end{bmatrix}.$$

c) Avendo calcolato $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, possiamo dire che per ogni vettore $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si ha $f(x, y, z) = (-x, -12y - 14z, 12y + 14z)$. Questa è la rappresentazione di f in termini delle coordinate canoniche. Una base per $Ker(f)$ è data da $(0, 7, -6)$, mentre una base per $Im(f)$ è data dai vettori $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$. Una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$ è data dall'equazione: $y + z = 0$. Il vettore $(0, 7, -6)$ appartiene al nucleo ma non all'immagine, il vettore $(8, -1, 1)$ appartiene all'immagine ma non al nucleo, ed il vettore $(0, 0, 1)$ non appartiene né al nucleo né all'immagine.

d) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -t(t + 1)(t - 2)$. Quindi gli autovalori di f sono $-1, 0, 2$. L'autospazio V_{-1} è generato da $(1, 0, 0)$, l'autospazio V_0 è generato da $(0, 7, -6)$, e l'autospazio V_2 è generato da $(0, 1, -1)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(1, 0, 0), (0, 7, -6), (0, 1, -1)\}$. Per verificare che il risultato è esatto, denotiamo con P la matrice che si ottiene mettendo in colonna i vettori di $\mathcal{A}$, e andiamo a vedere che $P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P$ coincide con la matrice diagonale le cui entrate sulla diagonale principale sono gli autovaolri di f:

$$P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -14 \\ 0 & 12 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

e) Supponiamo che f sia iniettiva. Allora $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$. Poiché per il Teorema della dimensione si ha $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = n$, allora $dim(Im(f)) = n$, cioè $Im(f) = \mathbf{R}^n$, ed f è suriettiva. Viceversa, supponiamo f suriettiva. Allora $Im(f) = \mathbf{R}^n$, quindi $dim(Im(f)) = n$. Sempre per il Teorema della dimensione segue che $dim(Ker(f)) = 0$, il che implica che f è iniettiva. ■

Esercizio 3. *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare:*

$$\mathcal{S}_k : \begin{cases} 2kx + (k + 2)y + (k + 4)z = k + 5 \\ kx + (k + 1)y + 2z = 3 \\ kx + y + z = 1. \end{cases}$$

a) Dire per quali valori di k il sistema $\mathcal{S}_k$ è compatibile, e per quali non lo è.

b) Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ sia compatibile, determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k$.

c) Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta infinite soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.

d) Al variare del parametro k, stabilire la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare associato.

e) Dire se è vero oppure no che se un sistema lineare è incompatibile, lo è anche il sistema omogeneo associato.

Svolgimento. a) Eseguendo sulla matrice completa di $\mathcal{S}_k$ le operazioni elementari $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla matrice:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k+1 & k+1 \end{bmatrix}.$$

Quindi il sistema $\mathcal{S}_k$ è compatibile se e solo se $k \neq 0$.

b) Se $k \notin \{-1, 0\}$, allora $\mathcal{S}_k$ ammette una sola soluzione data da $(-\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}, 1)$. Se $k = -1$, allora $\mathcal{S}_{-1}$ ammette ∞^1 soluzioni date da: $(-3 + 2z, z - 2, z)$, $z \in \mathbf{R}$.

c) $(-3+2z, z-2, z) = (-3,-2,0) + z(2,1,1)$.
d) Sia U lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato. Da $(^*)$ deduciamo che:

$$dim(U) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \notin \{-1,0\} \\ 1 & \text{se } k \in \{-1,0\}. \end{cases}$$

e) È falso, perché un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile. ■

Geometria ed Algebra 1, IV appello, 3 settembre 2008.

Esercizio 1. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^4$ rappresentati rispettivamente dai sistemi lineari:*

$$\begin{cases} 2x+3y+2z+t=0 \\ y+z=0 \\ 2x+4y+3z+t=0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+3y+2z=0. \end{cases}$$

a) Calcolare una base e la dimensione per U, V, e $U+V$.
b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.
c) Calcolare una base e la dimensione per $U \cap V$.
d) Determinare un sottospazio W di $\mathbf{R}^4$ tale che: $\mathbf{R}^4 = (U+V) \oplus W$. Dire se il sottospazio W può essere determinato in modo tale che $dim(W) = 2$.
e) Determinare i valori del parametro h per i quali il sottospazio W_h di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(h,-1,1,1)$, $(-1,-1,1,3)$, $(-1,-2,2,4)$, coincide con U.

Svolgimento. $a)$ Risolvendo il sistema lineare che rappresenta U, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di U: $(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (\frac{z-t}{2}, -z, z, t) \in U$. Quindi $dim(U) = 2$, ed una base per U è data dai vettori: $(1,-2,2,0)$, $(-1,0,0,2)$. Analogamente, si vede che la funzione $(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (z,-z,z,t) \in V$ è una rappresentazione parametrica di V. Dunque anche $dim(V) = 2$, ed una base per V è data dai vettori: $(1,-1,1,0)$, $(0,0,0,1)$. Riunendo la base trovata di U con quella di V, si ottiene un sistema di generatori per $U+V$. Disponendo in riga tali generatori, e riducendo a scala per righe, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per cui $dim(U+V) = 3$, ed una base per $U+V$ è data dai vettori: $(1,-2,2,0)$, $(0,1,-1,0)$, $(0,0,0,1)$.

$b)$ Sia (x,y,z,t) il generico vettore di $\mathbf{R}^4$. Allora tale vettore appartiene ad $U+V$ se e solo se la matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ -2 & 1 & 0 & y \\ 2 & -1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

ha rango $= 3$. Ciò equivale a dire che $det(A) = 0$, cioè che $y+z=0$. Questa è la rappresentazione cartesiana cercata di $U+V$.

$c)$ Una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ si ottiene considerando simultaneamente le equazioni di U e le equazioni di V. Cioè una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è:

$$\begin{cases} 2x+3y+2z+t=0 \\ y+z=0 \\ 2x+4y+3z+t=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+3y+2z=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $t \in \mathbf{R} \to (-t,t,-t,t) \in U \cap V$. Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(-1,1,-1,1)$.

$d)$ Basta porre $W := Span((0,1,0,0))$. La risposta all'ultima domanda è no, perché altrimenti si avrebbe $dim(U+V) \oplus W = 5 \neq dim(\mathbf{R}^4)$.

$e)$ Disponendo in riga i generatori di W_h, e riducendo a scala, si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2h \end{bmatrix}.$$

Se $h \neq 0$ tale matrice ha rango 3, quindi W_h ha dimensione 3, e allora non può essere $W_h = U$ perché U ha dimensione 2. Se invece $h = 0$, allora $dim(W_0) = 2$, ed i suoi generatori soddisfano le equazioni di U. Quindi $W_0 \subseteq U$, e poiché W_0 e U hanno la stessa dimensione, allora sono uguali. Quindi, in conclusione, $W_h = U$ se e solo se $h = 0$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro h in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_h$:*

$$\begin{cases} hx + y = 0 \\ x + hy = 0 \\ 2x + (1+h)y = h. \end{cases}$$

a) Calcolare il rango della matrice incompleta A_h e della matrice completa B_h di $\mathcal{S}_h$.
b) Dire per quali valori di h il sistema lineare $\mathcal{S}_h$ è compatibile.
c) Nei casi in cui $\mathcal{S}_h$ è compatibile, calcolarne le soluzioni.
d) Dire per quali valori di h il sistema $\mathcal{S}_h$ è omogeneo.
e) Dire per quali valori di h l'insieme $Sol(\mathcal{S}_h)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_h$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.

Svolgimento. a) Eseguendo sulla matrice completa del sistema lineare le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $p_{2,3}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-h)$, $e_{3,2}(-(1+h))$, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & 1-h & h \\ 0 & 0 & -h(1+h) \end{bmatrix}.$$

Si deduce che:

$$rk(A_h) = \begin{cases} 2 & \text{se } h \neq 1 \\ 1 & \text{se } h = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad rk(B_h) = \begin{cases} 3 & \text{se } h \notin \{-1,0,1\} \\ 2 & \text{se } h \in \{-1,0,1\}. \end{cases}$$

b) Tenuto conto che $\mathcal{S}_h$ è compatibile se e solo se A_h e B_h hanno lo stesso rango, dall'analisi precedente segue che $\mathcal{S}_h$ è compatibile se e solo se $h \in \{-1, 0\}$.

c) Il sistema $\mathcal{S}_{-1}$ ammette un'unica soluzione data da $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, ed anche il sistema $\mathcal{S}_0$ ammette un'unica soluzione, data da $(0,0)$.

d) Il sistema $\mathcal{S}_h$ è omogeneo se e solo se tutti i suoi termini noti sono nulli. Questo avviene solo nel caso $h = 0$.

e) $Sol(\mathcal{S}_h)$ è vuoto per $h \notin \{-1, 0\}$, è sempre finito, non è mai infinito, ed è un sottospazio solo quando è omogeneo, cioè quando $h = 0$. ■

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{b}_1 = (3,0,1)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{b}_3 = (2,0,1)$. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalle condizioni $f(1,0,0) = -2(6\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2 - 10\mathbf{b}_3)$, $f(0,1,0) = \mathbf{0}$, $f(0,0,1) = -f(1,0,0)$.*

a) Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, calcolare le seguenti matrici: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.

b) Calcolare una base per $Ker(f)$, una per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.

c) Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ oppure ad $Im(f)$: $(1,1,1)$, $(-1,-2,-2)$, $(-1,-2,2)$.

d) Calcolare il polinomio caratteristico di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, e le sue radici. Inoltre determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale, e verificare che il risultato ottenuto è esatto.

e) Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori di $\mathbf{R}^3$ linearmente indipendenti. Dire se la funzione f definita in precedenza trasforma $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in due vettori anch'essi linearmente indipendenti.

Svolgimento. a) È evidente che $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = I$. Poi abbiamo:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Inoltre dal testo sappiamo che $f(1,0,0) = -2(6\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2 - 10\mathbf{b}_3) = (4,8,8)$, $f(0,1,0) = (0,0,0)$ e $f(0,0,1) = (-4,-8,-8)$. Quindi sappiamo che:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -8 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} -24 & 0 & -12 \\ 16 & 0 & 8 \\ 40 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

b) Per rispondere a tale domanda, utilizziamo le coordinate rispetto alla base canonica, cioè utilizziamo la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$. Quindi il nucleo consiste dei vettori tali che $x - z = 0$. Per cui una base per $Ker(f)$ è data dai vettori

$(1,0,1)$ e $(0,1,0)$. Invece $Im(f)$ è generata dal vettore $(1,2,2)$, che ne è una base. Una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dal sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$.

c) Il vettore $(1,1,1)$ appartiene al nucleo, ma non all'immagine. Il vettore $(-1,-2,-2)$ appartiene all'immagine ma non al nucleo. Il vettore $(-1,-2,2)$ non appartiene né all'immagine, né al nucleo.

d) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -t^2(t+4)$. Quindi gli autovalori di f sono -4 e 0. L'autospazio V_{-4} è generato da $(1,2,2)$, mentre l'autospazio V_0 altro non è che il nucleo di f, che sappiamo essere generato da $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(1,0,1),(0,1,0),(1,2,2)\}$. Per verificare che il risultato è esatto, denotiamo con P la matrice che si ottiene mettendo in colonna i vettori di $\mathcal{A}$, e andiamo a vedere che $P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P$ coincide con la matrice diagonale le cui entrate sulla diagonale principale sono gli autovaolri di f:

$$P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

e) In generale non è vero. Infatti i vettori $\mathbf{u} := (1,0,0)$ e $\mathbf{v} := (0,1,0)$ sono linearmente indipendenti, ma $f(\mathbf{u})$ e $f(\mathbf{v})$ no, in quanto $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Geometria ed Algebra 1, V appello, 18 settembre 2008.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori* $(1,1,1,1)$, $(1,2,1,-1)$, $(3,4,3,1)$, *e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori* $(1,1,0,1)$, $(3,4,2,1)$, $(5,6,2,3)$.

a) Calcolare una base e la dimensione per U, V, e $U+V$.
b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per U, V, e $U+V$.
c) Calcolare una base e la dimensione per $U \cap V$.
d) Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x-2y-z-t=0 \\ 7x-4y-z-2t=0 \\ 11x-6y-2z-3t=0. \end{cases}$$

Provare che $W=U$.

e) Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{t}$ vettori di uno spazio vettoriale, tali che $\mathbf{u}=3\mathbf{w}+\mathbf{t}$, e $\mathbf{v}=2\mathbf{w}+\mathbf{t}$. Provare che $Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}) = Span(\{\mathbf{w},\mathbf{t}\})$.

Svolgimento. *a*) Poiché $2(1,1,1,1)+(1,2,1,-1)=(3,4,3,1)$, allora $(3,4,3,1)$ è un generatore sovrabbondante per U. Quindi U ha dimensione 2, ed una base per U è costituita dai vettori $(1,1,1,1)$ e $(1,2,1,-1)$. In modo analogo si vede che V ha dimensione 2, ed una base per V è costituita dai vettori $(1,1,0,1)$ e $(3,4,2,1)$. Riunendo la base di U con quella di V si ottiene un sistema di generatori di $U+V$. Disponendo tali generatori in riga, e riducendo a scala, si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $U+V$ ha dimensione 3, ed una sua base è costituita dai vettori: $(1,1,1,1)$, $(0,1,0,-2)$, $(0,0,1,0)$.

b) Sia $\mathbf{r} := (x,y,z,t)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^4$. Allora $\mathbf{r}$ appartiene ad U se e solo se la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \\ 1 & -1 & t \end{bmatrix}$$

ha rango 2. Riducendo a scala tale matrice, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 3x-2y-t \\ 0 & 0 & x-z \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2 se e solo se le componenti di $\mathbf{r}$ soddisfano il sistema lineare: $\begin{cases} x-z=0 \\ 3x-2y-t=0 \end{cases}$. Allora questo sistema lineare è la rappresentazione cartesiana cercata di U. Analogamente si vede che una rappresentazione cartesiana per V è data dal sistema lineare: $\begin{cases} 2x-2y+z=0 \\ 3x-2y-t=0 \end{cases}$. Poiché l'equazione $3x-2y-t=0$ appartiene ad entrambe le rappresentazioni, e poiché $U+V$ ha dimensione 3, allora tale equazione è una rappresentazione cartesiana per $U+V$.

c) Una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ si ottiene considerando simultaneamente le equazioni di U e le equazioni di V. Cioè una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è:

$$\begin{cases} x-z=0 \\ 3x-2y-t=0 \\ 2x-2y+z=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $z \in \mathbf{R} \to (z, \frac{3z}{2}, z, 0) \in U \cap V$. Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(2,3,2,0)$.

d) La matrice del sistema che rappresenta W ha rango 2. Poiché W ha dimensione pari al numero delle incognite, meno il rango del sistema che lo rappresenta, segue che W ha dimensione 2. D'altra parte, i generatori di U soddisfano tutte le equazioni che definiscono W. Quindi $U \subseteq W$. Poiché tali spazi hanno la stessa dimensione, allora $U=W$.

e) Poiché i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dipendono linearmente da $\mathbf{w}$ e $\mathbf{t}$, allora $Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}) \subseteq Span(\{\mathbf{w},\mathbf{t}\})$. D'altra parte le formule assegnate si possono invertire, e si ottiene:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad \text{e} \quad \mathbf{t} = -2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}.$$

Quindi, per lo stesso motivo di prima, deve anche essere $Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}) \supseteq Span(\{\mathbf{w},\mathbf{t}\})$. In virtù della doppia inclusione, possiamo dire di aver provato che $Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}) = Span(\{\mathbf{w},\mathbf{t}\})$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$:*

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y - \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

a) Calcolare il rango della matrice incompleta A_λ e della matrice completa B_λ di $\mathcal{S}_\lambda$.
b) Dire per quali valori di λ il sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile.
c) Nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, calcolarne le soluzioni.
d) Dire per quali valori di λ l'insieme $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_\lambda$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.
e) Nel caso in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_\lambda$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.

Svolgimento. *a*) Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si deduce che:

$$rk(A_\lambda) = rk(B_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \neq 1 \\ 2 & \text{se } \lambda = 1. \end{cases}$$

b) Tenuto conto che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se A_λ e B_λ hanno lo stesso rango, dall'analisi precedente segue che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile per ogni valore del parametro λ.

c) Quando $\lambda \neq 1$, allora il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ ammette un'unica soluzione data da $(0,1,0)$. Invece il sistema $\mathcal{S}_1$ ammette ∞^1 soluzioni date da: $(1-y, y, 0)$, al variare di $y \in \mathbf{R}$.

d) $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ non è mai vuoto, è finito per $\lambda \neq 1$, è infinito solo per $\lambda = 1$, e non è mai un sottospazio.

e) Quando $\lambda \neq 1$, possiamo scrivere: $(0,1,0) = (0,1,0) + (0,0,0)$. Invece, quando $\lambda = 1$, possiamo scrivere $(1-y,y,0) = (1,0,0) + y(-1,1,0)$. ■

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,0)$, $(0,2,1)$, $(0,1,1)$, e si denotino con $(x_1', x_2', x_3')^T$ le coordinate del generico vettore di $\mathbf{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che al generico vettore di coordinate $(x_1', x_2', x_3')^T$ associa il vettore di coordinate $(-3x_1' - 6x_2' - 4x_3', -x_1' - 4x_2' - 2x_3', 2x_1' + 6x_2' + 3x_3')^T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

a) Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, calcolare le matrici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ed $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.
b) Calcolare la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$. Dire se è vero oppure no che $\mathbf{R}^3 = Im(f)$.
c) Calcolare il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, e le sue radici. Inoltre determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale.
d) Verificare che il risultato ottenuto nel punto precedente c) è esatto.
e) Dire se esistono vettori distinti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tali che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$, dove f è l'applicazione lineare definita in precedenza.

Svolgimento. *a*) Dal testo dell'esercizio deduciamo che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Per il calcolo di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ procediamo nel seguente modo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -6 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Poiché il determinante di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è $-2 \neq 0$, allora $dim(Ker(f)) = 0$ e $dim(Im(f)) = 3$. In particolare $Im(f) = \mathbf{R}^3$.

c) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -(t+1)^2(t+2)$. Quindi gli autovalori di f sono -2 e -1. L'autospazio V_{-2} è generato da $(2,0,-1)$, e l'autospazio V_{-1} è generato dai vettori $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(2,0,-1),(1,-1,0),(1,0,-1)\}$.

d) Per verificare che il risultato è esatto, denotiamo con P la matrice che si ottiene mettendo in colonna i vettori di $\mathcal{A}$, e andiamo a vedere che $P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P$ coincide con la matrice diagonale le cui entrate sulla diagonale principale sono gli autovaolri di f (disposti in ordine corrispondente all'ordine con cui abbiamo disposto gli autovettori lungo le colonne di P):

$$P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

e) Poiché abbiamo visto che $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, allora f è iniettiva. Quindi, per definizione, non esistono vettori distinti $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tali che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$. ∎

Geometria ed Algebra 1, I appello, 18 novembre 2008.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(0,1,-1,0)$, $(1,-1,-1,0)$, $(1,0,-2,0)$, e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente la seguente rappresentazione cartesiana:* $\begin{cases} 2x+y-z-t=0 \\ z+t=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$.

a) Calcolare una base e la dimensione per U, V, e $U+V$.
b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per U, V, e $U+V$.
c) Calcolare una base e la dimensione per $U \cap V$.
d) Determinare sottospazi X, Y, Z e W di $\mathbf{R}^4$ tali che: $\mathbf{R}^4 = U \oplus X$, $U+V = U \oplus Y$, $\mathbf{R}^4 = (U+V) \oplus Z$, e $\mathbf{R}^4 = (U \cap V) \oplus W$.
e) Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il sottospazio $W_h = Span((1,-2,-1,h),(h,-2,-1,1))$. Calcolare la dimensione di W_h, e determinare i valori di h per cui si ha $W_h \subseteq V$, $W_h = V$, e $W_h \neq V$.

Svolgimento. a) Disponendo in riga i generatori di U, e riducendo a scala, si vede che $(0,1,-1,0)$ è sovrabbondante. Quindi i due vettori $(1,-1,-1,0)$, $(1,0,-2,0)$ formano una base per U, e la dimensione di U è 2. Invece per ottenere una base di V, andiamo a risolvere il sistema lineare omogeneo che rappresenta V. Riducendo a scala tale sistema, si ottiene il sistema in forma normale: $\begin{cases} 2x+y-z-t=0 \\ z+t=0 \end{cases}$ (cioè l'equazione $2x+y=0$ è sovrabbondante). Si deduce che una rappresentazione parametrica di V è data dalla funzione: $(y,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-\frac{y}{2}, y, -t, t) \in V$. Quindi V ha dimensione 2, ed una base per V è data dai vettori $(-1,2,0,0)$, $(0,0,-1,1)$. Riunendo la base per U con la base per V, otteniamo un sistema di generatori per $U+V$: $(1,-1,-1,0)$, $(1,0,-2,0)$, $(-1,2,0,0)$, $(0,0,-1,1)$. Disponendo in riga tali generatori, e riducendo a scala scambiando la terza riga con la quarta, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Quindi $U+V$ ha dimensione 3, ed una sua base è data dai vettori $(1,-1,-1,0)$, $(1,0,-2,0)$, $(0,0,-1,1)$.

b) Una rappresentazione cartesiana per U si ottiene mettendo in colonna i due vettori che formano una base di U, aggiungendo la colonna $(x,y,z,t)^T$ del generico vettore di $\mathbf{R}^4$, riducendo a scala, ed imponendo che il rango della matrice sia 2. Si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di U: $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ t=0 \end{cases}$. Una rappresentazione cartesiana per V è data dal testo dell'esercizio. Infine, in modo analogo a quanto fatto per U, si ottiene la rappresentazione cartesiana per $U+V$, che è: $2x+y+z+t=0$.

c) Una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ si ottiene considerando simultaneamente le equazioni di U e le equazioni di V. Cioè una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è:

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ t=0 \\ 2x+y-z-t=0 \\ z+t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $y \in \mathbf{R} \to (\frac{-y}{2}, y, 0, 0) \in U \cap V$. Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(1,-2,0,0)$.

d) Aggiungendo alle prime tre righe della matrice (1) il vettore $(0,0,0,1)$, si ottiene una matrice di rango 4. Quindi, se definiamo $X = Span((0,0,-1,1),(0,0,0,1))$, allora riunendo la base di U formata dai vettori $(1,-1,-1,0)$ e $(0,1,-1,0)$, con la base $\{(0,0,-1,1),(0,0,0,1)\}$ di X, si ottiene una base di $\mathbf{R}^4$. Ciò equivale a dire che $\mathbf{R}^4 = U \oplus X$. Analogamente, possiamo porre $Y = Span((0,0,-1,1))$, $Z = Span((0,0,0,1))$, e $W = Span((0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

e) La dimensione di W_h è data dal rango della matrice che si ottiene disponendo in riga i generatori assegnati. Il minore di tale matrice dato dalla sottomatrice $\begin{bmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 2 se e solo se $h \notin \{-1,1\}$. Quindi la dimensione di W_h è 2 se $h \notin \{-1,1\}$. Un calcolo a parte prova che anche W_{-1} ha dimensione 2, mentre W_1 ha dimensione 1. In definitiva, la dimensione di W_h è 2 se e solo se $h \neq 1$, ed è 1 per $h = 1$. Quando $h \neq 1$, allora $(1,-2,-1,h)$ non soddisfa le equazioni che definiscono V. Quindi se $h \neq 1$ W_h non può essere contenuto in V, in particolare $W_h \neq V$. Quando $h = 1$ i generatori di W_h soddisfano le equazioni di V, quindi $W_1 \subseteq V$, ma ancora $W_1 \neq V$ perché W_1 ha dimensione 1, mentre V ha dimensione 2. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili x, y, z, t:*

$$\begin{cases} x - y + z + (\lambda^2 - 2)t = \lambda \\ -x + y - z + \lambda^2 t = \lambda + 2 \\ x - y + (\lambda + 2)z = 1 \\ x - y + z - t = -1. \end{cases}$$

a) Calcolare il rango della matrice incompleta A_λ e della matrice completa B_λ di $\mathcal{S}_\lambda$, e dire per quali valori di λ il sistema lineare assegnato è compatibile, ed in tal caso dire qual è il rango del sistema.

b) Nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne un sistema equivalente in forma normale, le variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.

c) Dire per quali valori di λ il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ è un sistema di Cramer.

d) Nel caso in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_\lambda$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.

e) Dire per quali valori di λ l'insieme $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_\lambda$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.

Svolgimento. a) Dopo opportune operazioni elementari sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si deduce che:

$$rk(B_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \neq -1 \\ 2 & \text{se } \lambda = -1 \end{cases}, \quad \text{e} \quad rk(A_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \notin \{-1, 1\} \\ 2 & \text{se } \lambda \in \{-1, 1\} \end{cases}.$$

Tenuto conto che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se A_λ e B_λ hanno lo stesso rango, segue che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se $\lambda \neq 1$. In tal caso $rk(\mathcal{S}_\lambda) = 3$ se $\lambda \neq -1$, e $rk(\mathcal{S}_{-1}) = 2$.

b) Se $\lambda \notin \{-1, 1\}$, allora un sistema equivalente in forma normale è:

$$\begin{cases} x - y + z - t = -1 \\ (\lambda + 1)z + t = 2 \\ (\lambda^2 - 1)t = \lambda + 1. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette ∞^1 soluzioni, la variabile libera è y, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_\lambda)$ è: $y \in \mathbf{R} \to (y + \frac{-\lambda^2-\lambda+5}{\lambda^2-1}, y, \frac{2\lambda-3}{\lambda^2-1}, \frac{1}{\lambda-1})^T \in Sol(\mathcal{S}_\lambda)$.

Se $\lambda = -1$, allora un sistema equivalente ad $\mathcal{S}_{-1}$ in forma normale è:

$$\begin{cases} x - y + z - t = -1 \\ t = 2. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette ∞^2 soluzioni, le variabili libere sono y e z, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_{-1})$ è: $(y, z)^T \in \mathbf{R}^2 \to (y - z + 1, y, z, 2)^T \in Sol(S_{-1})$.

c) $\mathcal{S}_\lambda$ non è mai un sistema di Cramer perche' ha sempre rango < 4.

d) Quando $\lambda \notin \{-1, 1\}$ possiamo scrivere: $(y + \frac{-\lambda^2-\lambda+5}{\lambda^2-1}, y, \frac{2\lambda-3}{\lambda^2-1}, \frac{1}{\lambda-1})^T = (\frac{-\lambda^2-\lambda+5}{\lambda^2-1}, 0, \frac{2\lambda-3}{\lambda^2-1}, \frac{1}{\lambda-1})^T + (y, y, 0, 0,)^T$. Invece nel caso $\lambda = -1$ possiamo scrivere: $(y - z + 1, y, z, 2)^T = (1, 0, 0, 2)^T + (y - z, y, z, 0)^T$.

e) $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ è vuoto e finito solo per $\lambda = 1$, è infinito per $\lambda \neq 1$, e non è mai un sottospazio. ∎

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 2), (0, 1, 3)$, e sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che trasforma il vettore $(1, 0, 0)$ in $(4, -2, 0)$, il vettore $(0, 1, 2)$ in $(10, -5, -2)$, ed il vettore $(0, 1, 3)$ in $(10, -5, -3)$.*

a) Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, calcolare le seguenti matrici: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

b) Rappresentare f in termini delle coordinate canoniche, e calcolare una base per $Ker(f)$ ed una per $Im(f)$.

c) Determinare una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$, ed una per $Im(f)$. Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ oppure ad $Im(f)$: $(50, -20, 0)$, $(2, -1, 10)$, $(50, -20, 7)$.

d) Calcolare gli autovalori di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, e determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale.

e) Dire se esiste una base $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Svolgimento. *a*) Dai dati forniti dal testo, deduciamo che:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{e che} \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 10 \\ -2 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Quindi abbiamo:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Avendo calcolato $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, possiamo dire che per ogni vettore $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si ha $f(x, y, z) = (4x + 10y, -2x - 5y, -z)$. Questa è la rappresentazione di f in termini delle coordinate canoniche. Una base per $Ker(f)$ è data da $(-5, 2, 0)$, mentre una base per $Im(f)$ è data dai vettori $(2, -1, 0)$, $(0, 0, -1)$.

c) Una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$ è data dal sistema formato dalle due equazioni $2x + 5y = 0$, $z = 0$. Invece una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dall'equazione: $x + 2y = 0$. Il vettore $(50, -20, 0)$ appartiene al nucleo ma non all'immagine, il vettore $(2, -1, 10)$ appartiene all'immagine ma non al nucleo, ed il vettore $(50, -20, 7)$ non appartiene né al nucleo né all'immagine.

d) Il polinomio caratteristico di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -t(t + 1)^2$. Quindi gli autovalori di f sono $-1, 0$. L'autospazio V_{-1} è generato da $(2, -1, 0)$ e da $(0, 0, 1)$. L'autospazio V_0 è il nucleo, quindi è generato da $(-5, 2, 0)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(2, -1, 0), (0, 0, 1), (-5, 2, 0)\}$.

e) Una tale base non esiste, perché la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ dovrebbe avere lo stesso polinomio caratteristico di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, quindi gli stessi autovalori. Il che è impossibile, perché tra gli autovalori di $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ appare 4, che non è un autovalore per $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$. ■

Geometria ed Algebra 1, II appello, 12 febbraio 2009.

Esercizio 1. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ che ammettono le seguenti rappresentazioni cartesiane:*

$$U := \begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad V := \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

a) Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U \cap V$, e $U + V$.
b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U + V$.
c) Determinare un sottospazio W di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, contenente U ma non V.
d) Determinare sottospazi X, Y, Z di $\mathbf{R}^3$ tali che: $U \oplus X = (U + V) \oplus Y = V \oplus Z$.
e) Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il sottospazio $W_h = Span((1, 1 + h, 0), (1, h, 1))$. Determinare i valori di h per cui si ha $W_h = U + V$.

Svolgimento. *a*) I vettori di U sono le soluzioni del sistema lineare fornito dalla rappresentazione cartesiana di U. Risolvendo tale sistema, si vede che U ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(1, 1, 1)$. Analogamente si vede che V ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(0, 1, -1)$. Quindi una base per $U + V$ è formata dai vettori $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, -1)$, ed $U + V$ ha dimensione 2. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $U \cap V$ ha dimensione 0, ed una sua base è l'insieme vuoto.

b) Una rappresentazione cartesiana di $U + V$ si ottiene imponendo che il determinante della matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \end{bmatrix}$$

sia nullo. Quindi la rappresentazione cartesiana di $U + V$ è l'equazione $2x - y - z = 0$.

c) Il sottospazio W definito dall'equazione $x - z = 0$ ha dimensione 2, contiene U, ma non contiene V in quanto il vettore $(0, 1, -1)$ non soddisfa l'equazione di W.

d) Possiamo porre $X = V$, $Y = \{\mathbf{0}\}$, e $Z = U$.

e) Poiché W_h ha dimensione 2 per ogni h, allora $W_h = U + V$ se e solo se la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1+h & 0 \\ 1 & h & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 2. Ciò avviene esattamente quando $h = 1$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} x + y + (\lambda^2 - 4\lambda + 1)z = \lambda + 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

a) Calcolare il rango della matrice incompleta A_λ e della matrice completa B_λ di $\mathcal{S}_\lambda$, e dire per quali valori di λ il sistema lineare assegnato è compatibile, ed in tal caso dire qual è il rango del sistema.
b) Nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne un sistema equivalente in forma normale, le variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.
c) Dire per quali valori di λ il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ è un sistema di Cramer.
d) Nel caso in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_\lambda$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.
e) Dire per quali valori di λ l'insieme $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_\lambda$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.

Svolgimento. *a*) Dopo opportune operazioni elementari sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 4\lambda & \lambda \end{bmatrix}.$$

Si deduce che:

$$rk(B_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 2 & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}, \quad \text{e} \quad rk(A_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \notin \{0, 4\} \\ 2 & \text{se } \lambda \in \{0, 4\} \end{cases}.$$

Tenuto conto che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se A_λ e B_λ hanno lo stesso rango, segue che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se $\lambda \neq 4$. In tal caso $rk(\mathcal{S}_\lambda) = 3$ se $\lambda \neq 0$, e $rk(\mathcal{S}_0) = 2$.

b) Se $\lambda \notin \{0, 4\}$, allora un sistema equivalente in forma normale è:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ (\lambda^2 - 4\lambda)z = \lambda. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette ∞^0 soluzioni, non ci sono variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_\lambda)$ è: $Sol(S_\lambda) = \left\{(0, \frac{\lambda-5}{\lambda-4}, \frac{1}{\lambda-4})^T\right\}$.

Se $\lambda = 0$, allora un sistema equivalente ad $\mathcal{S}_0$ in forma normale è:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette ∞^1 soluzioni, una sola variabile libera, cioè z, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_0)$ è: $z \in \mathbf{R} \to (0, 1 - z, z)^T \in Sol(S_0)$.

c) $\mathcal{S}_\lambda$ è un sistema di Cramer se e solo se $\lambda \notin \{0, 4\}$.

d) Quando $\lambda \notin \{0, 4\}$ possiamo scrivere: $(0, \frac{\lambda-5}{\lambda-4}, \frac{1}{\lambda-4})^T = (0, \frac{\lambda-5}{\lambda-4}, \frac{1}{\lambda-4})^T + (0, 0, 0)^T$. Invece nel caso $\lambda = 0$ possiamo scrivere: $(0, 1 - z, z)^T = (0, 1, 0)^T + (0, -z, z)^T$.

e) $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ è vuoto per $\lambda = 4$, è finito per $\lambda \notin \{0, 4\}$, infinito per $\lambda = 0$, e non è mai un sottospazio. ■

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 3), (0, 1, 4)$, e sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che trasforma il vettore $(1, 0, 1)$ in $(5, 0, 5)$, il vettore $(0, 1, 3)$ in $(-1, -32, 15)$, ed il vettore $(0, 1, 4)$ in $(0, -40, 20)$.*

a) Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, calcolare le seguenti matrici: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$.

b) Rappresentare f in termini delle coordinate canoniche, e calcolare $f(1, 1, 1)$. Inoltre calcolare una base per $Ker(f)$ ed una per $Im(f)$.

c) Determinare una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$, ed una per $Im(f)$. Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ oppure ad $Im(f)$: $(-5, -5, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 3, 0)$.

d) Calcolare gli autovalori di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, e determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale, e calcolare tale matrice.

e) Denotata con $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo $g(x, y, z) = (x+y, 2y, 3z)$, calcolare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(g \circ f)$.

Svolgimento. *a*) Dai dati forniti dal testo, deduciamo che:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{e che} \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -32 & -40 \\ 5 & 15 & 20 \end{bmatrix}.$$

Quindi abbiamo:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

b) Avendo calcolato $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, possiamo dire che per ogni vettore $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ si ha $f(x, y, z) = (4x-4y+z, 8x-8y-8z, 5z)$. Questa è la rappresentazione di f in termini delle coordinate canoniche. In particolare $f(1, 1, 1) = (1, -8, 5)$. Una base per $Ker(f)$ è data da $(1, 1, 0)$, mentre una base per $Im(f)$ è data dai vettori $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 1)$.

c) Una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$ è data dal sistema formato dalle due equazioni $4x - 4y + z = 0$, $z = 0$. Invece una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dall'equazione: $2x - y - 2z = 0$. Il vettore $(-5, -5, 0)$ appartiene al nucleo ma non all'immagine, il vettore $(2, 2, 1)$ appartiene all'immagine ma non al nucleo, ed il vettore $(1, 3, 0)$ non appartiene né al nucleo né all'immagine.

d) Il polinomio caratteristico di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -t(t + 4)(t - 5)$. Quindi gli autovalori di f sono $-4, 0, 5$. L'autospazio V_{-4} è generato da $(1, 2, 0)$. L'autospazio V_0 è il nucleo, quindi è generato da $(1, 1, 0)$. L'autospazio V_5 è generato da $(1, 0, 1)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(1, 2, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$, e si ha:

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

e) Abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g \circ f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -12 & -7 \\ 16 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria ed Algebra 1, III appello, 8 luglio 2009.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ che ammette la seguente rappresentazione cartesiana:*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y=0, \end{cases}$$

e sia $V := Span((1,1,1))$.

a) Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U \cap V$, e $U+V$.
b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.
c) Determinare l'equazione cartesiana di un sottospazio W di $\mathbf{R}^3$, di dimensione 2, contenente U ma non V.
d) Determinare sottospazi X, Y, Z di $\mathbf{R}^3$ tali che: $\mathbf{R}^3 = U \oplus X = (U+V) \oplus Y = V \oplus Z$.
e) Dimostrare che $U+V = Span((4,1,1),(5,-1,-1))$.

Svolgimento. a) I vettori di U sono le soluzioni del sistema lineare fornito dalla rappresentazione cartesiana di U. Risolvendo tale sistema, si vede che U ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(2,-1,-1)$. D'altra parte V ha dimensione 1, ed una sua base è costituita proprio dal vettore $(1,1,1)$. Poiché i vettori $(2,-1,-1)$ e $(1,1,1)$ sono indipendenti allora formano una base per $U+V$, e la dimensione di $U+V$ è 2. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $U \cap V$ ha dimensione 0, ed una sua base è l'insieme vuoto.

b) Una rappresentazione cartesiana di $U+V$ si ottiene imponendo che il determinante della matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & -1 & z \end{bmatrix}$$

sia nullo. Quindi la rappresentazione cartesiana di $U+V$ è l'equazione $y-z=0$.

c) Il sottospazio W definito dall'equazione $x+y+z=0$ ha dimensione 2, contiene U, ma non contiene V in quanto il vettore $(1,1,1)$ non soddisfa l'equazione di W.

d) Possiamo porre $X = Z = Span((0,1,0),(0,0,1))$, ed $Y = Span((0,0,1))$.

e) Poiché $Span((4,1,1),(5,-1,-1))$ ha dimensione 2, per dimostrarne l'uguaglianza con $U+V$ è sufficiente provare che $Span((4,1,1),(5,-1,-1)) \subseteq U+V$. E ciò segue dal fatto che i generatori $(4,1,1),(5,-1,-1)$ soddisfano l'equazione di $U+V$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili x,y,z:*

$$\begin{cases} x+y+(\lambda^2-2)z=\lambda \\ x+2y-2z=2 \\ x+y-\lambda^2 z=2-\lambda. \end{cases}$$

a) Calcolare il rango della matrice incompleta A_λ e della matrice completa B_λ di $\mathcal{S}_\lambda$, e dire per quali valori di λ il sistema lineare assegnato è compatibile, ed in tal caso dire qual è il rango del sistema.

b) Nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne un sistema equivalente in forma normale, le variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.

c) Nel caso in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_\lambda$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.

d) Denotato con U_λ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}_\lambda$, calcolare la dimensione ed una base per U_λ.

e) Dire per quali valori di λ l'insieme $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_\lambda$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.

Svolgimento. a) Dopo aver svolto, nell'ordine, le operazioni elementari $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_3(-\frac{1}{2})$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda^2-2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{bmatrix}.$$

Si deduce che:

$$rk(B_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \neq 1 \\ 2 & \text{se } \lambda = 1 \end{cases}, \quad \text{e} \quad rk(A_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \notin \{-1,1\} \\ 2 & \text{se } \lambda \in \{-1,1\} \end{cases}.$$

Tenuto conto che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se A_λ e B_λ hanno lo stesso rango, segue che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se $\lambda \neq -1$. In tal caso $rk(\mathcal{S}_\lambda) = 3$ se $\lambda \neq 1$, e $rk(\mathcal{S}_1) = 2$.

b) Se $\lambda \notin \{-1, 1\}$ allora un sistema equivalente ad $\mathcal{S}_\lambda$ in forma normale è:

$$\begin{cases} x + y + (\lambda^2 - 2)z = \lambda \\ y - \lambda^2 z = 2 - \lambda \\ (\lambda^2 - 1)z = \lambda - 1. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette ∞^0 soluzioni, non ci sono variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_\lambda)$ è: $Sol(S_\lambda) = \left\{(0, \frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1})^T\right\}$.

Se $\lambda = 1$ allora un sistema equivalente ad $\mathcal{S}_1$ in forma normale è:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette ∞^1 soluzioni, una sola variabile libera, cioè z, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_1)$ è: $z \in \mathbf{R} \to (0, 1 + z, z)^T \in Sol(S_1)$.

c) Quando $\lambda \notin \{-1, 1\}$ possiamo scrivere: $(0, \frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1})^T = (0, \frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1})^T + (0, 0, 0)^T$. Invece nel caso $\lambda = 1$ possiamo scrivere: $(0, 1 + z, z)^T = (0, 1, 0)^T + (0, z, z)^T$.

d) Per quanto visto nel punto precedente, quando $\lambda \notin \{-1, 1\}$ allora $dim\, U_\lambda = 0$ ed una sua base è l'insieme vuoto. Quando $\lambda = 1$ allora $dim\, U_1 = 1$, ed una base per U_1 è fornita dal vettore $(0, 1, 1)$. Infine, quando $\lambda = -1$ allora il sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}_{-1}$ è equivalente al sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Cioè $U_{-1} = U_1$, per cui $dim\, U_{-1} = 1$, ed una base per U_{-1} è fornita dal vettore $(0, 1, 1)$.

e) $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ è vuoto per $\lambda = -1$, è finito per $\lambda \notin \{-1, 1\}$, infinito per $\lambda = 1$, e non è mai un sottospazio. ■

Esercizio 3. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita ponendo:*

$$f(x, y, z) = (-4x + 4y + z, -9x + 9y + z, -4x + 4y + z).$$

a) Denotata con $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^3$*, e con* $\mathcal{B}$ *la base formata dai vettori* $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$*, calcolare le seguenti matrici:* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(f)$.

b) Calcolare una base per $Ker(f)$ *ed una per* $Im(f)$.

c) Determinare una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$*, ed una per* $Im(f)$*. Dire quali dei seguenti vettori appartiene a* $Ker(f)$: $(5, -5, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(3, 3, 0)$*. Dire quali dei seguenti vettori appartiene a* $Im(f)$: $(-5, -5, 0)$, $(2, 2, 2)$, $(0, 3, 0)$.

d) Calcolare gli autovalori di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$*, e determinare una base* $\mathcal{A}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ *sia una matrice diagonale, e calcolare tale matrice.*

e) Sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *un'applicazione lineare tale che* $Im(g) \subseteq Ker(f)$*. Come deve essere fatta la matrice rappresentativa* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f \circ g)$ *? Inoltre dire se g può essere suriettiva oppure no.*

Svolgimento. *a*) Dai dati forniti dal testo deduciamo che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e che} \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -9 & 9 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi abbiamo: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ed inoltre:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -9 & 9 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -9 & 9 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Una base per $Ker(f)$ è data da $(1, 1, 0)$, mentre una base per $Im(f)$ è data dai vettori $(4, 9, 4)$, $(1, 1, 1)$.

c) Una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$ è data dal sistema formato dalle due equazioni $-4x + 4y + z = 0$, $-9x + 9y + z = 0$. Invece una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dall'equazione: $x - z = 0$. Tra i vettori $(5, -5, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(3, 3, 0)$ solo $(3, 3, 0)$ appartiene al nucleo, mentre tra i vettori $(-5, -5, 0)$, $(2, 2, 2)$, $(0, 3, 0)$ appartengono all'immagine solo $(2, 2, 2)$ e $(0, 3, 0)$.

d) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -t(t-1)(t-5)$. Quindi gli autovalori di f sono $0, 1, 5$. L'autospazio V_0 è il nucleo di f, quindi è generato da $(1, 1, 0)$. L'autospazio V_1 è generato da $(1, 1, 1)$, e l'autospazio V_5 è generato da $(1, 2, 1)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$, e si ha:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

e) Deve essere la matrice nulla. Inoltre g non può essere suriettiva, altrimenti $Im(g) = \mathbf{R}^3 = Ker(f)$, e ciò è impossibile in quanto $Ker(f)$ ha dimensione 1. ■

Geometria ed Algebra 1, IV appello, 2 settembre 2009.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ che ammette la seguente rappresentazione cartesiana:*

$$\begin{cases} 2x + y + 2z - 3t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z - t = 0. \end{cases}$$

a) Determinare una base ed una rappresentazione cartesiana per un sottospazio $V \subseteq \mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.
b) Posto $W := Span((2,0,0,1), (-1,1,0,0), (0,1,-1,0))$, dimostrare che $U \subseteq W$. Dire se è vero oppure no che $U \supseteq W$.

Svolgimento. $a)$ Risolvendo il sistema lineare omogeneo assegnato che rappresenta U si ottiene che una base per U è formata dai vettori $(-1,0,1,0), (1,1,0,1)$. Disponendo in riga tali vettori e riducendo a scala si ottiene la matrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aggiungendo i vettori canonici $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ si forma una matrice 4×4 di rango massimo. Quindi si può assumere $V := Span(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Inoltre $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ è una base per V, ed una rappresentazione cartesiana di V è fornita dal sistema: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

$b)$ I vettori che generano W sono linearmente indipendenti. Per cui la dimensione di W è 3, ed una sua rappresentazione cartesiana si ottiene imponendo che il determinante della seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & -1 & z \\ 1 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

sia nullo. Cioè una rappresentazione cartesiana per W è data dall'equazione $x + y + z - 2t = 0$. Poiché i generatori $(-1,0,1,0), (1,1,0,1)$ di U soddisfano tale equazione, allora $U \subseteq W$. Infine non può essere $U \supseteq W$ in quanto U ha dimensione 2 e W ha dimensione 3. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili x e y:*

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -2x + y = 2\lambda^2 + 7\lambda + 4 \\ x + \lambda y = \lambda. \end{cases}$$

a) Dire per quali valori di λ il sistema lineare assegnato è compatibile e, nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.
b) Dire per quali valori di λ il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ ammette la soluzione $(-\frac{1}{2}, 0)^T$, e per quali valori la soluzione $(0,1)^T$.

Svolgimento. $a)$ Eseguendo le operazioni elementari $e_{1,3}(-2)$, $e_{2,3}(2)$ sulla matrice completa B_λ del sistema $\mathcal{S}_\lambda$ si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2\lambda - 1 & -2\lambda - 1 \\ 0 & 2\lambda + 1 & 2\lambda^2 + 9\lambda + 4 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{bmatrix},$$

da cui si deduce che il determinante di B_λ è:

$$det(B_\lambda) = -(2\lambda + 1)(2\lambda^2 + 7\lambda + 3).$$

Quindi per $\lambda \notin \{-3, -\frac{1}{2}\}$ il rango di B_λ è 3, e allora il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ non è compatibile. Rimangono da esaminare i casi $\lambda = -3$ e $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Se $\lambda = -3$ il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = -3. \end{cases}$$

Tale sistema ha un'unica soluzione data da $(0,1)^T$.

Se $\lambda = -\frac{1}{2}$ il sistema è equivalente all'equazione $2x - y = -1$. Tale sistema ammette ∞^1 soluzioni, date da $(\frac{t-1}{2}, t)^T$, $t \in \mathbf{R}$.

b) $\mathcal{S}_\lambda$ ammette la soluzione $(-\frac{1}{2}, 0)^T$ solo quando $\lambda = -\frac{1}{2}$. Mentre ammette la soluzione $(0,1)^T$ solo per $\lambda \in \{-3, -\frac{1}{2}\}$. ■

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo:*

$$f(-1,1,1) = (0,-1,3), \quad f(1,-1,0) = (1,2,0), \quad f(0,1,-1) = (0,-3,-3).$$

a) Rappresentare l'applicazione f in termini delle coordinate canoniche, e calcolare una base per il nucleo e l'immagine di f.

b) Determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale, e calcolare tale matrice.

Svolgimento. *a)* Cominciamo con l'osservare che i vettori $(-1,1,1)$, $(1,-1,0)$ e $(0,1,-1)$ formano una base per $\mathbf{R}^3$. Denotiamo tale base con $\mathcal{B}$, e con $\mathcal{E}$ la base canonica. Allora il testo ci dice che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Quindi deduciamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

e la rappresentazione richiesta è:

$$f(x,y,z) = (2x + y + z, -2y + z, 3z).$$

Poiché il rango di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è 3, allora il nucleo di f è $\{\mathbf{0}\}$ (ed una sua base è l'insieme vuoto), mentre $Im(f) = \mathbf{R}^3$, ed una base di $Im(f)$ è $\mathcal{E}$.

b) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -(t+2)(t-2)(t-3)$. Quindi gli autovalori di f sono $-2, 2, 3$. L'autospazio V_{-2} è generato da $(1,-4,0)$, l'autospazio V_2 è generato da $(1,0,0)$, e l'autospazio V_3 è generato da $(6,1,5)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(1,-4,0), (1,0,0), (6,1,5)\}$, e si ha:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria ed Algebra 1, V appello, 16 settembre 2009.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-1,-3,2,5),(1,0,1,1),(1,1,0,-1)$, e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dall'equazione $x+y-z-2t=0$.*

a) Calcolare una base per $U \cap V$.

b) Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il sottospazio

$$W_h := Span((1,1,0,h-1),(2h,0,0,h),(1,-1,2,3-2h)).$$

Determinare tutti i valori del parametro h per cui $W_h = U$. Determinare tutti i valori del parametro h per cui $W_h = V$.

Svolgimento. a) Si osservi che una base per U è costituita dai vettori $(1,0,1,1),(1,1,0,-1)$. Quindi una rappresentazione cartesiana per U si ottiene imponendo che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & -1 & t \end{bmatrix}$$

abbia rango 2. Si deduce che U è rappresentato dalle equazioni $x-y-z=0$, $x-2y-t=0$, e quindi una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è fornita dal seguente sistema lineare

$$U \cap V := \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-2y-t=0 \\ x+y-z-2t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene che una base per $U \cap V$ è data dal vettore $(3,1,2,1)$.

b) I generatori di W_h soddisfano le equazioni di U solo quando $h=0$. Poiché la dimensione di $W_0 = 2$ ne consegue che $W_h = U$ se e solo se $h=0$. Analogamente, i generatori di W_h soddisfano l'equazione di V solo quando $h=2$. Poiché la dimensione di $W_2 = 3$, ne consegue che $W_h = V$ se e solo se $h=2$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili x,y,z:*

$$\begin{cases} x-y+z=-1 \\ x+3\lambda y+(3\lambda^2-2\lambda)z=3\lambda \\ x-y+(3\lambda^2-8\lambda-2)z=3\lambda^2-8\lambda-4. \end{cases}$$

a) Dire per quali valori di λ il sistema lineare assegnato è compatibile e, nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.

b) Dire per quali valori di λ il sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}_\lambda$ ammette la soluzione $(0,0,0)^T$, e per quali valori la soluzione $(6,4,-2)^T$.

Svolgimento. a) Eseguendo le operazioni elementari $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$ sulla matrice completa del sistema $\mathcal{S}_\lambda$ si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3\lambda+1 & 3\lambda^2-2\lambda-1 & 3\lambda+1 \\ 0 & 0 & 3\lambda^2-8\lambda-3 & 3\lambda^2-8\lambda-3 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $\lambda \notin \{-\frac{1}{3},3\}$ allora il sistema ammette un'unica soluzione data da $(-\lambda,2-\lambda,1)^T$. Rimangono da esaminare i casi $\lambda=-\frac{1}{3}$ e $\lambda=3$.

Se $\lambda=-\frac{1}{3}$ il sistema è equivalente all'unica equazione $x-y+z=-1$. In tal caso il sistema ammette ∞^2 soluzioni date da $(h-k-1,h,k)^T$, al variare di h e k in $\mathbf{R}$.

Se $\lambda=3$ il sistema è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x-y+z=-1 \\ y+2z=1. \end{cases}$$

Tale sistema ammette ∞^1 soluzioni, date da $(-3t,-2t+1,t)^T$, $t \in \mathbf{R}$.

b) Sia $\mathcal{S}^*_\lambda$ il sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}_\lambda$, e sia $U_\lambda := Sol(\mathcal{S}^*_\lambda)$ lo spazio delle sue soluzioni, che è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. Osserviamo che $U_\lambda = \{\mathbf{0}\}$ se $\lambda \notin \{-\frac{1}{3},3\}$, $U_{-\frac{1}{3}} = Span((1,1,0)^T,(-1,0,1)^T)$ e $U_3 = Span((-3,-2,1)^T)$.

Quindi $(0,0,0)^T$ è soluzione del sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}_\lambda$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, e $(6,4,-2)^T$ appartiene soltanto ad $U_{-\frac{1}{3}}$ e ad U_3.

Esercizio 3. *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione tale che:*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -6 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

dove $\mathcal{B}$ *è la base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita dai vettori* $(-1,1,-1)$, $(1,-1,0)$ *e* $(0,1,-1)$.

a) Rappresentare l'applicazione f *in termini delle coordinate canoniche, e calcolare una base per il nucleo e l'immagine di* f.

b) Determinare una base $\mathcal{A}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ *sia una matrice diagonale, e calcolare tale matrice.*

Svolgimento. $a)$ Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -6 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -6 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

e la rappresentazione richiesta è:

$$f(x,y,z) = (5x + y + z, z, -4z).$$

Il nucleo ammette come base $\{(1,-5,0)\}$, mentre $Im(f) = Span((1,0,0),(0,1,-4))$.

$b)$ Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -t(t+4)(t-5)$. Quindi gli autovalori di f sono $-4, 0, 5$. L'autospazio V_{-4} è generato da $(1,3,-12)$, l'autospazio V_0 è generato da $(1,-5,0)$, e l'autospazio V_5 è generato da $(1,0,0)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(1,3,-12),(1,-5,0),(1,0,0)\}$, e si ha:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria ed Algebra 1, I appello, 25 novembre 2009.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(-4,1,1)$, $(-2,2,0)$, $(2,1,-1)$, e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ avente la seguente rappresentazione cartesiana: $x-2y+3z=0$. Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U+V$ ed $U\cap V$.*

Svolgimento. Disponendo in riga i generatori di U, e riducendo a scala, si vede che $(2,1,-1)$ è sovrabbondante. Quindi i due vettori $(-4,1,1)$, $(-2,2,0)$ formano una base per U in quanto sono indipendenti, e la dimensione di U è 2. Invece, per ottenere una base di V, andiamo a risolvere l'equazione $x-2y+3z=0$, e vediamo che il generico vettore di V è del tipo $(2y-3z,y,z)$, con y e z variabili libere. Ne consegue che una base per V è formata dai vettori $(2,1,0),(-3,0,1)$. Ora l'insieme dei vettori $(-4,1,1)$, $(-2,2,0)$, $(2,1,0),(-3,0,1)$ rappresenta un sistema di generatori per $U+V$. Come prima, disponendo in riga tali generatori e riducendo a scala, si vede che i primi tre vettori sono indipendenti. Quindi $U+V=\mathbf{R}^3$, e come base di $U+V$ possiamo considerare la base canonica. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $U\cap V$ ha dimensione 1. Per calcolarne una base, prima determiniamo una rappresentazione cartesiana di U, imponendo che il rango della matrice

$$A:=\begin{bmatrix}-4 & -2 & x\\ 1 & 2 & y\\ 1 & 0 & z\end{bmatrix}$$

sia 2. In questo caso ci si riduce ad imporre che $det(A)=0$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $U\cap V$ è data dall'equazione $x+y+3z=0$. A questo punto una rappresentazione cartesiana per $U\cap V$ è data dal sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+3z=0\\ x-2y+3z=0.\end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene che il vettore $(-3,0,1)$ forma una base per $U\cap V$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}(k):=\begin{cases} x-y+(k+1)z=k-1\\ x-y+2z=0\\ 2x+(k-1)y+(k+6)z=k-1.\end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema è compatibile, ed in tal caso determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}(k)$.

Svolgimento. Dopo aver eseguito le operazioni elementari $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$, $p_{2,3}$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$(*)\qquad \begin{bmatrix}1 & -1 & k+1 & k-1\\ 0 & k+1 & 4-k & 1-k\\ 0 & 0 & 1-k & 1-k\end{bmatrix}.$$

Quindi se $k\notin\{-1,1\}$ il sistema $\mathcal{S}(k)$ è un sistema di Cramer e pertanto ammette un'unica soluzione, data da

$$\left(-\frac{2k+5}{k+1},-\frac{3}{k+1},1\right).$$

Restano da esaminare i casi $k=-1$ e $k=1$.

Nel caso $k=-1$, dopo l'ulteriore operazione elementare $e_{3,2}(-\frac{2}{5})$, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5}\end{bmatrix}.$$

In tal caso allora il rango della matrice incompleta è 2, mentre quello della matrice completa è 3, ed il sistema $\mathcal{S}(-1)$ è incompatibile.

Nel caso $k=1$ la matrice $(*)$ diventa:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Il sistema $\mathcal{S}(1)$ è compatibile, di rango 2. Ammette pertanto ∞^1 soluzioni, corrispondenti alla variabile libera z, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S}(1))$ di $\mathcal{S}(1)$ è data dalla funzione:

$$z \in \mathbf{R} \to (-\frac{7}{2}z, -\frac{3}{2}z, z) \in Sol(\mathcal{S}(1)). \ \blacksquare$$

Esercizio 3. *Sia U il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tali che $a = -c$ e $b = -2a$. Dimostrare che U è un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$, e determinare un sottospazio W di $\mathcal{M}(2,2)$ tale che $\mathcal{M}(2,2) = U \oplus W$.*

Svolgimento. Per la definizione stessa di U, sappiamo che una matrice A appartiene ad U se e solo se esistono $a, d \in \mathbf{R}$ tali che $A = \begin{bmatrix} a & -2a \\ -a & d \end{bmatrix}$. In particolare

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che $U = Span\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Ciò prova che U è un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$, ed una base per U è formata dalle matrici $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ora, tramite l'applicazione delle coordinate, identifichiamo la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con il vettore (a, b, c, d) di $\mathbf{R}^4$. Il sottospazio U corrisponde al sottospazio $\widetilde{U}$ di $\mathbf{R}^4$ generato da $(1, -2, -1, 0), (0, 0, 0, 1)$. Aggiungendo a tali vettori i vettori canonici $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$ si forma una base per tutto $\mathbf{R}^4$ in quanto la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 4. Per cui, posto $\widetilde{W} = Span(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, si ha $\mathbf{R}^4 = \widetilde{U} \oplus \widetilde{W}$. Allora il sottospazio W di $\mathcal{M}(2,2)$ cercato è:

$$W := Span\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right). \ \blacksquare$$

Esercizio 3bis. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ generato dai polinomi $p(t) = 2+6t+t^2+t^3$, $q(t) = 4+12t+2t^2+t^3$, $r(t) = 6+18t+3t^2+2t^3$. Calcolare una base di U, e determinare un sottospazio W di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ tale che $\mathbf{R}[t]_{\leq 3} = U \oplus W$.*

Svolgimento. Tramite l'applicazione delle coordinate, identifichiamo il generico polinomio $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ con il vettore (a_0, a_1, a_2, a_3) di $\mathbf{R}^4$. Il sottospazio U corrisponde al sottospazio $\widetilde{U}$ di $\mathbf{R}^4$ generato da $(2, 6, 1, 1)$, $(4, 12, 2, 1)$, $(6, 18, 3, 2)$. Disponendo in riga tali vettori e riducendo a scala (senza scambi) si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque il vettore $(6, 18, 3, 2)$ è sovrabbondante, ed una base per $\widetilde{U}$ è formata dai vettori $(2, 6, 1, 1)$, $(4, 12, 2, 1)$. Ciò equivale a dire che $p(t)$ e $q(t)$ formano una base per U.

Poi, aggiungendo a $(2, 6, 1, 1), (4, 12, 2, 1)$ i vettori canonici $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$ si forma una base per tutto $\mathbf{R}^4$ in quanto la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 4. Per cui, posto $\widetilde{W} = Span(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, si ha $\mathbf{R}^4 = \widetilde{U} \oplus \widetilde{W}$. Allora il sottospazio W di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ cercato è:

$$W := Span(t, t^2). \ \blacksquare$$

Esercizio 4. *Determinare la matrice rappresentativa rispetto alla base canonica dell'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$*, sapendo che* $f(0,1,3) = (4,2,3)$*,* $f(0,0,1) = (1,1,1)$*, e che il nucleo di* f *ammette la seguente rappresentazione cartesiana*

$$Ker(f) := \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Dalla rappresentazione cartesiana del nucleo di f deduciamo che $Ker(f)$ è generato dal vettore $(1,1,-2)$. Tale vettore, insieme a $(0,1,3)$ e $(0,0,1)$, forma una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$. E dai dati del problema deduciamo che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $\mathcal{E}$ denota la base canonica. Quindi abbiamo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Esercizio 5. *Si consideri l'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definita ponendo*

$$f(x,y,z) = (-3x + 3y - 3z, -3x + 3y - 3z, -3x + 3y - 3z).$$

Calcolare la matrice rappresentativa A *di* f *rispetto alla base canonica, una base di* $Ker(f)$*, una base di* $Im(f)$*, ed una matrice invertibile* P *tale che* $P^{-1}AP$ *sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, abbiamo:

$$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Il nucleo di f allora è rappresentato dall'equazione $x - y + z = 0$, ed una sua base è data dai vettori $(1,1,0)$, $(-1,0,1)$. L'immagine di f è generata da $(1,1,1)$.

Per calcolare la matrice P, innanzitutto calcoliamo il polinomio caratteristico di f, che è $p_f(t) = -t^2(t+3)$. Pertanto lo spettro di f è costituito dagli autovalori -3 e 0. L'autospazio V_{-3} è generato dal vettore $(1,1,1)$, mentre l'autospazio V_0 è il nucleo di f che abbiamo visto essere generato dai vettori $(1,1,0)$, $(-1,0,1)$. La matrice P si ottiene disponendo in colonna i vettori appena calcolati:

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Geometria ed Algebra 1, II appello, 9 febbraio 2010.

Esercizio 1. *Si considerino i sottospazi U e V di $\mathbf{R}^4$ definiti dalle seguenti rappresentazioni cartesiane:*

$$U := \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z - t = 0 \end{cases} \qquad V := \begin{cases} 2x + 2y + t = 0 \\ 2x + 3y - z + t = 0. \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione cartesiana di $U + V$, e dire se $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$ oppure no.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta U si vede che una base per U è formata dai vettori $(-1, 2, 0, 0)$, $(-2, 0, 2, 2)$. In modo analogo si vede che una base per V è formata dai vettori $(-2, 2, 2, 0)$, $(-1, 0, 0, 2)$. Disponendo in riga i quattro vettori trovati, e riducendo a scala la matrice ottenuta in tal modo, si vede che $U + V$ ha dimensione 3 ed ammette come base i vettori $(-1, 2, 0, 0)$, $(-2, 0, 2, 2)$, $(-2, 2, 2, 0)$. In particolare non è vero che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$. La rappresentazione cartesiana di $U + V$ si ottiene imponendo che il generico vettore (x, y, z, t) sia dipendente dai vettori della base di $U + V$ trovata, cioè imponendo che

$$det \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 2 & 2 & z \\ 0 & 2 & 0 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante si trova la rappresentazione cercata che è $2x + y + z + t = 0$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili x, y, z, t:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} 2x + (k+4)y + (k+4)z + (k+4)t = k+2 \\ x + (k+3)y + (k+3)z + (k+3)t = k+1 \\ x + y + z + t = 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema è compatibile, ed in tal caso determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}(k)$.

Svolgimento. Dopo aver eseguito le operazioni elementari $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+2 & k+2 & k+2 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k = -2$ il sistema non è compatibile. Quando invece $k \neq -2$ allora il sistema è compatibile ed ammette ∞^2 soluzioni. In tal caso la generica soluzione espressa in funzione delle variabili libere z e t è $(\frac{2}{k+2}, \frac{k}{k+2} - z - t, z, t)$. ■

Esercizio 3. *Sia U il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici A tali che $A^T = A$, e sia V il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici A tali che $A^T = -A$. Provare che U e V sono sottospazi di $\mathcal{M}(2,2)$ e che $\mathcal{M}(2,2) = U \oplus V$.*

Svolgimento. La generica matrice A di U è del tipo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Poiché

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

allora $U = Span(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$. Ciò prova che U è un sottospazio, di dimensione 3. Analogamente, la generica matrice A di V è del tipo $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$. Per cui $V = Span(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix})$. Quindi V è un sottospazio, di dimensione 1. Infine, poiché $dim(U) + dim(V) = 4$, per provare che $\mathcal{M}(2,2) = U \oplus V$ è sufficiente provare che $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. A tale proposito sia $A \in U \cap V$. Allora $A^T = A = -A$, quindi $2A = \mathbf{0}$, il che implica $A = \mathbf{0}$. ■

Esercizio 4. *Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è:*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dove $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,3,2),(0,2,1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,3,2)\}$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, una base del nucleo di f, ed una base dell'immagine.

Svolgimento. Si ha:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 12 & 4 & -3 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il sistema lineare $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ si vede che il nucleo di f ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(1,-6,-4)$. Infine, una base di $Im(f)$ è costituita dalle prime due colonne di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$. ■

Esercizio 5. *Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita ponendo*

$$f(x,y,z) = (x-2y+3z, -2x-2y+6z, -2x-2y+6z).$$

Calcolare la matrice rappresentativa A di f rispetto alla base canonica, ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. Verificare che il risultato ottenuto è esatto.

Svolgimento. La matrice rappresentativa A di f rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è: $p_A(t) = -t(t-2)(t-3)$. Quindi lo spettro di A è costituito dagli autovalori $0, 2, 3$. L'autospazio V_0 ammette come base $(1,2,1)$, l'autospazio V_2 ammette come base $(1,1,1)$ e l'autospazio V_3 ammette come base $(1,2,2)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ed infatti

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Geometria ed Algebra 1, III appello, 14 luglio 2010.

Esercizio 1. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$U := Span((-5,1,1),(1,-2,1),(-3,0,1)) \quad e \quad V := Span((1,1,1),(-5,-2,1),(0,1,2)).$$

Calcolare la dimensione, una base ed una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$*.*

Svolgimento. Tra i generatori di U il vettore $(-3,0,1)$ è sovrabbondante. Quindi una rappresentazione cartesiana di U è data dall'equazione $det \begin{bmatrix} -5 & 1 & x \\ 1 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} = 0$, cioè dall'equazione $x + 2y + 3z = 0$. Analogamente si vede che una rappresentazione cartesiana per V è data dall'equazione $x - 2y + z = 0$. Quindi il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

fornisce una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$. Risolvendo tale sistema si vede che $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una base per $U \cap V$ è formata dal vettore $(4,1,-2)$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro* h *in* $\mathbf{R}$*, si consideri il seguente sistema lineare* $\mathcal{S}(h)$ *nelle variabili* x, y*:*

$$\mathcal{S}(h) := \begin{cases} (h+2)x + (h+3)y = h \\ 2x + hy = 0 \\ 2x + (1+h)y = h. \end{cases}$$

Dire per quali valori di h *il sistema è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni.*

Svolgimento. Il determinante della matrice completa del sistema $\mathcal{S}(h)$ è uguale a $h^3 - 4h$. Quindi se $h \notin \{-2,0,2\}$ il sistema certamente non è compatibile. Un calcolo diretto prova che se $h = -2$ il sistema ammette un'unica soluzione data dal vettore $(-2,-2)$, se $h = 0$ il sistema ammette un'unica soluzione data dal vettore $(0,0)$, e se $h = 2$ il sistema ammette un'unica soluzione data dal vettore $(-2,2)$. ■

Esercizio 3. *Si consideri l'operatore lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definito ponendo*

$$f(x,y,z) := (-2y + 2z, 2x - 4y + 2z, 2x - 2y).$$

Calcolare la matrice rappresentativa A *di* f *rispetto alla base canonica, una base per* $Ker(f)$*, una base per* $Im(f)$*, ed una base di autovettori di* f*. Infine determinare una matrice diagonale* D *ed una matrice invertibile* P *tali che* $D = P^{-1}AP$*.*

Svolgimento. La matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, si vede che $Ker(f)$ ha dimensione 1 ed ammette come base il vettore $(1,1,1)$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2 ed una base è costituita da due colonne linearmente indipendenti di A, per esempio $\{(0,2,2),(2,2,0)\}$. Il polinomio caratteristico di f è $det(A - tI) = -t(t+2)^2$. Quindi gli autovalori di f sono -2 e 0. L'autospazio V_0 è proprio il nucleo di f. Invece una base per l'autospazio V_{-2} si ottiene risolvendo il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = -2\mathbf{x}$. Si deduce che una base per V_{-2} è formata, per esempio, dai vettori $(1,1,0)$ e $(-1,0,1)$. E allora una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per f è $\{(1,1,1),(1,1,0),(-1,0,1)\}$. Le matrici cercate D e P sono:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 4. *Si consideri l'operatore lineare* $f : A \in \mathcal{M}(2,2) \to A^T \in \mathcal{M}(2,2)$*. Calcolare la matrice rappresentativa di* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$ *di* $\mathcal{M}(2,2)$*, il polinomio caratteristico di* f*, e provare che* f *è diagonalizzabile.*

Svolgimento. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathcal{M}(2,2)$. Allora le coordinate della generica matrice $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{E}$ sono $[A]_{\mathcal{E}} = (x,y,z,w)^T$. E si ha anche $[A^T]_{\mathcal{E}} = (x,z,y,w)^T$. Per cui la matrice rappresentativa di f è la matrice

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che il polinomio caratteristico è $p_f(t) = (t-1)^3(t+1)$. L'autospazio V_1 è costituito dalle matrici simmetriche, la cui rappresentazione cartesiana è $y = z$. Quindi V_1 ha dimensione 3. Ciò prova che f è diagonalizzabile. ■

Esercizio 5. *Si consideri la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,1,1), (1,2,1), (2,5,3)$, e sia f l'operatore di $\mathbf{R}^3$ che al vettore di coordinate (x_1', x_2', x_3') rispetto alla base $\mathcal{B}$ associa il vettore di coordinate $(x_1' + x_3', x_2', x_1' + x_2')$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Calcolare le matrici rappresentative $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ed $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ e rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.*

Svolgimento. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -5 \\ 19 & 1 & -14 \\ 11 & 0 & -7 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Geometria ed Algebra 1, IV appello, 1 settembre 2010.

Esercizio 1. *Si considerino i sottospazi U e V di $\mathbf{R}^4$, dove $U := Span((-2,1,-1,1),(1,0,-1,0))$ e V è il sottospazio che ammette come rappresentazione cartesiana il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x+y+4z-t=0 \\ x+y+2z+t=0. \end{cases}$$

Calcolare una base per $U \cap V$ ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta V si vede che V è generato dai vettori $(-1,1,0,0)$ e $(-3,0,1,1)$. Ora, disponendo per riga i generatori di U e di V e riducendo a scala la matrice ottenuta in tal modo, si trova che i vettori $(1,-1,0,0)$, $(0,1,-1,0)$, $(0,0,2,-1)$ formano una base per $U+V$. Per cui una rappresentazione cartesiana di $U+V$ si ottiene imponendo che il determinante della matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & 2 & z \\ 0 & 0 & -1 & t \end{bmatrix}$$

sia nullo. Ne risulta che una rappresentazione cartesiana per $U+V$ è data dall'equazione $x+y+z+2t=0$.

Adesso andiamo a calcolare una base per $U \cap V$. Innanzitutto calcoliamo una rappresentazione cartesiana di U. Per fare ciò è sufficiente imporre che il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ -1 & 1 & z \\ 0 & -1 & t \end{bmatrix}$$

sia pari alla dimensione di U, cioè sia pari a 2. Riducendo a scala si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & x+3y+z \\ 0 & 0 & y-t \end{bmatrix}.$$

Quindi una rappresentazione cartesiana di U è

$$\begin{cases} x+3y+z=0 \\ y-t=0. \end{cases}$$

Allora $U \cap V$ è rappresentato dal sistema lineare

$$\begin{cases} x+3y+z=0 \\ y-t=0 \\ x+y+4z-t=0 \\ x+y+2z+t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si deduce che una base di $U \cap V$ è costituita dal vettore $(-4,1,1,1)$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili x, y, z:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} x-y+(k+2)z=k \\ x-y+2z=0 \\ 2x+ky+5z=k. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni. Infine dire per quali valori di k il vettore $(-5,-1,1)^T$ è una soluzione per $\mathcal{S}(k)$.

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice completa del sistema (senza imporre restrizioni al parametro k) si perviene alla matrice:

(*)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & k+2 & 1 & k \\ 0 & 0 & k & k \end{bmatrix}.$$

Quindi il determinante della matrice incompleta del sistema $\mathcal{S}(k)$ è uguale a $k(k+2)$. Se $k \notin \{-2, 0\}$ il sistema ammette un'unica soluzione, che è $(-\frac{k+5}{k+2}, \frac{k-1}{k+2}, 1)$. Quando $k = -2$ dalla matrice (*) si deduce che il rango della matrice incompleta è 2 mentre quello della matrice completa è 3. Quindi in tal caso il sistema non è compatibile. Se $k = 0$ invece ci sono ∞^1 soluzioni che sono $(-5z, -z, 2z)$, $z \in \mathbf{R}$. Quanto all'ultima domanda, se $(-5, -1, 1)^T$ fosse una soluzione allora sostituendo nel sistema $\mathcal{S}(k)$ si avrebbe $-2 = 0$. Per cui, per ogni k, il vettore $(-5, -1, 1)^T$ non è soluzione di $\mathcal{S}(k)$. ■.

Esercizio 3. *Si consideri l'operatore lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definito ponendo*

$$f(x, y, z) := (-5x - y + 5z, -9x - 3y + 11z, -5x - y + 5z).$$

Calcolare la matrice rappresentativa A di f rispetto alla base canonica, una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una base di autovettori di f. Infine determinare una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolgimento. La matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 5 \\ -9 & -3 & 11 \\ -5 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, si vede che $Ker(f)$ ha dimensione 1 ed ammette come base il vettore $(2, 5, 3)$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2 ed una base è costituita da due colonne linearmente indipendenti di A, per esempio $\{(-5, -9, -5), (-1, -3, -1)\}$. Il polinomio caratteristico di f è $det(A - tI) = -t(t+1)(t+2)$. Quindi gli autovalori di f sono -2, -1 e 0. L'autospazio V_0 è proprio il nucleo di f. Invece una base per l'autospazio V_{-2} si ottiene risolvendo il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = -2\mathbf{x}$. Si deduce che una base per V_{-2} è formata dal vettore $(1, 2, 1)$. Similmente si vede che una base per V_{-1} è formata dal vettore $(1, 1, 1)$. E allora una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per f è $\{(1, 2, 1), (1, 1, 1), (2, 5, 3)\}$. Le matrici cercate D e P sono:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Si consideri la matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *e siano U e V i sottospazi di $\mathcal{M}(2, 2)$ definiti come segue.*

$$U := \{X \in \mathcal{M}(2, 2) : A \cdot X = \mathbf{0}\} \quad e \quad V := \{Y \in \mathcal{M}(2, 2) : Y \cdot A = \mathbf{0}\}.$$

Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U \cap V$, $U + V$.

Svolgimento. Sia

$$X := \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Allora $X \in U$ se e solo se $x + z = 0$ e $y + t = 0$. Quindi $U = Span(E_{11} - E_{21}, E_{12} - E_{22})$, dove

$$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

denota la base canonica di $\mathcal{M}(2, 2)$. In particolare $\{E_{11} - E_{21}, E_{12} - E_{22}\}$ è una base per U ed U ha dimensione 2. Similmente si prova che $V = Span(E_{11} - E_{12}, E_{21} - E_{22})$, quindi $\{E_{11} - E_{12}, E_{21} - E_{22}\}$ è una base per V ed anche V ha dimensione 2. Una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ è data dal sistema lineare

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ x + y = 0 \\ z + t = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si vede che $U \cap V$ ha dimensione 1 ed una sua base è formata dal vettore

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per la formula di Grassmann sappiamo allora che la dimensione di $U+V$ è 3, ed una sua base è formata dalle matrici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni:*

$$f(1,0,1) = f(1,1,1) = (1,0,0) \quad ed \quad f(1,0,2) = (0,1,0).$$

Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, una base per $Ker(f)$ ed una base per $Im(f)$.

Svolgimento. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $\{(1,0,1),(1,1,1),(1,0,2)\}$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In particolare una base per $Ker(f)$ è data dal vettore $(0,1,0)$, mentre una base per $Im(f)$ è formata dai vettori $(2,-1,0)$ e $(-1,1,0)$. $\blacksquare$

Geometria ed Algebra 1, V appello, 8 settembre 2010.

Esercizio 1. *I sottospazi U e V di $\mathbf{R}^4$ ammettono, rispettivamente, le seguenti rappresentazioni cartesiane:*

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3t = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \\ 4x - y + 5z - 7t = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x + 2y + 5z - 6t = 0 \\ 5x + y + 4z - 5t = 0 \\ 3x + 3z - 4t = 0. \end{cases}$$

Trovare una base per U e provare che $U = V$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema che rappresenta U si vede che $\{(-1,1,1,0),(4,-5,0,3)\}$ è una base per U, in particolare U ha dimensione 2. Questi due vettori soddisfano le equazioni di V quindi $U \subseteq V$. D'altra parte la matrice del sistema che rappresenta V ha rango 2, quindi anche V ha dimensione 2. Questo prova che $U = V$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili x, y, z, t:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 2x + (k+1)y + (k+7)z + (k+5)t = k+3 \\ x + (k+2)y + (k+5)z + (k+4)t = k+2 \\ 3x + ky + (k+9)z + (k+6)t = k+4. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni. Infine dire per quali valori di k il vettore $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)^T$ è una soluzione per $\mathcal{S}(k)$.

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice completa del sistema si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & k+3 & k+3 & k+3 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k = -3$ il sistema non è compatibile. Se $k \neq -3$ ci sono ∞^2 soluzioni, che si possono descrivere al seguente modo:

$$\left(\frac{2k+4}{k+3} - 3z - 2t, \frac{k+1}{k+3} - z - t, z, t\right), \quad z, t \in \mathbf{R}.$$

Se il vettore assegnato è soluzione per $\mathcal{S}(k)$ allora nella rappresentazione precedente deve essere $z = t = 0$, e $k = 0$. ■

Esercizio 3. *Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito ponendo*

$$f(x, y, z) := (6x - 2y - 4z, 8x - 4y - 4z, 8x - 2y - 6z).$$

Calcolare la matrice rappresentativa A di f rispetto alla base canonica, una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una base di autovettori di f. Infine determinare una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.

Svolgimento. La matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -4 \\ 8 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, si vede che $Ker(f)$ ha dimensione 1 ed ammette come base il vettore $(1,1,1)$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2 ed una base è costituita da due colonne linearmente indipendenti di A, per esempio $\{(6,8,8),(2,4,2)\}$. Il polinomio caratteristico di f è $det(A - tI) = -t(t+2)^2$. Quindi gli autovalori di f sono -2 e 0. L'autospazio V_0 è proprio il nucleo di f. Invece una base per l'autospazio V_{-2} si ottiene risolvendo il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = -2\mathbf{x}$. Si deduce che una base per V_{-2} è formata, per esempio, dai vettori $(1,4,0)$ e $(1,0,2)$. E allora una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per f è $\{(1,4,0),(1,0,2),(1,1,1)\}$. Le matrici cercate D e P sono:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 4. *Dire per quali valori del parametro k la matrice*

$$A(k) := \begin{bmatrix} 3k+7 & -k-3 \\ 9k+27 & -3k-11 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di $A(k)$ è $p(t) = (t+2)^2$ (si osservi che è indipendente dal parametro k). Quindi $A(k)$ è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica di -2 è 2. Ora abbiamo:

$$m_g(-2) = 2 - rk \begin{bmatrix} 3k+9 & -k-3 \\ 9k+27 & -3k-9 \end{bmatrix} = 2 - rk \left((k+3) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = -3 \\ 1 & \text{se } k \neq -3. \end{cases}$$

In conclusione $A(k)$ è diagonalizzabile se e solo se $k = -3$. ■

Esercizio 5. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ha il nucleo rappresentato dall'equazione $x - y + 5z = 0$ e soddisfa la condizione $f(1,0,0) = (1,2,3)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, una base per $Ker(f)$ ed una base per $Im(f)$. Infine dire se esiste un operatore $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $Ker(f) = Ker(g)$ e tale che $g(1,1,0) = (1,1,0)$.*

Svolgimento. Dall'equazione che definisce il nucleo di f deduciamo che i vettori $(1,1,0)$ e $(0,5,1)$ ne formano una base. Quindi $(1,2,3)$ forma una base per $Im(f)$. Ora osserviamo che se uniamo i vettori $(1,1,0)$ e $(0,5,1)$ con $(1,0,0)$ si ottiene una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$, e per i dati che disponiamo possiamo dire che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

dove $\mathcal{E}$ denota la base canonica. Quindi:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} == \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 10 \\ 3 & -3 & 15 \end{bmatrix}.$$

Infine è chiaro che l'operatore g non esiste. Infatti altrimenti dovrebbe essere $g(1,1,0) = (0,0,0)$ (in quanto $Ker(g) = Ker(f)$). Ma ciò contraddice l'ipotesi. ■

Geometria (9 CFU), I appello, 4 febbraio 2011.

Esercizio 1. *Si considerino gli operatori lineari* $f : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \to A \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ *e* $g : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \to B \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$*, dove le matrici* A *e* B *sono definite ponendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -1 & 11 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Dire se e' vero oppure no che $\ker f = \ker g$.

Svolgimento. Poiche' e' possibile ridurre a scala per righe A e B alla stessa matrice

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

allora i sistemi lineari $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanno le stesse soluzioni (cioe' quelle del sistema $C \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$), e quindi e' vero che $\ker f = \ker g$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro* k *in* $\mathbf{R}$*, si consideri il seguente sistema lineare* $\mathcal{S}_k$ *nelle variabili* x, y, z*:*

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + (k+1)y = 1 \\ x + y + (k^2 - k - 1)z = k. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k *il sistema lineare assegnato è compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.*

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2 - k & k \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{0, 1\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer ed ammette un'unica soluzione che e'

$$\frac{1}{k(k-1)}(2, k-2, k)^T.$$

Se $k = 0$ $\mathcal{S}_0$ ammette ∞^1 soluzioni $(1 - y, y, 1)^T$, $y \in \mathbf{R}$. Se $k = 1$ il sistema $\mathcal{S}_1$ e' incompatibile. ■

Esercizio 3. *L'operatore* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *soddisfa le seguenti condizioni*

$$f(1,2,0,0) = (0,1,-1,0),\ f(1,3,0,0) = (0,2,-2,0),$$

$$f(0,0,1,2) = (0,1,3,2),\ f(0,0,1,3) = (0,1,5,3).$$

Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$*, ed una base per il nucleo e l'immagine. Infine determinare una rappresentazione cartesiana del sottospazio* $U := Ker(f) + Im(f)$*.*

Svolgimento. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^4$ formata dai vettori $(1,2,0,0)$, $(1,3,0,0)$, $(0,0,1,2)$, $(0,0,1,3)$. Allora abbiamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^4}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deduciamo che una base del nucleo e' data dai vettori $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, mentre una base dell'immagine e' data dai vettori $(0,1,-1,0)$, $(0,0,2,1)$. Riunendo tali basi si ottiene un sistema di generatori per $Ker(f) + Im(f)$, nel quale $(0,1,-1,0)$ e' sovrabbondante. Quindi i vettori $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,2,1)$ formano una base per $Ker(f) + Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Ker(f) + Im(f)$ si ottiene imponendo che

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' una rappresentazione cartesiana per $Ker(f) + Im(f)$ e' data dall'equazione $x - y - z + 2t = 0$. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e' nilpotente con indice di nilpotenza 3. E si ha

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base a stringhe per A e' data dai vettori $(1,1,1)$, $(1,2,0)$, $(0,0,1)$. La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ e' allora:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3t - t^2 \\ -5t - t^2 \\ -t - t^2 \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -3 - 2t$$

che e' uguale a

$$-3y_1 + 2y_2 + y_3 = -3(1 - 3t - t^2) + 2(-5t - t^2) + (-t - t^2) = -3 - 2t.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 + x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,2,0)$, $(0,-1,1)$. Calcolare una base ortonormale di U ed una base ortonormale di $U^\perp$. Poi calcolare le matrici rappresentative $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_U)$ e $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_{U^\perp})$ degli operatori di proiezione ortogonale p_U e $p_{U^\perp}$ rispetto alla base canonica.*

Svolgimento. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori $(1,2,0)$, $(0,-1,1)$ deduciamo che i versori $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,5)$ formano una base ortonormale di U. Osserviamo poi che $2x - y - z = 0$ e' una rappresentazione cartesiana di U. Quindi una base ortonormale di $U^\perp$ e' formata dal versore $\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$. In particolare

$$p_{U^\perp}(x,y,z) = \frac{2x - y - z}{6}(2,-1,-1).$$

Quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_{U^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$p_U(x,y,z) = (x,y,z) - p_{U^\perp}(x,y,z),$$

si ha anche

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_U) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 6. *Si consideri la forma quadratica $q(\mathbf{u})$ su $\mathbf{R}^3$ definita ponendo*

$$q(\mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 + 8x_2x_3 - 2x_3^2.$$

Calcolare la matrice di Gram G di q rispetto alla base canonica, ed una matrice ortogonale P tale che $P^{-1}GP$ sia diagonale. Poi calcolare $M := \max\{q(\mathbf{u}) : \|\mathbf{u}\| \leq 1\}$, e determinare i vettori $\mathbf{u}$ per cui $\|\mathbf{u}\| \leq 1$ e $q(\mathbf{u}) = M$.

Svolgimento. La matrice G e'
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$
Il suo polinomio caratteristico e' $p_G(t) = -t(t-6)(t+6)$. Gli autospazi corrispondenti sono $V_6 = Span((1,1,1))$, $V_0 = Span((1,-1,0))$, $V_{-6} = Span((1,1,-2))$. Quindi la matrice ortogonale P cercata e':
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$
il numero M e' $M = 6$, ed i vettori $\mathbf{u}$ per cui $\|\mathbf{u}\| \leq 1$ e $q(\mathbf{u}) = 6$ sono i versori $\mathbf{u} = \pm(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. ■

Geometria (9 CFU), II appello, 25 febbraio 2011.

Esercizio 1. *Nello spazio dei polinomi* $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$ *di grado al piu' 2 si considerino il sottoinsieme A formato dai polinomi che si annullano in* $t = -1$*, ed il sottoinsieme B formato dai polinomi che si annullano in* $t = 3$*. Provare che A e B sono sottospazi di* $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$*, e calcolare una base per A, una per B, ed una per* $A \cap B$*. Dire se e' vero oppure no che* $\mathbf{R}[t]_{\leq 2} = A \oplus B$.

Svolgimento. Sia $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ il generico polinomio di $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$. Allora $p(t)$ si annulla in $t = -1$ se e solo se $a_0 - a_1 + a_2 = 0$. Quindi $p(t)$ sta in A se e solo se $p(t)$ e' del tipo $p(t) = (a_1 - a_2) + a_1 t + a_2 t^2$, con $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$. Cioe' $p(t) \in A$ se e solo se $p(t)$ e' della forma $p(t) = a_1(1 + t) + a_2(-1 + t^2)$. Questo equivale a dire che $A = Span(1 + t, -1 + t^2)$. Cio' prova che A e' un sottospazio di $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$, e che $\{1 + t, -1 + t^2\}$ ne e' una base. Similmente si prova che $B = Span(-3 + t, -9 + t^2)$ e che $\{1 + t, -1 + t^2\}$ e' una base per B. Poi osserviamo che il polinomio $(1 + t)(t - 3)$ sta in $A \cap B$. Cio' e' sufficiente per dire che $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$ non e' la somma diretta di A e di B. Infine osserviamo che $1 + t$ sta in A ma non in B e quindi $A \cap B \neq A$. Poiche' A ha dimensione 2 ne deduciamo che $A \cap B$ ha dimensione 1 ed una sua base e' data da $\{-3 - 2t + t^2\}$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in* $\mathbf{R}$ *si consideri il seguente sistema lineare* $\mathcal{S}_k$ *nelle variabili* x, y:

$$\begin{cases} x + (2k - 4)y = 2k + 1 \\ x + (k - 3)y = k + 2 \\ x - 2y = k^2 - 3k + 5. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2k-4 & 2k+1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & (k-1)(k-2) \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{1, 2\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ non e' compatibile. Se invece $k = 1$ il sistema $\mathcal{S}_1$ ammette ∞^1 soluzioni date dai vettori $(2y + 3, y)^T$, $y \in \mathbf{R}$. Infine se $k = 2$ il sistema $\mathcal{S}_2$ ammette un'unica soluzione data dal vettore $(5, 1)^T$. ■

Esercizio 3. *L'operatore lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *soddisfa le seguenti condizioni*

$$f(1, -1, -2) = (6, -6, -12), \quad f(1, 1, 0) = f(2, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di f rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$*. Poi determinare una base per il nucleo ed una per l'immagine, ed una rappresentazione cartesiana per* $Im(f)$*. Inoltre dire se f e' diagonalizzabile, e se esiste un vettore* $\mathbf{u}$ *non nullo tale che* $f(\mathbf{u}) = -6\mathbf{u}$.

Svolgimento. I dati stessi, insieme al Teorema della dimesione, ci dicono che i vettori $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$ formano una base del nucleo, mentre una base dell'immagine e' data dal vettore $(1, -1, -2)$.

Denotiamo poi con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, -1, -2)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$. Allora abbiamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^4}) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Imponendo che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \\ -2 & z \end{bmatrix}$$

abbia rango 1 si ottiene la rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ che e'

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

L'operatore e' certamente diagonalizzabile perche'

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si deduce anche che lo spettro di f e' $Spec(f) = \{6, 0\}$ e quindi non esiste alcun vettore $\mathbf{u}$ non nullo tale che $f(\mathbf{u}) = -6\mathbf{u}$. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_1 - 2x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^2(t-2)$. L'autovalore nullo ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una stringa di lunghezza 1 per l'autovalore 2 e' data dall'autovettore $(1, 1, 1)$. Occorre trovare una stringa di lunghezza 2 per l'autovalore 0. Per fare cio' innanzitutto calcoliamo una base per l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_0$. Sappiamo che $\widetilde{V}_0$ e' lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $A^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, cioe' del sistema

$$2x - y = 0.$$

Allora una base per $\widetilde{V}_0$ e' formata dai vettori $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$. Ora osserviamo che tale base e' anche una stringa. Infatti si ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2t + 2e^{2t} \\ -2 - 4t + 2e^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -2 + 4e^{2t}$$

che e' uguale a

$$2y_1 - y_2 + y_3 = 2(-1 - 2t + 2e^{2t}) - (-2 - 4t + 2e^{2t}) + (-2 + 2e^{2t}) = -2 + 4e^{2t}.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1, -2, 0, 0)$, $(2, -2, -2, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. Calcolare una base ortonormale di U, una rappresentazione cartesiana di U, ed una base ortonormale di $U^\perp$. Poi calcolare le matrici rappresentative $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p_U)$ e $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p_{U^\perp})$ degli operatori di proiezione ortogonale p_U e $p_{U^\perp}$ rispetto alla base canonica.*

Svolgimento. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori $(1,-2,0,0)$, $(2,-2,-2,0)$, $(0,0,0,1)$, deduciamo che i versori $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0,0)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(2,1,-5,0)$, $(0,0,0,1)$ formano una base ortonormale di U. Osserviamo poi che $2x+y+z=0$ e' una rappresentazione cartesiana di U. Quindi una base ortonormale di $U^\perp$ e' formata dal versore $\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1,0)$. In particolare

$$p_{U^\perp}(x,y,z,t) = \frac{2x+y+z}{6}(2,1,1,0).$$

Quindi

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p_{U^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$p_U(x,y,z) = (x,y,z) - p_{U^\perp}(x,y,z),$$

si ha anche

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p_U) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Si considerino le seguenti matrici*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dire se e' vero oppure no che 1) A e B sono congruenti, 2) A e B sono simili, 3) esiste una matrice ortogonale P tale che $B = P^TAP$. Rispondere alle stessa domanda per le coppie di matrici A, C e B, C.

Svolgimento. I polinomi caratteristici delle rispettive matrici sono:

$$p_A(t) = -t(t-4)(t+2), \quad p_B(t) = -t(t-1)(t+2), \quad p_C(t) = -t(t-4)(t+2).$$

Per il Teorema degli assi principali sappiamo che esistono matrici ortogonali Q, R, S tali che

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ = R^{-1}CR, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S^{-1}BS.$$

Si deduce che le tre matrici hanno tutte lo stesso rango e lo stesso indice, quindi sono tutte congruenti tra loro.

Notiamo poi che poiche' $p_A(t) \neq p_B(t)$ allora A e B non sono simili. A maggior ragione non puo' esistere una matrice ortogonale P tale che $B = P^TAP$ (cio' implicherebbe $B = P^{-1}AP$, cioe' che A e B sono simili). Per lo stesso motivo le matrici B e C non sono simili e non puo' esistere una matrice ortogonale P tale che $C = P^TBP$.

Infine osserviamo che e' vero che esiste una matrice ortogonale P tale che $C = P^TAP$: si puo' considerare la matrice $P := QR^{-1}$. $\blacksquare$

Geometria (9 CFU), III appello, 27 giugno 2011.

Esercizio 1. *L'operatore* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *soddisfa le seguenti condizioni:*

$$f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_3), \quad f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 4(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$*, una base per il nucleo* $ker(f)$ *di* f*, ed una base per l'immagine* $im(f)$ *di* f*.*

Svolgimento. Poiche' $f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_3)$ allora la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ ha tutte le colonne uguali. Inoltre sappiamo che

$$4(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = 2f(\mathbf{e}_1).$$

Dunque $f(\mathbf{e}_1) = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, e quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

In particolare il vettore $(1, 1, 1)$ forma una base per $\mathrm{im}(f)$, ed $\mathrm{im}(f)$ ha dimensione 1. Ne consegue allora che il nucleo ha dimensione 2, e poiche' i vettori $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ appartengono al nucleo, allora essi formano una base per $\ker(f)$. $\blacksquare$

Esercizio 2. *Sia* U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *rappresentato dall'equazione* $x - 2y + 3z + t = 0$*, ed, al variare del parametro* $h \in \mathbf{R}$*, sia* W_h *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato dai vettori* $(-1, 1, h, 3 - 3h)$*,* $(-1, 0, 0, 1)$*,* $(-1, 1, 0, 3)$*. Determinare i valori di* h *per i quali si ha* $W_h = U$*,* $W_h \subseteq U$*,* $W_h \neq U$*.*

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che i tre generatori di W_h soddisfano l'equazione di U, quindi $W_h \subseteq U$ per ogni h. Poiche' $\dim(U) = 3$ allora $W_h = U$ se e solo se i tre generatori di W_h sono liberi. Per analizzare questa proprieta' disponiamo in riga i generatori e riduciamo a scala. Si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & h & -3h \end{bmatrix}.$$

Quindi per ogni $h \neq 0$ si ha $W_h = U$, mentre $W_0 \neq U$. $\blacksquare$

Esercizio 3. *Al variare del parametro* k *in* $\mathbf{R}$ *si consideri il seguente sistema lineare* $\mathcal{S}_k$ *nelle variabili* x, y, z*:*

$$\begin{cases} 2x + 3y + (k-2)z = k + 4 \\ x + 2y + (k-1)z = k + 2 \\ 2x + 3y + (2k-4)z = 2k + 3. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k *il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.*

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & k-1 & k+2 \\ 0 & 1 & k & k \\ 0 & 0 & k-2 & k-1 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \neq 2$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione data da

$$\frac{1}{k-2}(4k - 5, -k, k - 1).$$

Se invece $k = 2$ il sistema $\mathcal{S}_2$ non ammette soluzioni. $\blacksquare$

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{e}_1,$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^3$, e l'autovalore nullo ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare una stringa di lunghezza 3 osserviamo che

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una stringa di lunghezza 3 e':

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} - 2t + 1 \\ -\frac{t^2}{2} - 2t \\ t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -t - 2$$

che e' uguale a

$$-2y_1 + 2y_2 - y_3 = -2(-\frac{t^2}{2} - 2t + 1) + 2(-\frac{t^2}{2} - 2t) - (t) = -t - 2.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Completare la seguente matrice a matrice ortogonale:*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & * & * \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Se denotiamo con $(x_1, x_2, x_3)^T$ la prima colonna di P allora deve essere $\frac{2}{3} + x_3^2 = 1$, perche' tale colonna deve avere lunghezza 1. Quindi possiamo porre $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Le altre due colonne, dovendo essere ortogonali alla prima, devono soddisfare l'equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Lo spazio delle soluzioni di tale equazione e' generato dai vettori $(1,1,0)$, $(0,1,1)$. Ortonormalizzando tali vettori con l'algoritmo di Gram-Schmidt si ottiene il completamento cercato::

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 6. *Si consideri il seguente operatore lineare*

$$f : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \to (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Dimostrare che esiste un sottospazio U di $\mathbf{R}^3$ tale che $f = p_U$, cioe' tale che f sia l'operatore di proiezione ortogonale su U.

Svolgimento. Sappiamo che se esiste un tale spazio U allora esso coincide con l'autospazio V_1 di f. La rappresentazione cartesiana di V_1 e'

$$x + y = 0.$$

Una base ortogonale di V_1 e' data dai vettori $(1,-1,0)$, $(0,0,1)$. Per concludere l'esercizio andiamo a verificare che

$$f(x, y, z) = p_{(1,-1,0)}(x, y, z) + p_{(0,0,1)}(x, y, z)$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Ed infatti:

$$p_{(1,-1,0)}(x, y, z) + p_{(0,0,1)}(x, y, z) = \frac{x-y}{2}(1,-1,0) + z(0,0,1) = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, z). \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), IV appello, 18 luglio 2011.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$(1,1,1,1),\ (-3h,h^2,-3h,-2h),\ (3h,3h,-h^2,2h),\ (0,h^2+3h,-h^2-3h,0).$$

Per ciascun h determinare un sottospazio V_h di $\mathbf{R}^4$ per cui $\mathbf{R}^4 = U_h \oplus V_h$.

Svolgimento. Disponendo in riga i generatori di U_h e riducendo a scala si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h^2+3h & 0 & h \\ 0 & 0 & -h^2-3h & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $h \notin \{-3,0\}$ allora si puo' scegliere $V_h := Span(\mathbf{e}_4)$. Se $h=0$ si puo' scegliere $V_0 := Span(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4)$. Se $h=-3$ si puo' scegliere $V_{-3} := Span(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$. $\blacksquare$

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$ si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\begin{cases} x+3y+(k+2)z = k+4 \\ 2x+5y+(k+2)z = 2k+7 \\ x+y=1 \\ x+2y=2. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.

Svolgimento. Riducendo a scala la matrice completa con opportune operazioni elementari, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}.$$

Si deduce che se $k \neq -1$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ e' incompatibile, mentre per $k=-1$ il sistema e' compatibile ed ammette un'unica soluzione data dal vettore numerico $(0,1,0)$. $\blacksquare$

Esercizio 3. *L'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ possiede il vettore $(1,-1,2)$ come autovettore relativo all'autovalore $\lambda=-1$, ed ha il nucleo generato dai vettori $(1,0,3)$, $(-2,3,0)$, $(-1,3,3)$, $(-2,6,6)$. Calcolare l'espressione esplicita di f rispetto alle coordinate canoniche, una base per $\ker(f)$ ed una base per $\mathrm{im}(f)$.*

Svolgimento. Consideriamo la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,3)$, $(-2,3,0)$, $(1,-1,2)$ (i primi due vettori formano una base per il nucleo di f). Allora sappiamo che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(come al solito $\mathcal{E}$ denota la base canonica). Quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Percio' l'espressione esplicita di f rispetto alle coordinate canoniche e':

$$f(x,y,z) = (3x+2y-z, -3x-2y+z, 6x+4y-2z).$$

Abbiamo gia' detto che una base per il nucleo di f e' formata dai vettori $(1,0,3)$, $(-2,3,0)$, ed e' ovvio a questo punto che una base per $\mathrm{im}(f)$ e' data dal vettore $(1,-1,2)$. $\blacksquare$

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 9x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{e}_1,$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ -3 & -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t+2)^3$, e l'autovalore -2 ha molteplicita' geometrica 2. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

allora una 0-stringa per $A + 2I$ di lunghezza 2 e' data da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Inoltre $(1, 0, 1)$ sta nel nucleo di $A + 2I$ ed e' indipendente dai due vettori precedenti. Quindi una base a stringhe per $A + 2I$, che e' anche una base a stringhe per A, e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -t \\ -3t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -2e^{-2t}$$

che e' uguale a

$$-2y_1 = -2e^{-2t}.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -2x_1$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,0,0,1)$, $(-1,0,1,0)$, $(-2,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$, e sia $p_U : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'operatore di proiezione ortogonale su U. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_U)$ di p_U rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.*

Svolgimento. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base $(1,0,0,1)$, $(-1,0,1,0)$, $(-2,1,0,0)$ di U, si ottiene la seguente base ortogonale di U:

$$(1,0,0,1), \quad (-1,0,2,1), \quad (-2,3,-2,2).$$

Quindi se (x,y,z,t) e' il generico vettore di $\mathbf{R}^4$ abbiamo

$$p_U(x,y,z,t) = p_{(1,0,0,1)}(x,y,z,t) + p_{(-1,0,2,1)}(x,y,z,t) + p_{(-2,3,-2,2)}(x,y,z,t)$$

$$= \frac{x+t}{2}(1,0,0,1) + \frac{-x+2z+t}{6}(-1,0,2,1) + \frac{-2x+3y-2z+2t}{21}(-2,3,-2,2)$$

$$= \frac{1}{7}(6x-2y-z+t, -2x+3y-2z+2t, -x-2y+6z+t, x+2y+z+6t).$$

In conclusione

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_U) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Si consideri la seguente matrice*

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolare una matrice ortogonale Q tale che $Q^T A^T A Q$ sia una matrice diagonale. Dedurne una decomposizione ai valori singolari per A, e la sua norma spettrale.

Svolgimento. Innanzitutto calcoliamo

$$A^T A = \begin{bmatrix} 37 & -12 \\ -12 & 37 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $A^T A$ e' $p_{A^T A}(t) = (t-49)(t-25)$. Quindi i valori singolari di A sono $\sigma_1 = 7$ e $\sigma_2 = 5$. Possiamo gia' dire che la norma spettrale di A e'

$$\|A\|_2 = 7.$$

Poi osserviamo che l'autospazio V_{49} di $A^T A$ e' generato da $(-1,1)$, mentre V_{25} e' generato da $(1,1)$. Quindi la matrice cercata Q e'

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ne consegue la decomposizione ai valori singolari:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), V appello, 7 settembre 2011.

Esercizio 1. *Si consideri il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(15,4,2,3)$, $(10,2,1,2)$, $(5,0,0,1)$, $(5,2,1,1)$, ed il sottospazio V rappresentato dal sistema lineare*

$$\begin{cases} x-y+2z+2t=0 \\ x-y+2z+t=0 \\ 2x-2y+4z+3t=0. \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.

Svolgimento. I vettori $(5,0,0,1)$ e $(5,2,1,1)$ formano una base per U, mentre una base per V, ottenuta risolvendo il sistema lineare che rappresenta V, e' formata dai vettori $(1,1,0,0)$, $(-2,0,1,0)$. Quindi i vettori $(5,0,0,1)$, $(5,2,1,1)$, $(1,1,0,0)$ e $(-2,0,1,0)$ formano un sistema di generatori per $U+V$. Il vettore $(5,2,1,1)$ risulta sovrabbondante, ed i vettori $(5,0,0,1)$, $(1,1,0,0)$ e $(-2,0,1,0)$ formano una base per $U+V$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $U+V$ si ottiene imponendo che il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{bmatrix}$$

sia nullo. Ne consegue che la rappresentazione cartesiana cercata e'

$$x-y+2z-5t=0. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia $f_h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle seguenti condizioni:*

$$f_h(\mathbf{e}_1)=(1,2,-3), \quad f_h(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3)=(0,2,-h^2-2h), \quad f_h(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)=(0,-h-2,0).$$

Determinare i valori di h per cui $\ker(f_h) \subseteq im(f_h)$, ed i valori di h per cui il vettore $(1,2,0)$ appartiene ad $im(f_h)$. In quest'ultimo caso determinare i vettori (x,y,z) tali che $f_h(x,y,z)=(1,2,0)$.

Svolgimento. La matrice rappresentativa dell'operatore f_h rispetto all base canonica e':

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_h) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & h+4 & 0 \\ -3 & -3 & h^2+2h-3 \end{bmatrix}.$$

Quindi un vettore (x,y,z) e' tale che $f_h(x,y,z)=(1,2,0)$ se e solo se

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+(h+4)y=2 \\ -3x-3y+(h^2+2h-3)z=0. \end{cases}$$

La matrice completa di tale sistema lineare si ottiene affiancando alla matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_h)$ la colonna $(1,2,0)^T$. Riducendo a scala per righe, si perviene alla matrice

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h+2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2+2h & 3 \end{bmatrix}.$$

Si deduce che $(1,2,0)$ appartiene ad $\mathrm{im}(f_h)$ se e solo se $h \neq -2, 0$. In tal caso c'e' un solo vettore per cui $f_h(x,y,z) = (1,2,0)$ ed e' il vettore

$$\frac{1}{h(h+2)^2}\left(h^3+4h^2+h-12, 6, 3h+6\right).$$

Inoltre, sempre dalla matrice $(*)$, deduciamo che se $h \neq -2, 0$ allora $\mathrm{im}(f_h)$ ha dimensione 3, cioe' $\mathrm{im}(f_h)=\mathbf{R}^3$, ed il nucleo ha dimensione 0. Quindi se $h \neq -2, 0$ allora $\ker(f_h) \subseteq \mathrm{im}(f_h)$.

Se $h=-2$ il nucleo e' generato dal vettore $(1,-1,0)$ che non appartiene ad $\mathrm{im}(f_{-2})$ in quanto $\mathrm{im}(f_{-2}) = Span((1,2,-3),(1,0,-3))$. Quindi $\ker(f_{-2})$ non e' contenuto in $\mathrm{im}(f_{-2})$. Similmente si prova che $\ker(f_0)$ non e' contenuto in $\mathrm{im}(f_0)$. $\blacksquare$

Esercizio 3. *Dire se esiste oppure no una matrice non nulla A soddisfacente le due equazioni $A^4 = 9A^2$ e $A^3 = 7A^2 - 10A$. Rispondere alla stessa domanda quando le condizioni sono $A^4 = 9A^2$ e $A^4 = 7A^3 - 10A^2$.*

Svolgimento. Per ipotesi la matrice A annulla simultaneamente i polinomi $p(t) = t^2(t-3)(t+3)$ e $q(t) = t(t-2)(t-5)$. Poiche' il polinomio minimo $m_A(t)$ di A e' un fattote di entrambi tali polinomi, deduciamo che $m_A(t) = t$. Dunque A, annullando il polinomio $m_A(t) = t$, e' necessariamente la matrice nulla.

Nel caso che le condizioni siano $A^4 = 9A^2$ e $A^4 = 7A^3 - 10A^2$ allora $m_A(t)$ e' un fattore del polinomio t^2. Quindi in questo caso ci sono matrici non nulle che soddisfano le equazioni $A^4 = 9A^2$ e $A^4 = 7A^3 - 10A^2$. Per esempio la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-2)^3$, e l'autovalore 2 ha molteplicita' geometrica 2. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

allora una 0-stringa per $A - 2I$ di lunghezza 2 e' data da

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-2I} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-2I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Inoltre $(0,0,1)$ sta nel nucleo di $A - 2I$ ed e' indipendente dai due vettori precedenti. Quindi una base a stringhe per $A - 2I$, che e' anche una base a stringhe per A, e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,1,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = e^{2t}(2t+3)$$

che e' uguale a

$$2y_1 + y_2 = e^{2t}(2t+3).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Sia $(\mathbf{R}^3, \phi)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica*

$$q(\mathbf{u}) := x^2 + 2xy + 2y^2 - 2yz + 3z^2.$$

Provare che $(\mathbf{R}^3, \phi)$ e' uno spazio euclideo, e calcolarne una base ortonormale. Infine, nello spazio euclideo $(\mathbf{R}^3, \phi)$, calcolare la decomposizione

$$\mathbf{u} = p_V(\mathbf{u}) + p_{V^\perp}(\mathbf{u})$$

dove $\mathbf{u} = (x,y,z)$ e' il generico vettore di $\mathbf{R}^3$, e V e' il sottospazio rappresentato dall'equazione cartesiana $2x+y+5z = 0$.

Svolgimento. La matrice di Gram $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ di ϕ rispetto alla base canonica e'

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Affiancando a tale matrice la matrice unitaria I, ed applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi lo spazio $(\mathbf{R}^3, \phi)$ ha indice 3 e percio' e' uno spazio euclideo. Inoltre il calcolo precedente ci dice che i vettori

$$(1,0,0),\ (-1,1,0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,1)$$

formano una base ortonormale per $(\mathbf{R}^3, \phi)$.

Adesso passiamo allo studio del sottospazio V. Cominciamo con l'osservare che V e' generato dai vettori $(1,-2,0), (0,-5,1)$. Quindi il complemento ortogonale $V^\perp$ di V in $(\mathbf{R}^3, \phi)$ ha dimensione 1 ed e' generato da un qualsiasi vettore (x,y,z) non nullo tale che

$$\begin{cases} \phi((x,y,z),(1,-2,0)) = 0 \\ \phi((x,y,z),(0,-5,1)) = 0. \end{cases}$$

Cioe' tale che

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 11y - 8z = 0. \end{cases}$$

Percio'

$$V^\perp = Span((1,1,2)).$$

Quindi la proiezione ortogonale del generico vettore (x,y,z) su $V^\perp$ e':

$$p_{V^\perp}(x,y,z) = \frac{\phi((x,y,z),(1,1,2))}{\phi((1,1,2),(1,1,2))}(1,1,2) = \frac{2x+y+5z}{13}(1,1,2).$$

Poiche' $p_V(x,y,z) = (x,y,z) - p_{V^\perp}(x,y,z)$, deduciamo la decomposizione cercata:

$$(x,y,z) = p_V(x,y,z) + p_{V^\perp}(x,y,z)$$

$$= \frac{1}{13}(11x - y - 5z, -2x + 12y - 5z, -4x - 2y + 3z) + \frac{1}{13}(2x + y + 5z, 2x + y + 5z, 4x + 2y + 10z). \blacksquare$$

Esercizio 6. *L'operatore* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *e' autoaggiunto, ed ha l'autospazio* V_{-3} *relativo all'autovalore* $\lambda = -3$ *rappresentato dall'equazione* $x + y = 0$. *Sapendo che* $V_{-3} = im(f)$ *calcolare la matrice rappresentativa* $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ *di* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$*, e l'espressione esplicita.*

Svolgimento. Una base per V_{-3} e' data dai vettori $(1, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Poiche' $V_{-3} = \mathrm{im}(f)$, allora $\mathrm{im}(f)$ ha dimensione 2, e quindi per il Teorema della dimensione possiamo dire che il nucleo di f ha dimensione 1. In particolare 0 e' un autovalore per f, e non ci possono essere altri autovalori, cioe' lo spettro di f e' $\{0, -3\}$. Poiche' f e' autoaggiunto, per il Teorema Spettrale sappiamo che $\mathbf{R}^3 = V_0 \perp V_{-3}$, quindi

$$\ker(f) = V_0 = V_{-3}^{\perp} = Span((1, 1, 0)).$$

Allora la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ e'

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

In particolare l'espressione esplicita di f e'

$$f(x, y, z) = (-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y, \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y, -3z). \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), VI appello, 21 settembre 2011.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia $U_h \subseteq \mathbf{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori*

$$(1-2h, 2, 0, -1), (-h^2, 0, 1, 0), (1-h, 1, 0, -1), (2-3h, 3, 0, -2).$$

Dire per quali valori di h esiste un sottospazio $V \subseteq \mathbf{R}^4$ di dimensione 2 tale che

$$U_h \cap V = Span((2, 5, 1, 4)).$$

Rispondere alla stessa domanda imponendo la condizione $\dim V = 3$.

Svolgimento. Affinche' esista V e' necessario che il vettore $(2, 5, 1, 4)$ appartenga ad U_h. Quindi innanzitutto andiamo a vedere per quali valori di h si ha $(2, 5, 1, 4) \in U_h$. Per fare questo osserviamo che una rappresentazione cartesiana di U_h e' fornita dall'equazione

$$U_h : x + hy + h^2 z + t = 0.$$

Quindi il vettore $(2, 5, 1, 4)$ appartiene ad U_h se e solo se $h^2 + 5h + 6 = 0$, cioe' se e solo se $h \in \{-3, -2\}$. Adesso consideriamo un qualsiasi vettore non appartenente ad U_h, per esempio $(1, 0, 0, 0)$. Allora, quando $h \in \{-3, -2\}$, deve essere

$$U_h \cap Span((2, 5, 1, 4), (1, 0, 0, 0)) = Span((2, 5, 1, 4)).$$

Cio' prova che esiste un sottospazio $V \subseteq \mathbf{R}^4$ di dimensione 2 tale che $U_h \cap V = Span((2, 5, 1, 4))$ se e solo se $h \in \{-3, -2\}$: in tal caso sara' sufficiente prendere

$$V = Span((2, 5, 1, 4), (1, 0, 0, 0)).$$

Quanto all'ultima domanda, sia $V \subset \mathbf{R}^4$ un sottospazio di dimensione 3, e consideriamo $U_h + V$. Ora o $U_h + V \neq \mathbf{R}^4$, ed allora $U_h = V$ e quindi $U_h \cap V = V$, oppure $U_h + V = \mathbf{R}^4$, ed allora $\dim(U_h \cap V) = 2$. Quindi, nel caso di dimensione 3, non esiste alcun valore del parametro h. ■

Esercizio 2. *Per ogni vettore* $\mathbf{u}$ *di* $\mathbf{R}^3$*, siano* $\mathbf{x}$ *le coordinate di* $\mathbf{u}$ *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} := \{(0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 1)\}.$$

Siano poi $\mathbf{x}'$ *le coordinate di* $\mathbf{u}$ *rispetto ad una certa altra base* $\mathcal{B}'$*. Sapendo che*

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = 2x_2 + 5x_3 \\ x'_3 = x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

determinare i vettori della base $\mathcal{B}'$*.*

Svolgimento. Denotiamo con $\mathbf{b}'_1$, $\mathbf{b}'_2$, e $\mathbf{b}'_3$ i vettori della base $\mathcal{B}'$. Poiche' $\mathbf{b}'_1$ ha coordinate $(1, 0, 0)^T$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, allora abbiamo

$$\begin{cases} 1 = x_1 \\ 0 = 2x_2 + 5x_3 \\ 0 = x_2 + 3x_3, \end{cases}$$

da cui deduciamo che le coordinate di $\mathbf{b}'_1$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1, 0, 0)^T$. E quindi $\mathbf{b}'_1 = (0, 1, 1)$. Similmente si vede che le coordinate di $\mathbf{b}'_2$ e di $\mathbf{b}'_3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(0, 3, -1)^T$ e $(0, -5, 2)^T$. E quindi $\mathbf{b}'_2 = (-1, 2, 5)$ e $\mathbf{b}'_3 = (2, -3, -8)$. ■

Esercizio 3. *Siano A e B matrici nilpotenti $n \times n$ tali che $rk(A) = rk(B) = 11$, $rk(A^2) = rk(B^2) = 5$, e $rk(A^3) = rk(B^3) = 2$. Dire se e' vero oppure no che A e B sono simili.*

Svolgimento. La risposta e' no. Per dimostrarlo, e' sufficiente provare che la forma canonica di Jordan J di una matrice A nilpotente $n \times n$ non e' determinata dalle condizioni $rk(A) = 11$, $rk(A^2) = 5$ e $rk(A^3) = 2$. Infatti J potrebbe essere sia una matrice con indice di nilpotenza $p = 5$, che una matrice con indice di nilpotenza $p = 4$.

Nel primo caso J e' costituita da un blocco di ordine 5, due di ordine 3, tre di ordine 2, ed $n - 17$ blocchi di ordine 1, mentre nel secondo J e' costituita da due blocchi di ordine 4, uno di ordine 3, tre di ordine 2, ed $n - 17$ blocchi di ordine 1. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^3$, e l'autovalore 0 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

allora una 0-stringa per A di lunghezza 3 e' data da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ 2t + \frac{t^2}{2} \\ 3t + \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = 1 + t$$

che e' uguale a

$$y_1 - 3y_2 + 2y_3 = 1 + t.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 + 2x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Si consideri la seguente forma quadratica* $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *definita ponendo*

$$q(\mathbf{u}) := 3x^2 + 2xy + 4xz - y^2 + 2z^2.$$

Provare che q *non e' definita positiva, mentre lo e' la sua restrizione* $q_{|U} : U \to \mathbf{R}$*, dove* U *e' il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato dai vettori* $(1,1,0), (0,0,1), (1,1,1)$.

Svolgimento. La matrice di Gram $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q)$ di q rispetto alla base canonica e'

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Affiancando a tale matrice la matrice unitaria I, ed applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange (dopo aver eseguito le operazioni di scambio p_{12} e p^{12}), si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi q ha indice 2 e percio' non e' definita positiva. Se invece restringiamo q su U, la matrice di Gram di $q_{|U}$ rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1,1,0), (0,0,1)\}$ e'

$$G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q_{|U}) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

che e' definita positiva per il criterio dei minori principali. ■

Esercizio 6. *Determinare tutti i vettori* $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ *tali che*

$$x^2 - 2xy + 2xz + 5y^2 - 6yz + 2z^2 = 0.$$

Svolgimento. Possiamo riguardare il polinomio a primo membro dell'equazione assegnata come una forma quadratica $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ con matrice di Gram $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q)$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ data da

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Affiancando a tale matrice la matrice unitaria I, ed applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi se introduciamo le coordinate (x', y', z') rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1,0,0), (1,1,0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}$ avremo:

$$x^2 - 2xy + 2xz + 5y^2 - 6yz + 2z^2 = x'^2 + 4y'^2.$$

In particolare $x^2 - 2xy + 2xz + 5y^2 - 6yz + 2z^2 = 0$ se e solo se $x'^2 + 4y'^2 = 0$, cioe' se e solo se $x' = y' = 0$. Quindi tutti e soli i vettori (x, y, z) di $\mathbf{R}^3$ per cui $x^2 - 2xy + 2xz + 5y^2 - 6yz + 2z^2 = 0$ sono i vettori multipli di $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.
■

Geometria (9 CFU), I appello, 24 febbraio 2012.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri l'operatore lineare $f_h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito ponendo*

$$f_h(x, y, z) := (x + y + z, x + 2y + 2z, 3x + 4y + (h + 7)z).$$

Sia poi $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare tale che $g(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -3(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $g(\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $g(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ denotano i vettori canonici. Dire per quali valori di h si ha $imf_h = \ker g$.

Svolgimento. La matrice rappresentativa di g rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ e'

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che il nucleo di g ha dimensione 2, essendo rappresentato dall'equazione $2x + y - z = 0$. D'altra parte la matrice rappresentativa di f_h e'

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_h) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & h+7 \end{bmatrix}.$$

Poiche' tale matrice ha rango 2 soltanto se $h = -3$, allora affinche' $\mathrm{im} f_h = \ker g$ e' necessario che $h = -3$. E quando $h = -3$ le colonne di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_h)$ soddisfano l'equazione di $\ker g$, per cui si ha $\mathrm{im} f_{-3} \subseteq \ker g$, e vale l'uguaglianza per motivi di dimensione. In conclusione $\mathrm{im} f_h = \ker g$ se e solo se $h = -3$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} -2x + y + 2kz = 3 \\ 2x - 2y - kz = -3 \\ 2x - 2y + k^2 z = k - 2 \\ 2x - 3y + (k^2 + k)z = k - 2. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato con le operazioni $e_{21}(1)$, $e_{31}(1)$, $e_{41}(1)$, $e_{32}(-1)$, $e_{42}(-2)$, $e_{43}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2k & 3 \\ 0 & -1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 + k & k + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{0, -1\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione che e'

$$(0, 1, \frac{1}{k})^T.$$

Se $k = -1$ $\mathcal{S}_k$ ammette le ∞^1 soluzioni

$$\left(-\frac{3}{2}(z + 1), -z, z\right)^T, \qquad z \in \mathbf{R}.$$

Se $k = 0$ il sistema $\mathcal{S}_0$ e' incompatibile. ■

Esercizio 3. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione cartesiana $x + y - 3z = 0$, e sia V il sottospazio generato dai vettori $(1, 1, 3), (0, 1, -2), (2, 3, 4)$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore che trasforma ogni vettore $\mathbf{b} \in U \cap V$ in $\mathbf{b}$, e tale che $f(2, 3, 0) = (-2, -2, 0)$ e $f(1, 1, 0) = (-2, -2, 0)$. Calcolare la matrice rappresentativa $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, ed una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D per cui $P^{-1}AP = D$.*

Svolgimento. Poiche' $f(2, 3, 0) = 2f(1, 0, 0) + 3f(0, 1, 0)$ e $f(1, 1, 0) = f(1, 0, 0) + f(0, 1, 0)$, dalle ipotesi deduciamo che $f(1, 0, 0) = (-4, -4, 0)$ e che $f(0, 1, 0) = (2, 2, 0)$. Per calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica rimane da calcolare $f(0, 0, 1)$. Per fare cio' utilizzeremo l'ipotesi secondo cui $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ per ogni vettore di $U \cap V$.

A tale proposito osserviamo che una rappresentazione cartesiana per V e' fornita dall'equazione $5x - 2y - z = 0$. Quindi il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 0 \\ 5x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

costituisce una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$. Deduciamo che $U \cap V$ ha dimensione 1, ed e' generato da $(1, 2, 1)$. Percio' $f(1, 2, 1) = (1, 2, 1)$. Cioe'

$$f(1, 0, 0) + 2f(0, 1, 0) + f(0, 0, 1) = (1, 2, 1).$$

Ne segue che $f(0, 0, 1) = (1, 2, 1)$, e quindi la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ e'

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p_A(t) = -t(t-1)(t+2)$. Quindi gli autovalori di A sono $0, 1, -2$, e la matrice A e' diagonalizzabile, con autovettori corrispondenti dati da $(1, 2, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 0)$. In conclusione le matrici D e P sono:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = 5x_1 - 9x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 5 & -9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^3$, e l'autovalore 0 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

allora una 0-stringa per A di lunghezza 3 e' data da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2t + \frac{t^2}{2} \\ 2t + \frac{t^2}{2} \\ 5t + t^2 \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = 2 + t$$

che e' uguale a

$$2y_1 - 4y_2 + y_3 = 2 + t.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 2x_1 - 4x_2 + x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Nello spazio $\mathbf{R}^4$ si consideri il vettore $\mathbf{u} := (1, 0, 1, 3)$. Posto $U := Span(\mathbf{u})$, calcolare una base ortonormale di U, una di $U^\perp$, e la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_{U^\perp})$ della proiezione ortogonale $p_{U^\perp}$ rispetto alla base canonica. Infine dire se esiste un vettore non nullo $\mathbf{v}$ tale che $p_{U^\perp}(\mathbf{v}) = 8\mathbf{v}$.*

Svolgimento. Una base ortonormale per U e' formata dal vettore $\frac{1}{\sqrt{11}}(1, 0, 1, 3)$.

Per calcolare una base ortonormale di $U^\perp$ osserviamo innanzitutto che la sua equazione cartesiana e' $x + z + 3t = 0$. Quindi una base per $U^\perp$ e' data dai vettori $(0, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$, $(-3, 0, 0, 1)$. Applicando a tali vettori il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt otteniamo la base ortonormale cercata:

$$\left\{ (0, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{22}}(-3, 0, -3, 2) \right\}.$$

Poiche' per ogni vettore (x, y, z, t) si ha

$$(x, y, z, t) = p_U(x, y, z, t) + p_{U^\perp}(x, y, z, t)$$

allora

$$p_{U^\perp}(x, y, z, t) = (x, y, z, t) - p_U(x, y, z, t) = (x, y, z, t) - \frac{x + z + 3t}{11}(1, 0, 1, 3)$$

$$= \left(\frac{10x - z - 3t}{11}, y, \frac{-x + 10z - 3t}{11}, \frac{-3x - 3z + 2t}{11} \right).$$

Quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_{U^\perp}) = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 10 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 10 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Infine, la risposta all'ultima domanda e' no perche' gli autovalori di una proiezione ortogonale sono 0 e 1. ■

Esercizio 6. *Calcolare rango, indice, segnatura, ed una base ortonormale per lo spazio pseudoeuclideo $(\mathbf{R}^3, \phi)$ definito dalla forma quadratica:*

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz - y^2 - 4yz + 3z^2.$$

Dire se lo spazio $(\mathbf{R}^3, \phi)$ e' oppure no indefinito.

Svolgimento. La matrice di Gram di $(\mathbf{R}^3, \phi)$ rispetto alla base canonica G e'

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[G \,|\, I]$ si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi il rango di $(\mathbf{R}^3, \phi)$ e' 3, l'indice e' 2, la segnatura e' 1, ed una base ortonormale e'

$$\left\{ (1,0,0), \frac{1}{\sqrt{7}}(0,-2,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \right\}.$$

Lo spazio e' indefinito perche' $q(1,0,0) > 0$, mentre $q(-1,1,0) < 0$. ■

Geometria (9 CFU), II appello, 2 marzo 2012.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il sottospazio V_h di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-h-2, h, 2, 0)$ e $(-h-1, h, 1, 0)$. Sia poi U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ con rappresentazione cartesiana*

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x-y+z-t=0. \end{cases}$$

Al variare di h, calcolare una base, la dimensione, ed una rappresentzione cartesiana di $U+V_h$ e di $U \cap V_h$.

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che disponendo in riga i generatori di V_h ed eseguendo le operazioni elementari $e_{21}(-1)$, p_{12}, $e_{21}(h+2)$ si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & h & -h & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi V_h ha dimensione 2, ed i vettori $(1,0,-1,0)$ e $(0,1,-1,0)$ ne formano una base, se e solo se $h \neq 0$. Invece, quando $h=0$, allora V_0 ha dimensione 1 con generatore dato da $(1,0,-1,0)$.

Invece risolvendo il sistema lineare che rappresenta U deduciamo che U ha dimensione 2, ed una sua base e' formata dai vettori $(-1,0,1,0)$ e $(1,0,0,1)$.

Cio' premesso, esaminiamo prima il caso $h \neq 0$.

Osserviamo che $(1,0,-1,0) \in U$ mentre $(0,1,-1,0) \notin U$. Quindi in tal caso $U \cap V_h$ ha dimensione 1 ed una sua base e' data dal vettore $(-1,0,1,0)$ (se $U \cap V_h$ avesse dimensione 2 allora $U \cap V_h = V_h$, quindi $V_h \subseteq U$ contro il fatto che $(0,1,-1,0) \notin U$). In particolare una rappresentazione cartesiana per $U \cap V_h$ e' data dalle equazioni

$$(*) \qquad \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ t=0. \end{cases}$$

Dalla formula di Grassmann deduciamo che $U+V_h$ ha dimensione 3, ed una sua base e' data dai vettori $(-1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$ e $(0,1,-1,0)$. Una rappresentazione cartesiana di $U+V_h$ e' data dall'equazione $x+y+z-t=0$.

Infine esaminiamo il caso $h=0$.

Se $h=0$ allora $V_0 \subseteq U$. Per cui $U+V_0=U$, e quindi una base e rappresentazione cartesiana coincidono con quelle di U. Invece $U \cap V_0 = V_0$, ed una base e' data da quella di V_0, mentre una rappresentazione cartesiana di V_0 coincide con $(*)$. ■

Esercizio 2. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ con rappresentazione cartesiana $x+y-3z=0$, e sia $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un operatore lineare. Sapendo che $(1,-1,1)$ sta nel nucleo di f, e che f trasforma ogni vettore $\mathbf{u}$ di U in $f(\mathbf{u}) = 7\mathbf{u}$, calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, ed una base e la dimensione per* $\ker f$ *ed* $\mathrm{im} f$. *Infine calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) P$.*

Svolgimento. Una base per U e' costituita dai vettori $(-1,1,0)$, $(3,0,1)$. Quindi noi sappiamo che $f(-1,1,0) = (-7,7,0)$, $f(3,0,1) = (21,0,7)$, ed anche che $f(1,-1,1) = (0,0,0)$. Poiche' il sistema $\mathcal{B}$ formato dai vettori $(-1,1,0)$, $(3,0,1)$ e $(1,-1,1)$ e' una base di $\mathbf{R}^3$, possiamo riassumere i dati precedenti dicendo che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\mathcal{B}$ e' una base di autovettori per f, e possiamo porre $D = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dalla matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ deduciamo che il nucleo ha dimensione 1 e dunque una sua base e' data dal vettore $(1,-1,1)$, mentre l'immagine ha dimensione 2, ed una sua base e' data dai vettori $(-1,1,0)$, $(3,0,1)$.

Infine possiamo calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ con la formula

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = P \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{7}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Esercizio 3. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} 3x + 14y + (k^2 + k + 4)z = k + 3 \\ x + 5y + z = 1 \\ x + 5y + (k^2 + k + 1)z = k + 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni. Infine dire per quali valori di k il sistema lineare $\mathcal{S}_k$ ammette $(2, 0, 0)^T$ come soluzione.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato con le operazioni p_{12}, $e_{21}(-3)$, $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k^2 + k + 1 & k \\ 0 & 0 & k^2 + k & k \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{0, -1\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione che e'

$$\left(\frac{k-5}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1} \right)^T.$$

Se $k = 0$ $\mathcal{S}_k$ ammette le ∞^1 soluzioni

$$(1 - 6z, z, z)^T, \qquad z \in \mathbf{R}.$$

Se $k = -1$ il sistema $\mathcal{S}_{-1}$ e' incompatibile.

Quanto all'ultima domanda, non esiste alcun valore di k per cui $(2, 0, 0)^T$ e' soluzione di $\mathcal{S}_k$, in quanto la seconda equazione del sistema non e' mai soddisfatta da tale vettore. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^2(t-1)$, e l'autovalore 0 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore 1 e' dato da $(2, 4, 1)$. Rimane da calcolare una stringa di lunghezza 2 relativa all'autovalore 0. A tale scopo osserviamo che

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 8 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi una rappresentazione cartesiana dell'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_0$ e' data dall'equazione $2x-y+z=0$, e percio' una base per $\widetilde{V}_0$ e' data dal sistema $\mathcal{B}=\{(1,2,0),(1,0,-2)\}$. L'operatore di restrizione $\varphi : \mathbf{u}\in\widetilde{V}_0 \to A\cdot\mathbf{u}\in\widetilde{V}_0$ ammette come matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathcal{B}$ la matrice

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

La stringa cercata e' allora:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix}-2\\-4\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

La matrice P e'

$$P=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 4 & -4 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix},$$

e la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t)=e^{At}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=e^{PJP^{-1}t}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=P\cdot e^{Jt}\cdot P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ 4 & -4 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^t & 0 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -\frac{5}{4} & 1\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4e^t-3-2t\\ 8e^t-8-4t\\ 2e^t-2\end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0)=(1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1=4e^t-2$$

che e' uguale a

$$2y_1-y_2+2y_3=4e^t-2.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1=2x_1-x_2+2x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Provare che la matrice simmetrica*

$$G:=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 2 & 2 & 2\\ 5 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

e' diagonalizzabile, e che i suoi autospazi sono mutualmente ortogonali. Dedurne una matrice ortogonale P ed una matrice diagonale D tali che $D=P^TGP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di G e' $p_G(t)=-t(t-6)(t+6)$. Il vettore $(1,1,1)$ forma una base per l'autospazio V_6, il vettore $(1,-2,1)$ forma una base per l'autospazio V_0 ed il vettore $(-1,0,1)$ forma una base per l'autospazio V_{-6}. Poiche' tali vettori sono a due a due ortogonali, cio' prova che gli autospazi di G sono mutualmente ortogonali. La matrice diagonale D e la matrice ortognale P sono allora:

$$D=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 6. *Completare la seguente matrice a matrice ortogonale.*

$$P:=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & * & *\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & * & *\\ * & * & *\end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Ricordiamo che una matrice e' ortogonale se e solo se le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$. Quindi, se denotiamo con $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, x)^T$ la prima colonna di P allora deve essere $\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + x^2 = 1$, da cui $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Possiamo allora completare la prima colonna nel seguente modo: $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T$. Ora per ottenere le altre due colonne completiamo il vettore $(1, 2, 1)$ a base di $\mathbf{R}^3$ aggiungendo i vettori $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, e poi ortonormalizziamo con il procedimento di Gram-Schmidt. Al termine dell'algoritmo troveremo i seguenti vettori: $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$. In conclusione, il completamento cercato e' dato dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), III appello, 5 luglio 2012.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il sottospazio U_h di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,h)$, $(1,2,h+1,h+1)$, $(2,3,1,1+2h)$. Sia poi W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(5,8,2,-2)$, $(1,0,2,-2)$, $(1,1,1,1)$. Determinare i valori di h per cui esiste un sottospazio V di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U_h \oplus V = W$.*

Svolgimento. Affinche' $U_h \oplus V = W$ e' necessario che U_h sia contenuto in W. Per imporre questa condizione ci calcoliamo una rappresentazione cartesiana di W: tenuto conto che $\dim W = 3$, si vede che essa e' $2x - y - z = 0$. Se U_h e' contenuto in W i generatori di U_h devono soddisfare l'equazione di W. In particolare deve essere $-(h+1) = 0$. Quindi affinche' esista un sottospazio V di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 1 tale che $U_h \oplus V = W$ e' necessario che $h = -1$. Ma e' anche sufficiente. Infatti tutti i generatori di U_{-1} stanno in W, quindi $U_{-1} \subseteq W$. Inoltre $\dim U_{-1} = 2$ e $(1,1,1,1) \notin U_{-1}$. Per cui se $h = -1$ si puo' porre $V := Span((1,1,1,1))$. In conclusione esiste solo un valore che soddisfa la proprieta' richiesta, ed e' $h = -1$. ■

Esercizio 2. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l' operatore lineare definito dalle condizioni $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -7\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, $f(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $f(-\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$. E sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l' operatore definito ponendo $g(x,y,z) := (4x - 6y, x - y, 2z)$. Denotato con $g \circ f$ l'operatore che si ottiene componendo g con f, determinare una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g \circ f) \cdot P$.*

Svolgimento. Posto $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}$, innanzitutto calcoliamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g \circ f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -18 & 0 \\ 3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Quindi il polinomio caratteristico di $g \circ f$ e' $p_{g \circ f}(t) = -(t+2)(t+1)(t-2)$. Una base per V_{-2} e' formata dal vettore $(0,0,1)$, una base per V_{-1} e' formata da $(2,1,0)$, ed una base per V_2 e' formata da $(3,1,0)$. Le matrici cercate sono allora:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbf{R}^3$. Sapendo che le coordinate del vettore $(1,1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(3,2,1)^T$, che quelle di $(1,1,0)$ sono $(2,1,0)^T$, e che quelle di $(1,0,0)$ sono $(3,1,1)^T$, determinare i vettori di $\mathcal{B}$.*

Svolgimento. Consideriamo la base $\mathcal{C} := \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. I dati del problema ci dicono che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

In conclusione si ha: $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}(1,0,-1)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{2}(-1,-2,1)$. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -3 & -2 & 7 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t+2)^3$, e l'autovalore -2 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Occorre dunque calcolare una stringa di lunghezza 3 relativa all'autovalore -2. A tale scopo osserviamo che

$$(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La stringa cercata e' allora:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice P e'

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-2t} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t^2 - t + 1 \\ t^2 - t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = e^{-2t}(-3t^2 + 5t - 3)$$

che e' uguale a

$$-3y_1 - 2y_2 + 7y_3 = e^{-2t}(-3t^2 + 5t - 3).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -3x_1 - 2x_2 + 7x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Una matrice nilpotente A, 11×11, ha rango uguale a 7, e il rango di A^3 e' 2. Determinare tutte le possibilita' per la forma canonica di A, il polinomio caratteristico, e quello minimo.*

Svolgimento. Poiche' A e' nilpotente allora $rkA^{i+1} < rkA^i$ per ogni $i \geq 1$ che sia strettamente minore dell'indice di nilpotenza p. Per cui rkA^4 e' uguale a 0 oppure e' 1.

Nel primo caso allora $p = 4$, e nella forma canonica deve apparire almeno un blocco di ordine 4. Se questo fosse l'unico, essendo gli altri blocchi di ordine < 4, allora $rkA^3 = 1$, contro le ipotesi. Quindi nella forma canonica devono apparire almeno due blocchi di ordine 4. Ciascuno di tali blocchi contribuisce al rango di A per 3, e poiche' $rkA = 7$, l'unica possibilita' per i rimanenti blocchi e' che ce ne sia uno di ordine 2 ed un altro di ordine 1. Quindi se $rkA^4 = 0$ allora

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

In tal caso $p_A(t) = -t^{11}$, e $m_A(t) = t^4$.

Si puo' ottenere lo stesso risultato utilizzando le formule introdotte a lezione. E cioe' possiamo considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = rk(A^0) = 11 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = rk(A) = 7 \\ \mu_1 + \mu_2 = rk(A^2) \\ \mu_1 = rk(A^3) = 2. \end{cases}$$

Ricordiamo che in tale sistema μ_1 e' il numero di blocchi di ordine 4, $\mu_2 - \mu_1$ e' il numero di blocchi di ordine 3, $\mu_3 - \mu_2$ e' il numero di blocchi di ordine 2, e $\mu_4 - \mu_3$ e' il numero di blocchi di ordine 1. Ricordiamo anche che deve essere $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4$. Per determinare J_A nel caso in esame, cioe' quando $p = 4$, occorre determinare i valori dei numeri μ_i. Poiche' $\mu_2 \geq 2$, allora $rk(A^2) \geq 4$. Se fosse $rk(A^2) \geq 5$ allora $\mu_2 \geq 3$, quindi $\mu_3 \geq 3$, e percio' $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \geq 8$, contro le ipotesi. Deduciamo che $rk(A^2) = 4$, da cui $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$, $\mu_4 = 4$. Queste informazioni ci dicono che in J_A appaiono due blocchi di ordine 4, non ci sono blocchi di ordine 3, c'e' un blocco di ordine 2, ed un blocco di ordine 1. Cioe' J_A e' proprio la matrice calcolata in precedenza.

Nel secondo caso $p = 5$ e, con un'analisi simile alla precedente, si vede che la forma canonica e'

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

oppure

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In entrambi i sottocasi si ha $p_A(t) = -t^{11}$, e $m_A(t) = t^5$. ■

Esercizio 6. *Sia* $(\mathbf{R}^4, \phi)$ *lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica*

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2y^2 + 2yz + 2yt + 2zt - t^2.$$

Determinare un sottospazio U di $(\mathbf{R}^4, \phi)$ di dimensione 2 tale che $\phi_{|U}$ sia definita positiva. Esiste un sottospazio siffatto avente dimensione 3?

Svolgimento. La matrice di Gram di ϕ rispetto alla base canonica e':

$$G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice

$$\left[\, G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi) \,|\, I \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si perviene alla matrice

$$(*) \qquad \left[\, D \,|\, P^T \,\right] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denotata con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^4$ formata dalle colonne di P, sappiamo che $G^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = D$. Posto allora $\mathcal{B}' := \{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ ed $U := Span(\mathcal{B}')$, si avra'

$$G^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\phi_{|U}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

e percio' U costituisce l'esempio richiesto.

Supponiamo ora che esista un sottospazio V di dimensione 3 tale che $\phi_{|V}$ sia definita positiva. Sia allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base ortonormale di $(V, \phi_{|V})$, e sia $\mathcal{C} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ un'estensione di $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a base di $\mathbf{R}^4$. La matrice di Gram di ϕ rispetto a $\mathcal{C}$ sara' del tipo

$$G^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Applicando a tale matrice l'algoritmo di Gauss-Lagrange si dedurrebbe che l'indice di ϕ e' almeno 3, mentre, da (*), sappiamo che tale indice e' 2. Questo ragionamento prova che lo spazio V non esiste. ■

Geometria (9 CFU), IV appello, 19 luglio 2012.

Esercizio 1. *Sia $V = \mathcal{M}(3,3)$ lo spazio delle matrici quadrate 3×3. Sia U il sottospazio di V formato dalle matrici con la prima riga nulla, e W il sottospazio di V formato dalle matrici con la prima colonna nulla. Calcolare una base e la dimensione per U, W, $U\cap W$, $U+W$, ed una rappresentazione cartesiana di $U+W$. Svolgere lo stesso esercizio con $V = \mathcal{M}(n,n)$.*

Svolgimento. U e' generato dalle matrici canoniche $E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33}$. Tali matrici formano allora una base per U e $\dim U = 6$. Similmente le matrici $E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33}$ formano una base per W e $\dim W = 6$. Una matrice appartiene ad $U\cap W$ se e solo se ha nulle la prima riga e la prima colonna. Quindi $U\cap W \cong \mathcal{M}(2,2)$, $\dim U\cap W = 4$, e le matrici $E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33}$ formano una base per $U\cap W$. Per la formula di Grassmann sappiamo che $\dim U+W = 8$, e poche' ogni matrice in $U+W$ ha la componente di posto $1,1$ nulla, segue che una rappresentazione cartesiana di $U+W$ e' $a_{11} = 0$, ed una base per $U+W$ e' data dalle matrici $E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33}$.

In generale U e' liberamente generato dalle matrici canoniche E_{ij} con $i > 1$, e $\dim U = n^2 - n$. Invece W e' liberamente generato dalle matrici canoniche E_{ij} con $j > 1$, e $\dim W = n^2-n$. Come prima $U\cap W \cong \mathcal{M}(n-1,n-1)$, $\dim U\cap W = (n-1)^2$, ed $U\cap W$ e' generato dalle matrici canoniche E_{ij} con $i > 1$ e $j > 1$. Infine $\dim U + W = (n^2-n)+(n^2-n)-(n-1)^2 = n^2-1$, una rappresentazione cartesiana e' data dall'equazione $a_{11} = 0$, ed una base per $U+W$ e' formata da tutte le matrici canoniche, ad eccezione della matrice E_{11}. ■

Esercizio 2. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^4$ formata dai vettori $\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_3+3\mathbf{e}_4$. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l' operatore lineare che ammette la seguente matrice rappresentativa:*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 17 & 24 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcolare $M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^4}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(f)$, una base per il nucleo di f, una base per l'immagine di f, ed una rappresentazione cartesiana per l'immagine.

Svolgimento. Cominciamo con il calcolare $M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^4}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(f)$.

$$M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^4}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(f)\cdot M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^4}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^4}) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 17 & 24 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & 17 & 24 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala tale matrice, si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana del nucleo:

$$\begin{cases} x+z+t = 0 \\ y+z-t = 0. \end{cases}$$

Ne consegue che la dimensione del nucleo e' 2, ed una sua base e' costituita dai vettori $(-1,-1,1,0)$, $(-1,1,0,1)$. Dal Teorema della dimensione deduciamo che la dimensione dell'immagine e' 2, ed una sua base e' costituita dai vettori $(5,0,1)$, $(-2,1,0)$. Una rappresentazione cartesiana per l'immagine e' data dall'equazione

$$\det \begin{bmatrix} 5 & -2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' $x+2y-5z = 0$. ■

Esercizio 3. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\begin{cases} 2x+y+(9-5k)z = 0 \\ 2x+2y+(3-5k)z = k+2 \\ 2x+y+(k^2-6k+3)z = k+2 \\ 6x+4y+(k^2-16k+15)z = 2k+4. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, $e_{41}(-3)$, $e_{42}(-1)$, $e_{43}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9-5k & 0 \\ 0 & 1 & -6 & k+2 \\ 0 & 0 & k^2-k-6 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, tenuto conto che $k^2-k-6=(k+2)(k-3)$, se $k \notin \{-2,3\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione che e'

$$\left(-\frac{1}{2}(k-3), \frac{k^2-k}{k-3}, \frac{1}{k-3}\right)^T.$$

Se $k=-2$ il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette le ∞^1 soluzioni

$$\left(-\frac{25}{2}z, 6z, z\right)^T, \qquad z \in \mathbf{R}.$$

Se $k=3$ il sistema $\mathcal{S}_k$ e' incompatibile. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \\ \dot{x}_2 = 4x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 + 4x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-2)^3$, e l'autovalore 2 ha molteplicita' geometrica 2. Quindi nella forma canonica di Jordan di A ci sono esattamente due blocchi, cioe'

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

allora $(-3,-2,-1)$, $(0,1,0)$ e' una $2-$stringa di lunghezza 2 per A, e $(1,0,0)$ e' una $2-$stringa di lunghezza 1 indipendente dalla precedente. Quindi la matrice P e'

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t} \cdot \begin{bmatrix} -3t \\ -2t+1 \\ -t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0,1,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = e^{2t}(-6t-3)$$

che e' uguale a

$$2y_1 - 3y_2 + 6y_3 = e^{2t}(-6t-3).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le condizioni $f(3,0,0) = (1,-1,-1)$, $f(2,1,1) = (0,0,0)$, $f(0,2,4) = (-2,1,3)$. Provare che esiste un sottospazio U di $\mathbf{R}^3$ tale che f sia la proiezione ortogonale $p_U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ su U.*

Svolgimento. I dati ci dicono che l'immagine di f ha dimensione 2, quindi il nucleo ha dimensione 1. Poiche' il nucleo di p_U e' $U^\perp$, deduciamo che $\dim U^\perp = 1$, e percio' $U^\perp = Span((2,1,1))$. Allora $U = (U^\perp)^\perp$ deve essere il sottospazio con rappresentazione cartesiana $2x + y + z = 0$, cioe' $U = Span((-2,0,1),(-2,1,0))$. In altre parole, se esiste qualche U per cui $f = p_U$, allora questo U deve essere necessariamente $Span((-2,0,1),(-2,1,0))$. Per completare lo svolgimento, ci rimane solo da provare che $f = p_U$, cioe' che

$$(*) \qquad f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - p_{U^\perp}(\mathbf{x})$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$. Per provare cio' sara' sufficiente fare la verifica solo per $\mathbf{x} \in \{(3,0,0),(2,1,1),(0,2,4)\}$. Ora

$$(3,0,0) - p_{U^\perp}(3,0,0) = (3,0,0) - \frac{6}{6}(2,1,1) = (1,-1,-1) = f(3,0,0).$$

Similmente si verifica $(*)$ per $\mathbf{x} = (2,1,1)$ e $\mathbf{x} = (0,2,4)$. ■

Esercizio 6. *Sia $(\mathbf{R}^3, \phi)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica*

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Dire se esiste un cambiamento delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ tale che

$$q(\mathbf{x}') = -3{x'_1}^2 - 6x'_1x'_2 - 6x'_1x'_3 - 2{x'_2}^2 - 6x'_2x'_3 + 2{x'_3}^2.$$

Svolgimento. Consideriamo la matrice di Gram di q rispetto alla base canonica:

$$G := G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

e denotiamo con

$$G' := \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

la matrice definita dalla condizione $q(\mathbf{x}') = \mathbf{x}'^T \cdot G' \cdot \mathbf{x}'$. Tramite l'Algoritmo di Gauss-Lagrange si vede che G e G' hanno lo stesso indice (che e' 2), e lo stesso rango (che e' 3). Quindi G e G' sono congruenti, cioe' esiste una matrice invertibile P tale che $G' = P^T \cdot G \cdot P$. Percio' il cambiamento delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ portera' $q(\mathbf{x})$ in $q(\mathbf{x}')$, e dunque la risposta e' si'. ■

Geometria (9 CFU), V appello, 7 settembre 2012.

Esercizio 1. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$U := Span((1,1,1,1),(2,2,1,3),(1,1,0,2)), \qquad V := Span((-3,1,1,-1),(2,0,0,1),(-1,1,1,0)).$$

Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U+V$ *ed una base per* $U\cap V$*.*

Svolgimento. Dopo aver disposto i generatori di U e di V in riga, e ridotto a scala per righe la matrice cosi' ottenuta, si perviene ad una matrice a scala con tre righe non nulle, $(1,1,1,1),(0,2,2,1),(0,0,-1,1)$. Ne consegue che $U+V$ ha dimensione 3, le tre righe ne formano una base, e la rappresentazione cartesiana di $U+V$ si ottiene imponendo che si annulli il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & y \\ 1 & 2 & -1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

Cioe' la rappresentazione cartesiana di $U+V$ e' data dall'equazione $x+3y-2z-2t=0$.

Con un ragionamento analogo si vede che una rappresentazione cartesiana di U e' data dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z-t=0, \end{cases}$$

mentre una rappresentazione cartesiana di V e' data da

$$\begin{cases} x+y-2t=0 \\ x+z-2t=0. \end{cases}$$

Quindi una rappresentazione cartesiana di $U\cap V$ e'

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z-t=0 \\ x+y-2t=0 \\ x+z-2t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si vede che una base di $U\cap V$ e' data dal vettore $(1,1,1,1)$. ∎

Esercizio 2. *Al variare del parametro* k *si considerino gli operatori* $f_k:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ *e* $g_k:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ *definiti ponendo*

$$f_k(1,1,0)=(2,k+2,2), \quad f_k(1,-1,0)=(0,-k,0), \quad f_k(0,1,1)=(0,2k,k^2-3k),$$

$$g_k(x,y,z)=(3x+2y+3z,-2x-y-2z,x+y+(1+k)z).$$

Determinare i valori del parametro k *per cui* $\ker f_k = \operatorname{im} g_k$*.*

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g_k)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1+k \end{bmatrix}.$$

Poiche' il determinante di tale matrice e' k, possiamo dire che se $k\neq 0$ allora $\operatorname{im} g_k$ ha dimensione 3, mentre $\operatorname{im} g_0$ ha dimensione 2, ed e' generato dai vettori $(3,-2,1),(2,-1,1)$.

D'altra parte, posto $\mathcal{B} := \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,1,1)\}$, abbiamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_k)=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f_k)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k+2 & -k & 2k \\ 2 & 0 & k^2-3k \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & k+1 & k-1 \\ 1 & 1 & k^2-3k-1 \end{bmatrix}.$$

Poiche' tale matrice ha sempre rango ≥ 1, allora $\ker f_k$ ha sempre dimensione ≤ 2 (avremmo potuto dedurre cio' piu' semplicemente osservando che il vettore $(2,k+2,2)$ sta nell'immagine di f_k e non e' mai nullo). Per cui l'unica possibilita' per il parametro k, affinche' $\ker f_k$ sia uguale ad $\operatorname{im} g_k$, e' $k=0$. In tal caso il nucleo di f_0 e' rappresentato dall'equazione $x+y-z=0$, percio' $\ker f_0 = \operatorname{im} g_0$.

In conclusione $\ker f_k = \operatorname{im} g_k$ se e solo se $k=0$. ∎

Esercizio 3. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y:*

$$\begin{cases} x + (4k-6)y = -k^2 + 7k - 3 \\ 3x + (5k-11)y = 5k + 4 \\ 3x + (10k-16)y = -2k^2 + 16k - 5. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato con le operazioni $e_{21}(-3)$, $e_{31}(-3)$, $e_{32}(-\frac{2}{7})$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4k-6 & -k^2+7k-3 \\ 0 & -7k+7 & 3k^2-16k+13 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7}(k-1)(k-2) \end{bmatrix}.$$

Quindi, se $k \notin \{1, 2\}$, allora il sistema $\mathcal{S}_k$ e' incompatibile. Se $k = 1$ il sistema $\mathcal{S}_1$ ammette ∞^1 soluzioni, date da $(2y+3, y)^T$ al variare di $y \in \mathbf{R}$. Infine il sistema $\mathcal{S}_2$ ammette un'unica soluzione, data dal vettore $(5, 1)^T$. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

La matrice A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t(t+2)^2$, e l'autovalore -2 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi nella forma canonica di Jordan di A ci sono esattamente due blocchi, cioe'

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ora il nucleo di A e' generato dal vettore $(1, 1, 1)$. Questo vettore rappresenta una stringa di lunghezza 1 relativa all'autovalore 0, per cui contribuisce al blocco $[0]$ in J, e puo' formare la prima colonna di P.

D'altra parte

$$(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_{-2}$ e' rappresentato dall'equazione $2x - y = 0$, da cui

$$\widetilde{V}_{-2} = Span((1, 2, 0), (0, 0, 1)).$$

Poiche' $A + 2I$ trasforma $(0, 0, 1)$ in $(1, 2, 0)$, e $(1, 2, 0)$ in $\mathbf{0}$, allora questi due vettori $(1, 2, 0), (0, 0, 1)$ formano una stringa di lunghezza due per l'autovalore $\lambda = -2$, e possono contribuire alla seconda ed alla terza colonna di P. In definitiva la matrice P cercata e':

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - e^{-2t} - 2te^{-2t} \\ 2 - 2e^{-2t} - 4te^{-2t} \\ 2 - 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = 4te^{-2t}$$

che e' uguale a

$$-y_2 + y_3 = 4te^{-2t}.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -x_2 + x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente la seguente rappresentazione cartesiana*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + y - z - t = 0. \end{cases}$$

Decomporre il vettore $\mathbf{x} := (2, -3, 1, 27)$ nella somma $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, con $\mathbf{a}$ parallelo ad U e $\mathbf{b}$ ortogonale ad U. Svolgere una verifica.

Svolgimento. Sappiamo che $\mathbf{a}$ e' la proiezione ortogonale $p_U(\mathbf{x})$ di $\mathbf{x}$ su U, mentre $\mathbf{b} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ altro non e' che la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ su $U^{\perp}$. Per poter proiettare su U abbiamo bisogno di una base ortogonale di U. A tale proposito, andiamo prima a risolvere il sistema che rappresenta U, ottenendo la seguente base di U: $\{(2, -3, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}$. Questi due vettori non sono ortogonali, percio' occorre ortogonalizzarli. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt otteniamo la seguente base ortogonale di U:

$$\{(2, -3, 1, 0), (2, -3, -13, 14)\}.$$

Adesso possiamo calcolare $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = p_U(\mathbf{x}) = p_{(2,-3,1,0)}((2, -3, 1, 27)) + p_{(2,-3,-13,14)}((2, -3, 1, 27)) = (4, -6, -12, 14).$$

E quindi

$$\mathbf{b} = \mathbf{x} - \mathbf{a} = (-2, 3, 13, 13).$$

Per verificare il risultato, e' sufficiente osservare che $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, che $\mathbf{a}$ e' parallelo ad U (ed infatti le sue coordinate soddisfano le equazioni di U), e che $\mathbf{b}$ e' ortogonale ad U (ed infatti $\mathbf{b}$ e' ortogonale ad entrambi i generatori di U). ■

Esercizio 6. *Dire se le seguenti matrici sono simili, e se sono congruenti:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Le due matrici assegnate sono simili perche' hanno la stessa forma canonica di Jordan

$$J_A = J_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

e sono anche congruenti perche' hanno lo stesso rango, cioe' 3, e lo stesso indice, cioe' 2 (per calcolare l'indice di A si applichino le operazioni elementari $e_{13}(1)$, $e^{13}(1)$, $e_{31}(-\frac{1}{2})$, $e^{31}(-\frac{1}{2})$). ■

Geometria (9 CFU), VI appello, 27 settembre 2012.

Esercizio 1. *Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbf{R}^3$ *e' un sottospazio, e perche':* $U_1 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = -2\}$, $U_2 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z \geq -2\}$, $U_3 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : xyz = 0\}$, $U_4 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :$ "$\exists t \in \mathbf{R} : x = y = z = t^3$"$\}$.

Svolgimento. Il sottoinsieme U_1 non e' un sottospazio perche' non possiede il vettore nullo. Il sottoinsieme U_2 non e' un sottospazio perche', nonostante possegga il vettore nullo, non e' stabile rispetto all'addizione. Infatti il vettore $(-2, 0, 0)$ appartiene ad U_2 ma $(-2, 0, 0)+(-2, 0, 0) = (-4, 0, 0)$ no (cio' prova anche che U_2 non e' stabile rispetto alla moltiplicazione esterna perche' $(-4, 0, 0) = 2(-2, 0, 0)$). Il sottoinsieme U_3 non e' un sottospazio perche', nonostante possegga il vettore nullo e sia stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, non lo e' rispetto all'addizione: infatti $(1, 0, 0) \in U_3$ e $(0, 1, 1) \in U_3$, ma $(1, 0, 0) + (0, 1, 1) \notin U_3$. Invece U_4 e' un sottospazio, perche' $U_4 = Span((1, 1, 1))$: infatti un qualunque numero reale c si puo' mettere sotto la forma $c = t^3$, con $t \in \mathbf{R}$. Quindi se $\mathbf{u} = c \cdot (1, 1, 1)$ e' un multiplo di $(1, 1, 1)$, allora $\mathbf{u} = c \cdot (1, 1, 1) = (t^3, t^3, t^3)$. Cio' dimostra che $U_4 \supseteq Span((1, 1, 1))$. Il viceversa e' ovvio. ∎

Esercizio 2. *L'operatore lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *possiede il vettore* $(1, -1, 0)$ *come autovettore relativo all'autovalore* $\lambda = -4$, *ed il vettore* $(2, 1, 0)$ *come autovettore relativo all'autovalore* $\lambda = 5$. *Inoltre il nucleo di* f *ammette come rappresentazione cartesiana*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x - z = 0. \end{cases}$$

Calcolare una base per il nucleo ed una base per l'immagine di f. *Infine calcolare* $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$, *dove* $\mathcal{C}$ *denota la base* $\{(-3, 1, 6), (2, -1, -3), (2, 1, 0)\}$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta il nucleo di f vediamo che $\ker f$ ammette come base il vettore $(1, 1, 3)$. Per il Teorema della dimensione deduciamo che l'immagine di f ha dimensione 2. Poiche' dalle ipotesi sappiamo che $f(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$ e $f(2, 1, 0) = (10, 5, 0)$, allora i vettori $(1, -1, 0), (2, 1, 0)$ formano una base per l'immagine di f. Infine, posto $\mathcal{B} := \{(1, 1, 3), (1, -1, 0), (2, 1, 0)\}$, abbiamo:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \\ -10 & 5 & 5 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3. *Utilizzando la Trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - 4x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 3x_2(t) + t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento Denotiamo con $\mathbf{y}(t)$ la soluzione del problema assegnato, e con $\mathbf{Y}(s)$ la sua trasformata di Laplace. Sappiamo che

$$\mathbf{Y}(s) = (sI - A)^{-1} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{F}(s)) = \begin{bmatrix} s-1 & 4 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s^3+3s^2-4}{s^2(s+1)^2} \\ \frac{s^2+s-1}{s^2(s+1)^2} \end{bmatrix},$$

dove $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ e' la matrice dei coefficienti, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e' la condizione iniziale, ed $\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$ e' la trasformata del termine noto $\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$. Poiche'

$$\frac{s^3 + 3s^2 - 4}{s^2(s+1)^2} = \frac{8}{s} + \frac{-4}{s^2} + \frac{-7}{s+1} + \frac{-2}{(s+1)^2}$$

e

$$\frac{s^2 + s - 1}{s^2(s+1)^2} = \frac{3}{s} + \frac{-1}{s^2} + \frac{-3}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^2},$$

allora possiamo calcolare $\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{Y}(s)) = \begin{bmatrix} 8 - 4t - 7e^{-t} - 2te^{-t} \\ 3 - t - 3e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -4 + 5e^{-t} + 2te^{-t}$$

che e' uguale a

$$y_1 - 4y_2 = -4 + 5e^{-t} + 2te^{-t}.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = x_1 - 4x_2$ e' soddisfatta. Per l'altra equazione la verifica e':

$$\dot{y}_2 = -1 + 2e^{-t} + te^{-t}$$

che e' uguale a

$$y_1 - 3y_2 + t = -1 + 2e^{-t} + te^{-t}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Di una matrice quadrata A, 4×4, si sa che non e' diagonalizzabile, e che $A^3 = A^2$. Dire quali sono le possibilita' per la forma canonica J_A di A, per il polinomio caratteristico $p_A(t)$, e per il polinomio minimo $m_A(t)$.*

Svolgimento. La matrice soddisfa l'equazione $t^3 - t^2 = 0$. Quindi, tenuto conto che il polinomio minimo $m_A(t)$ di A deve essere un fattore del polinomio $t^3 - t^2 = t^2(t-1)$, e che A non e' diagonalizzabile (e percio' il polinomio minimo deve avere qualche radice multipla), per $m_A(t)$ ci sono solo due possibilita': $m_A(t) = t^2$ oppure $m_A(t) = t^2(t-1)$.

Nel primo caso A e' nilpotente, con polinomio caratteristico $p_A(t) = t^4$, e la forma canonica puo' essere uno dei seguenti tipi:

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{oppure} \quad J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nel secondo caso avremo $p_A(t) = t^3(t-1)$, oppure $p_A(t) = t^2(t-1)^2$, ed in corrispondenza di tali polinomi si avra':

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{oppure} \quad J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Siano U e W sottospazi di uno spazio euclideo $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Provare che*

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp.$$

Svolgimento. Sia $\mathbf{x}$ un vettore di $(U+W)^\perp$, cioe' un vettore ortogonale a tutti i vettori di $U+W$. Poiche' $U \subseteq U+W$ e $W \subseteq U+W$ allora in particolare $\mathbf{x}$ sara' anche ortogonale a tutti i vettori di U ed a tutti i vettori di W, cioe' $\mathbf{x} \in U^\perp \cap W^\perp$. Cio' prova che $(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{x} \in U^\perp \cap W^\perp$, e sia $\mathbf{y}$ un qualunque vettore di $U + W$. Il vettore $\mathbf{y}$ si puo' scrivere come la somma $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, per opportuni $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$. Ora avremo:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Nell'espressione precedente la seconda uguaglianza e' consentita dalla linearita' a destra, mentre la terza uguaglianza dipende dal fatto che $\mathbf{x} \in U^\perp \cap W^\perp$. Cio' prova che $\mathbf{x}$ e' ortogonale ad $\mathbf{y}$. Il che implica $\mathbf{x} \in (U + W)^\perp$ essendo $\mathbf{y}$ un qualunque vettore di $U + W$. $\blacksquare$

Esercizio 6. *Denotato con V lo spazio dei vettori geometrici del piano applicati nel punto O, sia $\mathcal{E} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormale di V, e sia $f : V \to V$ l'operatore lineare che ruota $\mathbf{e}_1$ di $90°$, e che riflette $\mathbf{e}_2$ rispetto alla retta che forma un angolo di $45°$ con $\mathbf{e}_1$. Provare che f e' un operatore diagonalizzabile, e determinarne una base di autovettori.*

Svolgimento. Ricordiamo che, rispetto ad una base ortonormale, una rotazione antioraria di angolo α e' governata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Quindi $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$. Invece la riflessione rispetto alla retta che forma un angolo $\frac{\alpha}{2}$ con $\mathbf{e}_1$ e' governata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Quindi $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$. Percio' la matrice rappresentativa di f e'

$$M = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico e' $p_M(t) = t^2 - 1$. Cio' prova che f e' diagonalizzabile, ed una base di autovettori e' data dai vettori $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. ■

Geometria (9 CFU), I appello, 6 febbraio 2013.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ con rappresentazione cartesiana*

$$\begin{cases} x - z + 3t = 0 \\ x - y + z + t = 0. \end{cases}$$

E sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(2,2,1,1)$, $(0,1,1,1)$, $(2,1,0,0)$. Calcolare una base, la dimensione, ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta U si vede che una base per U e' formata dai vettori $(1,2,1,0)$, $(-3,-2,0,1)$. Riunendo tali vettori con i generatori di V si ottiene un sistema di generatori di $U+V$, in cui i vettori $(0,1,1,1)$ e $(2,1,0,0)$ sono sovrabbondanti. Quindi $U+V$ ha dimensione 3, ed una sua base e' formata dai vettori $(1,2,1,0)$, $(-3,-2,0,1)$, $(2,2,1,1)$. Una rappresentazione cartesiana di $U+V$ e':

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & x \\ 2 & -2 & 2 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' $x - 2y + 3z - t = 0$. ■

Esercizio 2. *Si considerino le seguenti basi di $\mathbf{R}^3$:*

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,2),(1,2,5)\} \quad e \quad \mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,2),(0,1,3)\}.$$

Sia poi $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare con matrice rappresentativa:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolare una base del nucleo di f ed una dell'immagine, e calcolare una matrice invertibile P tale che la matrice $P^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot P$ sia diagonale.

Svolgimento. I vettori del nucleo hanno coordinate $(x_1', x_2', x_3')^T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ che sono soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1' - x_2' + 2x_3' = 0 \\ x_2' + x_3' = 0 \\ -2x_1' + 2x_2' = 0. \end{cases}$$

La generica soluzione di tale sistema e' $x_3'(1,1,-1)^T$. Ne consegue che il nucleo di f ha dimensione 1 ed una sua base e' costituita dal vettore di coordinate $(1,1,-1)^T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, cioe' e' costituita dal vettore $(1,-1,-3)$. In particolare la dimensione dell'immagine di f e' 2. Poiche' le prime due colonne della matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ sono indipendenti, allora una base dell'immagine e' costituita dai due vettori che hanno per coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$ i vettori $(3,0,-2)^T$, $(-1,1,2)^T$. Cioe' una base per l'immagine di f e' costituita dai vettori $(3,-2,-6), (-1,3,8)$.

Osservazione.

Avremmo potuto svolgere questa parte dell'esercizio anche calcolando la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. In questo caso una base del nucleo e' data direttamente da una soluzione non nulla dell'equazione $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, mentre una base dell'immagine e' data da due colonne indipendenti di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$. Per calcolare $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ avremmo potuto usare la formula:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -18 & 7 \\ -2 & 19 & -7 \\ -6 & 54 & -20 \end{bmatrix}.$$

Fine osservazione. ♢

L'ultima domanda chiede di diagonalizzare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Quindi innanzitutto ci calcoliamo tale matrice.

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e' $p(t) = -t(t-1)^2$. La matrice cercata P ha per colonne una base di autovettori per l'operatore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \to M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$. Una base per l'autospazio V_0 di tale operatore e' costituita dal vettore $(-1,-1,1)$, mentre una base per l'autospazio V_1 e' formata dai vettori $(1,1,0), (-1,0,2)$. La matrice P e':

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} x + (k+5)y + 2z = 1 \\ -2x - (k+5)y + (k+1)z = k-2 \\ -x + (2k+5)z = 2k+1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(2)$, $e_{31}(1)$, $e_{32}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & k+5 & 2 & 1 \\ 0 & k+5 & k+5 & k \\ 0 & 0 & k+2 & k+2 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{-5,-2\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione che e'

$$(4, -\frac{5}{k+5}, 1)^T.$$

Se $k = -5$ allora $\mathcal{S}_k$ non ha soluzioni. Se $k = -2$ allora $\mathcal{S}_k$ ammette le ∞^1 soluzioni

$$\left(3+z, -\frac{2}{3} - z, z\right)^T, \qquad z \in \mathbf{R}.$$

In particolare il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$ ammette solo la soluzione nulla per $k \notin \{-5,-2\}$. Invece se $k = -5$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k^*$ coincide con $Span((0,1,0))$, mentre se $k = -2$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k^*$ coincide con $Span((1,-1,1))$. $\blacksquare$

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t+2)^3$, e l'autovalore -2 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

allora una 0-stringa per $A+2I$ di lunghezza 3 e' data da

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} - t \\ t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0,0,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = e^{-2t}(-t^2 + 3t - 1)$$

che e' uguale a

$$-2y_1 + y_2 - y_3 = e^{-2t}(-t^2 + 3t - 1).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(-1,1,1), (-2,2,1)$, e V il sottospazio rappresentato dall'equazione $x - y - z = 0$. Sia W il complemento ortogonale di $U \cap V$ in $\mathbf{R}^3$. Calcolare una base ortonormale di W, e la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_W)$ rispetto alla base canonica della proiezione ortogonale su W.*

Svolgimento. Il sottospazio U e' rappresentato dall'equazione $x + y = 0$, per cui il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

rappresenta $U \cap V$. Deduciamo che $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base e' formata dal vettore $(1,-1,2)$. Lo spazio W, cioe' il complemento ortogonale di $U \cap V$, allora ha rappresentazione cartesiana

$$x - y + 2z = 0.$$

Risolvendo tale equazione otteniamo la base di W formata dai vettori $(1,1,0), (-2,0,1)$. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt otteniamo la base ortonormale richiesta di W:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1).$$

Osservazione.

Si poteva ragionare anche cosi'. I coefficienti dell'equazione di U formano un vettore ortogonale ad U, quindi anche ad $U \cap V$. Percio' $(1,1,0) \in W$. Similmente anche $(1,-1,-1) \in W$. Poiche' $\dim W = 2$ allora i vettori $(1,1,0), (1,-1,-1)$ formano una base di W, che in questo caso e' anche ortogonale.

Fine osservazione. $\diamondsuit$

Sia ora (x,y,z) un qualunque vettore di $\mathbf{R}^3$. Abbiamo:

$$p_W(x,y,z) = p_{(1,1,0)}(x,y,z) + p_{(-1,1,1)}(x,y,z) = \frac{x+y}{2}(1,1,0) + \frac{-x+y+z}{3}(-1,1,1)$$

$$= \frac{1}{6}(5x+y-2z, x+5y+2z, -2x+2y+2z).$$

Quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_W) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito ponendo $f(x,y,z) = (-x-10y-6z, 3x+12y+6z, 3y+2z)$. Sia poi $(\mathbf{R}^3, \phi)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica $q(\mathbf{u}) = x^2+2xy+2xz+2y^2+2yz+2z^2$. Provare che $(\mathbf{R}^3, \phi)$ e' uno spazio euclideo, e che f e' autoaggiunto in $(\mathbf{R}^3, \phi)$. Infine determinare la decomposizione spettrale di f in $(\mathbf{R}^3, \phi)$, e verificare che f coincide con tale decomposizione.*

Svolgimento. La matrice di Gram G di $(\mathbf{R}^3, \phi)$ rispetto alla base canonica e'

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[G \,|\, I]$, dopo le operazioni $e_{21}(-1)$, $e^{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, $e^{31}(-1)$ si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi l'indice di $(\mathbf{R}^3, \phi)$ e' 3, e cio' prova che lo spazio e' euclideo. Inoltre la base

$$\mathcal{B} := \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1)\}$$

e' ortonormale per $(\mathbf{R}^3, \phi)$. Percio' per dimostrare che l'operatore f e' autoaggiunto sara' sufficiente provare che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e' una matrice simmetrica. Ed infatti abbiamo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -10 & -6 \\ 3 & 12 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono $0, 2, 11$, e gli autospazi V_0, V_2 e V_{11} di f sono generati rispettivamente da $(2,-2,3)$, $(2,0,-1)$, $(-3,3,1)$. Ne consegue che la decomposizione spettrale di f e'

$$f(x,y,z) = 2p_{(2,0,-1)}(x,y,z) + 11p_{(-3,3,1)}(x,y,z).$$

Possiamo svolgere una verifica calcolando esplicitamente il secondo membro.

$$2p_{(2,0,-1)}(x,y,z) + 11p_{(-3,3,1)}(x,y,z)$$

$$= 2\frac{\phi((x,y,z),(2,0,-1))}{\phi((2,0,-1),(2,0,-1))}(2,0,-1) + 11\frac{\phi((x,y,z),(-3,3,1))}{\phi((-3,3,1),(-3,3,1))}(-3,3,1)$$

$$= (x+y)(2,0,-1) + (x+4y+2z)(-3,3,1) = (-x-10y-6z, 3x+12y+6z, 3y+2z) = f(x,y,z). \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), II appello, 20 febbraio 2013.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,-2,3,1)$, $(2,-1,4,0)$, $(3,-3,7,1)$, e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente rappresentazione cartesiana $x+y-z+t=0$. Calcolare una base e la dimensione di $U \cap V$.*

Svolgimento. Disponendo in riga i generatori di U e riducendo a scala per righe la matrice cosi' ottenuta, si vede che una base per U e' formata dai vettori vettori $(1,-2,3,1)$, $(0,3,-2,-2)$. Imponendo che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -2 & 3 & y \\ 3 & -2 & z \\ 1 & -2 & t \end{bmatrix}$$

abbia rango 2, si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di U:

$$\begin{cases} x - 2y - z - 2t = 0 \\ x + 2y + 3t = 0. \end{cases}$$

Quindi una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ e' data dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - 2y - z - 2t = 0 \\ x + 2y + 3t = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si vede che $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base e' costituita dal vettore $(1,1,1,-1)$. ■

Esercizio 2. *Si consideri la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,0)$, $(0,2,3)$, $(0,3,4)$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito ponendo $f(1,0,0) = (4,4,3)$, $f(0,2,3) = -f(1,0,0)$, $f(0,3,4) = (-7,-7,-5)$. Calcolare le matrici rappresentative $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ed $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, dove con $\mathcal{E}$ si denota la base canonica. Calcolare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di f. Calcolare una matrice invertibile P tale che la matrice $P^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot P$ sia diagonale.*

Svolgimento. Dai dati del problema deduciamo che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -7 \\ 4 & -4 & -7 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Quindi abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -4 & -7 \\ 4 & -4 & -7 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -7 \\ 4 & -4 & -7 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & -7 \\ 4 & -4 & -7 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -7 \\ -7 & 7 & 13 \\ 6 & -6 & -11 \end{bmatrix}.$$

Il nucleo di f e' costituito dai vettori soluzione del sistema lineare omogeneo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

La generica soluzione di tale sistema e' $z(1,2,3)^T$. Quindi il nucleo ha dimensione 1 ed una sua base e' formata dal vettore $(1,2,3)$. L'immagine ha dimensione 2 ed una sua base e' formata dai vettori $(4,4,3)$, $(-5,-5,-3)$.

L'ultima domanda chiede di diagonalizzare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e' $p(t) = -t(t-1)(t+1)$. Una base per l'autospazio V_0 dell'operatore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \to M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ e' costituita dal vettore $(1,1,0)$, una base per l'autospazio V_1 e' formata dal vettore $(1,-1,1)$, ed una base per l'autospazio V_{-1} e' formata dal vettore $(1,-4,3)$. La matrice cercata e':

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 3. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} x + (k+2)y + 3z = 3 \\ -3x - (2k+2)y + (k-5)z = k - 9 \\ x + (k+2)y + (k+4)z = k + 4 \\ -2x - ky + (2k-1)z = 2k - 5. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(3)$, $e_{31}(-1)$, $e_{41}(2)$, $e_{42}(-1)$, $e_{43}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & k+2 & 3 & 3 \\ 0 & k+4 & k+4 & k \\ 0 & 0 & k+1 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{-4, -1\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione che e'

$$(\frac{4k+8}{k+4}, -\frac{4}{k+4}, 1)^T.$$

Se $k = -4$ allora $\mathcal{S}_k$ non ha soluzioni. Se $k = -1$ allora $\mathcal{S}_k$ ammette le ∞^1 soluzioni

$$\left(\frac{10}{3} - 2z, -\frac{1}{3} - z, z\right)^T, \qquad z \in \mathbf{R}.$$

In particolare il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$ ammette solo la soluzione nulla per $k \notin \{-4, -1\}$. Invece se $k = -4$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k^*$ coincide con $Span((2, 1, 0))$, mentre se $k = -1$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k^*$ coincide con $Span((-2, -1, 1))$. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-2)^2(t-4)$, e l'autovalore 2 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Poiche' $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e' una 2-stringa di lunghezza 2 per A, e $(1,1,1)$ e' un autovettore per A relativo all'autovalore 4, allora una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} - e^{2t}(1+t) \\ e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0,0,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = 4e^{4t} - e^{2t}(2t+3)$$

che e' uguale a

$$2y_1 + y_2 + y_3 = 4e^{4t} - e^{2t}(2t+3).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *L'operatore $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ e' autoaggiunto, e possiede gli autovalori 4 e 2. Sapendo che l'autospazio V_4 e' generato da $(1,1,1,1)$, che $V_4 + V_2 = Im(f)$, e che una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ e' data dal sistema*

$$\begin{cases} x - 3y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0, \end{cases}$$

determinare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.

Svolgimento. Dalla rappresentazione cartesiana di V_4+V_2 deduciamo che $\dim(V_4+V_2) = 2$, e che i vettori $(-1,0,1,0)$ e $(2,1,0,1)$ formano una base per V_4+V_2. In particolare i vettori $(-1,0,1,0)$ e $(1,1,1,1)$ formano una base ortogonale per $V_4 + V_2$. Ora per il Teorema spettrale sappiamo che $V_4 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$, quindi $\dim V_4 = \dim V_2 = 1$, e allora V_2 e' generato da $(-1,0,1,0)$ perche' V_2 e' ortogonale a V_4. D'altra parte per il Teorema della dimensione abbiamo anche $\dim Kerf = 2$. Quindi 0 e' autovalore per f, e ancora per il Teorema spettrale l'autospazio $V_0 = Kerf$ e' il complemento ortogonale di $V_4 + V_2$ in $\mathbf{R}^3$. Percio' una rappresentazione cartesiana del nucleo e' data dal sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -x + z = 0, \end{cases}$$

ottenuto imponendo l'ortogonalita' con i generatori $(-1,0,1,0)$ e $(1,1,1,1)$ di $V_4 + V_2$. Risolvendo tale sistema si ottiene una base del nucleo: $(1,-2,1,0)$, $(0,-1,0,1)$.

Riassumendo, possiamo dire che i vettori $(1,1,1,1)$, $(-1,0,1,0)$, $(1,-2,1,0)$, $(0,-1,0,1)$ formano una base di autovettori per f. Piu' precisamente abbiamo:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) = 4(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \\ f(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = 2(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \\ f(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{0} \\ f(-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Cioe' abbiamo

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) + f(\mathbf{e}_4) = 4(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \\ -f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) = 2(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \\ f(\mathbf{e}_1) - 2f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} \\ -f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo $f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$, $f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$. Cioe':

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Completare la seguente matrice a matrice ortogonale:*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & * & * \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Sia p la terza componente della prima colonna. Poiche' la prima colonna deve avere lunghezza 1, allora deve essere

$$\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2 + p^2 = 1.$$

Possiamo allora porre $p = \frac{1}{\sqrt{11}}$. Le altre due colonne devono essere ortogonali alla prima colonna, quindi appartengono allo spazio $x + 3y + z = 0$. Tale spazio e' generato dai vettori $(-3, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$. Ortonormalizzando tali vettori otteniamo le altre due colonne:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{110}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{110}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{10}{\sqrt{110}} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), III appello, 3 luglio 2013.

Esercizio 1. *Si considerino il sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(3,1,2,4)$ e $(5,-1,2,8)$, ed il sottospazio V definito dalle equazioni:*

$$\begin{cases} 2y+2z+t=0 \\ 2y+z+t=0. \end{cases}$$

Calcolare una base per $U \cap V$.

Svolgimento. Una rappresentazione cartesiana per U e' costituita dal sistema lineare

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2y-3z+t=0. \end{cases}$$

Per cui una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ e' costituita dal sistema lineare

$$\begin{cases} 2y+2z+t=0 \\ 2y+z+t=0 \\ x+y-2z=0 \\ 2y-3z+t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si vede che $U \cap V$ e' generato dal vettore $(1,-1,0,2)$, che pertanto e' anche una base. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, denotiamo con U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(2,-2,-h-2)$, $(4,-3,-3h-6)$, $(6,-5,-4h-8)$, e con V_h il sottospazio rappresentato dalle equazioni*

$$V_h := \begin{cases} x+(h^2+4h+5)y+2z=0 \\ (h^2+4h+4)y+2z=0. \end{cases}$$

Dire per quali valori di h si ha $U_h \oplus V_h = \mathbf{R}^3$.

Svolgimento. Il sottospazio U_h ammette come base il sistema formato dai vettori $(2,-2,-h-2)$, $(4,-3,-3h-6)$, mentre V_h e' generato dal vettore $(2,-2,h^2+4h+4)$. Per cui $U_h \oplus V_h = \mathbf{R}^3$ se e solo se la matrice

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -h-2 \\ 4 & -3 & -3h-6 \\ 2 & -2 & h^2+4h+4 \end{bmatrix}$$

ha rango massimo. Il determinante di tale matrice e' $\det A_h = 2(h+2)(h+3)$. Per cui il rango di A_h e' massimo se e solo se $h \in \mathbf{R}\backslash\{-3,-2\}$. In conclusione $U_h \oplus V_h = \mathbf{R}^3$ se e solo se $h \neq -3$ e $h \neq -2$. ■

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle condizioni $f(1,1,0) = (9,2,3)$, $f(-1,1,0) = (3,2,3)$, $f(1,1,1) = (7,2,4)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica. Dire se l'applicazione f e' oppure no iniettiva, e suriettiva. Calcolare una base per il nucleo di f ed una base per l'immagine. Calcolare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P$ sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Dalle ipotesi sappiamo che

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_2) = 9\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3 \\ -f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_2)+f(\mathbf{e}_3) = 7\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema otteniamo $f(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1$, $f(\mathbf{e}_2) = 6\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$. Quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice rappresentativa ha rango massimo, quindi il nucleo di f ha dimensione 0, ed una sua base e' il vuoto, mentre l'immagine di f ha dimensione 3, ed una sua base e' la base canonica. In particolare f e' sia iniettiva che suriettiva. Il polinomio caratteristico di f e' $p_f(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$. Una base per l'autospazio V_1 e' data dal vettore $(1, 0, 1)$, una base per l'autospazio V_2 e' data dal vettore $(0, -1, -3)$, ed una base per l'autospazio V_3 e' data dal vettore $(1, 0, 0)$. La matrice cercata e'

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Siano A e B matrici $n \times n$. Dire quali delle seguenti proprieta' sono vere e quali sono false (p denota il polinomio caratteristico, m quello minimo):*

(i) se $p_A = p_B$ allora A e B sono simili.

(ii) se $p_A = p_B$ ed $m_A = m_B$ allora A e B sono simili.

(iii) se $p_A = p_B = m_A = m_B$ allora A e B sono simili.

Svolgimento. Occorre tener presente che due matrici sono simili se e solo se hanno la stessa forma canonica di Jordan. E che se $(t - \lambda)^k$ appare nella fattorizzazione del polinomio minimo di una matrice, cio' equivale a dire che nella forma canonica di tale matrice appaiono $\lambda-$blocchi di grandezza massima k. Cio' premesso, e' chiaro che due matrici nilpotenti con una diversa configurazione dei blocchi non sono simili. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ragion per cui la proprieta' (i) e' falsa. Per un motivo analogo anche (ii) e' falsa. Per esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Invece (iii) e' vera, perche' se $p_A = m_A$ allora per ogni autovalore di A c'e' un solo blocco corrispondente, di grandezza pari alla molteplicita' algebrica, e quindi la forma canonica, quando $p_A = m_A$, e' determinata dal polinomio caratteristico. $\blacksquare$

Esercizio 5. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito dal sistema lineare omogeneo*

$$U := \begin{cases} 2x + z + t = 0 \\ 2x + 3y + z + 3t = 0 \\ 4x + 3y + 2z + 4t = 0. \end{cases}$$

Decomporre il vettore $\mathbf{x} = (1, 5, 1, -1)$ nella somma $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, con $\mathbf{a}$ parallelo ad U, e $\mathbf{b}$ ortogonale ad U.

Svolgimento. Risolvendo il sistema, si ottiene la seguente base per U: $\{(-1, 0, 2, 0), (-3, -4, 0, 6)\}$. Applicando a tale base l'algoritmo di Gram-Schmidt si ottiene la seguente base ortogonale per U: $\{(-1, 0, 2, 0), (-6, -10, -3, 15)\}$. Il vettore cercato $\mathbf{a}$ e':

$$\mathbf{a} = p_U(\mathbf{x}) = p_{(-1,0,2,0)}(\mathbf{x}) + p_{(-6,-10,-3,15)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}(-1, 0, 2, 0) - \frac{1}{5}(-6, -10, -3, 15) = (1, 2, 1, -3).$$

Il vettore $\mathbf{b}$ sara' allora $\mathbf{b} = \mathbf{x} - \mathbf{a} = (0, 3, 0, 2)$. In conclusione, la decomposizione cercata e':

$$(1, 5, 1, -1) = (1, 2, 1, -3) + (0, 3, 0, 2). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia $(\mathbf{R}^3, \phi)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica*

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Dire se esiste un cambiamento delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ tale che

$$q(\mathbf{x}') = {x'_1}^2 + 2x'_1x'_2 + 2x'_1x'_3 + 2{x'_2}^2 + 2x'_2x'_3.$$

Svolgimento. Consideriamo la matrice di Gram di q rispetto alla base canonica:

$$G := G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se esistesse un cambiamento delle coordinate soddisfacente la richiesta assegnata, allora le colonne di P formerebbero una base $\mathcal{B}$ per cui

$$G' := G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

In particolare G e G' sarebbero congruenti. Ma cio' non e' possibile perche' G ha indice 1, mentre G' ha indice 2.

In conclusione, la risposta e' no. ∎

Geometria (9 CFU), IV appello, 17 luglio 2013.

Esercizio 1. *Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ per cui $[(1,2)]_{\mathcal{B}} = [1,1]^T$, e $[(1,3)]_{\mathcal{B}} = [1,4]^T$.*

Svolgimento. Siano (x,y), (z,t) i vettori della base da determinare. Sappiamo che $(x,y)+(z,t) = (1,2)$, e che $(x,y)+4(z,t) = (1,3)$. Cioe' che

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+t=2 \\ x+4z=1 \\ y+4t=3. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene $\mathcal{B} = \{(1, \frac{5}{3}), (0, \frac{1}{3})\}$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, denotiamo con U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,1,-1)$, $(2,h+2,-1)$, $(3,h+3,-2)$, e con V_h il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ che si ottiene intersecando Span$((1,1,0),(0,0,1))$ con il sottospazio di equazione cartesiana $(h^2-h-1)x - z = 0$. Dire per quali valori di h si ha $\dim(U_h \cap V_h) = 0$, per quali valori di h si ha $\dim(U_h \cap V_h) = 1$, per quali valori di h si ha $\dim(U_h \cap V_h) = 2$, per quali valori di h si ha $\dim(U_h \cap V_h) = 3$, per quali valori di h si ha $\dim(U_h \cap V_h) = 4$.*

Svolgimento. Dai dati del problema deduciamo che V_h ammette la seguente rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ (h^2-h-1)x - z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema ci rendiamo conto che V_h ha sempre dimensione 1, ed e' generato dal vettore $(1,1,h^2-h-1)$. D'altra parte e' evidente che U_h ha sempre dimensione 2, con base fornita dai vettori $(1,1,-1)$, $(2,h+2,-1)$. Tenuto conto della formula di Grassmann, per calcolare la dimensione dell'intersezione sara' sufficiente calcolare quella della somma. Ora la dimensione di $U_h + V_h$ e' data dal rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & h+2 & -1 \\ 1 & 1 & h^2-h-1 \end{bmatrix},$$

cioe' della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & h & 1 \\ 0 & 0 & h^2-h \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 3 se $h \notin \{0,1\}$, e rango 2 altrimenti. Cioe' $\dim(U_h+V_h) = 3$ se $h \notin \{0,1\}$, e $\dim(U_h+V_h) = 2$ altrimenti. Poiche' $\dim(U_h \cap V_h) = \dim U_h + \dim V_h - \dim(U_h+V_h) = 2+1-\dim(U_h+V_h)$, deduciamo in definitiva che:

$$\dim(U_h \cap V_h) = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq 0,1 \\ 1 & \text{se } h = 0 \text{ oppure } h = 1. \end{cases}$$

In particolare non accade mai che $\dim(U_h \cap V_h)$ sia 2, 3, oppure 4. ■

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'operatore lineare definito dalle condizioni $f(1,2,0) = (1,3)$, $f(1,1,0) = (1,0)$, $f(0,0,1) = (2,5)$, e $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ quello definito dalle condizioni $g(2,3) = (2,3,0)$, $g(1,2) = (1,0,0)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(g \circ f)$ di $g \circ f$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$. Calcolare la dimensione ed una base per l'immagine e per il nucleo di $g \circ f$. Trovare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1} M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(g \circ f) P$.*

Svolgimento. Poiche'

$$M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(g \circ f) = M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^2}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(g) \cdot M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^2}}(f),$$

per calcolare la matrice $M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(g \circ f)$ sara' sufficiente calcolare le matrici $M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^2}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(g)$ e $M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^2}}(f)$.

Posto

$$\mathcal{B} = \{(2,3),(1,2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1,2,0),(1,1,0),(0,0,1)\},$$

si ha:

$$M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^2}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(g) \cdot M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^2}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E similmente abbiamo:

$$M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^2}}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^2}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Quindi dalla formula iniziale otteniamo

$$M^{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}_{\mathcal{E}_{\mathbf{R}^3}}(g \circ f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 15 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2, che e' allora la dimensione dell'immagine di f, che ammette come base $\{(1, 15, 0), (0, 1, 0)\}$. Ne consegue che il nucleo ha dimensione 1, ed un calcolo prova che il vettore $(-6, -11, 3)$ ne forma una base. Il polinomio caratteristico di $g \circ f$ e' $p(t) = -t(t-1)(t+9)$. Una base per l'autospazio V_0 e' $(-6, -11, 3)$, una per V_1 e' $(2, 3, 0)$, ed una per V_{-9} e' $(0, 1, 0)$. Per cui le matrici D e P cercate sono rispettivamente

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -11 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Una matrice A quadrata 14×14 e' nilpotente, ed ha rango 7. Sapendo che A^2 ha rango 4, e che A^3 ha rango 2, dire quali sono le possibilita' per la forma canonica di A, per il suo polinomio caratteristico, e per il suo polinomio minimo.*

Svolgimento. Poiche' A e' nilpotente, il rango delle sue potenze e' strettamente decrescente, fino a quando si annulla. Per cui $rk(A^4)$ o e' 1, oppure e' 0.

Nel primo caso A ha indice di nilpotenza $p = 5$. Dalle formule

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 = 14 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = rk(A) = 7 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = rk(A^2) = 4 \\ \mu_1 + \mu_2 = rk(A^3) = 2 \\ \mu_1 = rk(A^4) = 1 \end{cases}$$

deduciamo $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 2$, $\mu_4 = 3$, $\mu_5 = 7$. Quindi in J_A appaiono un unico blocco di ordine 5, un unico blocco di ordine 3, un unico blocco di ordine 2, e quattro blocchi di ordine 1. In particolare, in questo primo caso, abbiamo $p_A(t) = t^{14}$, ed $m_A(t) = t^5$.

Similmente, nel caso in cui $p = 4$, J_A e' costituita da due blocchi di ordine 4, un unico blocco di ordine 2, e da quattro blocchi di ordine 1. In tal caso abbiamo $p_A(t) = t^{14}$, ed $m_A(t) = t^4$. $\blacksquare$

Esercizio 5. *L'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ e' autoaggiunto, ha il nucleo di dimensione 2, e soddisfa la condizione $f(1, 1, -1) = (-2, -2, 2)$. Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.*

Svolgimento. Per ipotesi sappiamo che il nucleo di f ha dimensione 2, e quindi l'immagine ha dimensione 1. In particolare 0 e' autovalore per f con molteplicita' geometrica 2. Inoltre sappiamo che $(1, 1, -1)$ e' un autovettore per f relativo all'autovalore -2. Poiche'

$$(1, 1, -1) = -\frac{1}{2}(-2, -2, 2) = -\frac{1}{2}f(1, 1, -1) = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

allora $(1, 1, -1)$ sta nell'immagine. Percio' l'immagine di f coincide con l'autospazio V_{-2} (ed il nucleo di f coincide con l'autospazio V_0). D'altra parte il Teorema spettrale ci dice che, essendo f autoaggiunto, non ci sono altri autovalori, e che V_0 e' il complemento ortogonale di V_{-2} in $\mathbf{R}^3$. Per cui $x + y - z = 0$ e' l'equazione del nucleo. Cioe' il nucleo di f e' generato dai vettori $(1, -1, 0)$, $(1, 0, 1)$. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, -1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, -1)$. Allora

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Determinare una matrice ortogonale P ed una matrice diagonale D tale che $D = P^T AP$, dove A e' la seguente matrice:*

$$A := \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. La matrice assegnata ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^2(t+6)$. Una base ortogonale per V_0 e' data dai vettori $(1,0,1)$, $(1,-2,-1)$, ed una base per V_{-6} e' costituita dal vettore $(1,1,-1)$. Le matrici cercate sono allora:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), V appello, 4 settembre 2013.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x + (2h+2)y - z = 0 \\ x - (4h+2)y + z = 0 \\ 2x - 2hy = 0, \end{cases}$$

e sia $U_h \subset \mathbf{R}^3$ lo spazio delle soluzioni di tale sistema. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(-4,0,1)$, $(5,1,0)$, $(1,1,1)$. Determinare tutti i valori del parametro h per cui U_h e' contenuto in V.

Svolgimento. Dalla rappresentazione cartesiana di U_h si evince che, per ogni $h \in \mathbf{R}$, U_h e' il sottospazio generato dal vettore $(h, 1, 3h+2)$. D'altra parte, dai generatori di V, deduciamo la seguente rappresentazione cartesiana di V: $x - 5y + 4z = 0$. Percio' U_h e' contenuto in V se e solo se il vettore $(h, 1, 3h+2)$ soddisfa l'equazione di V, cioe' se e solo se $h - 5 + 4(3h+2) = 0$. Cioe' se e solo se $h = -\frac{3}{13}$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} kx + (k+1)y + z = -k-3 \\ kx + 2(k+1)y + 3z = 0 \\ kx + (k+1)y + (k+3)z = -1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} k & k+1 & 1 & -k-3 \\ 0 & k+1 & 2 & k+3 \\ 0 & 0 & k+2 & k+2 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{0, -1, -2\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ed ammette un'unica soluzione che e'

$$(-\frac{2k+5}{k}, 1, 1)^T.$$

Se $k = 0$ allora $\mathcal{S}_k$ non ha soluzioni. Se $k = -1$ allora $\mathcal{S}_k$ ammette le ∞^1 soluzioni $(3, y, 1)^T$, $y \in \mathbf{R}$. Se $k = -2$ allora $\mathcal{S}_k$ ammette le ∞^1 soluzioni $\left(\frac{2-z}{2}, 2z-1, z\right)^T$, $z \in \mathbf{R}$.

In particolare il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$ ammette solo la soluzione nulla per $k \notin \{0, -1, -2\}$. Invece se $k = 0$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathcal{S}_0^*$ e' $Span((1,0,0))$, se $k = -1$ lo spazio delle soluzioni di $\mathcal{S}_{-1}^*$ e' $Span((0,1,0))$, e se $k = -2$ allora lo spazio delle soluzioni di $\mathcal{S}_{-2}^*$ e' $Span((-1,4,2))$. ■

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle condizioni $f(1,1,0) = (1,2,3)$, $f(1,1,-1) = (2,4,6)$, $f(1,2,0) = (3,6,9)$. Dire se f e' oppure non e' diagonalizzabile. Inoltre determinare una base e la dimensione per i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$: $\ker(f)$, $\operatorname{im}(f)$, $\ker(f) + \operatorname{im}(f)$ e $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$.*

Svolgimento. Dai dati possiamo calcolare la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ rappresentativa di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, che e':

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p(t) = -t^3$. D'altra parte il rango di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ e' pari ad 1. Percio' il nucleo di f ha dimensione 2, da cui deduciamo che f non e' diagonalizzabile.

Poi, risolvendo il sistema lineare

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

troviamo che una base per il nucleo di f e' formata dai vettori $(-1,0,1)$, $(2,1,0)$. Invece l'immagine di f ha dimensione 1, ed una sua base e' costituita dal vettore $(1,2,3)$. Poiche' tale vettore e' una soluzione del sistema lineare che rappresenta il nucleo, possiamo dire che l'immagine di f e' contenuta nel nucleo. Percio' $\ker(f) + \operatorname{im}(f) = \ker(f)$, e $\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f)$. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. La soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t(t+1)^2$, e l'autovalore -1 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Un autovettore per l'autovalore $\lambda = 0$ e' dato dal vettore $(1,1,1)$, che si ottiene calcolando il nucleo di A. Per cio' che riguarda l'autovalore $\lambda = -1$, osserviamo che, andando a risolvere il sistema lineare

$$(A+I)^2 \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

otteniamo la seguente base per l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_{-1}$: $\mathcal{B} = \{(0,-1,0),(1,0,2)\}$. L'operatore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \to (A+I) \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, ristretto su $\widetilde{V}_{-1}$, possiede la seguente matrice rappresentativa M rispetto alla base $\mathcal{B}$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice e' nilpotente di indice 2. I vettori di $\widetilde{V}_{-1}$ con coordinate $(1,0)^T$ e $(-1,1)^T$ soddisfano le condizioni $M \cdot (1,0)^T = (-1,1)^T$, $M \cdot (-1,1)^T = (0,0)^T$. Percio' i vettori $(1,1,2)$ e $(0,-1,0)$ formano una stringa di lunghezza 2 per A, relativa all'autovalore $\lambda = -1$. E allora una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - e^{-t} + te^{-t} \\ 2 - 2e^{-t} + te^{-t} \\ 2 - 2e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = (2-t)e^{-t}$$

che e' uguale a

$$2y_1 - y_2 - y_3 = (2-t)e^{-t}.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Una data matrice A, 4×4, ha rango 3 e soddisfa le seguenti equazioni:*

$$A^6 = 3A^5 - 2A^4 = -3A^5 - 2A^4.$$

Quali delle seguenti matrici sono simili ad A?

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Sappiamo che A annulla i seguenti polinomi $f(t) = t^4(t-1)(t-2)$, e $g(t) = t^4(t+1)(t+2)$. Percio' il polinomio minimo $m_A(t)$ di A, dovendo essere un fattore di entrambi i polinomi, deve essere un fattore del polinomio t^4. Quindi A deve essere nilpotente. Poiche' ha anche rango 3, allora la forma canonica di A e'

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ora anche B e' nilpotente di rango 3, percio' $J_B = J_A$, e possiamo dire che A e B sono simili. Invece le altre matrici no, in quanto nel loro spettro appare l'autovalore 1, dunque non sono nilpotenti. ■

Esercizio 6. *Sia $(\mathbf{R}^3, \phi)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica*

$$q(\mathbf{u}) = x^2 - 4xy + 2xz + y^2 - 4yz + z^2.$$

Calcolare rango, indice e segnatura di $(\mathbf{R}^3, \phi)$. Dire se i vettori $\mathbf{u} = (1,-2,-3)$ e $\mathbf{v} = (1,2,-3)$ sono ortogonali oppure no, in $(\mathbf{R}^3, \phi)$. Infine, denotato con V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione $x+y+z=0$, calcolare rango, indice e segnatura per lo spazio pseudoeuclideo $(V, \phi_{|V})$ indotto da ϕ per restrizione su V.

Svolgimento. La matrice di Gram di $(\mathbf{R}^3, \phi)$ rispetto alla base canonica e':

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applicando a tale matrice l'algoritmo di Gauss-Lagrange, si vede che essa e' congruente alla matrice

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio' $(\mathbf{R}^3, \phi)$ ha rango $p = 2$, indice $r = 1$, e segnatura $s = 0$.

Per rispondere alla seconda domanda, calcoliamo

$$\phi(((1,-2,-3),(1,2,-3)) = [1 \quad -2 \quad -3] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = [1 \quad -2 \quad -3] \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} = 0.$$

Percio' i due vettori assegnati sono ortogonali in $(\mathbf{R}^3, \phi)$.

Infine, osserviamo che una base per V e' data dai vettori $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$. La matrice di Gram di $(V, \phi_{|V})$ rispetto a tale base e'

$$G' = \begin{bmatrix} \phi((1,-1,0),(1,-1,0)) & \phi((1,-1,0),(1,0,-1)) \\ \phi((1,-1,0),(1,0,-1)) & \phi((1,0,-1),(1,0,-1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio' $(V, \phi_{|V})$ ha rango $p = 1$, indice $r = 1$, e segnatura $s = 1$. ■

Geometria (9 CFU), VI appello, 19 settembre 2013.

Esercizio 1. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal seguente sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x + 3y - 11t = 0 \\ x + y + z - 8t = 0, \end{cases}$$

e sia $U \subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio generato dal vettore $(4, 1, 1, 1)$. Calcolare la dimensione, una base, ed una rappresentazione cartesiana di $U + V$.

Svolgimento. Dalla rappresentazione cartesiana di V deduciamo che i vettori $(-3, 1, 2, 0)$ e $(13, 3, 0, 2)$ formano una base di V. Poiche' $(4, 1, 1, 1) \notin V$, allora $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Percio' dalla formula di Grassmann deduciamo che $\dim(U + V) = 3$, ed una sua base e' formata dai vettori $(4, 1, 1, 1)$, $(-3, 1, 2, 0)$ e $(13, 3, 0, 2)$. Infine, una rappresentazione cartesiana di $U + V$ si ottiene imponendo che:

$$\det \begin{bmatrix} 4 & -3 & 13 & x \\ 1 & 1 & 3 & y \\ 1 & 2 & 0 & z \\ 1 & 0 & 2 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' una rappresentazione cartesiana di $U + V$ e' data dall'equazione $x - y + 2z - 5t = 0$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro h in $\mathbf{R}$, si consideri l'applicazione lineare $f_h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalle condizioni*

$$f_h(-1, 1, 0) = (h, h, 2h), \quad f_h(-1, 0, 1) = (2, h + 5, h + 7), \quad f_h(0, 1, 0) = (h + 1, h + 1, 2h + 2).$$

Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(-4, 1, 1)$, $(-2, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$. Per ogni valore del parametro h, calcolare la dimensione ed una base di $U \cap \ker f_h$.

Svolgimento. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$. Dalle condizioni assegnate deduciamo la matrice rappresentativa di f_h rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f_h) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f_h) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} h & 2 & h+1 \\ h & h+5 & h+1 \\ 2h & h+7 & 2h+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} h & 2 & h+1 \\ h & h+5 & h+1 \\ 2h & h+7 & 2h+2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h+1 & 3 \\ 1 & h+1 & h+6 \\ 2 & 2h+2 & h+9 \end{bmatrix}.$$

D'altra parte, tenuto conto che i vettori $(-4, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$ formano una base per U, possiamo calcolare una rappresentazione cartesiana di U:

$$\det \begin{bmatrix} -4 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \end{bmatrix} = 0,$$

cioe' $x + 2y + 2z = 0$. Percio' una rappresentazione cartesiana di $U \cap \ker f_h$ e' data dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x + (h+1)y + 3z = 0 \\ x + (h+1)y + (h+6)z = 0 \\ 2x + (2h+2)y + (h+9)z = 0. \end{cases}$$

Se denotiamo con A_h la matrice incompleta, sappiamo che $\dim(U \cap \ker f_h) = 3 - \mathrm{rk}(A_h)$. Eseguendo su A_h le operazioni elementari $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, $e_{41}(-1)$, $e_{32}(-1)$, $e_{42}(-2)$, $e_{43}(-1)$, otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & h-1 & 1 \\ 0 & 0 & h+3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, dalla formula precedente, deduciamo che: se $h \notin \{-3, 1\}$ allora $\dim(U \cap \ker f_h) = 0$, ed una base per $U \cap \ker f_h$ e' costituita dal sistema vuoto; se $h = -3$ allora $\dim(U \cap \ker f_{-3}) = 1$, ed una base per $U \cap \ker f_{-3}$ e' costituita dal vettore $(-10,1,4)$; se $h=1$ allora $\dim(U\cap\ker f_1)=1$, ed una base per $U\cap\ker f_1$ e' costituita dal vettore $(-2,1,0)$. ■

Esercizio 3. *Si considerino le seguenti basi di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$\mathcal{B}=\{(2,1,1),(1,1,1),(0,1,0)\},\qquad \mathcal{C}=\{(1,0,-2),(0,1,0),(1,0,-1)\}.$$

Sia poi $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ *l'operatore lineare rappresentato dalla matrice:*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\5&10&15\end{bmatrix}.$$

Calcolare la matrice rappresentativa $A:=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$*. Infine calcolare una matrice invertibile* P *ed una matrice diagonale* D *tali che* $D=P^{-1}AP$*.*

Svolgimento. Possiamo calcolare la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ nel seguente modo:

$$A=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})\cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-2&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\5&10&15\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\-2&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\5&10&15\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&12&0\\-1&3&0\\3&-9&0\end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p(t)=-t^2(t+1)$. L'autospazio V_0 ammette come base i vettori $(0,0,1)$, $(3,1,0)$, mentre l'autospazio V_{-1} e' generato dal vettore $(4,1,-3)$. Per cui le matrici cercate P e D sono:

$$P=\begin{bmatrix}0&3&4\\0&1&1\\1&0&-3\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.\ ■$$

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases}\dot{x}_1=3x_1+x_2-7x_3\\ \dot{x}_2=3x_1-2x_2-4x_3\\ \dot{x}_3=3x_1+x_2-7x_3\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1(0)=1\\ x_2(0)=2\\ x_3(0)=1.\end{cases}$$

Svolgimento. La soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t)=e^{At}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A:=\begin{bmatrix}3&1&-7\\3&-2&-4\\3&1&-7\end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t)=-t(t+3)^2$, e l'autovalore -3 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&1\\0&0&-3\end{bmatrix}.$$

Un autovettore per l'autovalore $\lambda = 0$ e' dato dal vettore $(2, 1, 1)$, che si ottiene calcolando il nucleo di A. Per cio' che riguarda l'autovalore $\lambda = -3$, osserviamo che, andando a risolvere il sistema lineare

$$(A+3I)^2 \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & -18 \\ 9 & 0 & -9 \\ 9 & 0 & -9 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

otteniamo la seguente base per l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_{-3}$: $\mathcal{B} = \{(0,1,0),(1,0,1)\}$. L'operatore $\mathbf{x} \in \widetilde{V}_{-3} \to (A+3I)\cdot\mathbf{x} \in \widetilde{V}_{-3}$ possiede la seguente matrice rappresentativa M rispetto alla base $\mathcal{B}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice e' nilpotente di indice 2. I vettori di $\widetilde{V}_{-3}$ con coordinate $(1,0)^T$ e $(1,1)^T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, soddisfano le condizioni $M \cdot (1,0)^T = (1,1)^T$, $M \cdot (1,1)^T = (0,0)^T$. Percio' i vettori

$$(1,1,1) = 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(1,0,1) \quad \text{e} \quad (0,1,0) = 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(1,0,1),$$

corrispondenti alle coordinate $(1,0)^T$ e $(1,1)^T$ (ma presi in ordine opposto) formano una stringa di lunghezza 2 per A, relativa all'autovalore $\lambda = -3$. E allora una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-3t} \begin{bmatrix} t+1 \\ t+2 \\ t+1 \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,2,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = (-2-3t)e^{-3t}$$

che e' uguale a

$$3y_1 + y_2 - 7y_3 = (-2-3t)e^{-3t}.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 - 7x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Una data matrice A, 15×15, ha un unico autovalore λ. Sapendo che $rk(A - \lambda \cdot I) = 8$, che $rk(A-\lambda\cdot I)^2 = 3$ e che $rk(A-\lambda\cdot I)^3 = 2$, determinare la forma canonica di Jordan J_A di A.*

Svolgimento. Posto $B := A - \lambda \cdot I$, sappiamo che B e' nilpotente, perche' ha solo l'autovalore 0. A priori l'indice di nilpotenza p di B puo' essere $p = 4$ oppure $p = 5$, in quanto $2 = \operatorname{rk} B^3 > \operatorname{rk} B^4$, e, se $\operatorname{rk} B^4 = 1$, allora $1 = \operatorname{rk} B^4 > \operatorname{rk} B^5$ e percio' $\operatorname{rk} B^5 = 0$.

Osserviamo pero' che non puo' essere $p = 4$, perche' allora, essendo $\operatorname{rk} B^3 = 2$, in J_B dovrebbero esserci 2 blocchi nilpotenti di ordine 4, il che implicherebbe che $\operatorname{rk} B^2 \geq 4$, contro le ipotesi.

Allora deve essere $p = 5$. In tal caso in J_B c'e' un solo blocco $J_{0,5}$ di ordine 5 perche' $\operatorname{rk} B^{p-1} = \operatorname{rk} B^4 = 1$, e non ci possono essere blocchi di ordine 4 o 3 perche' il rango di B^2 coincide con quello di $J_{0,5}^2$. Poiche' il rango di B e' 8, allora devono esserci 4 blocchi di ordine 2, e 2 di ordine 1.

Poiche' una tale disposizione di blocchi soddisfa le condizioni sul rango delle potenze di B, allora possiamo concludere che la forma canonica di A e' univocamente determinata, e consiste di un blocco di ordine 5 del tipo $J_{\lambda,5}$, di quattro blocchi di ordine due del tipo $J_{\lambda,2}$, e di due blocchi di ordine 1 del tipo $J_{\lambda,1}$. ■

Esercizio 6. *Si consideri l'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito ponendo:*

$$f(x,y,z) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}z,\ -y\,,\ -\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}z\right).$$

Stabilire se esiste un sottospazio U di $\mathbf{R}^3$ tale che f coincida con l'operatore $p_U : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ di proiezione ortogonale su U. In caso di risposta affermativa, trovare una base e la dimensione di U. Rispondere alla stessa domanda per l'operatore

$$g(x, y, z) = (\frac{1}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}z,\, y\,, -\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}z).$$

Svolgimento. Ricordiamo che lo spettro di un operatore di proiezione ortogonale e' contenuto in $\{0, 1\}$. Poiche' f possiede l'autovalore $\lambda = -1$, deduciamo che il sottospazio U non esiste.

Invece, per cio' che riguarda g, lo spettro e' proprio $\{0, 1\}$. Pertanto, a priori, potrebbe esistere U, e se c'e' deve essere l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$. Tale autospazio e' generato da $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$. Ed una verifica diretta mostra che $f(x, y, z) = p_{(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 1)}(x, y, z) + p_{(0,1,0)}(x, y, z) = p_U(x, y, z)$. Percio' per l'operatore g lo spazio U esiste, ed e' il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, generato dai vettori $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 1)$, e $(0, 1, 0)$. ■

Geometria (9 CFU), I appello, 4 febbraio 2016.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ con rappresentazione cartesiana*

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x-y-z-t=0. \end{cases}$$

E sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,-1,1,1)$, $(-1,1,2,2)$, $(0,0,3,3)$. Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U\cap V$, $U+V$, ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta U si vede che una base per U e' formata dai vettori $(1,0,0,1)$, $(0,-1,1,0)$. Nel sistema di generatori per V il terzo vettore e' somma dei primi due, percio' una base per V e' formata dai vettori $(1,-1,1,1)$, $(-1,1,2,2)$. In particolare $\dim U = \dim V = 2$. Ora osserviamo che il vettore $(1,-1,1,1)$ soddisfa le equazioni di U, mentre $(-1,1,2,2)$ no. Ne deduciamo che $Span(\{(1,-1,1,1)\}) \subseteq U\cap V \neq V$, quindi $\dim U\cap V = 1$, $Span(\{(1,-1,1,1)\}) = U\cap V$, ed una base per $U\cap V$ e' data dal vettore $(1,-1,1,1)$. Per la formula di Grassmann $\dim U+V = 3$, ed una base di $U+V$ e' data dai tre vettori linearmente indipendenti $(1,0,0,1)$, $(0,-1,1,0)$, $(-1,1,2,2)$. La rappresentazione cartesiana cercata e' data dall'equazione:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 2 & z \\ 1 & 0 & 2 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' $x+y+z-t=0$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\begin{cases} 3x+3y+(2k+1)z = -2 \\ x+k^2y+kz = -1 \\ x+y+kz = -1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni p_{13}, $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-3)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & k & -1 \\ 0 & k^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{-1,1\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione che e'

$$\frac{1}{k-1}(1,0,-1)^T.$$

Se $k=1$ allora $\mathcal{S}_k$ non ha soluzioni. Se $k=-1$ allora $\mathcal{S}_k$ ammette le ∞^1 soluzioni

$$\left(-\frac{1}{2}-y, y, \frac{1}{2}\right)^T, \qquad y\in\mathbf{R}.$$

In particolare il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$ ammette solo la soluzione nulla per $k\notin\{-1,1\}$. Invece se $k=-1$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k^*$ coincide con $Span((-1,1,0))$, mentre se $k=1$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k^*$ coincide con $Span((-1,1,0),(-1,0,1))$. ■

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, , \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{b}_1 = (-1,0,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,0,0)$, $\mathbf{b}_3 = (-1,-1,1)$. Sia poi $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ l'operatore lineare tale che $f(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_3$, $f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$, $f(\mathbf{b}_3) = f(\mathbf{b}_1)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, una base del nucleo di f ed una dell'immagine, e per tali sottospazi determinare anche una rappresentazione cartesiana.*

Svolgimento. Denotiamo i vettori canonici con $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ed $\mathbf{e}_3$. Osserviamo che

$$f(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_3 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

D'altra parte, poiche' f e' lineare, abbiamo anche

$$f(\mathbf{b}_1) = f(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = -f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3).$$

Quindi otteniamo:

$$-f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Svolgendo un calcolo analogo per $f(\mathbf{b}_2)$ ed $f(\mathbf{b}_3)$ otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} -f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ -f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo:

$$f(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}, \quad f(\mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Da cui:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2. Quindi il nucleo di f e' generato da $\mathbf{e}_2$, ed ha rappresentazione cartesiana $x = z = 0$. Invece una base per l'immagine di f e' data dai vettori $(-1, 1, 0)$, $(-2, 3, 1)$, ed una rappresentazione cartesiana per l'immagine e' data dall'equazione $x + y - z = 0$. ■

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice* $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Calcolare una matrice invertibile P tale che la matrice $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia diagonale. Verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A e' $p(t) = -t(t-1)(t+4)$. La matrice cercata P ha per colonne una base di autovettori per l'operatore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \to A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$. Una base per l'autospazio V_0 di tale operatore e' costituita dal vettore $(0, 1, 0)$, una base per l'autospazio V_1 e' formata dal vettore $(1, -5, -1)$, ed una base per l'autospazio V_{-4} e' formata dal vettore $(1, -1, 0)$. La matrice P e':

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

e deve essere

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Come verifica e' sufficiente osservare che P e' invertibile, in quanto ha rango massimo. Ed inoltre osservare che $PD = AP$, cioe' che:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t+2)^3$, e l'autovalore -2 ha molteplicita' geometrica 2. Quindi la forma canonica di Jordan di A ha due blocchi, ed e'

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

e

$$(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

allora una 0-stringa per $A + 2I$ di lunghezza 2 e' data da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

D'altra parte $(0,1,0)$ e' un autovettore per $A + 2I$, indipendente dai vettori $(1,-3,-1))$, $(1,0,0)$. Quindi una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} t+1 \\ -3t \\ -t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -2(t+1)e^{-2t} + e^{-2t} = -e^{-2t}(2t+1)$$

che e' uguale a

$$-y_1 + y_3 = -e^{-2t}(t+1) - te^{-2t} = -e^{-2t}(2t+1).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -x_1 + x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 6. *Sia* $(\mathbf{R}^3, q)$ *lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica* $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$,

$$q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2.$$

Calcolare gli invarianti (n, p, r, s) *di* $(\mathbf{R}^3, q)$*, una base ortonormale, e calcolare gli invarianti dello spazio pseudoeuclideo che si ottiene restringendo* q *sul sottospazio* U *rappresentato dall'equazione* $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Svolgimento. La matrice di Gram G di $(\mathbf{R}^3, q)$ rispetto alla base canonica e'

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[G \mid I]$, dopo le operazioni p_{12}, p^{21}, $e_{21}(-1)$, $e^{21}(-1)$, $e_{32}(-1)$, $e^{32}(-1)$ si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi gli invarianti di $(\mathbf{R}^3, q)$ sono $(n, p, r, s) = (3, 3, 2, 1)$. Inoltre la base

$$\mathcal{B} := \left\{ (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0) \right\}$$

e' ortonormale per $(\mathbf{R}^3, q)$.

Lo spazio U ammette come base il sistema formato dai vettori $\mathbf{u} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$. Rispetto a tale base la matrice di Gram dello spazio $(U, q|_U)$ e':

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^T G \mathbf{u} & \mathbf{u}^T G \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^T G \mathbf{u} & \mathbf{v}^T G \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quindi gli invarianti di $(U, q|_U)$ sono $(n, p, r, s) = (2, 2, 1, 0)$. ■

Geometria (9 CFU), II appello, 23 febbraio 2016.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-4, 2, 1, h+2), (-7, 4, 2, 2h+3), (-3, 2, 1, h+1)$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dall'equazione $x + 2y + 2z + t = 0$. Al variare di h determinare la dimensione ed una base di $U_h \cap V$ e di $U_h + V$.*

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che $(-7, 4, 2, 2h+3) = (-4, 2, 1, h+2) + (-3, 2, 1, h+1)$. Poiche' i vettori $(-4, 2, 1, h+2), (-3, 2, 1, h+1)$ sono linearmente indipendenti, ne consegue che $\dim U_h = 2$ per ogni h. D'altra parte $\dim V = 3$. Quindi $\dim(U_h + V) \in \{3, 4\}$. Inoltre $\dim U_h + V = 3$ se e solo se $U_h \subset V$. Cioe' se e solo se i vettori $(-4, 2, 1, h+2), (-3, 2, 1, h+1)$ soddisfano l'equazione $x + 2y + 2z + t = 0$. Cio' avviene se e solo se $h = -4$. Riassumendo, ed applicando la formula di Grassmann, possiamo dire che:

$$\dim(U_h + V) = \begin{cases} 3 & \text{se } h = -4 \\ 4 & \text{se } h \neq -4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \dim(U_h \cap V) = \begin{cases} 2 & \text{se } h = -4 \\ 1 & \text{se } h \neq -4. \end{cases}$$

Ora se $h = -4$ allora $U_h + V = V$, e come base si puo' considerare la base di V che si ottiene risolvendo l'equazione di V, quindi $\{(-2, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$. Mentre $U_{-4} \cap V = U_{-4}$, e come base si puo' considerare $\{(-4, 2, 1, -2), (-3, 2, 1, -3)\}$.

Se invece $h \neq -4$ allora $U_{-4} + V = \mathbf{R}^4$, e come base si puo' considerare la base canonica di $\mathbf{R}^4$. Inoltre, poiche' $U_h \cap V$ ha dimensione 1, come base per $U_h \cap V$ e' sufficiente determinare un qualunque vettore non nullo in $U_h \cap V$. Un tale vettore corrisponde ad una scelta di due scalari non entrambi nulli, a e b, tali che il vettore $a(-4, 2, 1, h+2) + b(-3, 2, 1, h+1)$ soddisfi l'equazione di V. Imponendo tale condizione, si vede che si puo' prendere $a = 1$ e $b = -1$. Quindi una base per $U_h \cap V$ e' data dal vettore $(-1, 0, 0, 1)$. ■

Esercizio 2. *Si consideri la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, -1, 1)$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare la cui rappresentazione esplicita rispetto alla base $\mathcal{B}$ e': $f(x'_1, x'_2, x'_3) = (x'_1 + x'_2 + x'_3, x'_1 + 2x'_2 + 3x'_3, 2x'_1 + 3x'_2 + 4x'_3)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica, l'espressione esplicita corrispondente, una base e la dimensione del nucleo di f e dell'immagine, ed una rappresentazione cartesiana per il nucleo e per l'immagine.*

Svolgimento. Sappiamo che

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Allora l'espressione esplicita corrispondente e'

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 4x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - 6x_2 + 3x_3).$$

Osserviamo che la matrice rappresentativa ha rango 2, percio' il nucleo di f ha dimensione 1, e l'immagine ha dimensione 2. Una rappresentazione cartesiana del nucleo e' data dal sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova che una base del nucleo e' data dal vettore $(0, 1, 2)$. Invece una base dell'immagine e' data dai vettori $(2, -1, 2)$, $(2, -1, 3)$, ed una rappresentazione cartesiana dell'immagine e' data dall'equazione $x_1 + 2x_2 = 0$. ■

Esercizio 3. *La matrice A e' quadrata di ordine 4, non e' diagonalizzabile, e soddisfa le seguenti equazioni $A^5 + A^4 = A^3 + A^2$, $A^5 + 3A^4 = -3A^3 - A^2$. Elencare tutte le possibilita' per il polinomio minimo $m_A(t)$ di A, per il polinomio caratteristico $p_A(t)$, e per la forma canonica J_A.*

Svolgimento. Per ipotesi sappiamo che la matrice A e' una radice dei polinomi $t^5 + t^4 - t^3 - t^2 = t^2(t+1)^2(t-1)$, e $t^5 + 3t^4 + 3t^3 + t^2 = t^2(t+1)^3$. Poiche' A non e' diagonalizzabile, allora per $m_A(t)$ ci sono soltanto le seguenti possibilita':

$$m_A(t) \in \{t^2,\ (t+1)^2,\ t^2(t+1),\ t(t+1)^2,\ t^2(t+1)^2\}.$$

Se $m_A(t) = t^2$ allora J_A puo' essere soltanto una delle seguenti matrici (a meno dell'ordine con cui appaiono i blocchi):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In entrambi i casi $p_A(t) = t^4$.

Se $m_A(t) = (t+1)^2$ allora J_A puo' essere soltanto una delle seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

In entrambi i casi $p_A(t) = (t+1)^4$.

Se $m_A(t) = t^2(t+1)$ allora J_A puo' essere soltanto una delle seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nel primo caso abbiamo $p_A(t) = t^2(t+1)^2$, nel secondo abbiamo $p_A(t) = t^3(t+1)$.

Se $m_A(t) = t(t+1)^2$ allora J_A puo' essere soltanto una delle seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nel primo caso abbiamo $p_A(t) = t^2(t+1)^2$, nel secondo abbiamo $p_A(t) = t(t+1)^3$.

Infine, se $m_A(t) = t^2(t+1)^2$ allora J_A puo' essere soltanto la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In tal caso abbiamo $p_A(t) = t^2(t+1)^2$. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-1)(t-2)^2$, e l'autovalore 2 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A e'

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Un autovettore per l'autovalore 1 e' $(1, 0, 1)$. L'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_2$ relativo all'autovalore 2 ha rappresentazione cartesiana data dall'equazione $(A - 2I)^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, che equivale all'equazione $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$. Percio' una base per $\widetilde{V}_2$ e' data $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (-3, 2, 0)\}$. La matrice $A - 2I$ porta $(1, 0, 2)$ in $(0, 0, 0)$, e $(-3, 2, 0)$ in $(-2, 0, -4)$. Percio', rispetto alla base $\mathcal{B}$, l'operatore $A - 2I$ ristretto su $\widetilde{V}_2$ e' rappresentato dalla matrice:

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{M} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Percio' una stringa di lunghezza 2 per l'operatore $A - 2I$ ristretto su $\widetilde{V}_2$ e' data dai vettori le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono: $(-2, 0)^T$, $(0, 1)^T$, cioe' e' data dai vettori $(-2, 0, -4)$ e $(-3, 2, 0)$. Ne consegue che una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^t - e^{2t}(3+t) \\ e^{2t} \\ 4e^t - e^{2t}(3+2t) \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 1, 1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = 4e^t - e^{2t} - e^{2t}(6 + 2t)$$

che e' uguale a

$$-4y_2 + y_3 = -4e^{2t} + 4e^t - e^{2t}(3 + 2t).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -4x_2 + x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Nello spazio euclideo* $(\mathbf{R}^3, <\,,\,>)$ *definito dalla forma quadratica* $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2$, *calcolare la proiezione ortogonale* $p_U(x, y, z)$ *del generico vettore* $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ *sul sottospazio* U *definito dall'equazione* $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

Svolgimento. Cominciamo ad osservare che una base di U e' formata dai vettori $(1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$. Per proiettare (x, y, z) su U occorre ortogonalizzare tale base. Lo faremo con il procedimento di Gram-Schmidt. Poniamo innanzitutto $\mathbf{c}_1 := (1, 1, 0)$. Poi calcoliamo

$$\mathbf{c}_2 := (-1, 0, 1) - p_{(1,1,0)}(-1, 0, 1) = (-1, 0, 1) - \frac{<(-1, 0, 1)\,,\,(1, 1, 0)>}{<(1, 1, 0)\,,\,(1, 1, 0)>}(1, 1, 0) = \frac{1}{2}(-3, -1, 2).$$

Nel calcolo precedente occorre tener presente che il prodotto scalare e' eseguito utilizzando la matrice di Gram G dello spazio assegnato, rispetto alla base canonica, cioe':

$$G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

In altre parole, nello spazio euclideo assegnato, si ha, per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ed $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ in $\mathbf{R}^3$:

$$< \mathbf{x}\,, \mathbf{y} >= 3x_1y_1 - x_1y_2 + 4x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 + 4x_3y_1 - x_3y_2 + 6x_3y_3.$$

Ritornando al calcolo precedente, abbiamo dunque che i vettori $(1, 1, 0)$ e $(3, 1, -2)$ formano una base ortogonale di U. Percio'

$$p_U(x, y, z) = p_{(1,1,0)}(x, y, z) + p_{(3,1,-2)}(x, y, z) = \frac{2x + 3z}{2}(1, 1, 0) + \frac{-z}{2}(3, 1, -2) = (x, x + z, z). \blacksquare$$

Esercizio 6. *Si consideri la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determinare una matrice diagonale D ed una matrice ortogonale P tali che $D = P^{-1}AP$. Verificare che il risultato ottenuto sia esatto.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A e': $p_A(t) = -(t - 6)^2(t - 3)$. Un autovettore per l'autovalore 3 e' dato dal vettore $(1, -1, -1)$, mentre l'autospazio V_6 relativo all'autovalore 6 e' definito dall'equazione $x-y-z = 0$. Quindi una base per tale autospazio e' data dai vettori $(1, 1, 0)$ e $(1, -1, 2)$. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt, otteniamo la seguente base ortogonale di V_6: $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 2)$. Allora le matrici cercate sono:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Possiamo verificare il risultato osservando che:

$$PD = AP = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 3\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{6} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), III appello, 22 giugno 2016.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dall'equazione $8x - y + z = 0$, e V il sottospazio generato dai vettori $(1,1,1)$, $(0,1,-1)$, $(2,5,-1)$. Calcolare una base e la dimensione per U, V, $U \cap V$, e $U + V$. Motivando la risposta dire se e' vero oppure no che $V = Span((1,2,0),(1,0,2),(2,2,2))$.*

Svolgimento. Risovendo l'equazione $8x - y + z = 0$ otteniamo la seguente base di U: $\{(1,8,0), (-1,0,8)\}$. In particolare $\dim U = 2$. Poi osserviamo che $(2,5,-1) = 2(1,1,1) + 3(0,1,-1)$, percio' V ha dimensione 2, ed una sua base e' formata dai vettori $(1,1,1),(0,1,-1))$. Poi un'equazione cartesiana di V e' data da:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \end{bmatrix} = -2x + y + z = 0.$$

Quindi una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ e' data dal sistema lineare:

$$\begin{cases} 8x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema vediamo che $U \cap V$ ha dimensione 1 ed e' generato dal vettore $(1,5,-3)$. Per la formula di Grassmann allora $U + V = \mathbf{R}^3$, ed una sua base e' la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Infine osserviamo che tutti e tre i vettori $(1,2,0),(1,0,2),(2,2,2)$ soddisfano l'equazione di V, percio' V contiene $Span((1,2,0),(1,0,2),(2,2,2))$. D'altra parte V e $Span((1,2,0),(1,0,2),(2,2,2))$ hanno la stessa dimensione. Quindi $V = Span((1,2,0),(1,0,2),(2,2,2))$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro h in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(h)$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}(h) := \begin{cases} 3x + (h-3)y + (2h+5)z = 2h - 4 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + (h-2)y + (h+5)z = h - 2. \end{cases}$$

Dire per quali valori di h il sistema e' compatibile, ed in tal caso determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}(h)$.

Svolgimento. Dopo aver eseguito le operazioni elementari $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-3)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{3,2}(-1)$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & h & 2h-1 & 2h-4 \\ 0 & 0 & 2-h & 2-h \end{bmatrix}.$$

Quindi se $h \notin \{0,2\}$ il sistema $\mathcal{S}(h)$ e' un sistema di Cramer e pertanto ammette un'unica soluzione, data da

$$\left(-\frac{2h+3}{h}, -\frac{3}{h}, 1\right).$$

Restano da esaminare i casi $h = 0$ e $h = 2$.

Nel caso $h = 0$, dopo l'ulteriore operazione elementare $e_{3,2}(2)$, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

In tal caso allora il rango della matrice incompleta e' 2, mentre quello della matrice completa e' 3, ed il sistema $\mathcal{S}(0)$ e' incompatibile.

Nel caso $h = 2$ la matrice (*) diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema $\mathcal{S}(2)$ e' compatibile, di rango 2. Ammette pertanto ∞^1 soluzioni, corrispondenti alla variabile libera z, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S}(2))$ di $\mathcal{S}(2)$ e' data dalla funzione:

$$z \in \mathbf{R} \to \left(-\frac{7}{2}z, -\frac{3}{2}z, z\right) \in Sol(\mathcal{S}(2). \ ■$$

Esercizio 3. *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, sia $f_k : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle condizioni $f(1,1,0) = (1, 2k-1, 0)$, $f(0,1,1) = (1-k, k-4, k)$, $f(0,0,1) = (1-k, -4, k)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_k)$ di f_k rispetto alla base canonica. Calcolare base e dimensione per* $\ker f_k$ *ed* $\mathrm{Im} f_k$. *Infine determinare i valori di k per cui f_k e' diagonalizzabile, e per tali valori calcolare una base di autovettori per f_k ed una matrice invertibile P_k tale che $P_k^{-1} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_k) P_k$ sia una matrice diagonale.*

Svolgimento. Le condizioni che definiscono f_k ci dicono che:

$$\begin{cases} f_k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f_k(\mathbf{e}_1) + f_k(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + (2k-1)\mathbf{e}_2 \\ f_k(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = f_k(\mathbf{e}_2) + f_k(\mathbf{e}_3) = (1-k)\mathbf{e}_1 + (k-4)\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3 \\ f_k(\mathbf{e}_3) = (1-k)\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Da qui si deduce:

$$\begin{cases} f_k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + (k-1)\mathbf{e}_2 \\ f_k(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{e}_2 \\ f_k(\mathbf{e}_3) = (1-k)\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

E percio':

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-k \\ k-1 & k & -4 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

Poiche' $\det M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_k) = k^2$, se $k \neq 0$ il rango dela matrice rappresentativa e' 3. Quindi in tal caso l'immagine di f_k ha dimensione 3, quindi e' $\mathbf{R}^3$, mentre il nucleo di f_k ha dimensione 0. In particolare il nucleo di f_k ha il vuoto come base, mentre l'immagine di f_k ammette come base la base canonica. Se $k = 0$ il rango della matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_0)$ e' 2. In tal caso il nucleo di f_0 ha dimensione 1, ed una sua base e' data dal vettore $(0,1,0)$, e l'immagine di f_0 ha dimensione 2, ed una sua base e' formata dai vettori $(1,-1,0)$ e $(1,-4,0)$.

Infine, il polinomio caratteristico di f_k e' $p_{f_k}(t) = -(t-1)(t-k)^2$. Ora osserviamo che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_k) - kI = \begin{bmatrix} 1-k & 0 & 1-k \\ k-1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiche' $m_g(k) = 3 - \mathrm{rk}\left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_k) - kI\right)$, allora $m_g(k) = 1$ se $k \notin \{-3, 1\}$, e $m_g(k) = 2$ se $k \in \{-3, 1\}$. Ne consegue che f_k e' diagonalizzabile se e soltanto se $k = -3$. In tal caso l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$ e' generato dal vettore $(1,-1,0)$, mentre l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = -3$ e' generato dai vettori $(0,1,0)$ e $(1,0,-1)$. Quindi una base di autovettori per f_{-3} e' data da $\{(1,-1,0),(0,1,0),(1,0,-1)\}$, e come matrice P_{-3} si puo' considerare:

$$P_{-3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

Esercizio 4. *Motivando la risposta, dire se le seguenti matrici sono simili, e se sono congruenti:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -6 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di A utilizzando operazioni elementari (la prima consiste nel sommare alla prima colonna la seconda):

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -1 & 4 \\ -1 & 1-t & -4 \\ 4 & -4 & -2-t \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -t & -1 & 4 \\ -t & 1-t & -4 \\ 0 & -4 & -2-t \end{bmatrix}$$

$$= (-t) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1-t & -4 \\ 0 & -4 & -2-t \end{bmatrix} = (-t) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2-t & -8 \\ 0 & -4 & -2-t \end{bmatrix} = -t^3 + 36t.$$

Con un calcolo analogo si vede che

$$p_B(t) = -t^3 + 6t^2 + 72t.$$

Quindi le due matrici non sono simili perche' hanno polinomi caratteristici diversi. Invece sono congruenti. Infatti entrambe hanno rango 2, e, per il Criterio di Cartesio, hanno un unico autovalore positivo. Percio' le due matrici hanno lo stesso rango, lo stesso indice e la stessa segnatura. Per il Teorema di Sylvester le due matrici sono congruenti. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 4x_2 - 4x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t+1)^3$, e l'autovalore -1 ha molteplicita' geometrica 2. Quindi la forma canonica di Jordan di A ha due blocchi, ed e'

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A + I = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

e

$$(A+I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

allora una 0-stringa per $A + I$ di lunghezza 2 e' data da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+I} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

D'altra parte $(0, -1, 1)$ e' un autovettore per $A + I$, indipendente dai vettori $(-2, 0, 1))$, $(1, 0, 0)$. Quindi una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1-10t \\ 1 \\ 1+5t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,1,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -(1-10t)e^{-t} + e^{-t}(-10) = e^{-t}(10t-11)$$

che e' uguale a

$$-3y_1 - 4y_2 - 4y_3 = e^{-t}(-3+30t-4-4-20t) = e^{-t}(10t-11).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -3x_1 - 4x_2 - 4x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 6. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x - y - 5z + t = 0 \\ 2x - 2y - 10z = 0. \end{cases}$$

Calcolare una base ortogonale di U, ed una base ortogonale del suo complemento ortogonale $U^\perp$. Infine decomporre il vettore $(1,-1,22,5)$ nella somma di un vettore parallelo ad U ed di uno ortogonale ad U.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare omogeneo che rappresenta U, otteniamo la base $\mathcal{B}$ di U costituita dai vettori $(1,1,0,0)$, $(5,0,1,0)$. Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a tali vettori si deduce che una base ortogonale per U e' formata dai vettori $(1,1,0,0)$, $(5,-5,2,0)$.

Il complemento ortogonale di U e' formato da quei vettori $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$ che sono ortogonali a tutti i vettori di U. Cio' equivale a dire che (x,y,z,t) e' ortogonale ai vettori di una fissata base di U. Se consideriamo la base $\mathcal{B}$ vediamo che una rappresentazione cartesiana di $U^\perp$ e' data dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 5x + z = 0. \end{cases}$$

Con un ragionamento simile a quello svolto per U, deduciamo che una base ortgonale per $U^\perp$ e' data dai vettori $(1,-1,-5,0)$, $(0,0,0,1)$.

Infine per calcolare la decomposizione richiesta, ricordiamo che:

$$(1,-1,22,5) = p_U(1,-1,22,5) + p_{U^\perp}(1,-1,22,5).$$

Per calcolare tali proiezioni occorre utilizzare le basi ortogonali calcolate. Si deduce che:

$$(1,-1,22,5) = p_U(1,-1,22,5) + p_{U^\perp}(1,-1,22,5) = (5,-5,2,0) + (-4,4,20,5).$$

Cioe' i vettori richiesti sono, rispettivamente, $(5,-5,2,0)$ e $(-4,4,20,5)$. ■

Geometria (9 CFU), IV appello, 12 luglio 2016.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia V_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1+h, 1, 1, h-1)$, $(1, 1, 2+h, h)$, $(2, 2, 3, -1)$, e sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(2, 0, 0, -1)$, $(2, 0, 1, 0)$, $(-3, 1, 0, 0)$. Al variare di $h \in \mathbf{R}$ calcolare una base e la dimensione di $V_h \cap U$, e dire per quali valori di h si ha $V_h = U$.*

Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che i generatori di U sono liberi, quindi U ha dimensione 3, ed un'equazione cartesiana di U e' data da:

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} = x + 3y - 2z + 2t = 0.$$

Ora disponiamo in riga i generatori di V_h:

$$\begin{bmatrix} 1+h & 1 & 1 & h-1 \\ 1 & 1 & 2+h & h \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il minore di tale matrice formato dalle prime tre righe e dalle prime tre colonne ha determinante pari a $-h(1+2h)$, percio' i tre generatori di V_h sono liberi se $h \notin \{-\frac{1}{2}, 0\}$. In tal caso allora $\dim V_h = 3$ ed una rappresentazione cartesiana per V_h e'data dall'equazione:[1]

$$\det \begin{bmatrix} 1+h & 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 1 & 2+h & 3 & z \\ h-1 & h & -1 & t \end{bmatrix} = h(1+2h)(x - 3y + z - t) = 0.$$

Quindi se $h \notin \{-\frac{1}{2}, 0\}$ allora $V_h \cap U$ e' rappresentato dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 2t = 0 \\ x - 3y + z - t = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si vede che, se $h \notin \{-\frac{1}{2}, 0\}$, allora $V_h \cap U$ ha dimensione 2, ed una sua base e' data dai vettori $(1, 1, 2, 0)$, $(1, 1, 0, -2)$.

Infine andiamo ad esaminare i due casi rimanenti.

Se $h = 0$ allora V_0 e' generato dai vettori $(1, 1, 1, -1)$, $(1, 1, 2, 0)$, $(2, 2, 3, -1)$. Osserviamo che il terzo vettore e' la somma dei primi due. Inoltre i primi due vettori soddisfano l'equazione di U. Quindi in tal caso V_0 ha dimensione 2, e' contenuto in U, $V_0 \cap U = V_0$, ed una base per $V_0 \cap U$ e' data dai vettori $(1, 1, 1, -1)$, $(1, 1, 2, 0)$.

Se $h = -\frac{1}{2}$ allora $V_{-\frac{1}{2}}$ ha dimensione 2, ed e' generato dai vettori $(1, 2, 2, -3)$, $(2, 2, 3, -1)$. Il primo vettore non soddisfa l'equazione di U, mentre il secondo la soddisfa. Percio' $V_{-\frac{1}{2}} \cap U$ ha dimensione 1 ed e' generato dal vettore $(2, 2, 3, -1)$.

[1] Infatti con le operazioni p_{12}, p_{23}, $e_{21}(-1)$, $e_{43}(-1)$, $e_{41}(2)$ otteniamo:

$$\det \begin{bmatrix} 1+h & 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 1 & 2+h & 3 & z \\ h-1 & h & -1 & t \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & y \\ 1 & 2+h & 3 & z \\ 1+h & 1 & 2 & x \\ h-1 & h & -1 & t \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & y \\ 0 & h+1 & 1 & z-y \\ 1+h & 1 & 2 & x \\ -2 & h-1 & -3 & t-x \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & y \\ 0 & h+1 & 1 & z-y \\ 1+h & 1 & 2 & x \\ 0 & h+1 & 1 & t-x+2y \end{bmatrix},$$

e sviluppando rispetto alla prima colonna si ha:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & y \\ 0 & h+1 & 1 & z-y \\ 1+h & 1 & 2 & x \\ 0 & h+1 & 1 & t-x+2y \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} h+1 & 1 & z-y \\ 1 & 2 & x \\ h+1 & 1 & t-x+2y \end{bmatrix} + (1+h) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ h+1 & 1 & z-y \\ h+1 & 1 & t-x+2y \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} h+1 & 1 & z-y \\ 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & t-x+3y-z \end{bmatrix} + (1+h) \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & y \\ h+1 & 1 & z-y \\ 0 & 0 & t-x+3y-z \end{bmatrix} = h(1+2h)(x-3y+z-t).$$

Concludiamo osservando che dall'analisi precedente segue che non esiste alcun valore di h per cui $V_h = U$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili x, y:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} kx + (k+8)y = -2 \\ (k-1)x + 9y = -3. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema e' compatibile, ed in tal caso determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}(k)$.

Svolgimento. Dopo aver eseguito le operazioni elementari $e_{2,1}(-1)$, e_{-1}, $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-k)$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 0 & -k^2+2k+8 & -2-k \end{bmatrix}.$$

Si osservi che $-k^2+2k+8 = -(k+2)(k-4)$. Quindi se $k \notin \{-2, 4\}$ il sistema $\mathcal{S}(k)$ e' un sistema di Cramer e pertanto ammette un'unica soluzione, data da

$$\left(-\frac{3}{k-4}, \frac{1}{k-4}\right).$$

Restano da esaminare i casi $k = -2$ e $k = 4$.

Nel caso $k = -2$, il sistema assegnato e' equivalente alla singola equazione $x - 3y = 1$. Percio' $\mathcal{S}(-2)$ ammette ∞^1 soluzioni, corrispondenti alla variabile libera y, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S}(-2))$ di $\mathcal{S}(-2)$ e' data dalla funzione:

$$y \in \mathbf{R} \to (1+3y, y) \in Sol(\mathcal{S}(-2)).$$

Infine osserviamo che per $k = 4$, la matrice (*) si riduce alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

E' chiaro che in tal caso il sistema $\mathcal{S}(4)$ non ha soluzioni. ■

Esercizio 3. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ha il nucleo rappresentato dall'equazione $x - y + 4z = 0$, e soddisfa la condizione $f(-4, -1, 1) = (12, 3, -3)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica. Dire se e' vero oppure no che $\mathbf{R}^3$ possiede una base formata da autovettori per f.*

Svolgimento. Dall'equazione assegnata deduciamo che i vettori $(1, 1, 0)$, $(-4, 0, 1)$ formano una base per il nucleo di f. Aggiungendo il vettore $(-4, -1, 1)$ formiamo una base di $\mathbf{R}^3$, che e' evidentemente una base di autovettori per f:

$$\mathcal{A} = \{(1, 1, 0), (-4, 0, 1), (-4, -1, 1\}.$$

Per calcolare la matrice rappresentativa di f procediamo come segue:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 16 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 4. *Una matrice quadrata A, $n \times n$, possiede un unico autovalore λ. Sapendo che $rk(A - \lambda \cdot I)^i = 9 - i$ per ogni i tale che $1 \leq i \leq 8$, determinare la forma canonica J_A di A, il polinomio caratteristico $p_A(t)$, e quello minimo $m_A(t)$.*

Svolgimento. Poiche' λ e' l'unico autovalore di A, allora la matrice $A - \lambda \cdot I$ e' nilpotente. Poiche' per ipotesi $\mathrm{rk}(A - \lambda \cdot I)^8 = 1$ allora l'indice di nilpotenza di $A - \lambda \cdot I$ e' $p = 9$. Inoltre poiche' $\mathrm{rk}(A - \lambda \cdot I) = 8$ allora $J_{A-\lambda \cdot I}$ possiede un unico blocco di ordine 9, e tutti gli altri sono nulli. Percio' possiamo dire che J_A e' formata da un unico blocco $J_{\lambda,9}$ di ordine 9, a da $n - 9$ blocchi $J_{\lambda,1}$ di ordine 1. In particolare $p_A(t) = (t - \lambda)^n$ e $m_A(t) = (t - \lambda)^9$. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-2)^3$, e l'autovalore 2 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A ha un solo blocco, ed e'

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad (A-2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

allora una 0-stringa per $A - 2I$ di lunghezza 3 e' data da

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-2I} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-2I} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-2I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^2}{2} + t + 1 \\ \frac{t^2}{2} - t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0,1,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = e^{2t}(t^2 + t)$$

che e' uguale a

$$3y_1 - y_3 = e^{2t}\left(\frac{3t^2}{2} - \frac{t^2}{2} + t\right) = e^{2t}(t^2 + t).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 3x_1 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. Infatti abbiamo:

$$\dot{y}_2 = e^{2t}(-t^2 + t + 3)$$

che e' uguale a

$$-y_1 + 3y_2 + 2y_3 = e^{2t}\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{3t^2}{2} + 3t + 3 + t^2 - 2t\right) = e^{2t}(-t^2 + t + 3),$$

ed anche

$$\dot{y}_3 = e^{2t}(t^2 - t - 1)$$

che e' uguale a

$$y_1 - y_2 = e^{2t}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} - t - 1\right) = e^{2t}(t^2 - t - 1). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x - y - 3t = 0 \\ x - z - t = 0. \end{cases}$$

Posto $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 17)$, calcolare la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su U e su $U^\perp$. Rispondere alla stessa domanda per il vettore $\mathbf{w} = (-2, 1, 1, 4)$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare omogeneo che rappresenta U, otteniamo la base $\mathcal{B}$ di U costituita dai vettori $(1, 1, 1, 0)$, $(1, -2, 0, 1)$. Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a tali vettori si deduce che una base ortogonale per U e' formata dai vettori $(1, 1, 1, 0)$, $(4, -5, 1, 3)$. Quindi:

$$p_U(\mathbf{v}) = p_{(1,1,1,0)}(\mathbf{v}) + p_{(4,-5,1,3)}(\mathbf{v}) = (5, -4, 2, 3).$$

Deduciamo che

$$p_{U^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - p_U(\mathbf{v}) = (-4, 5, -1, 14).$$

Per cio' che concerne $\mathbf{w}$, osserviamo che $\mathbf{w} \in U^\perp$, percio'

$$p_U(\mathbf{w}) = \mathbf{0}, \quad p_{U^\perp}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), V appello, 14 settembre 2016.

Esercizio 1. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ha il nucleo contenente il sottospazio U di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dal sistema lineare:*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Inoltre f soddisfa le condizioni $f(2,-1,0) = (1,1,0)$ e $f(1,0,-1) = (1,1,-2)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica, una base e la dimensione di $\ker f$ ed $\mathrm{im} f$, ed una loro rappresentazione cartesiana. Infine dire se e' vero oppure no che $\ker f$ e' il complemento ortogonale di $\mathrm{im} f$.

Svolgimento. Dal sistema assegnato deduciamo che il vettore $(-1,1,0)$ appartiene al nucleo di f. Poiche' $\dim \ker f \geq 1$ e dim im$f \geq 2$, allora per il Teorema della dimensione si ha $\dim \ker f = 1$ e dim im$f = 2$. In particolare una base per $\ker f$ e' formata dal vettore $(-1,1,0)$, ed una base per l'immagine e' formata dai vettori $(1,1,0)$ e $(1,1,-2)$, ed e' vero che $\ker f$ e' il complemento ortogonale di im$f$. Una rappresentazione cartesiana del nucleo e' data proprio dal sistema assegnato, mentre una rappresentazione per l'immagine e' data dall'equazione $x - y = 0$. Infine, posto $\mathcal{B} = \{(2,-1,0), (1,0,-1), (-1,1,0)\}$, per calcolare la matrice rappresentativa di f procediamo come segue:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili x, y, z:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} 2x + 2y + (k^2 - 5k + 4)z = k - 2 \\ 2x + ky - z = 1 \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema e' compatibile, ed in tal caso determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}(k)$.

Svolgimento. Dopo aver eseguito le operazioni elementari $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-2)$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2 - 5k + 6 & k - 2 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che $k^2 - 5k + 6 = (k-2)(k-3)$. Quindi se $k \notin \{2,3\}$ il sistema $\mathcal{S}(k)$ e' un sistema di Cramer e pertanto ammette un'unica soluzione, data da

$$(x, y, z) = \frac{1}{(k-2)(k-3)}\,(2, k-4, k-2)\,.$$

Restano da esaminare i casi $k = 2$ e $k = 3$.

Nel caso $k = 2$, il sistema assegnato e' equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

Percio' $\mathcal{S}(2)$ ammette ∞^1 soluzioni, corrispondenti alla variabile libera y, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S}(2))$ di $\mathcal{S}(2)$ e' data dalla funzione:

$$y \in \mathbf{R} \to (1 - y, y, 1) \in Sol(\mathcal{S}(2))\,.$$

Infine osserviamo che per $k = 3$, la matrice (*) si riduce alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In tal caso il sistema $\mathcal{S}(3)$ non ha soluzioni. ■

Esercizio 3. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, sia assegnato un operatore non nullo $f_k : V \to V$ su uno spazio vettoriale finitamente generato V. Si assuma che f_k soddisfi le seguenti condizioni:*

$$f_k^3 - k^2 f_k = k^2 id_V - f_k^2 \quad e \quad f_k^3 - k^2 f_k = f_k^2 - k^2 id_V.$$

Per quali valori di k l'operatore f_k e' diagonalizzabile?

Svolgimento. L'operatore f_k soddisfa le equazioni:

$$t^3 - k^2 t + t^2 - k^2 = 0 \quad \text{e} \quad t^3 - k^2 t - t^2 + k^2 = 0.$$

Poiche' $t^3 - k^2t + t^2 - k^2 = (t+1)(t^2 - k^2)$ e $t^3 - k^2t - t^2 + k^2 = (t-1)(t^2 - k^2)$, allora il polinomio minimo $m_{f_k}(t)$ di f_k e' un fattore del polinomio $t^2 - k^2$. Percio' $m_{f_k}(t)$ e' prodotto di fattori lineari distinti se $k \neq 0$, ed in tal caso f_k e' diagonalizzabile. Se invece $k = 0$, allora f_0 e' nilpotente. Poiche' f_0 non e' nullo per ipotesi, allora non puo' essere diagonalizzabile. In conclusione, f_k e' diagonalizzabile se e solo se $k \neq 0$. ■

Esercizio 4. *Completare la seguente matrice ad una matrice ortogonale:*

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & * & * \\ \frac{1}{3} & * & * \\ * & -\frac{1}{3} & * \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Ricordiamo che una matrice ortogonale e' una matrice le cui colonne hanno lunghezza 1, e sono ortogonali tra loro. Sia $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, z)$ la prima colonna della matrice assegnata. Allora deve essere $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + z^2 = 1$, cioe' $z^2 = \frac{4}{9}$. Dunque possiamo scegliere $z = \frac{2}{3}$. Sia $(x, y, -\frac{1}{3})$ la seconda colonna. Allora x ed y devono soddisfare le condizioni:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{9} = 0 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{9} = 1. \end{cases}$$

Quindi $y = -2x + \frac{2}{3}$, e sostituendo si trova:

$$45x^2 - 24x - 4 = 0.$$

Risolvendo tale equazione, possiamo scegliere $x = \frac{2}{3}$ e quindi $y = -\frac{2}{3}$. Per calcolare l'ultima colonna, andiamo prima a cercare un vettore (x, y, z) ortogonale alle prime due colonne:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0. \end{cases}$$

Il vettore $(1, 2, -2)$ risolve il sistema, e quindi come terza colonna possiamo scegliere $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$. In conclusione, una matrice che completa a matrice ortogonale quella assegnata e':

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t+2)^3$, e l'autovalore -2 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A ha un solo blocco, ed e'

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A + 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (A+2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad (A-2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

allora una 0-stringa per $A + 2I$ di lunghezza 3 e' data da

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} - t \\ 1 \\ -\frac{t^2}{2} - 2t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0,1,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = e^{-2t}(t^2 + t - 1)$$

che e' uguale a

$$-3y_1 - y_2 + y_3 = e^{-2t}\left(\frac{3t^2}{2} + 3t - 1 - \frac{t^2}{2} - 2t\right) = e^{-2t}(t^2 + t - 1).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 3x_1 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. Infatti abbiamo:

$$\dot{y}_2 = -2e^{-2t}$$

che e' uguale a

$$-2y_2 = -2e^{-2t},$$

ed anche

$$\dot{y}_3 = e^{-2t}(t^2 + 3t - 2)$$

che e' uguale a

$$-y_1 - 2y_2 - y_3 = e^{-2t}\left(\frac{t^2}{2} + t - 2 + \frac{t^2}{2} + 2t\right) = e^{-2t}(t^2 + 3t - 2). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia* $(\mathbf{R}^3, \phi)$ *lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica*

$$q(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_3^2.$$

Dire se esiste un cambiamento delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ *tale che*

$$q(\mathbf{x}') = {x_1'}^2 + 2x_1'x_2' + 6x_1'x_3' - 3{x_2'}^2 - 4x_2'x_3' - {x_3'}^2.$$

Svolgimento. Consideriamo la matrice di Gram di q rispetto alle coordinate x_1, x_2, x_3:

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

e la matrice di Gram rispetto alle coordinate x_1', x_2', x_3':

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiche' le matrici G e G' hanno lo stesso rango $p = 3$ e lo stesso indice $r = 1$, allora sono congruenti, cioe' esiste una matrice invertibile P tale che $G' = P^T G P$. Il cambiamento delle coordinate $\mathbf{x} = P \cdot \mathbf{x}'$ portera' $q(\mathbf{x})$ in $q(\mathbf{x}')$, e percio' la risposta e' si'. ■

Geometria (9 CFU), VI appello, 22 settembre 2016.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(4,-1,2,-2)$, $(4,1,2,2)$, $(0,1,0,2)$, e V il sottospazio rappresentato dal sistema lineare:*

$$\begin{cases} 3x-6y-2z+t=0 \\ 2x-4y-2z+t=0 \\ 5x-10y-4z+2t=0. \end{cases}$$

Calcolare una base per $U\cap V$ ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che, tra i generatori di U, $(4,1,2,2)$ e' sovrabbondante, cioe' $U = Span((4,-1,2,-2),(0,1,0,2))$. Poi risolvendo il sistema che rappresenta V si vede che

$$V = Span((2,1,0,0),(0,0,1,2)).$$

Allora $U+V = Span((4,-1,2,-2),(0,1,0,2),(2,1,0,0),(0,0,1,2))$. Anche in questo caso c'e' un vettore sovrabbondante, cioe' il vettore $(4,-1,2,-2)$. Quindi i tre vettori $(0,1,0,2),(2,1,0,0),(0,0,1,2)$ formano una base di $U+V$, e percio' la dimensione di $U+V$ e' 3, e la dimensione di $U\cap V$ e' 1. Una rappresentazione cartesiana di $U+V$ si ottiene imponendo che:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 2 & 2 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' $x-2y-2z+t=0$. Infine, poiche' $\dim U\cap V = 1$, per ottenere una base di $U\cap V$ sara' sufficiente calcolare un vettore non nullo di $U\cap V$. Il generico vettore di $U\cap V$ e' del tipo:

$$\mathbf{x} = a(0,1,0,2)+b(4,-1,2,-2) = (4b, a-b, 2b, 2a-2b), \quad a,b\in\mathbf{R}.$$

Tale vettore appartiene a V se e solo se soddisfa le equazioni di V. Si deduce che $a=3b$, percio' una base di $U\cap V$ e' formata dal vettore $(2,1,1,2)$. ∎

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} 2x+3y+(2k-10)z = 2k-3 \\ 3x+5y+(2k-9)z = 2k \\ x+2y+(k-4)z = k-1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema e' compatibile, ed in tal caso determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}(k)$. Rispondere alla stessa domanda per il sistema omogeneo associato.

Svolgimento. Dopo aver eseguito le operazioni elementari $p_{1,3}$, $p_{2,3}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-3)$, $e_{3,2}(-1)$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & k-4 & k-1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5-k & 4-k \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k\neq 5$ il sistema e' di Cramer, ed ammette un'unica soluzione data da:

$$(x,y,z) = \frac{1}{k-5}(4k-17, 3-k, k-4).$$

Se invece $k=5$ e' evidente che il sistema e' incompatibile.

Per quel che riguarda il sistema omogeneo associato, allora se $k\neq 5$ il sistema ammette solo la soluzione banale $(0,0,0)$. Se invece $k=5$, il sistema omogeneo associato equivale al sistema:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -y-2z=0. \end{cases}$$

Percio' in tal caso ci sono ∞^1 soluzioni, tutte multiplo del vettore $(3,-2,1)$. ∎

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{M}(2,2)$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine 2. Sia $f : \mathcal{M}(2,2) \to \mathcal{M}(2,2)$ l'operatore lineare definito ponendo:*

$$f(M) := \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \cdot M.$$

Determinare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathcal{M}(2,2)$, la dimensione ed una base per il nucleo e per l'immagine di f, una base di $\mathcal{M}(2,2)$ formata da autovettori per f.

Svolgimento. Sia

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

la base canonica. Osserviamo che:

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio' la prima colonna della matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ e' data dal vettore $(-1, 0, -3, 0)$. Similmente si calcolano le altre colonne, e si ottiene:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p_f(t) = p_A(t)^2 = (t+5)^2(t+4)^2$. In particolare f non ammette 0 come autovalore, quindi il nucleo di f e' banale, ha dimensione 0, e l'immagine e' tutto $\mathcal{M}(2,2)$. Entrambi gli autovalori hanno molteplicita' geometrica 2, quindi f e' diagonalizzabile. Il calcolo degli autospazi mostra che una base di autovettori e' data dalle matrici:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Per esempio, l'autospazio V_{-5} relativo all'autovalore $\lambda = -5$ e' formato dalle matrici $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ tali che

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cioe' dalle matrici $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ tali che

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0. \end{cases}$$

Quindi

$$V_{-5} = \left\{ \begin{bmatrix} -z & -t \\ z & t \end{bmatrix} : z, t \in \mathbf{R} \right\} = Span\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Sia A una matrice nilpotente 10×10. Sapendo che il rango di A^3 e' 3, determinare tutte le possibilita' per la forma canonica di A, il polinomio caratteristico, e quello minimo.*

Svolgimento. Poiche' A e' nilpotente allora A ha soltanto l'autovalore nullo, e $rkA^{i+1} < rkA^i$ per ogni $i \geq 1$ che sia strettamente minore dell'indice di nilpotenza p. Per cui rkA^4 e' uguale a 0 oppure ad 1, oppure a 2.

Esaminiamo prima il caso $rkA^4 = 0$. In tal caso la matrice avrebbe indice di nilpotenza $p = 4$. Nella forma canonica J_A di A ci sarebbe almeno un blocco di ordine 4, e tutti gli altri blocchi avrebbero ordine ≤ 4. Un blocco di ordine 4 contribuisce al rango di A^3 con 1, e blocchi di ordine minore non forniscono alcun contributo al rango di A^3. Poiche' il rango di A^3 e' 3, dovrebbero esserci 3 blocchi di ordine 4, cosa impossibile in quanto A e' 10×10. Percio' non e' possibile che $rkA^4 = 0$.

Supponiamo ora che $rkA^4 = 1$. Allora $rkA^5 = 0$ e l'indice di nilpotenza e' $p = 5$. In J_A c'e' almeno un blocco di ordine 5. Tale blocco contribuisce al rango di A^3 con 2. Quindi non ci possono essere altri blocchi di ordine 5, e deve esserci un blocco di ordine 4 per far si' che il rango di A^3 sia 3. Rimane spazio solo per un altro blocco di ordine 1.

Quindi il caso $rkA^4 = 1$ e' possibile, e J_A e' unica, essendo formata da un blocco di ordine 5, uno di ordine 4 ed uno di ordine 1. Il polinomio caratteristico evidentemente e' $p_A(t) = t^{10}$, mentre quello minimo e' $m_A(t) = t^5$.

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Infine esaminiamo il caso $rkA^4 = 2$. Se $rkA^5 = 0$, allora $p = 5$, e c'e' almeno un blocco di ordine 5. Tale blocco contribuisce al rango di A^4 con 1, per cui ci dovrebbero essere due blocchi di ordine 5. Ma cio' e' impossibile, perche' allora il rango di A^3 sarebbe 4. Quindi non e' possibile che $rkA^4 = 2$ e $rkA^5 = 0$. Se invece $rkA^4 = 2$ e $rkA^5 = 1$, allora $rkA^6 = 0$. In questo caso c'e' un unico blocco di ordine 6, e per i rimanenti blocchi, o sono tutti di ordine 1, oppure uno di ordine 2 e due di ordine 1, oppure due di ordine 2, oppure uno di ordine 3 ed uno di ordine 1. Il polinomio caratteristico e' $p_A(t) = t^{10}$, mentre quello minimo e' $m_A(t) = t^6$.

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

oppure

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

oppure

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

oppure

$$J_A = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{matrix} & \\ & & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = 7x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-2)(t+3)^2$, e l'autovalore -3 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di A ha due blocchi, ed e'

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A + 3I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 7 & 6 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad (A+3I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 25 & 25 & 0 \\ -25 & -25 & 0 \end{bmatrix},$$

allora l'equazione $x + y = 0$ rappresenta l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_{-3}$. Percio' i vettori $(1, -1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ formano una base per $\widetilde{V}_{-3}$. L'operatore $A + 3I$ porta entrambi i vettori della base in $(-1, 1, 1)$. Quindi la matrice rappresentativa della restrizione di $A + 3I$ su $\widetilde{V}_{-3}$, rispetto alla base precedente, e':

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice M e' nilpotente di indice 2, e una 0-stringa per M di lunghezza 2 e' data da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto che $(1, 0)$ corrisponde al vettore $(1, -1, 0)$, e che il vettore $(-1, 1)$ corrisponde al vettore $(-1, 1, 1)$, ne consegue che una stringa di lunghezza 2 per A relativa all'autovalore $\lambda = -3$ e' data dai vettori $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$.

Inoltre un autovettore per A relativo all'autovalore $\lambda = 2$ e' dato dal vettore $(0, 1, -1)$. In conclusione, una base a stringhe per A e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t}(1-2t) \\ e^{-3t}(2t-1) + e^{2t} \\ e^{-3t}(1+2t) - e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = e^{-3t}(6t - 5)$$

che' e' uguale a

$$-5y_1 - y_2 - y_3 = e^{-3t}(-5 + 10t + 1 - 2t - 1 - 2t) = e^{-3t}(6t - 5).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -5x_1 - x_2 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. Infatti abbiamo:

$$\dot{y}_2 = e^{-3t}(-6t + 5) + 2e^{2t}$$

che' e' uguale a

$$7y_1 + 3y_2 + y_3 = e^{-3t}(7 - 14t - 3 + 6t + 1 + 2t) + e^{2t}(3 - 1) = e^{-3t}(-6t + 5) + 2e^{2t},$$

ed anche

$$\dot{y}_3 = e^{-3t}(-6t - 1) - 2e^{2t}$$

che e' uguale a

$$-3y_1 - 4y_2 - 2y_3 = e^{-3t}\,(-3 + 6t + 4 - 8t - 2 - 4t) + e^{2t}(-4 + 2) = e^{-3t}(-6t - 1) - 2e^{2t}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia* $(\mathbf{R}^4, \phi)$ *lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica*

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 4xy + 6xz + 4xt - y^2 + 2yz - 2yt + 3z^2 - 2zt.$$

Determinare un sottospazio U *di* $(\mathbf{R}^4, \phi)$ *di dimensione* 2 *tale che* $\phi_{|U\times U}$ *sia definita negativa. Esiste un sottospazio siffatto avente dimensione* 3*?*

Svolgimento. La matrice di Gram di ϕ rispetto alla base canonica e':

$$G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice

$$\left[\, G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi) \,|\, I \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si perviene alla matrice

$$(*) \qquad \left[\, D \,|\, P^T \,\right] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denotata con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^4$ formata dalle colonne di P, sappiamo che $G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = D$. Posto allora $\mathcal{B}' := \{-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$ ed $U := Span(\mathcal{B}')$, si avra'

$$G_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\phi_{|U \times U}) = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} < 0$$

e percio' U costituisce l'esempio richiesto.

Supponiamo ora che esista un sottospazio V di dimensione 3 tale che $\phi_{|V \times V}$ sia definita negativa. Sia allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base ortonormale di $(V, \phi_{|V \times V})$, e sia $\mathcal{C} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ un'estensione di $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ a base di $\mathbf{R}^4$. La matrice di Gram di ϕ rispetto a $\mathcal{C}$ sara' del tipo

$$G_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\phi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Applicando a tale matrice l'algoritmo di Gauss-Lagrange si dedurrebbe che l'indice di ϕ e' al massimo 1, mentre, da (*), sappiamo che tale indice e' 2. Questo ragionamento prova che lo spazio V non esiste. ■

Geometria (9 CFU), I appello, 31 gennaio 2017.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ con rappresentazione cartesiana*

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+t=0. \end{cases}$$

E sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-3,0,1,6)$, $(-6,-1,2,9)$, $(-9,-1,3,15)$. Calcolare una base per $U \cap V$, ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta U si vede che una base per U e' formata dai vettori $(0,-1,1,0)$, $(-1,0,0,1)$. Nel sistema di generatori per V il terzo vettore e' somma dei primi due, percio' una base per V e' formata dai vettori $(-3,0,1,6)$, $(-6,-1,2,9)$. Mettendo insieme la base di U con quella di V si ottiene il seguente sistema di generatori per $U+V$:

$$(0,-1,1,0),(-1,0,0,1),(-3,0,1,6),(-6,-1,2,9).$$

Riducendo a scala per righe la matrice che si ottiene disponendo tali vettori in riga, si vede che il quarto vettore e' sovrabbondante. Ne consegue che una rappresentazione cartesiana per $U+V$ e' data dall'equazione:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & x \\ -1 & 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 6 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' $x-3y-3z+t=0$.

Allo scopo di calcolare una base di $U \cap V$, osserviamo che una rappresentazione cartesiana di V si ottiene imponendo che la matrice

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 2 & z \\ 6 & 9 & t \end{bmatrix}$$

abbia rango 2. Si deduce che

$$\begin{cases} x+3z=0 \\ 3y+6z-t=0 \end{cases}$$

e' una rappresentazione cartesiana di V. Quindi una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ e' data dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+t=0 \\ x+3z=0 \\ 3y+6z-t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si vede che $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base e' data dal vettore $(-3,-1,1,3)$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\begin{cases} x-(2+k)z=2 \\ x+(k^2+3k+2)y-(1+k)z=2 \\ x+(k^2+3k+2)y+z=3. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, $e_{32}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2-k & 2 \\ 0 & k^2+3k+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che $k^2+3k+2=(k+2)(k+1)$. Quindi se $k \notin \{-2,-1\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione che e'

$$\frac{1}{(k+2)^2(k+1)}(3(k+2)^2(k+1),-1,(k+2)(k+1))^T.$$

Invece se $k \in \{-2,-1\}$ il sistema $\mathcal{S}_k$ non ammette soluzioni.

Il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$ ammette solo la soluzione nulla per $k \notin \{-2,-1\}$. Invece se $k \in \{-2,-1\}$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k^*$ coincide con $Span((0,1,0))$. ■

Esercizio 3. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ha il nucleo rappresentato dall'equazione cartesiana $x+y+2z=0$, ed inoltre soddisfa la condizione $f(1,0,0)=(-1,1,1)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica, una base per il nucleo ed una per l'immagine di f, il polinomio caratteristico e quello minimo di f, ed una base di autovettori di f.*

Svolgimento. Dall'equazione del nucleo deduciamo che una base per il nucleo di f e' data dai due vettori $(-1,1,0)$, $(-2,0,1)$. Ne consegue che il vettore $(-1,1,1)$ costituisce una base per l'immagine di f. Osserviamo anche che il sistema di vettori:

$$\mathcal{B} := \{(-1,1,0),(-2,0,1),(1,0,0)\}$$

forma una base per $\mathbf{R}^3$ ed abbiamo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quindi f e' diagonalizzabile, il polinomio caratteristico di f e' $p_f(t)=-t^2(t-2)$, e quello minimo e' $m_f(t)=t(t-2)$. Poiche'

$$\begin{cases} -f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_2)=\mathbf{0} \\ -2f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_3)=\mathbf{0} \\ f(\mathbf{e}_1)=-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \end{cases}$$

ne consegue che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ed una base di autovettori per f e' data dai vettori $(-1,1,0),(-2,0,1),(-1,1,1)$. ■

Esercizio 4. La matrice A e' quadrata di ordine n ed ha un solo autovalore $\lambda=2$. Sapendo che $\text{rk}(A-2I)=5$ e che $\text{rk}(A-2I)^4=1$, determinare la forma canonica J_A di A, il suo polinomio caratteristico $p_A(t)$, e quello minimo $m_A(t)$.

Svolgimento. Poiche' la matrice $A-2I$ e' nilpotente, e $\text{rk}(A-2I)^4=1$, necessariamente deve essere $\text{rk}(A-2I)^5=0$, cioe' l'indice di nilpotenza di $A-2I$ e' $p=5$. Quindi abbiamo:

$$\begin{cases} \mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5=n \\ \mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=5 \\ \mu_1+\mu_2+\mu_3=\text{rk}(A-2I)^2 \\ \mu_1+\mu_2=\text{rk}(A-2I)^3 \\ \mu_1=\text{rk}(A-2I)^4=1. \end{cases}$$

Dovendo essere $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4 \leq \mu_5$, si ha

$$\mu_1=1, \quad \mu_2=1, \quad \mu_3=1, \quad \mu_4=2, \quad \mu_5=n-5.$$

Percio' la forma canonica di A e' formata da un solo blocco $J_{2,5}$ di ordine 5 relativo all'autovalore $\lambda=2$, un solo blocco $J_{2,2}$ di ordine 2, e di $n-7$ blocchi $J_{2,1}$ di ordine 1. In particolare $p_A(t)=(-1)^n(t-2)^n$, ed $m_A(t)=(t-2)^5$. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-4x_1+2x_2+3x_3 \\ \dot{x}_2=5x_1-3x_2-4x_3 \\ \dot{x}_3=-6x_1+4x_2+5x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0)=0 \\ x_2(0)=0 \\ x_3(0)=1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -4 \\ -6 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di L_A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per L_A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t(t+1)^2$, e l'autovalore -1 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di L_A ha due blocchi, ed e'

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vettore del nucleo di L_A e'

$$(1, -1, 2).$$

D'altra parte, poiche'

$$(A+I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

allora l'equazione $x + 2y + z = 0$ rappresenta l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_{-1}$ per L_A relativo a $\lambda = -1$. Una base per tale autospazio generalizzato e'

$$\mathcal{B} := \{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

La matrice che rappresenta l'operatore L_{A+I} rispetto a tale base e'

$$M = \begin{bmatrix} -12 & -9 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che una base a stringhe per L_A e' data dalle colonne della matrice

$$P = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -9 & 0 & -1 \\ 12 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

la cui inversa e' la matrice

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 9 & 18 & 9 \end{bmatrix}.$$

Siamo in grado di calcolare la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$. Essa e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -9 & 0 & -1 \\ 12 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 9 & 18 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + e^{-t}(2t-1) \\ -1 + e^{-t}(-3t+1) \\ 2 + e^{-t}(4t-1) \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0,0,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -(2t-1)e^{-t} + 2e^{-t} = e^{-t}(3-2t)$$

che e' uguale a

$$-4y_1 + 2y_2 + 3y_3 = e^{-t}(-8t+4-6t+2+12t-3) = e^{-t}(3-2t).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -4x_1 + 2x_2 + 3x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. Infatti abbiamo:

$$\dot{y}_2 = -(-3t+1)e^{-t} - 3e^{-t} = e^{-t}(3t-4)$$

che e' uguale a

$$5y_1 - 3y_2 - 4y_3 = e^{-t}(10t-5+9t-3-16t+4) = e^{-t}(3t-4),$$

ed infine

$$\dot{y}_3 = -(4t-1)e^{-t} + 4e^{-t} = e^{-t}(5-4t)$$

che e' uguale a

$$-6y_1 + 4y_2 + 5y_3 = e^{-t}(-12t+6-12t+4+20t-5) = e^{-t}(5-4t). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia* $(\mathbf{R}^3, q)$ *lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica* $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$*, dove*

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Calcolare gli invarianti (n,p,r,s) *di* $(\mathbf{R}^3, q)$*, ed una base ortonormale. Rispondere alla stessa domanda per lo spazio pseudoeuclideo che si ottiene restringendo* q *sul sottospazio* U *generato dai vettori* $(1,-1,1)$, $(1,1,0)$.

Svolgimento. La matrice di Gram G di $(\mathbf{R}^3, q)$ rispetto alla base canonica e'

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[G \mid I]$, dopo le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, $e^{21}(-1)$, $e^{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi gli invarianti di $(\mathbf{R}^3, q)$ sono $(n,p,r,s) = (3,3,2,1)$. Inoltre la base

$$\mathcal{C} := \left\{ (1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), (-1,1,0) \right\}$$

e' ortonormale per $(\mathbf{R}^3, q)$.

Rispetto alla base $(1,-1,1)$, $(1,1,0)$, la matrice di Gram dello spazio $(U, q|_U)$ e':

$$G' := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[G' \mid I_2]$, dopo le operazioni $e_{21}(-\frac{3}{2})$, $e^{21}(-\frac{3}{2})$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi gli invarianti di $(U, q|_U)$ sono $(n,p,r,s) = (2,2,1,0)$, ed una base ortonormale e' data dai vettori $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,5,-3)$. $\blacksquare$

Geometria (9 CFU), II appello, 27 febbraio 2017.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ con rappresentazione cartesiana $x+3y+2z=0$. E sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,-1,0)$, $(3,0,-1)$, $(4,-1,-1)$, $(2,1,-1)$. Calcolare una base per $U\cap V$.*

Svolgimento. Una base per V e' formata dai vettori $(1,-1,0)$, $(3,0,-1)$. Quindi una rappresentazione cartesiana per V e' data dall'equazione $x+y+3z=0$. Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases}$$

si vede che una base per $U\cap V$ e' data dal vettore $(-7,1,2)$. $\blacksquare$

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\begin{cases} x+(k-2)y+(k-2)z=2 \\ x+(2k-4)y+(2k-4)z=4 \\ x+(k-2)y+(k^2-5k+6)z=k-2. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & k-2 & k-2 & 2 \\ 0 & k-2 & k-2 & 2 \\ 0 & 0 & (k-2)(k-4) & k-4 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k\notin\{2,4\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione che e'

$$\frac{1}{k-2}(0,1,1)^T.$$

Invece se $k=2$ il sistema $\mathcal{S}_2$ non ammette soluzioni. E se $k=4$ il sistema $\mathcal{S}_4$ ammette ∞^1 soluzioni date da $(0,1-z,z)$, $z\in\mathbf{R}$.

Il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$ ammette solo la soluzione nulla per $k\notin\{2,4\}$. Invece se $k=2$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_2^*$ coincide con $Span((0,1,0),(0,0,1))$. E se $k=4$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_4^*$ coincide con $Span((0,-1,1))$. $\blacksquare$

Esercizio 3. *L'operatore lineare $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ ha la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ rispetto alla base $\mathcal{B}:=\{(-3,-2,-1),(-2,-1,0),(-2,-1,1)\}$ data da:*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix} 14 & 5 & 0 \\ -26 & -8 & 3 \\ 8 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica, e dire per quali valori del parametro $h\in\mathbf{R}$ l'immagine di f coincide con $U_h:=Span((1,2,1),(1,h,1))$.

Svolgimento. La matrice rappresentativa rispetto alla base canonica e':

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$$

$$=\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 14 & 5 & 0 \\ -26 & -8 & 3 \\ 8 & 2 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

In particolare l'immagine di f ha dimensione 2 ed e' rappresentata dall'equazione $x-z=0$. Percio' l'immagine di f e' uguale ad U_h se e solo se $h\neq 2$. $\blacksquare$

Esercizio 4. La matrice A e' quadrata di ordine 3, e soddisfa le seguenti equazioni: $A^3-A=I-A^2$, $A^3-A=A^2-I$. Elencare tutte le possibilita' per la forma canonica J di A, il polinomio caratteristico $p_A(t)$, ed il polinomio minimo $m_A(t)$.

Svolgimento. Per ipotesi la matrice A soddisfa le equazioni: $t^3+t^2-t-1=0$, $t^3-t^2-t+1=0$. Poiche' $t^3+t^2-t-1=(t+1)^2(t-1)$ e $t^3-t^2-t+1=(t+1)(t-1)^2$, ne consegue che $m_A(t)$ e' un fattore di $(t+1)(t-1)$. Quindi A e' diagonalizzabile, $m_A(t)\in\{t+1, t-1, (t+1)(t-1)\}$, e per J_A ci sono le seguenti possibilita':

$$J_A=\pm\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad J_A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&\pm1\end{bmatrix}.$$

In particolare $p_A(t)\in\{-(t+1)^3, -(t-1)^3, -(t+1)^2(t-1), -(t+1)(t-1)^2\}$. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases}\dot{x}_1=2x_1+x_2+x_3\\ \dot{x}_2=-11x_1-5x_2-4x_3\\ \dot{x}_3=7x_1+3x_2+2x_3\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1(0)=0\\ x_2(0)=0\\ x_3(0)=1.\end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t)=e^{At}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A:=\begin{bmatrix}2&1&1\\-11&-5&-4\\7&3&2\end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di L_A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per L_A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t)=-t^2(t+1)$, e l'autovalore 0 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di L_A ha due blocchi, ed e'

$$J=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore $\lambda=-1$ e'

$$(0,-1,1).$$

D'altra parte, poiche'

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\5&2&1\\-5&-2&-1\end{bmatrix}$$

allora l'equazione $5x+2y+z=0$ rappresenta l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_0$ per L_A relativo a $\lambda=0$. Una base per tale autospazio generalizzato e'

$$\mathcal{B}:=\{(-2,5,0),(-1,0,5)\}.$$

Rispetto a tale base, la matrice che rappresenta l'operatore L_A ristretto a $\widetilde{V}_0$ e'

$$M=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3&-9\\1&3\end{bmatrix}.$$

Ne consegue che una base a stringhe per L_A e' data dalle colonne della matrice

$$P=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-3&5&-1\\1&0&1\end{bmatrix},$$

la cui inversa e' la matrice

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Siamo in grado di calcolare la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$. Essa e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ e^{-t} - 1 - 3t \\ 2 + t - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0, 0, 1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = 1$$

che e' uguale a

$$2y_1 + y_2 + y_3 = 2t + (e^{-t} - 1 - 3t) + (2 + t - e^{-t}) = 1.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. Infatti abbiamo:

$$\dot{y}_2 = -e^{-t} - 3$$

che e' uguale a

$$-11y_1 - 5y_2 - 4y_3 = -11t - 5(e^{-t} - 1 - 3t) - 4(2 + t - e^{-t}) = -e^{-t} - 3,$$

ed infine

$$\dot{y}_3 = e^{-t} + 1$$

che e' uguale a

$$7y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 7t + 3(e^{-t} - 1 - 3t) + 2(2 + t - e^{-t}) = e^{-t} + 1. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia* $(\mathbf{R}^3, q)$ *lo spazio euclideo definito dalla forma quadratica* $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$*,*

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2.$$

Calcolare la proiezione ortogonale $p_U(x, y, z)$ *in* $(\mathbf{R}^3, q)$ *del generico vettore* $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ *sul sottospazio* U *di* $\mathbf{R}^3$ *generato dai vettori* $(-1, 2, 0)$*,* $(0, 2, 1)$*.*

Svolgimento. Innanzitutto calcoliamo, tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt, una base ortogonale di U. Poniamo quindi

$$\mathbf{b}_1 := (-1, 2, 0)$$

e

$$\mathbf{b}_2 := (0, 2, 1) - p_{(-1,2,0)}(0, 2, 1) = (0, 2, 1) - (-1, 2, 0) = (1, 0, 1).$$

Nel calcolo precedente abbiamo utilizzato la formula

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}.$$

Quindi una base ortogonale di U in $(\mathbf{R}^3, q)$ e' data dai vettori $(-1, 2, 0)$, $(1, 0, 1)$. Ne consegue:

$$p_U(x, y, z) = p_{(-1,2,0)}(x, y, z) + p_{(1,0,1)}(x, y, z) = (x + y - z)(-1, 2, 0) + \frac{2x + y + 2z}{4}(1, 0, 1)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-2x - 3y + 6z, 8x + 8y - 8z, 2x + y + 2z\right). \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), III appello, 28 giugno 2017.

Esercizio 1. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4$. Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dall'equazione cartesiana $x + y + z + ht = 0$. Al variare di $h \in \mathbf{R}$ calcolare una base e la dimensione di $V \cap U_h$.*

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che i tre generatori di V sono liberi, per cui $\dim V = 3$. Poi osserviamo che i vettori $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ soddisfano l'equazione di U_h per ogni h. Percio' $2 \leq \dim V \cap U_h \leq 3$. Inoltre il vettore $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4$ appartiene ad U_h se e solo se $h = 1$. Tenuto conto che anche U_h ha dimensione 3, segue che se $h = 1$ allora $V = U_1$, quindi in tal caso $V \cap U_1 = V$, $\dim V \cap U_1 = 3$, ed una base per $V \cap U_1$ e' data dalla base di V assegnata dal testo. Se invece $h \neq 1$, allora $V \cap U_h \neq V$. Quindi $V \cap U_h = \mathrm{Span}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$. Percio' in tal caso $\dim V \cap U_h = 2$, ed una base per $V \cap U_h$ e' data dai vettori $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. ∎

Esercizio 2. *Al variare del parametro h in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_h$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} 3x + (h+2)y + (h+10)z = 2h + 6 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + (h+3)y + 5z = h + 3. \end{cases}$$

Dire per quali valori di h il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato $\mathcal{S}_h^*$. Per quali valori di h l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_h$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^3$?

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_h$ con le operazioni p_{12}, p_{23}, $e_{21}(-2)$, $e_{31}(-3)$, $e_{32}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & h+5 & 1 & h+3 \\ 0 & 0 & h+3 & h+3 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $h \notin \{-5, -3\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_h$ e' di Cramer, percio' ammette un'unica soluzione che e'

$$\frac{1}{h+5}(-h-8, h+2, h+5)^T.$$

Invece se $h = -5$ il sistema $\mathcal{S}_{-5}$ non ammette soluzioni. E se $h = -3$ il sistema $\mathcal{S}_{-3}$ ammette ∞^1 soluzioni date da $z(-5, -1, 2)$, $z \in \mathbf{R}$. Il caso $h = -3$ e' l'unico caso in cui l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_h$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^3$, perche' e' l'unico caso in cui il sistema $\mathcal{S}_h$ e' omogeneo.

Il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_h^*$ ammette solo la soluzione nulla per $h \notin \{-5, -3\}$. Invece se $k = -5$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{-5}^*$ coincide con $Span((1, 1, 0))$. E se $h = -3$ allora l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{-3}^* = \mathcal{S}_{-3}$ coincide con $Span((-5, -1, 2))$. ∎

Esercizio 3. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le condizioni: $f(1, 1, 0) = (2, 0, 0)$, $f(1, 0, 1) = (3, -2, 1)$ ed $f(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Calcolare una base $\mathcal{A}$ di autovettori per f, ed una matrice diagonale D tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = D$.*

Svolgimento. Per le ipotesi sappiamo che:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 \\ f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Poiche' f e' lineare si ha:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 \\ f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Da cui si deduce

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Percio':

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p(t) = -(t-1)^2(t-2)$. L'autospazio V_2 e' generato da $(1,-1,0)$, mentre l'autospazio V_1 e' generato dai vettori $(0,1,0)$, $(-1,0,1)$. Percio' la base di autovettori cercata e':

$$\mathcal{A} = \{(0,1,0), (-1,0,1), (1,-1,0)\},$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 + 4x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di L_A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per L_A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$, e l'autovalore 1 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di L_A ha due blocchi, ed e'

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 2$ e'

$$(5,4,1).$$

D'altra parte, poiche'

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

allora i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ formano una stringa di lunghezza 2 relativa all'autovalore $\lambda = 1$. Ne consegue che una base a stringhe per L_A e' data dalle colonne della matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la cui inversa e' la matrice

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siamo in grado di calcolare la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$. Essa e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5-4t)e^t + 5e^{2t} \\ -4e^t + 4e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0,0,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = (-9-4t)e^t + 10e^{2t}$$

che e' uguale a

$$y_1 + y_2 + y_3 = (-9-4t)e^t + 10e^{2t}.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. Infatti abbiamo:

$$\dot{y}_2 = -4e^t + 8e^{2t}$$

che e' uguale a

$$y_2 + 4y_3 = -4e^t + 8e^{2t},$$

ed infine

$$\dot{y}_3 = 2e^{2t}$$

che e' uguale a

$$2y_3 = 2e^{2t}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione cartesiana $x - 2y + 4z = 0$. Determinare una base ortonormale di U ed una di $U^\perp$.*

Svolgimento. Risolvendo l'equazione di U vediamo che U ammette come base i vettori $(2,1,0)$, $(-4,0,1)$. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt, otteniamo la seguente base ortonormale per U:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0),\ \frac{1}{\sqrt{105}}(-4,8,5).$$

Una base per il complemento ortogonale di U e' data dai coefficienti dell'equazione di U, percio' una base ortonormale per $U^\perp$ e' data dal vettore:

$$\frac{1}{\sqrt{21}}(1,-2,4). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Fare un esempio di uno spazio pseudoeuclideo (V,ϕ), con indice $r > 0$, avente sottospazi U e W tali che $U^\perp = U$ e $W^{\perp\perp} \neq W$ (il complemento ortogonale $R^\perp$ di un sottospazio R di V e', per definizione, l'insieme di tutti i vettori $\mathbf{v} \in V$ tali che $\phi(\mathbf{v},\mathbf{r}) = 0$ per ogni $\mathbf{r} \in R$; anche $R^\perp$ e' un sottospazio di V).*

Svolgimento. Consideriamo $(\mathbf{R}^3, \phi)$, con

$$\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

Sottospazi che soddisfano le condizioni richieste sono il sottospazio U di $\mathbf{R}^3$ generato da $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$, ed il sottospazio W di $\mathbf{R}^3$ generato da $\mathbf{e}_1$. $\blacksquare$

Geometria (9 CFU), IV appello, 14 luglio 2017.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-5,-1,2,0)$, $(9,-1,0,2)$, $(-7,0,1,-1)$. Calcolare una base e la dimensione di $U \cap V$, essendo V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente la seguente rappresentazione cartesiana:*

$$\begin{cases} x-y+3z-6t=0 \\ x+3z-5t=0. \end{cases}$$

Svolgimento. I vettori $(-5,-1,2,0)$, $(9,-1,0,2)$ formano una base per U. A partire da tali vettori ci calcoliamo una rappresentazione cartesiana di U, data dal sistema lineare:

$$\begin{cases} -x+5y+7t=0 \\ 2y+z+t=0. \end{cases}$$

Mettendo a sistema con le equazioni di V otteniamo la seguente rappresentazione cartesiana di $U \cap V$:

$$\begin{cases} x-y+3z-6t=0 \\ x+3z-5t=0 \\ -x+5y+7t=0 \\ 2y+z+t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si vede che $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base e' data dal vettore $(2,-1,1,1)$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro h in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_h$ nelle variabili x, y:*

$$\begin{cases} 2x+(h+4)y=h+5 \\ x+(h+3)y=h+4. \end{cases}$$

Dire per quali valori di h il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato $\mathcal{S}_h^*$. Per quali valori di h l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_h$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^2$?

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_h$ con le operazioni p_{12}, $e_{21}(-2)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & h+3 & h+4 \\ 0 & -h-2 & -h-3 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $h \neq -2$ allora il sistema $\mathcal{S}_h$ e' di Cramer, percio' ammette un'unica soluzione che e'

$$\frac{1}{h+2}(-1, h+3)^T.$$

Invece se $h=-2$ il sistema $\mathcal{S}_{-2}$ non ammette soluzioni.

Per cio' che riguarda $\mathcal{S}_h^*$, esso ammette solo la soluzione nulla per $h \neq -2$, mentre per $h=-2$ ammette ∞^1 soluzioni date da $(-y,y)^T$, $y \in \mathbf{R}$.

Infine osserviamo che $\mathcal{S}_h$ non e' mai un sistema omogeneo, percio' non esistono valori di h per cui l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_h$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. ■

Esercizio 3. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dalla base $\mathcal{B} := \{(2,3,2),(3,5,4)\}$. L'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ possiede il sottospazio U come sottospazio invariante, e la restrizione φ di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ ha come matrice rappresentativa:*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sapendo che $f(1,1,1)=(2,2,2)$, calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica, una base per il nucleo di f, ed una per l'immagine. Infine dire se f possiede oppure no una base di autovettori.

Svolgimento. Se aggiungiamo alla base di U il vettore $(1,1,1)$, otteniamo una base di $\mathbf{R}^3$:

$$\mathcal{C} := \{(1,1,1),(2,3,2),(3,5,4)\}.$$

Per ipotesi sappiamo che

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

In particolare il nucleo e' generato dal vettore $(1,1,0)$, mentre l'immagine e' generata dai vettori $(1,4,2)$, $(1,1,1)$. Infine, utilizzando la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ vediamo subito che il polinomio caratteristico di f e' $p_f(t) = -t(t-2)(t-3)$. Percio', avendo f tre autovalori distinti, e' diagonalizzabile. Dunque si', f possiede una base di autovettori. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 8x_2 + 14x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 8 & 14 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di L_A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per L_A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^2(t-1)$, e l'autovalore 0 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di L_A ha due blocchi, ed e'

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cominciamo a studiare l'autovalore $\lambda = 0$. L'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_0$ relativo a $\lambda = 0$ ha rappresentazione cartesiana data da

$$A^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Poiche'

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

allora $\widetilde{V}_0$ e' costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0.$$

Una base $\mathcal{B}$ per $\widetilde{V}_0$ e' data dai vettori $(-2,1,0)$, $(-4,0,1)$. La funzione

$$L_A : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \to A \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$$

porta il vettore $(-2,1,0)$ nel vettore

$$A \cdot (-2,1,0)^T = (2,1,-1)^T = 1 \cdot (-2,1,0)^T + (-1) \cdot (-4,0,1)^T,$$

e porta il vettore $(-4,0,1)$ nel vettore

$$A \cdot (-4,0,1)^T = (2,1,-1)^T = 1 \cdot (-2,1,0)^T + (-1) \cdot (-4,0,1)^T.$$

Percio' la matrice rappresentativa della restrizione φ di L_A su $\widetilde{V}_0$

$$\varphi : \mathbf{x} \in \widetilde{V}_0 \to A \cdot \mathbf{x} \in \widetilde{V}_0,$$

riferita alla base $\mathcal{B}$, e':

$$M := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ammette la seguente stringa:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{M} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi i vettori $(2,1,-1)^T$, $(-2,1,0)^T$ formano le prime due colonne della matrice P.

Poi osserviamo che un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 1$ e'

$$(1,-2,1).$$

Ne consegue che una base a stringhe per L_A e' data dalle colonne della matrice

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la cui inversa e' la matrice

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Siamo in grado di calcolare la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$. Essa e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t + e^t \\ 2 + t - 2e^t \\ -1 - t + e^t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = 2 + e^t$$

che e' uguale a

$$3y_1 + 8y_2 + 14y_3 = 2 + e^t.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 3x_1 + 8x_2 + 14x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. Infatti abbiamo:

$$\dot{y}_2 = 1 - 2e^t$$

che e' uguale a

$$-y_1 - y_2 - 3y_3 = 1 - 2e^t,$$

ed infine

$$\dot{y}_3 = -1 + e^t$$

che e' uguale a

$$-y_2 - y_3 = e^t - 1. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione cartesiana $x - y - 2z = 0$. Determinare due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ tali che $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{b} \in U^\perp$, e $(1,1,2) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.*

Svolgimento. Sappiamo che $\mathbf{a}$ e' la proiezione ortogonale di $(1,1,2)$ su U, e che $\mathbf{b}$ e' la proiezione ortogonale di $(1,1,2)$ su $U^\perp$. Sara' sufficiente calcolare $p_{U^\perp}(1,1,2)$. Poiche' $U^\perp$ e' generato dal vettore $(1,-1,-2)$, allora

$$\mathbf{b} = p_{U^\perp}(1,1,2) = p_{(1,-1,-2)}(1,1,2) = -\frac{2}{3}(1,-1,-2).$$

Ne consegue

$$(1,1,2) = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \frac{1}{3}(5,1,2) + \left(-\frac{2}{3}(1,-1,-2)\right). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri la seguente forma quadratica definita in $\mathbf{R}^3$:*

$$q_h(x,y,z) = hx^2 + 2hxy + 2hxz + (h+2)y^2 + 2hyz + (h+1)z^2.$$

Per quali valori di h la restrizione di q_h sul sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ rappresentato dall'equazione $x - y + z = 0$ e' definita positiva?

Svolgimento. Il sistema di vettori

$$\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$$

e' una base di U. La matrice di Gram rispetto a tale base della restrizione e':

$$\begin{bmatrix} <\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2> & <\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3> \\ <\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3> & <\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3> \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4h+2 & 4h+2 \\ 4h+2 & 4h+3 \end{bmatrix}.$$

Con l'algoritmo di Gauss-Lagrange si puo' portare tale matrice nella matrice:

$$\begin{bmatrix} 4h+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E tale matrice e' definita positiva se e solo se $h > -\frac{1}{2}$. $\blacksquare$

Geometria (9 CFU), V appello, 6 settembre 2017.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(h, 1, -1, 1)$ e $(h, h, -h, h+2)$. Sia inoltre V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente la seguente rappresentazione cartesiana:*

$$\begin{cases} x - 2y + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ 2x - 3y - z + 2t = 0. \end{cases}$$

Determinare i valori di h per i quali si ha $\mathbf{R}^4 = U_h \oplus V$.

Svolgimento. Il sottospazio V ha dimensione 2, ed e' generato dai vettori $(2, 1, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 1)$. Percio' $\mathbf{R}^4 = U_h \oplus V$ se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ h & 1 & -1 & 1 \\ h & h & -h & h+2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Cioe' se e solo se $h^2 - h - 2 \neq 0$. L'equazione $h^2 - h - 2 = 0$ ammette come radici $h = -1$ ed $h = 2$. Percio', in conclusione, $\mathbf{R}^4 = U_h \oplus V$ se e solo se $h \notin \{-1, 2\}$. ■

Esercizio 2. *Al variare dei parametri h, k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_{h,k}$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} x + hy + (h + k + 1)z = k + 2 \\ x + hy + kz = 3 \\ x + y + (h + 2)z = k. \end{cases}$$

Dire per quali valori di h e k il sistema lineare assegnato ammette un'unica soluzione, per quali valori ammette infinite soluzioni, e per quali valori il sistema e' incompatibile. Per quali valori di h e k l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{h,k}$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^3$?

Svolgimento. Applicando le operazioni elementari $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, p_{23} alla matrice completa del sistema $\mathcal{S}_{h,k}$, si perviene alla matrice:

$$M_{h,k} := \begin{bmatrix} 1 & h & h+k+1 & k+2 \\ 0 & 1-h & 1-k & -2 \\ 0 & 0 & -h-1 & 1-k \end{bmatrix}.$$

Percio' se $h \notin \{-1, 1\}$, il sistema $\mathcal{S}_{h,k}$ e' di Cramer, ed ammette una sola soluzione.

Se $h = -1$ abbiamo:

$$M_{-1,k} := \begin{bmatrix} 1 & -1 & k & k+2 \\ 0 & 2 & 1-k & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{bmatrix}.$$

Percio' in tal caso non ci sono soluzioni per $k \neq 1$, e ci sono infinite soluzioni per $k = 1$.

Se $h = 1$ abbiamo:

$$M_{1,k} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & k+2 & k+2 \\ 0 & 0 & 1-k & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1-k \end{bmatrix}.$$

Riducendo ulteriormente tale matrice con le operazioni p_{23} ed $e_{32}(\frac{1-k}{2})$, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & k+2 & k+2 \\ 0 & 0 & -2 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k^2-2k-3}{2} \end{bmatrix}.$$

Percio' in tal caso non ci sono soluzioni per $k \notin \{-1, 3\}$, e ci sono infinite soluzioni per $k \in \{-1, 3\}$.

Riepilogando:

- Se $h \notin \{-1, 1\}$, il sistema $\mathcal{S}_{h,k}$ ammette un'unica soluzione.
- Se $(h, k) = (-1, 1)$ oppure $(h, k) = (1, -1)$ oppure $(h, k) = (1, 3)$, il sistema $\mathcal{S}_{h,k}$ ammette infinite soluzioni.
- In tutti gli altri casi il sistema $\mathcal{S}_{h,k}$ non ha soluzioni, cioe' e' incompatibile.

Infine osserviamo che l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{h,k}$ non e' mai un sottospazio di $\mathbf{R}^3$, perche' non ci sono valori dei parametri h e k per cui $\mathcal{S}_{h,k}$ e' omogeneo. ■

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3-\mathbf{e}_2$. Sia $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ l'operatore lineare tale che*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix}-3&-1&-4\\1&1&-1\\5&3&2\end{bmatrix}.$$

Calcolare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, una base e la dimensione per il nucleo di f, e una base e la dimensione per l'immagine di f. Dire se e' vero oppure no che il vettore $(-2,2,3)$ appartiene all'immagine di f.

Svolgimento. Sappiamo che

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)=M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})\cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}),$$

percio'

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3&-1&-4\\1&1&-1\\5&3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-1&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&-2\\-3&0&-2\\2&2&0\end{bmatrix}.$$

Ne consegue che il nucleo ha dimensione 1 ed e' generato dal vettore $(-2,2,3)$. L'immagine invece ha dimensione 2, ed e' generata dai vettori $(0,-3,2)$, $(3,0,2)$. Infine osserviamo che il vettore $(-2,2,3)$ non appartiene all'immagine di f perche' i vettori $(0,-3,2)$, $(3,0,2)$, $(-2,2,3)$ sono lineramente indipendenti. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases}\dot{x}_1=3x_1+x_3\\\dot{x}_2=-x_1+2x_2-2x_3\\\dot{x}_3=-x_1+x_3\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1(0)=1\\x_2(0)=0\\x_3(0)=1.\end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t)=e^{At}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A:=\begin{bmatrix}3&0&1\\-1&2&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t)=-(t-2)^3$. Percio' $A-2I$ e' nilpotente, e possiamo calcolare la matrice esponenziale tenendo conto della definizione:

$$e^{At}=e^{(A-2I+2I)t}=e^{2t}e^{(A-2I)t}=e^{2t}\left[I+t(A-2I)+\frac{t^2}{2}(A-2I)^2\right]$$

$$=e^{2t}\left[\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&-2\\-1&0&-1\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\right]=e^{2t}\begin{bmatrix}1+t&0&t\\\frac{t^2}{2}-t&1&\frac{t^2}{2}-2t\\-t&0&1-t\end{bmatrix}.$$

Percio' la soluzione cercata e':

$$\mathbf{y}(t)=e^{At}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=e^{2t}\cdot\begin{bmatrix}1+2t\\t^2-3t\\1-2t\end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0)=(1,0,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1=e^{2t}(4t+4)$$

che e' uguale a

$$3y_1+y_3=e^{2t}(4t+4).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1=3x_1+x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 5. *Una matrice quadrata A, $n \times n$, ha un unico autovalore $\lambda = 1$. Sapendo che $rk(A - I) = 13$, $rk(A - I)^2 = 7$, e che $rk(A - I)^3 = 3$, elencare tutte le possibilita' per la forma canonica J_A di A, per il polinomio caratteristico $p_A(t)$ di A, e per il polinomio minimo $m_A(t)$ di A.*

Svolgimento. Poiche' A ha soltanto l'autovalore $\lambda = 1$ allora la matrice $B := A - I$ e' nilpotente. Sappiamo che $\mathrm{rk}B^3 = 3$, percio' $\mathrm{rk}B^4 \in \{0, 1, 2\}$.

Cominciamo a studiare il caso $\mathrm{rk}B^4 = 0$. Cio' implica che B ha indice di nilpotenza $p = 4$. Poiche' $\mathrm{rk}B^3 = 3$ allora la forma canonica J_B di B possiede esattamente 3 blocchi di ordine 4. Ognuno di tali blocchi contribuisce al rango di B^2 con 2, percio' complessivamente tali blocchi contribuiscono con 6. Poiche' il rango di B^2 e' 7, e gli eventuali blocchi di J_B di ordine ≤ 2 non contribuiscono al rango di B^2, allora in J_B ci deve essere un blocco, ed uno solo, di ordine 3. I tre blocchi di ordine 4 ed il blocco di ordine 3 contribuiscono al rango di B con 11, quindi in J_B ci devono essere due blocchi di ordine 2, ed $n - 19$ blocchi di ordine 1. Di conseguenza, in J_A ci saranno 3 blocchi di ordine 4 relativi all'autovalore $\lambda = 1$, un blocco di ordine 3, due blocchi di ordine 2, ed $n - 19$ blocchi di ordine 1, tutti relativi all'autovalore $\lambda = 1$. In tal caso $p_A(t) = (-1)^n(t - 1)^n$, ed $m_A(t) = (t - 1)^4$.

$$J_A = \begin{bmatrix} J_{1,4} & & & & & & & & & \\ & J_{1,4} & & & & & & & & \\ & & J_{1,4} & & & & & & & \\ & & & J_{1,3} & & & & & & \\ & & & & J_{1,2} & & & & & \\ & & & & & J_{1,2} & & & & \\ & & & & & & J_{1,1} & & & \\ & & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & & J_{1,1} \end{bmatrix}.$$

Se invece $\mathrm{rk}B^4 = 1$, allora l'indice di nilpotenza di B e' $p = 5$. In J_B ci sara' un solo blocco di ordine 5. Tale blocco contribuisce al rango di B^3 con 2, percio' in J_B deve esserci solo un blocco di ordine 4. Questi due blocchi contribuiscono al rango di B^2 con 5, quindi devono esserci esattamente altri due blocchi di ordine 3, e poiche' il rango di B e' 13, dovranno esserci altri due blocchi di ordine 2. Di conseguenza, in J_A ci sara' un solo blocco di ordine 5, un blocco di ordine 4, due blocchi di ordine 3, 2 blocchi di ordine 2, ed $n - 19$ blocchi di ordine 1, tutti relativi all'autovalore $\lambda = 1$. In tal caso $p_A(t) = (-1)^n(t - 1)^n$, ed $m_A(t) = (t - 1)^5$.

$$J_A = \begin{bmatrix} J_{1,5} & & & & & & & & & \\ & J_{1,4} & & & & & & & & \\ & & J_{1,3} & & & & & & & \\ & & & J_{1,3} & & & & & & \\ & & & & J_{1,2} & & & & & \\ & & & & & J_{1,2} & & & & \\ & & & & & & J_{1,1} & & & \\ & & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & & J_{1,1} \end{bmatrix}.$$

Supponiamo infine che $\mathrm{rk}B^4 = 2$. Se $\mathrm{rk}B^5 = 0$, allora in J_B dovrebbero esserci due blocchi di ordine 5. Cio' implicherebbe che $\mathrm{rk}B^3 \geq 4$, contro le ipotesi. Percio' se $\mathrm{rk}B^4 = 2$ allora $\mathrm{rk}B^5 = 1$ e di conseguenza $\mathrm{rk}B^6 = 0$. In tal caso $p = 6$, ed in J_B c'e' un solo blocco di ordine 6, il cui cubo ha rango 3. Percio' non possono esserci blocchi di ordine 5 ne' di ordine 4. Poiche' il blocco di ordine 6 contribuisce con 4 al rango di B^2, in J_B ci saranno tre blocchi di ordine 3. Tali blocchi, insieme al blocco di ordine 6, contribuiscono al rango di B per 11, quindi in J_B ci saranno anche due blocchi di ordine 2, ed $n - 19$ blocchi di ordine 1. Di conseguenza, in J_A ci sara' un solo blocco di ordine 6, tre blocchi di ordine 3, 2 blocchi di ordine 2, ed $n - 19$ blocchi di ordine 1, tutti relativi all'autovalore $\lambda = 1$. In tal caso $p_A(t) = (-1)^n(t - 1)^n$, ed $m_A(t) = (t - 1)^6$.

$$J_A = \begin{bmatrix} J_{1,6} & & & & & & & & & \\ & J_{1,3} & & & & & & & & \\ & & J_{1,3} & & & & & & & \\ & & & J_{1,3} & & & & & & \\ & & & & J_{1,2} & & & & & \\ & & & & & J_{1,2} & & & & \\ & & & & & & J_{1,1} & & & \\ & & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & & J_{1,1} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(2,2,0)$, $(5,2,2)$. Sia $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ l'operatore lineare che ad ogni vettore $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3$ associa la proiezione ortogonale $f(\mathbf{v})=p_U(\mathbf{v})\in\mathbf{R}^3$ di $\mathbf{v}$ su U. Calcolare $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, una base e la dimensione per il nucleo di f, e una base e la dimensione per l'immagine di f. Dire se e' vero oppure no che $f^2=f$.*

Svolgimento. Sia $\mathbf{v}=(x,y,z)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^3$. Sappiamo che

$$\mathbf{v}=p_U(\mathbf{v})+p_{U^\perp}(\mathbf{v}).$$

Quindi, tenuto conto che $U^\perp$ e' generato dal vettore $(-2,2,3)$, abbiamo:

$$p_U(x,y,z)=(x,y,z)-p_{(-2,2,3)}(x,y,z)=(x,y,z)-\frac{-2x+2y+3z}{17}(-2,2,3)$$

$$=\frac{1}{17}(13x+4y+6z,4x+13y-6z,6x-6y+8z).$$

Quindi:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}13&4&6\\4&13&-6\\6&-6&8\end{bmatrix}.$$

I vettori di U stanno nell'immagine di f, ed il vettore $(-2,2,3)$ nel nucleo. Percio' il nucleo ha dimensione 1 e base formata dal vettore $(-2,2,3)$, mentre l'immagine di f ha dimensione 2 e base formata dai vettori $(2,2,0)$, $(5,2,2)$.

Infine osserviamo che, qualunque sia $\mathbf{v}$, il vettore $p_U(\mathbf{v})\in U$. Quindi $p_U(p_U(\mathbf{v}))=p_U(\mathbf{v})$. Percio' e' vero che $f^2=f$. ■

Geometria (9 CFU), VI appello, 19 settembre 2017.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente la seguente rappresentazione cartesiana:*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ (3h-2)x - (h-1)y - t = 0. \end{cases}$$

Sia inoltre V_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1, 2, h+1, h-2)$ e $(1, 2, 0, 2h)$. Determinare i valori di h per i quali si ha $\dim(U_h \cap V_h) = 1$.

Svolgimento. Applicando l'operazione elementare $e_{21}(2-3h)$ alla matrice dei coefficienti della rappresentazione cartesiana di U_h, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2h-1 & 2-3h & -1 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che tale matrice ha sempre rango 2, percio' $\dim U_h = 4 - 2 = 2$ per ogni h. Utilizzando come variabili libere y e z, deduciamo che i vettori:

$$(1, 1, 0, 2h-1), \quad (-1, 0, 1, 2-3h)$$

formano una base di U_h. D'altra parte anche V_h ha sempre dimensione 2, per ogni h. Percio', dalla formula di Grassmann, deduciamo che $\dim(U_h \cap V_h) = 1$ se e solo se $\dim(U_h + V_h) = 3$, cioe' se e solo se la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2h-1 \\ -1 & 0 & 1 & 2-3h \\ 1 & 2 & h+1 & h-2 \\ 1 & 2 & 0 & 2h \end{bmatrix}$$

ha rango 3. Applicando a tale matrice le operazioni elementari $e_{21}(1)$, $e_{31}(-1)$, $e_{41}(-1)$, $e_{32}(-1)$, $e_{42}(-1)$, p_{34}, $e_{43}(h)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2h-1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-h \\ 0 & 0 & -1 & h \\ 0 & 0 & 0 & h^2-2 \end{bmatrix}.$$

In conclusione $\dim(U_h \cap V_h) = 1$ se e solo se $h = \pm\sqrt{2}$. ∎

Esercizio 2. *Al variare dei parametri h, k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_{h,k}$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} hx + hy + kz = k \\ hx + (2h-3)y + (2k+1)z = 2k-1 \\ hx + hy + (h+k+3)z = 2k. \end{cases}$$

Dire per quali valori di h e k il sistema lineare assegnato ammette un'unica soluzione, per quali valori ammette infinite soluzioni, e per quali valori il sistema e' incompatibile. Per quali valori di h e k l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{h,k}$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}^3$?

Svolgimento. Applicando le operazioni elementari $e_{21}(-1)$ ed $e_{31}(-1)$, alla matrice completa del sistema $\mathcal{S}_{h,k}$, si perviene alla matrice:

$$M_{h,k} := \begin{bmatrix} h & h & k & k \\ 0 & h-3 & k+1 & k-1 \\ 0 & 0 & h+3 & k \end{bmatrix}.$$

Percio' se $h \notin \{-3, 0, 3\}$, il sistema $\mathcal{S}_{h,k}$ e' di Cramer, ed ammette una sola soluzione.

Se $h = 0$ abbiamo:

$$M_{0,k} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & k & k \\ 0 & -3 & k+1 & k-1 \\ 0 & 0 & 3 & k \end{bmatrix}.$$

Applicando le operazioni elementari p_{12}, p_{13} ed $e_{32}(-\frac{t}{3})$ si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & k+1 & k-1 \\ 0 & 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}(k^2-3k) \end{bmatrix}.$$

Percio' in tal caso non ci sono soluzioni per $k \notin \{0,3\}$, e ci sono infinite soluzioni per $k \in \{0,3\}$.

Se $h = 3$ abbiamo:

$$M_{3,k} := \begin{bmatrix} 3 & 3 & k & k \\ 0 & 0 & k+1 & k-1 \\ 0 & 0 & 6 & k \end{bmatrix}.$$

Riducendo ulteriormente tale matrice con le operazioni p_{23}, $e_{32}(-\frac{k+1}{6})$, ed $e_3(-6)$, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & k & k \\ 0 & 0 & 6 & k \\ 0 & 0 & 0 & k^2-5k+6 \end{bmatrix}.$$

Percio' in tal caso non ci sono soluzioni per $k \notin \{2,3\}$, e ci sono infinite soluzioni per $k \in \{2,3\}$.

Infine, se $h = -3$ allora:

$$M_{-3,k} := \begin{bmatrix} -3 & -3 & k & k \\ 0 & -6 & k+1 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

In tal caso non ci sono soluzioni per $k \neq 0$, e ce ne sono infinite se $k = 0$.

Riepilogando:

- Se $h \notin \{-3,0,3\}$, il sistema $\mathcal{S}_{h,k}$ ammette un'unica soluzione.
- Se $(h,k) = (0,0)$ oppure $(h,k) = (0,3)$ oppure $(h,k) = (3,2)$, oppure $(h,k) = (3,3)$, oppure $(h,k) = (-3,0)$, il sistema $\mathcal{S}_{h,k}$ ammette infinite soluzioni.
- In tutti gli altri casi il sistema $\mathcal{S}_{h,k}$ non ha soluzioni, cioe' e' incompatibile.

Infine osserviamo che l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{h,k}$ non e' mai un sottospazio di $\mathbf{R}^3$, perche' non ci sono valori dei parametri h e k per cui $\mathcal{S}_{h,k}$ e' omogeneo. ■

Esercizio 3. *Sia $\alpha : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'operatore lineare definito dalle condizioni $\alpha(1,0,0) = (-1,2)$, $\alpha(1,1,0) = (0,3)$, $\alpha(0,0,1) = (1,1)$. Sia inoltre $\beta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore definito dalle condizioni $\beta(1,0) = (-1,2,1)$, $\beta(1,1) = (0,3,0)$. Sia $f := \beta \circ \alpha$ l'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ che si ottiene componendo β con α. Calcolare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, una base e la dimensione per il nucleo di f, e una base e la dimensione per l'immagine di f. Dire se e' vero oppure no che f e' diagonalizzabile.*

Svolgimento. Denotiamo con $\mathcal{E}_2$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Poiche'

$$\alpha(0,1,0) = \alpha(1,1,0) - \alpha(1,0,0) = (1,1),$$

abbiamo:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}_2}(\alpha) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Similmente, poiche'

$$\beta(0,1) = \beta(1,1) - \beta(1,0) = (1,1,-1),$$

abbiamo anche:

$$M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}}(\beta) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\beta \circ \alpha) = M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}}(\beta) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}_2}(\alpha) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2. Percio' l'immagine di f ha dimensione 2, ed una base per l'immagine di f e' data dai vettori $(1,0,-1)$ e $(0,1,0)$. Il nucleo ha dimensione 1, ed e' generato dal vettore $(0,1,-1)$. Infine il polinomio caratteristico di f e':

$$p_f(t) = -t(t-3)^2.$$

Poiche' l'autovalore $\lambda = 3$ ha molteplicita' geometrica 1, ne consegue che f non e' diagonalizzabile. ■

Esercizio 4. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 - 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J_A di A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -(t+3)^3$, e la molteplicita' geometrica di $\lambda = -3$ e' 2. Quindi la forma canonica di A e' della forma:

$$J_A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A + 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

allora $\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_1$ formano una stringa di lunghezza 2 per A, mentre $\mathbf{e}_2$ forma una stringa di lunghezza 1, indipendente dai vettori precedenti. La matrice P cercata e' allora:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = Pe^{Jt}P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgendo il calcolo si trova

$$\mathbf{y}(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1-2t \\ 1 \\ 1+2t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,1,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = e^{-3t}(6t-5)$$

che e' uguale a

$$-4y_1 - y_3 = e^{-3t}(6t-5).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -4x_1 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni.

Infatti

$$\dot{y}_2 = -3e^{-3t}$$

che e' uguale a

$$-3y_2 = -3e^{-3t},$$

e

$$\dot{y}_3 = e^{-3t}(-6t-1)$$

che e' uguale a

$$y_1 - 2y_3 = e^{-3t}(-6t - 1). \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Sia* $(\mathbf{R}^3, q)$ *lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica*

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 3y^2 + 2yz - 2z^2.$$

Calcolare rango, indice e segnatura di $(\mathbf{R}^3, q)$. *Dire se esiste oppure no una base ortogonale di* $(\mathbf{R}^3, q)$ *a cui appartiene il vettore* $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$. *Rispondere alla stessa domanda per il vettore* $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$.

Svolgimento. La matrice di Gram di $(\mathbf{R}^3, q)$ rispetto alla base canonica e':

$$G = G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Affiancando a tale matrice la matrice identica I ed operando con l'algoritmo di Gauss-Lagrange, si perviene alla matrice:

$$[\,G\,|\,I\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{algoritmo di Gauss-Lagrange}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,D\,|\,P^T\,].$$

Percio' $(\mathbf{R}^3, q)$ ha rango uguale a 3, indice 2 e segnatura 1.

Quanto alle altre domande, osserviamo che $q(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_1) = 0$, percio' il vettore $\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_1$ non puo' appartenere ad una base ortogonale. Altrimenti G sarebbe congruente ad una matrice diagonale con rango ≤ 2. Invece per il vettore $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ la risposta e' si', in quanto appare come la seconda riga di P^T, e le righe di P^T formano una base ortogonale di $(\mathbf{R}^3, q)$. $\blacksquare$

Esercizio 6. *Si consideri la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 5 \\ -5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare due matrici invertibili P *e* Q*, una ortogonale e l'altra no, tali che* $P^{-1}AP$ *e* $Q^{-1}AQ$ *siano diagonali.*

Svolgimento. Le matrici richieste devono avere come colonne autovettori di A. Quindi innanzitutto calcoliamo il polinomio carattersistico di A.

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -5 & 5 \\ -5 & 1-t & 5 \\ 5 & 5 & 1-t \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1-t & -5 & 5 \\ -5 & 1-t & 5 \\ 0 & 6-t & 6-t \end{bmatrix} = (6-t)\det \begin{bmatrix} 1-t & -5 & 5 \\ -5 & 1-t & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (6-t)\det \begin{bmatrix} 1-t & -5 & 10 \\ -5 & 1-t & t+4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -(6-t)\det \begin{bmatrix} 1-t & 10 \\ -5 & t+4 \end{bmatrix} = -(t-6)^2(t+9).$$

L'autospazio V_9 e' generato dal vettore $(1, 1, -1)$, mentre l'autospazio V_6 e' generato dai vettori $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, otteniamo la seguente base ortogonale di V_6: $\{(-1, 1, 0),\ (1, 1, 2)\}$. Allora una matrice ortogonale che soddisfa la condizione richiesta e':

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Invece una matrice non ortogonale che soddisfa la condizione richiesta e':

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che:

$$P^{-1}AP = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), I appello, 7 febbraio 2018.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ con rappresentazione cartesiana*

$$\begin{cases} x+y+2t=0 \\ x+3t=0 \\ z-t=0. \end{cases}$$

Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-1,1,1,-1)$, $(-1,1,-1,1)$, $(0,0,1,-1)$. Calcolare una base ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare che rappresenta U si vede che una base per U e' formata dal vettore $(-3,1,1,1)$. Nel sistema di generatori per V il terzo vettore e' combinazione lineare dei primi due, percio' una base per V e' formata dai vettori $(-1,1,1,-1)$, $(-1,1,-1,1)$. Mettendo insieme la base di U con quella di V si ottiene il seguente sistema di generatori per $U+V$:

$$\mathcal{B}=\{(-3,1,1,1),(-1,1,1,-1),(-1,1,-1,1)\}.$$

Il sistema $\mathcal{B}$ e' linearmente indipendente, quindi e' una base di $U+V$. Una rappresentazione cartesiana per $U+V$ e' data dall'equazione:

$$\det\begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & z \\ 1 & -1 & 1 & t \end{bmatrix}=0,$$

che e' equivalente all'equazione $x+y+z+t=0$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+(3-k)y-2z=0 \\ x+y+(k^2-5k+7)z=k-2. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammette infinite soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$ come la somma di una soluzione particolare con la soluzione generica di $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, $e_2(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & (k-2)(k-3) & k-3 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k\notin\{2,3\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione. Se $k=2$ il sistema $\mathcal{S}_2$ non ha soluzioni. Se $k=3$ il sistema $\mathcal{S}_3$ ammette le infinite soluzioni $(2z,1-3z,z)^T$, $z\in\mathbf{R}$.

Il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$ ammette solo la soluzione nulla per $k\notin\{2,3\}$. Se $k=2$ il sistema $\mathcal{S}_2^*$ ammette le infinite soluzioni $(-y,y,0)^T$, $y\in\mathbf{R}$. Se $k=3$ il sistema $\mathcal{S}_3^*$ ammette le infinite soluzioni $(2z,-3z,z)^T$, $z\in\mathbf{R}$.

La rappresentazione richiesta, nel caso $k=3$, e' la seguente:

$$(2z,1-3z,z)^T=(0,1,0)^T+z(2,-3,1)^T. \quad ■$$

Esercizio 3. *L'operatore lineare $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ ha come autospazio associato all'autovalore $\lambda=-2$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dall'equazione cartesiana $x+y-2z=0$. Inoltre il vettore $(-1,2,1)$ appartiene al nucleo di f. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica, una base per il nucleo ed una per l'immagine di f, il polinomio caratteristico e quello minimo di f, ed una base di autovettori di f.*

Svolgimento. Una base per l'autospazio V_{-2} e' data dal sistema di vettori $\mathcal{S} = \{(-1,1,0),(2,0,1)\}$. I vettori di $\mathcal{S}$ stanno anche nell'immagine di f [2], e poiche' f ha un nucleo non banale, dal Teorema della dimensione segue che $\mathcal{S}$ e' anche una base per l'immagine di f. Il nucleo di f ha dimensione 1, una sua base e' costituita dal singolo vettore $(-1,2,1)$. I tre precedenti vettori, messi insieme, formano un sistema libero, chiamiamolo $\mathcal{B}$. Tale sistema $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(2,0,1),(-1,2,1)\}$ e' una base di $\mathbf{R}^3$, formata da autovettori, e sappiamo che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $p_f(t) = -t(t+2)^2$, mentre $m_f(t) = t(t+2)$. Infine, la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica e' data da:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -6 & 8 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. Una matrice A e' quadrata di ordine 4, non e' diagonalizzabile, e soddisfa le seguenti condizioni: $(A-I)^4 = 4(A-I)^2 = 9(A-I)^2$. Elencare tutte le possibilita' per la forma canonica di A, il polinomio caratteristico, ed il polinomio minimo.

Svolgimento. Per ipotesi sappiamo che A soddisfa le seguenti equazioni:

$$(t-1)^2(t+1)(t-3) = 0, \quad (t-1)^2(t+2)(t-4) = 0.$$

Quindi il polinomio minimo di A e' un fattore del polinomio $(t-1)^2$. Poiche' A non e' diagonalizzabile, allora tale polinomio e' proprio il polinomio minimo di A, cioe' $m_A(t) = (t-1)^2$. Il polinomio caratteristico e' allora $p_A(t) = (t-1)^4$, mentre le possobili forme canoniche sono:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 8x_2 + 12x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 - 8x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + 4x_2 + 9x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 8 & 12 \\ 1 & -3 & -8 \\ -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di L_A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per L_A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

[2] Se $\mathbf{b}$ e' un autovettore relativo ad un autovalore $\lambda \neq 0$, allora $f\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{b}\right) = \mathbf{b}$, percio' $\mathbf{b}$ appartiene all'immagine.

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-1)(t-3)^2$, e l'autovalore 3 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di L_A ha due blocchi, ed e'

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore 1 e'

$$(-4, 3, -2).$$

D'altra parte, poiche'

$$(A-3I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -16 & -16 \\ 0 & 12 & 12 \\ 0 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

allora l'equazione $y + z = 0$ rappresenta l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_3$ per L_A relativo a $\lambda = 3$. Una base per tale autospazio generalizzato e'

$$\mathcal{B} := \{(1,0,0), (0,-1,1)\}.$$

La matrice che rappresenta l'operatore L_{A-3I}, ristretto su $\widetilde{V}_3$, rispetto a tale base e'

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

allora una stringa di lunghezza 2 relativa all'autovalore 3 per A e' data dai vettori di $\widetilde{V}_3$ che rispetto alla base $\mathcal{B}$ hanno coordinate $(1,0)$ e $(-2,-1)$, presi in ordine opposto, cioe' e' data dai vettori $(-2,1,-1)$ e $(1,0,0)$. Ne consegue che una base a stringhe per L_A e' data dalle colonne della matrice

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

la cui inversa e' la matrice

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siamo in grado di calcolare la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$. Essa e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4+4t)e^{3t} - 4e^{t} \\ (-3-2t)e^{3t} + 3e^{t} \\ (3+2t)e^{3t} - 2e^{t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0,0,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che: $\dot{y}_1 = (16+12t)e^{3t} - 4e^{t}$, ed un calcolo mostra che e' uguale a $y_1 + 8y_2 + 12y_3$. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 6. *Sia $(\mathbf{R}^3, q)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, dove*

$$q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dall'equazione $x + y + z = 0$. Sia $h : U \to \mathbf{R}$ la forma quadratica su U ottenuta da q per restrizione. Calcolare gli invarianti (n, p, r, s) dello spazio pseudoeuclideo (U, h), ed una base ortogonale di (U, h).

Svolgimento. Sia ϕ la forma bilineare simmetrica su $\mathbf{R}^3$ che si ottiene polarizzando q. Allora la matrice di Gram di ϕ rispetto alla base canonica e':

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, si ha

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot G \cdot \mathbf{y},$$

dove $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ denotano le coordinate di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ripetto alla base canonica. La matrice di Gram di h rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$ di U e':

$$G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(h) = \begin{bmatrix} \phi((-1,1,0),(-1,1,0)) & \phi((-1,1,0),(-1,0,1)) \\ \phi((-1,0,1),(-1,1,0)) & \phi((-1,0,1),(-1,0,1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi gli invarianti di (U, h) sono $(n, p, r, s) = (2, 1, 0, -1)$, mentre una base ortogonale di (U, h) e' data dai vettori $(-1, 1, 0), (0, -1, 1)$. ■

Geometria (9 CFU), II appello, 1 marzo 2018.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ con rappresentazione cartesiana*

$$\begin{cases} 4x - y + z = 0 \\ 7x + y - t = 0 \\ 11x + z - t = 0. \end{cases}$$

Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(3, -6, -20, 13)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(3, -6, -19, 14)$. Calcolare una base ed una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$.

Svolgimento. I vettori $(3, -6, -20, 13)$, $(0, 0, 1, 1)$ formano una base di V. Percio' si puo' ottenere una rappresentazione cartesiana di V imponendo che il rango della matrice:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & x \\ -6 & 0 & y \\ -20 & 1 & z \\ 13 & 1 & t \end{bmatrix}$$

sia uguale a 2. Si deduce la seguente rappresentazione cartesiana di V:

$$\begin{cases} 11x + z - t = 0 \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Mettendo insieme le equazioni di U (la terza e' chiaramente sovrabbondante) con quelle di V, otteniamo la seguente rappresentazione cartesiana di $U \cap V$:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 0 \\ 7x + y - t = 0 \\ 11x + z - t = 0 \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si vede che

$$U \cap V = \mathrm{Span}((1, -2, -6, 5)). \quad \blacksquare$$

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + (k+4)y + k(k+3)z = k + 2 \\ x + (k+4)y - 2z = 2k + 4. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema lineare omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, $e_{32}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & k+2 & k(k+2) & k+2 \\ 0 & 0 & -(k+1)(k+2) & k+2 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{-1, -2\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, che e' data dal vettore numerico:

$$\frac{1}{k+1}(-3k - 2, 2k + 1, -1)^T.$$

Se $k = -1$, il sistema $\mathcal{S}_{-1}$ e' incompatibile. Se $k = -2$, ci sono ∞^2-soluzioni per il sistema $\mathcal{S}_{-2}$, rappresentate dal vettore:

$$y(-2, 1, 0)^T + z(2, 0, 1)^T.$$

Il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$ ammette solo la soluzione nulla per $k \notin \{-2, -1\}$. Se $k = -2$ il sistema $\mathcal{S}_{-2}^*$ coincide con il sistema $\mathcal{S}_{-2}$. Se $k = -1$ il sistema $\mathcal{S}_{-1}^*$ ammette ∞^1 soluzioni, rappresentate dal vettore:

$$z(-1, 1, 1)^T. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3. *L'operatore lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *soddisfa le seguenti condizioni:* $f(1,2,3) = (-6,-2,0)$, $f(1,3,4) = (-9,-3,0)$, $f(1,3,5) = (-12,-5,0)$. *Calcolare la matrice rappresentativa* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di* f *rispetto alla base canonica, una base per il nucleo ed una per l'immagine di* f*, il polinomio caratteristico e quello minimo di* f*, una base di autovettori di* f*, ed una matrice invertibile* P *ed una diagonale* D *tali che* $P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot P = D$.

Svolgimento. Poiche' il sistema di vettori $\mathcal{B} = \{(1,2,3),(1,3,4),(1,3,5)\}$ forma una base di $\mathbf{R}^3$, possiamo interpretare i dati del problema come la matrice rappresentativa:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -6 & -9 & -12 \\ -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio'

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -9 & -12 \\ -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -9 & -12 \\ -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deduciamo che il polinomio caratteristico e' $p_f(t) = -t(t-3)(t-1)$, che, a meno del segno, coincide con quello minimo. Una base per l'autospazio V_0 $(= \ker f)$ e' formata dal vettore $(1,0,1)$, una base per l'autospazio V_3 e' formata dal vettore $(1,1,0)$, ed una base per l'autospazio V_1 e' formata dal vettore $(0,1,0)$. Quindi una base di autovettori di f e' costituita dai vettori:

$$(1,0,1),(1,1,0),(0,1,0).$$

Le matrici cercate P e D sono:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il nucleo di f, che coincide con V_0, ha dimensione 1, ed ha base formata dal vettore $(1,0,1)$. Allora l'immagine di f ha dimensione 2, quindi una base per l'immagine di f e' formata dai vettori $(3,2,0)$ e $(0,1,0)$. ■

Esercizio 4. *Una matrice quadrata* A *di ordine* $n = 55$*, e' nilpotente, con indice di nilpotenza* $p = 5$*. Sapendo che* $\mathrm{rk}\, A = 26$*, che* $\mathrm{rk}\, A^2 = 6$*, e che* $\mathrm{rk}\, A^4 = 2$*, determinare la forma canonica di Jordan* J_A *di* A*.*

Svolgimento. La forma canonica di A e' determinata dalla soluzione del sistema di Cramer:

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 = 55 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = \mathrm{rk}\, A = 26 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mathrm{rk}\, A^2 = 6 \\ \mu_1 + \mu_2 = \mathrm{rk}\, A^3 \\ \mu_1 = \mathrm{rk}\, A^4 = 2. \end{cases}$$

Poiche' $\mu_i \leq \mu_{i+1}$ per ogni $i = 1, \dots, 4$, allora il rango di A^3 deve necessariamente essere 4. Ne consegue:

$$\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 2,\ \mu_3 = 2,\ \mu_4 = 20,\ \mu_5 = 29.$$

Quindi J_A ha due blocchi relativi all'autovalore 0 di ordine 5, 18 blocchi di ordine 2, e 9 blocchi di ordine 1. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 + 6x_2 - 7x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = -1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Allo scopo di calcolare il polinomio caratteristico di A, eseguendo le operazioni elementari $e^{23}(2)$ ed $e^{13}(-1)$ sulla matrice $A - tI$, si ottiene:

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} -5-t & 2 & -1 \\ -2 & -t & -2 \\ -3 & 6 & -7-t \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -4-t & 0 & -1 \\ 0 & -4-t & -2 \\ t+4 & -8-2t & -7-t \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$p_A(t) = (t+4)^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -7-t \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene facilmente che $p_A(t) = -(t+4)^3$. Poiche' la matrice

$$A + 4I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

ha rango 1, possiamo dire che la forma canonica di Jordan di A e':

$$J_A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

In particolare $A + 4I$ e' nilpotente di indice 2. Percio' possiamo calcolare direttamente la soluzione cercata, tenuto conto che:

$$e^{At} = e^{-4It+(A+4I)t} = e^{-4It} \cdot e^{(A+4I)t} = e^{-4t}I \cdot e^{(A+4I)t} = e^{-4t}e^{(A+4I)t}.$$

Infatti:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-4t}e^{(A+4I)t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-4t}\left(I + (A+4I)t\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-4t} \begin{bmatrix} 1-t & 2t & -t \\ -2t & 1+4t & -2t \\ -3t & 6t & 1-3t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-4t} \begin{bmatrix} 1+2t \\ 1+4t \\ -1+6t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 1, -1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = e^{-4t} \begin{bmatrix} -2-8t \\ -16t \\ 10-24t \end{bmatrix}.$$

Un calcolo diretto mostra l'uguaglianza della funzione precedente con $A \cdot \mathbf{y}(t)$, cioe' con

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & -7 \end{bmatrix} \cdot \left(e^{-4t} \begin{bmatrix} 1+2t \\ 1+4t \\ -1+6t \end{bmatrix} \right). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia $(\mathbf{R}^3, q)$ lo spazio euclideo definito dalla forma quadratica $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, la cui espressione esplicita rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(0,1,0), (1,-3,-1), (1,0,0)\}$ e' la seguente:*

$$q(x_1', x_2', x_3') = x_1'^2 + 2x_1'x_2' + 2x_2'^2 + 3x_3'^2.$$

Calcolare la matrice di Gram $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q)$ di q rispetto alla base canonica. Inoltre, nello spazio euclideo $(\mathbf{R}^3, q)$, calcolare la proiezione ortogonale $p_U(x, y, z)$ del generico vettore $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ sul sottospazio U generato dai vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Svolgimento. Sappiamo che

$$G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Percio':

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})\right)^T \cdot G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\right)^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 20 \end{bmatrix}.$$

Ora per calcolare la proiezione ortogonale su U, innanzitutto ortogonalizziamo la base $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ con il procedimento di Gram-Schmidt. Quindi poniamo $\mathbf{b}_1 = (1,0,0)$, e calcoliamo:

$$\mathbf{b}_2 = (0,0,1) - p_{(1,0,0)}(0,0,1) = (0,0,1) - \frac{(0,0,1) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{(1,0,0) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} (1,0,0) = (-1,0,1).$$

Quindi una base ortogonale per U nello spazio euclideo $(\mathbf{R}^3, q)$ e' costituita dai vettori:

$$(1,0,0), (-1,0,1).$$

Possiamo calcolare la proiezione richiesta:

$$p_U(x,y,z) = p_{(1,0,0)}(x,y,z) + p_{(-1,0,1)}(x,y,z)$$

$$= \frac{(x,y,z) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{(1,0,0) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} (1,0,0) + \frac{(x,y,z) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{(-1,0,1) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} (-1,0,1)$$

$$= (x+z)(1,0,0) + \frac{-4y+17z}{17}(-1,0,1) = \frac{1}{17}\left(17x+4y, 0, -4y+17z\right). \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), III appello, 21 giugno 2018.

Esercizio 1. *Sia V lo spazio delle matrici 3×3. Sia U il sottospazio di V costituito dalle matrici triangolari superiori, e sia W il sottospazio di V costituito dalle matrici con traccia nulla (cioe' dalle matrici $A = (a_{ij})$ con $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$). Calcolare la dimensione ed una base per $U \cap W$ e $U + W$.*

Svolgimento. La generica matrice di $U \cap W$ e' della forma:

$$X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{11} - a_{22} \end{bmatrix}.$$

Cioe'

$$X = a_{11}(E_{11} - E_{33}) + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{22}(E_{22} - E_{33}) + a_{23}E_{23}.$$

Ne consegue che $\{E_{11} - E_{33},\, E_{12},\, E_{13},\, E_{22} - E_{33},\, E_{23}\}$ e' una base per $U \cap W$ e che la dimensione di $U \cap W$ e' uguale a 5.

Similmente si vede che U ha dimensione 6, mentre W ha dimensione 8 avendo come rappresentazione cartesiana l'unica equazione $a_{11}+a_{22}+a_{33} = 0$. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $\dim(U+W) = 9$, cioe' $U+W = V$. Quindi una base per $U + W$ e' data dalla base canonica di V. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri la seguente matrice*

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k^2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinare i valori di k per cui A_k e' diagonalizzabile.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A_k e'

$$p_{A_k}(t) = -(t-3)(t-1-k)(t-1+k).$$

Quindi se k e' diverso da $-2, 0, 2$, A_k presenta tre autovalori distinti, e percio' e' diagonalizzabile. Se $|k| = 2$, allora l'autovalore $\lambda = 3$ ha molteplicita' algebrica 2, ma molteplicita' geometrica 1. Se Se $k = 0$, allora l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicita' algebrica 2, ma molteplicita' geometrica 1.

In conclusione, A_k e' diagonalizzabile se e solo se $k \notin \{-2, 0, 2\}$. ■

Esercizio 3. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(1,1,1) = (1,-2,1)$, $f(1,1,2) = (-1,-1,1)$, $f(0,-1,0) = (-3,0,1)$, $f(1,0,2) = (-4,-1,2)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica, una base per il nucleo ed una per l'immagine di f, una rappresentazione cartesiana per il nucleo e per l'immagine. Dire se e' vero oppure no che $\mathbf{R}^3 = \ker f \perp imf$.*

Svolgimento. Osserviamo che i vettori $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(0,-1,0)$ formano una base di $\mathbf{R}^3$, diciamo $\mathcal{B}$, e che la condizione $f(1,0,2) = (-4,-1,2)$ e' sovrabbondante. Possiamo interpretare i dati del problema come la matrice rappresentativa:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Percio'

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che una base per il nucleo e' data dal vettore $(1,2,3)$, e per l'immagine e' data dai vettori $(0,-3,2), (3,0,-1)$. Inoltre una rappresentazione cartesiana del nucleo e' data dal sistema:

$$\begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ 3x - z = 0, \end{cases}$$

e per l'immagine dall'equazione

$$x + 2y + 3z = 0.$$

Infine osserviamo che i vettori $(0,-3,2), (3,0,-1)$ sono ortogonali al vettore $(1,2,3)$, percio' e' vero che $\mathbf{R}^3 = \ker f \perp \mathrm{im} f$. ■

Esercizio 4. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$V := \{(x,y,z,t) \,:\, x+z=0 \quad e \quad 2y-t=0\}, \qquad W := \{(x,y,z,t) \,:\, x-z=0 \quad e \quad y+2t=0\}.$$

Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *l'operatore lineare tale che* $V = \ker f$, *e* W *ne sia l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda = 10$. *Provare che* $\mathbf{R}^4 = V \oplus W$. *Calcolare la matrice rappresentativa* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di* f *rispetto alla base canonica. Determinare il polinomio caratteristico e quello minimo di* f. *Infine determinare una matrice invertibile* P *ed una matrice diagonale* D *tale che* $D = P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot P$.

Svolgimento. Una base di V e' formata dai vettori $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4$, mentre una base di W e' formata dai vettori $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4$. La matrice che si ottiene mettendo in colonna le coordinate di tali vettori rispetto alla base canonica:

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ha rango massimo. Quindi il sistema di vettori

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3,\, \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4,\, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\, 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4\}$$

e' una base di $\mathbf{R}^4$. Cio' prova che $\mathbf{R}^4 = V \oplus W$. Stanti le ipotesi abbiamo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

e percio' la matrice cercata P e' proprio Q, mentre $D = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. In particolare il polinomio caratteristico di f e' $p_f(t) = t^2(t-10)^2$, mentre il polinomio minimo e' $m_f(t) = t(t-10)$. Infine, tenuto conto delle ipotesi, e che f e' lineare, abbiamo:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) = f(\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} \\ f(\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4) = f(\mathbf{e}_2) + 2f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{0} \\ f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) = 10(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \\ f(2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4) = 2f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_4) = 10(2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4). \end{cases}$$

Da qui si ottiene

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = 5\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) = 8\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_4 \\ f(\mathbf{e}_3) = 5\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_4) = -4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \end{cases}$$

cioe'

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -7x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e' $p(t) = -t^3$. Quindi A e' nilpotente. Ne consegue che:

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata e' la prima colonna di tale matrice, cioe':

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 2t - \frac{t^2}{2} \\ -5t - t^2 \\ -7t - \frac{3t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} -2 - t \\ -5 - 2t \\ -7 - 3t \end{bmatrix}.$$

Il calcolo mostra l'uguaglianza della funzione precedente con $A \cdot \mathbf{y}(t)$, cioe' con

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - 2t - \frac{t^2}{2} \\ -5t - t^2 \\ -7t - \frac{3t^2}{2} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Si consideri il seguente sottospazio di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$U := \{(x,y,z,t) \,:\, x + 2y - z - t = 0 \quad e \quad x + y - z - t = 0\}.$$

Determinare una base ortonormale di U ed una per il complemento ortogonale $U^\perp$.

Svolgimento. Una base di U e' formata dai vettori $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, otteniamo la base ortogonale di U formata dai vettori $(1,0,1,0)$, $(1,0,-1,2)$. Normalizzando si ottiene una base ortonormale per U:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-1,2) \right\}.$$

Il complemento ortogonale di U ha rappresentazione cartesiana data da:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - z + 2t = 0. \end{cases}$$

Si deduce che una base per $U^\perp$ e' data dai vettori $(0,1,0,0)$, $(-1,0,1,1)$. Sono gia' ortogonali. Percio' una base ortonormale di $U^\perp$ e':

$$\left\{ (0,1,0,0), \quad \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,1,1) \right\}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), IV appello, 5 luglio 2018.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dall'equazione $x + 3y - z = 0$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $8\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, $3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. Calcolare una base e la dimensione di U, V, $U \cap V$, $U + V$.*

Svolgimento. Il sottospazio U ha dimensione 2, ed i vettori $(-3, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ ne formano una base. D'altra parte, il vettore $8\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ e' sovrabbondante, percio' anche V ha dimensione 2, ed una sua base e' formata dai vettori $(1, -1, -2)$, $(3, -1, -1)$. Osserviamo poi che $(1, -1, -2)$ soddisfa l'equazione di U, percio' $(1, -1, -2) \in U \cap V$. Ne consegue che $U \cap V$ ha dimensione ≥ 1. Ma non puo' avere dimensione 2, altrimenti $U \cap V = U = V$, contro il fatto che $U \neq V$. Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, ed il vettore $(1, -1, -2)$ ne e' una base. Dalla formula di Grassmann segue che $U + V$ ha dimensione 3, percio' $U + V = \mathbf{R}^3$, ed una sua base e' la base canonica di $\mathbf{R}^3$. ■

Esercizio 2. *Al variare dei parametri h e k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_{h,k}$ nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} -hx + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ hx - 2y - 2z = k. \end{cases}$$

Dire per quali valori di h e k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_{h,k}$ con le operazioni p_{12}, $e_{32}(1)$, $e_{21}(h)$, p_{12}, $e_{32}(1 - h)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & k+2 \\ 0 & 0 & h & 4 + k - h(3 + k) \end{bmatrix}.$$

Quindi se $h \neq 0$ allora il sistema $\mathcal{S}_{h,k}$ e' di Cramer, ed ammette un'unica soluzione, che e' data dal vettore numerico:

$$\frac{1}{h}(-4 - k,\ -4 - k + h,\ 4 + k - h(3 + k))^T.$$

Quando $h = 0$, la matrice precedente si riduce alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 4+k \end{bmatrix}.$$

Percio' se $h = 0$ e $k \neq -4$, il sistema $\mathcal{S}_{0,k}$ non e' compatibile. Se invece $h = 0$ e $k = -4$, allora il sistema $\mathcal{S}_{0,-4}$ e' compatibile, ammette ∞^1 soluzioni, date dai vettori $(1 - z,\ 2 - z,\ z)^T$, $z \in \mathbf{R}$. ■

Esercizio 3. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(1, 1) = (2, 0, -2)$, $f(1, 2) = (3, -1, -3)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3}(f)$ di f rispetto alle basi canoniche $\mathcal{E}_2$ ed $\mathcal{E}_3$ di $\mathbf{R}^2$ e di $\mathbf{R}^3$, e la relativa espressione esplicita. Calcolare una base per il nucleo e per l'immagine di f. Calcolare una rappresentazione cartesiana per l'immagine di f.*

Svolgimento. Dai dati del problema, e tenuto conto che f e' lineare, abbiamo:

$$\begin{cases} f(1, 1) = f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = (2, 0, -2), \\ f(1, 2) = f(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_2) = (3, -1, -3). \end{cases}$$

Se ne deduce che $f(\mathbf{e}_1) = (1, 1, -1)$ e che $f(\mathbf{e}_2) = (1, -1, -1)$. Percio':

$$M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

L'espressione esplicita di f e':

$$f(x, y) = (x + y, x - y, -x - y).$$

Il nucleo ha dimensione 0, l'immagine ha dimensione 2, ed ha come base il sistema formato dai vettori $(1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$. Una rappresentazione cartesiana per l'immagine di f e' $x+z=0$. ∎

Esercizio 4. *Sia $f : \mathbf{R}[t]_{\leq 3} \to \mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ l'operatore lineare che ad ogni polinomio $p(t)$ di grado ≤ 3 associa il polinomio $f(p(t)) = DDp(t)$, cioe' la derivata seconda di $p(t)$. Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$ di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$, ed una base per il nucleo e l'immagine di f. Infine calcolare il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f, il polinomio minimo $m_f(t)$, e la forma canonica di Jordan J_f.*

Svolgimento. Sia $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ il generico polinomio. Allora $f(p(t)) = 2a_2 + 6a_3t$. In altre parole, la derivata seconda trasforma il polinomio avente coefficienti (cioe' coordinate) $(a_0, a_1, a_2, a_3)^T$ nel polinomio avente coefficienti $(2a_2, 6a_3, 0, 0)^T$. Quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In particolare $p_f(t) = t^4$. Poiche' $m_g(0) = 2$, allora in J_f ci sono esattamente due blocchi. D'altra parte $f \circ f = 0$, cioe' l'indice di nilpotenza di f e' uguale a due. Allora la forma canonica e' determinata:

$$J_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In particolare il polinomio minimo e' $m_f(t) = t^2$.

Infine il nucleo e' dato dai polinomi che soddisfano la condizione $a_2 = a_3 = 0$, cioe' e' costituito dai polinomi di grado ≤ 1. Percio' il nucleo ha dimensione 2, ed una sua base e' data dal sistema di vettori $\{1,\ t\}$. Cio' vale anche per l'immagine, perche', nel nostro caso, essa coincide con il nucleo. ∎

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = -8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = -4x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -6 & 3 & 2 \\ -8 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p_A(t) = -t^2(t+1)$. Poiche' l'autovalore 0 ha molteplicita' geometrica 1, possiamo dire che la forma canonica di A e':

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore -1 e' $(1,1,1)$. D'altra parte, poiche'

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

allora l'equazione $4x - 2y - z = 0$ rappresenta l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_0$ per L_A relativo a $\lambda = 0$. Una base per tale autospazio generalizzato e'

$$\mathcal{B} := \{(1,2,0),(1,0,4)\}.$$

La matrice che rappresenta l'operatore L_A, ristretto su $\widetilde{V}_0$, rispetto a tale base e'

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

allora una stringa di lunghezza 2 relativa all'autovalore 0 per A e' data dai vettori di $\widetilde{V}_0$ che rispetto alla base $\mathcal{B}$ hanno coordinate $(0,1)$ e $(2,0)$, presi in ordine opposto, cioe' e' data dai vettori $(2,4,0)$ e $(1,0,4)$. Ne consegue che una base a stringhe per L_A e' data dalle colonne della matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

la cui inversa e' la matrice

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Siamo in grado di calcolare la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$. Essa e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3 - 2t \\ 4e^{-t} - 4 - 4t \\ 4e^{-t} - 4 \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che: $\dot{y}_1 = -4e^{-t} - 2$, ed un calcolo mostra che e' uguale a $-6y_1 + 3y_2 + 2y_3$. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 6. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dall'equazione $2x + y - 2z = 0$. Sia $f : (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \to p_U(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare che ad ogni vettore (x,y,z) associa la sua proiezione ortogonale su U. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica, e una base e la dimensione per il nucleo e l'immagine di f. Infine calcolare il polinomio caratteristico di f, il polinomio minimo, ed una base costituita da autovettori.*

Svolgimento. Si osservi che $U^\perp$ e' generato dal vettore $(2,1,-2)$. Percio'

$$p_U(x,y,z) = (x,y,z) - p_{U^\perp}(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{2x + y - 2z}{9}(2,1,-2) = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 5x - 2y + 4z \\ -2x + 8y + 2z \\ 4x + 2y + 5z \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Il nucleo di f e' $U^\perp$, che ha dimensione 1 ed e' generato da $(2,1,-2)$. Poiche' per ogni $\mathbf{u} \in U$ si ha $p_U(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, allora l'immagine di f e' proprio U, che ha dimensione 2 e base data dai vettori $(5,-2,4)$, $(-1,4,1)$. Ne consegue che gli autovalori di f sono 0 e 1, il polinomio caratteristico e' $p_f(t) = -t(t-1)^2$, una base di autovettori e' formata dai vettori $(2,1,-2)$, $(5,-2,4)$, $(-1,4,1)$, ed il polinomio minimo di f e' $m_f(t) = t(t-1)$. ■

Geometria (9 CFU), V appello, 29 agosto 2018.

Esercizio 1. *Sia V lo spazio delle matrici 2×2. Sia S_1 il sottoinsieme di V costituito dalle matrici diagonali, S_2 il sottoinsieme delle matrici nilpotenti, S_3 il sottoinsieme delle matrici ortogonali, S_4 il sottoinsieme delle matrici simmetriche, S_5 il sottoinsieme delle matrici nonsingolari. Quali, tra questi sottoinsiemi, sono sottospazi di V?*

Svolgimento. Sia X la generica matrice di V:

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}.$$

Le equazioni omogenee $y = 0$ e $z = 0$ rappresentano S_1, che percio' e' un sottospazio di V. Similmente, l'equazione omogenea $y - z = 0$ rappresenta S_4, quindi anche S_4 e' un sottospazio di V. I rimanenti sottoinsiemi non lo sono. Infatti la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

non e' nilpotente, ma e' somma di due matrici nilpotenti. La matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

non e' ortogonale, ma e' somma di due matrici ortogonali. E la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

non e' invertibile, ma e' somma di due matrici invertibili. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri la seguente matrice*

$$A_k = \begin{bmatrix} 3k+1 & 6 & -3k-3 \\ 2k & 5 & -2k-2 \\ 3k-1 & 6 & -3k-1 \end{bmatrix}.$$

Determinare i valori di k per cui A_k e' diagonalizzabile.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di A_k e'

$$p_{A_k}(t) = -(t-2)^2(t-1).$$

La molteplicita' geometrica dell'autovalore 2 e' data da:

$$m_g(2) = 3 - rk(A_k - 2I) = 3 - rk \begin{bmatrix} 3k-1 & 6 & -3k-3 \\ 2k & 3 & -2k-2 \\ 3k-1 & 6 & -3k-3 \end{bmatrix}.$$

Il minore

$$\begin{bmatrix} 3k-1 & 6 \\ 2k & 3 \end{bmatrix}$$

ha determinante pari a $-3k-3$. Percio' se $k \neq -1$, la molteplicita' algebrica di 2 e' 1, quindi A_k non e' diagonalizzabile. Invece se $k = -1$ si ha $m_g(2) = 2$ e percio' A_{-1} e' diagonalizzabile.

In conclusione, A_k e' diagonalizzabile se e solo se $k = -1$. ■

Esercizio 3. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(1,0,0,0) = (1,1,1)$, $f(0,1,0,0) = (1,1,1)$, $f(0,0,1,0) = (-1,-1,-1)$, $f(0,0,0,1) = (1,1,1)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_4}(f)$ di f rispetto alle basi canoniche $\mathcal{E}_4$ ed $\mathcal{E}_3$ di $\mathbf{R}^4$ e di $\mathbf{R}^3$, una base per il nucleo ed una per l'immagine di f, ed una rappresentazione cartesiana per il nucleo e per l'immagine.*

Svolgimento. I dati sono riferiti tutti alle coordinate canoniche, percio':

$$M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_4}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Una rappresentazione cartesiana del nucleo e' data dall'equazione $x+y-z+t=0$. Risolvendo tale equazione vediamo che i vettori $(-1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(-1,0,0,1)$ formano una base del nucleo. Invece una base dell'immagine e' data dal vettore $(1,1,1)$. Una rappresentazione cartesiana dell'immagine e' data dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Determinare una matrice X tale che $e^X = Y$, dove:*

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. La forma canonica di Jordan di Y e'

$$J_Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ed una base a stringhe e' data dalle colonne della matrice

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio'

$$Y = PJ_YP^{-1}.$$

Osserviamo che:

$$J_Y = e^J, \quad \text{con} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allora se poniamo

$$X := PJP^{-1},$$

avremo:

$$e^X = Pe^JP^{-1} = PJ_YP^{-1} = Y.$$

In conclusione, la matrice cercata e'

$$X = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 6x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -5 & -6 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e' $p(t) = -(t+2)^3$. Quindi $A+2I$ e' nilpotente (ed un calcolo prova che $(A+2I)^2 = \mathbf{0}$). Ne consegue che:

$$e^{At} = e^{At+2It-2It} = e^{-2t}e^{(A+2I)t} = e^{-2t}\left[I + t(A+2I)\right] = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1-3t & -6t & 3t \\ 2t & 1+4t & -2t \\ t & 2t & 1-t \end{bmatrix}.$$

La soluzione cerata e' la terza colonna di tale matrice, cioe':

$$\mathbf{y}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 3t \\ -2t \\ 1-t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0,0,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 3-6t \\ 4t-2 \\ 2t-3 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo mostra l'uguaglianza della funzione precedente con $A \cdot \mathbf{y}(t)$, cioe' con

$$e^{-2t}\begin{bmatrix} -5 & -6 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3t \\ -2t \\ 1-t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Completare i vettori sostituendo gli asterischi, in modo tale che il sistema di vettori $\mathcal{B}$, oppure $\mathcal{C}$, oppure entrambi, costituiscano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$:*

$$\mathcal{B} := \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, *\right), (*,*,*), (*,*,*)\right\} \quad e \quad \mathcal{C} := \{(2,*,*), (1,*,*), (*,*,*)\}.$$

Svolgimento. I vettori di una base ortonormale devono avere lunghezza 1, percio' $\mathcal{C}$ non potra' mai essere completata ad una base ortonormale.

Invece per $\mathcal{B}$ e' possibile. Infatti risovendo l'equazione:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + *^2 = 1,$$

otteniamo che la componente $* = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e' tale per cui il primo vettore di $\mathcal{B}$ ha lunghezza 1. I rimanenti due vettori devono essere ortogonali al vettore $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, cioe' occorre "pescarli" nel sottospazio $x+y+\sqrt{2}z = 0$. Tale sottospazio e' generato dai vettori $(-1,1,0)$, $(-\sqrt{2},0,1)$. Applicando il procedimento di ortonormalizzaione di Gram-Schmidt, otteniamo una base ortonormale di $x+y+\sqrt{2}z = 0$:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

In conclusione, possiamo completare $\mathcal{B}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), VI appello, 12 settembre 2018.

Esercizio 1. *Nello spazio dei polinomi $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$ di grado ≤ 2, sia U il sottospazio costituito dai polinomi $p(t)$ tali che $p(-1) = 0$, e sia V il sottospazio costituito dai polinomi $p(t)$ tali che $p(-3) = 0$. Calcolare la dimensione ed una base per U, V, $U \cap V$, e $U + V$.*

Svolgimento. Sia
$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbf{R}[t]_{\leq 2}$$
il generico polinomio di $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$. Allora:
$$p(t) \in U \iff a_0 - a_1 + a_2 = 0,$$
e
$$p(t) \in V \iff a_0 - 3a_1 + 9a_2 = 0.$$
Poiche' U e V sono rappresentati da una sola equazione in uno spazio di dimensione 3 ($\dim \mathbf{R}[t]_{\leq 2} = 3$), ne consegue che entrambi hanno dimensione 2. I polinomi $1 + t$, $-1 + t^2$ formano una base di U, i polinomi $3 + t$, $-9 + t^2$ un base di V. Poiche' $U \neq V$, allora $U + V = \mathbf{R}[t]_{\leq 2}$. Quindi $U + V$ ha dimensione 3, ed una sua base coincide con la base canonica di $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $\dim(U \cap V) = 1$, e quindi il polinomio $3 + 4t + t^2 = (1 + t)(3 + t)$, che appartiene ad $U \cap V$, ne forma una base. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*
$$\begin{cases} (k+4)x + (1-k)y + (4k+2)z = 1 \\ (2k+8)x + (3-2k)y + (8k+2)z = 2 \\ (k+3)x + (1-k)y + (4k+1)z = 1. \end{cases}$$
Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso calcolarne le soluzioni.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-2)$, $e_{31}(-1)$, p_{13}, $e_{31}(k+4)$, $e_{32}(k-1)$, si perviene alla matrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k = 0$, il sistema $\mathcal{S}_0$ e' incompatibile. Invece se $k \neq 0$, allora il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ed ammette un'unica soluzione, che e' data dal vettore numerico:
$$\frac{1}{k}(-1,\, 2,\, 1)^T. \quad ■$$

Esercizio 3. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(1, 0, 0) = (-7, 4, -2)$, $f(0, 1, 0) = (-8, 4, -3)$, $f(1, 0, -1) = (-3, 2, 1)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^3$. Inoltre calcolare una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1} \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot P$.*

Svolgimento. Poiche' $f(1, 0, -1) = (-3, 2, 1)$ allora $f(\mathbf{e}_3) = f(1, 0, 0) - (-3, 2, 1) = (-4, 2, -3)$. Quindi:
$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -4 \\ 4 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$
Il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p(t) = -(t + 1)(t + 2)(t + 3)$. Quindi f e' diagonalizzabile, ed una base di autovettori per f e' data dal sistema:
$$\{(2, -2, 1), (4, -3, 1), (3, -2, 1)\}$$
(tali vettori corrispondono nell'ordine agli autovalori $-1, -2, -3$). Percio' le matrici richieste sono:
$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 4. *Siano m, n, h interi positivi tali che $n = mh$. Sia J il blocco di Jordan nilpotente di ordine n, e sia $A = J^m$. Qual e' la forma canonica di Jordan di A?*

Svolgimento. Poiche' l'indice di nilpotenza di J e' n, e $A^h = J^{mh} = J^n = \mathbf{0}$, allora A e' nilpotente, e l'indice di nilpotenza di A e' h. D'altra parte A ha rango pari a $n-m$. Percio' nella forma canonica J_A di A ci sono esattamente m blocchi, ciascuno di ordine $\leq h$. Poiche' ogni blocco di ordine h di J_A contribuisce al rango di J_A (che e' uguale al rango di A) per $h-1$, allora tutti i blocchi devono essere di ordine h (se ci fosse un blocco di ordine $< h$, la somma del rango dei blocchi non potrebbe raggiungere il valore del rango di J_A, cioe' $m(h-1) = n - m$).

In conclusione, la forma canonica di A e' costituita da m blocchi di ordine h, relativi all'autovalre nullo. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2 + 7x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = -5x_1 + 2x_2 + 6x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -6 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p_A(t) = -(t-1)(t+1)^2$. Poiche' l'autovalore -1 ha molteplicita' geometrica 1, possiamo dire che la forma canonica di A e':

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore 1 e' $(1, 0, 1)$. D'altra parte, poiche'

$$(A+I)^2 = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 12 \end{bmatrix},$$

allora l'equazione $2x - y - 3z = 0$ rappresenta l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_{-1}$, relativo a $\lambda = -1$, per l'operatore $L_A : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \to A \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Una base per tale autospazio generalizzato e'

$$\mathcal{B} := \{(1, 2, 0), (3, 0, 2)\}.$$

La matrice che rappresenta l'operatore L_{A+I}, ristretto su $\widetilde{V}_{-1}$, rispetto a tale base, e'

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(sappiamo che $M^2 = \mathbf{0}$). Poiche'

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

allora una stringa di lunghezza 2 relativa all'autovalore -1 per A, e' data dai vettori di $\widetilde{V}_{-1}$ che rispetto alla base $\mathcal{B}$ hanno coordinate $(1,0)$ e $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, presi in ordine opposto. Cioe' e' data dai vettori $(-1,1,-1)$ e $(1,2,0)$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+I} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che una base a stringhe per L_A e' data dalle colonne della matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

la cui inversa e' la matrice

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Siamo in grado di calcolare la matrice esponenziale e^{At}, che e':

$$e^{At} = e^{P(Jt)P^{-1}} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -2e^t + e^{-t}(3-t) & e^t - e^{-t} & 3e^t + e^{-t}(t-3) \\ te^{-t} & e^{-t} & -te^{-t} \\ -2e^t + e^{-t}(2-t) & e^t - e^{-t} & 3e^t + e^{-t}(t-2) \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ ne e' la terza colonna:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^t + e^{-t}(t-3) \\ -te^{-t} \\ 3e^t + e^{-t}(t-2) \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0,0,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che: $\dot{y}_1 = 3e^t + e^{-t}(4-t)$, ed un calcolo mostra che e' uguale a $-6y_1 + 2y_2 + 7y_3$. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 6. *Si considerino le matrici simmetriche:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinare una matrice R tale che $B = R^T AR$. Esiste una matrice R siffatta se $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$?

Svolgimento. Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice A, si perviene alle matrici

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con $D = P^T AP$.

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice B, si perviene alle matrici

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con $D = Q^T BQ$.

Ora:

$$B = (Q^{-1})^T DQ^{-1} = (Q^{-1})^T P^T APQ^{-1} = (PQ^{-1})^T A(PQ^{-1}).$$

Percio' la matrice cercata e'

$$R = PQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quanto all'ultima domanda, la risposta e' si', perche' in ogni caso A e B hanno gli stessi invarianti. ■

Geometria (9 CFU), I appello, 22 gennaio 2019.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ con rappresentazione cartesiana*

$$\begin{cases} x+y-z-3t=0 \\ x-z-3t=0. \end{cases}$$

Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, $4\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$. Calcolare una base di $U \cap V$, ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.

Svolgimento. E' chiaro che i vettori $3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, $4\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ formano una base per V. Imponendo che la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

abbia rango pari a 2 (cioe' pari alla dimensione di V), si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di V:

$$\begin{cases} x-3y-z=0 \\ t=0. \end{cases}$$

Percio' una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ e' data dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x+y-z-3t=0 \\ x-z-3t=0 \\ x-3y-z=0 \\ t=0. \end{cases}$$

Tale sistema ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori $(z,0,z,0)$, $z \in \mathbf{R}$. Ne consegue che $U \cap V$ ha dimensione 1, ed ha come base il vettore $(1,0,1,0)$.

Ora andiamo a studiare $U+V$.

Risolvendo il sistema lineare che rappresenta U, si vede che U ha dimensione 2, ed e' generato dai vettori $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$, $3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4$. In particolare, $\dim(U+V)=3$. Riunendo i generatori di U con quelli di V, si ottiene il seguente sistema di generatori di $U+V$:

$$\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3, \quad 3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_4, \quad 3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \quad 4\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3.$$

Il vettore $4\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ e' sovrabbondante. Quindi i primi tre vettori formano una base di $U+V$. Per cui, una rappresentazione cartesiana di $U+V$ e' data dall'equazione:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \end{bmatrix} = -x+3y+z+3t=0. \quad \blacksquare$$

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} x+y+(k+3)z=k^2-5 \\ x+y=4 \\ x+(k+3)z=k^2-8. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, p_{23}, $e_2(-1)$, $e_3(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & k+3 & k^2-5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & k+3 & k^2-9 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k \neq -3$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e' $(1, 3, k-3)^T$.
- Se $k = -3$, il sistema $\mathcal{S}_{-3}$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y = 3. \end{cases}$$

Cioe' $\mathcal{S}_{-3}$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici $(1, 3, z)$, $z \in \mathbf{R}$.

- Non ci sono altri casi, percio' non esistono valori di k per cui $\mathcal{S}_k$ e' incompatibile. ■

Esercizio 3. *Il vettore* $\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ *appartiene al nucleo dell'endomorfismo* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. *La funzione* f *soddisfa anche le seguenti condizioni:* $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = (-3, 0, -3)$, $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = (-6, 6, 0)$. *Calcolare la matrice rappresentativa* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di* f *rispetto alla base canonica, una base per il nucleo ed una per l'immagine di* f, *il polinomio caratteristico e quello minimo di* f, *ed una base di* $\mathbf{R}^3$ *costituita da autovettori per* f.

Svolgimento. I vettori $\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ sono indipendenti, percio' formano una base di $\mathbf{R}^3$, che denoteremo con $\mathcal{B}$.

Dai dati a disposizione sappiamo che:

$$f(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = \mathbf{0}, \quad f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = (-3, 0, -3), \quad f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = (-6, 6, 0).$$

Cio' vuol dire che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adesso possiamo calcolare $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$. Infatti:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 9 & 6 & -9 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice non puo' avere rango massimo, perche' c'e' un vettore non nullo nel nucleo di f. Poiche' le prime due colonne sono indipendenti, allora il rango di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ e' 2, ed una base per l'immagine di f e' data dai vettori $(-6, 9, 3)$, $(-3, 6, 3)$. Il nucleo allora ha dimensione esattamente 1, ed una sua base e' formata dal vettore $(1, -3, -1)$.

Il calcolo mostra che il polinomio caratteristico di f e' $p_f(t) = -t(t+3)^2$ (si osservi che, poiche' il nucleo di f non e' banale, allora f ammette 0 come autovalore; percio', sappiamo a priori che il polinomio $p_f(t)$ deve avere t come fattore). L'autospazio V_0 e' generato dal vettore $(1, -3, -1)$, mentre V_{-3} dai vettori $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$. Il sistema di vettori

$$\{(1, -3, -1), (-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

forma una base di $\mathbf{R}^3$, costituita da autovettori per f. In particolatre f e' diagonalizzabile, ed il polinomio minimo di f e' $m_f(t) = t(t+3)$. ■

Esercizio 4. *La matrice* A *e' quadrata di ordine* 15. *Sia* $B := A + 7I$. *Sapendo che* B *e' nilpotente con indice di nilpotenza* $p = 5$, *che il rango di* B *e'* 8, *e che il rango di* $B^4 = 2$, *determinare la forma canonica di Jordan* J_A *di* A, *il polinomio caratteristico, e quello minimo.*

Svolgimento. Poiche' il rango di B^4 e' 2, allora nella forma canonica J_B di B ci sono esattamente 2 blocchi di ordine 5, relativi all'autovalore 0. Ciascun blocco porta al rango di B un contributo pari a 4. Poiche' il rango di B e' 8, ne consegue che gli altri blocchi di J_B sono tutti di ordine 1, uguali a 0. Percio', J_A e' costituita da due blocchi di ordine 5 relativi all'autovalore -7, e da 5 blocchi di ordine 1 relativi all'autovalore -7. In particolare, $p_A(t) = -(t+7)^{15}$, e $m_A(t) = (t+7)^5$. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 - 13x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 - 8x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & -13 \\ -1 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -(t+4)^3$. Poiche' la matrice

$$A + 4I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -13 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

ha rango 2, possiamo dire che $A+4I$ e' nilpotente di indice 3. Percio' possiamo calcolare direttamente la soluzione cercata, tenuto conto che:

$$e^{At} = e^{-4It+(A+4I)t} = e^{-4It} \cdot e^{(A+4I)t} = e^{-4t}I \cdot e^{(A+4I)t} = e^{-4t}e^{(A+4I)t} =$$

$$e^{-4t}\left(I + (A+4I)t + \frac{1}{2}(A+4I)^2t^2\right).$$

Quindi:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-4t}e^{(A+4I)t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-4t}\left(I + (A+4I)t + \frac{1}{2}(A+4I)^2t^2\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-4t}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & -t & 3t \\ -3t & 3t & -13t \\ -t & t & -4t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{2}t^2 & 2t^2 \\ \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{2}t^2 & 2t^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-4t}\begin{bmatrix} 1+t+\frac{1}{2}t^2 & -t-\frac{1}{2}t^2 & 3t+2t^2 \\ -3t+\frac{1}{2}t^2 & 1+3t-\frac{1}{2}t^2 & -13t+2t^2 \\ -t & t & 1-4t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-4t}\begin{bmatrix} 1+t+\frac{1}{2}t^2 \\ -3t+\frac{1}{2}t^2 \\ -t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = e^{-4t}\begin{bmatrix} -3-3t-2t^2 \\ -3+13t-2t^2 \\ -1+4t \end{bmatrix}.$$

Un calcolo diretto mostra l'uguaglianza della funzione precedente con $A \cdot \mathbf{y}(t)$, cioe' con

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & -13 \\ -1 & 1 & -8 \end{bmatrix} \cdot \left(e^{-4t}\begin{bmatrix} 1+t+\frac{1}{2}t^2 \\ -3t+\frac{1}{2}t^2 \\ -t \end{bmatrix}\right). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia $(\mathbf{R}^3, q)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, dove*

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3.$$

Calcolare gli invarianti di $(\mathbf{R}^3, q)$, ed una base ortonormale. Inoltre dire se esiste, oppure no, un sottospazio U di $\mathbf{R}^3$ tale che lo spazio pseudoeuclideo (U, h) abbia invarianti $(2,2,2,2)$ (la forma quadratica $h : U \to \mathbf{R}$ indica la restrizione di q su U, cioe', per ogni $\mathbf{u} \in U$, $h(\mathbf{u}) := q(\mathbf{u})$).

Svolgimento. La matrice di Gram G di q rispetto alla base canonica e':

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'algoritmo di Gauss-Lagrange porta $[G \,|\, I]$ nella matrice $[D \,|\, P^T]$, con:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi gli invarianti di $(\mathbf{R}^3, q)$ sono $(3, 3, 1, -1)$, ed una base ortonormale e'

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{e}_1,\, \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2),\, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \right\}.$$

Quanto alla seconda domanda, la risposta e' no. Il motivo e' il seguente.

Se (U, h) ha invarianti $(2, 2, 2, 2)$, allora U ha dimensione 2, ed esiste una base di U rispetto alla quale la rappresentazione esplicita di h e' $h = {x_1'}^2 + {x_2'}^2$. In particolare, $q(\mathbf{u}) > 0$ per ogni $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Ora, consideriamo il sottospazio V di $\mathbf{R}^3$ generato dal secondo e dal terzo vettore di $\mathcal{C}$, cioe'

$$V = \mathrm{Span}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}.$$

Sia k la restrizione di q su V. Allora lo spazio pseudoeuclideo (V, k) ha invarianti $(2, 2, 0, -2)$. Percio', abbiamo $q(\mathbf{v}) < 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Ma allora, per un vettore non nullo $\mathbf{w} \in U \cap V$ (per la formula di Grassmann deve essere $\dim(U \cap V) > 0$), si avrebbe contemporaneamente $q(\mathbf{w}) > 0$ e $q(\mathbf{w}) < 0$. Assurdo. ■

Geometria (9 CFU), II appello, 22 febbraio 2019.

Esercizio 1. *Al variare dei parametri h e k in $\mathbf{R}$, si consideri il sottospazio $U_{h,k}$ di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione $x + hy + kz = 0$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(-6, 1, -1)$, $(-4, -1, -1)$, $(-5, 0, -1)$. Per quali valori di h e k si ha $V = U_{h,k}$?*

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che $\dim U_{h,k} = \dim V = 2$ (infatti V e' generabile da $(-4, -1, -1)$ e $(-5, 0, -1)$). Ne consegue che $V = U_{h,k}$ se e solo se $V \subseteq U_{h,k}$. Cioe' se e solo se

$$\begin{cases} -4 - h - k = 0 \\ -5 - k = 0. \end{cases}$$

Cioe' se e solo se $h = 1$, e $k = -5$.

In conclusione, $V = U_{h,k}$ se e solo se $h = 1$ e $k = -5$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} 2x - y - (k + 4)z = 1 \\ 4x - y - 3(k + 4)z = 3 \\ 2x - y + (k^2 + 3k - 4)z = k + 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-2)$ e $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -k-4 & 1 \\ 0 & 1 & -k-4 & 1 \\ 0 & 0 & k^2+4k & k \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k \notin \{-4, 0\}$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che essa e' $\left(2, 2, \frac{1}{k+4}\right)^T$.
- Se $k = -4$, il sistema $\mathcal{S}_{-4}$ non ha soluzioni.
- Se $k = 0$, il sistema $\mathcal{S}_0$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 4z = 1 \\ y - 4z = 1. \end{cases}$$

In tal caso, $\mathcal{S}_0$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici $(1 + 4z, 1 + 4z, z)^T$, $z \in \mathbf{R}$. ■

Esercizio 3. *Il sistema di vettori $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ costituisce una base per lo spazio vettoriale V, e l'endomorfismo $f : V \to V$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(\mathbf{b}_1) = -2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, $f(\mathbf{b}_2) = -2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, $f(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_3 + 2\mathbf{b}_4$, $f(\mathbf{b}_4) = 2\mathbf{b}_3 + 4\mathbf{b}_4$. Determinare una base per il nucleo di f, ed una base per l'immagine. Inoltre calcolare il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f, quello minimo $m_f(t)$, e la forma canonica di Jordan J_f di f.*

Svolgimento. Dai dati a disposizione sappiamo che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che $p_f(t) = t^3(t - 5)$. Poiche' la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ha rango 2, allora $m_g(0) = 2$, e percio'

$$J_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 5 \end{bmatrix}.$$

In particolare $m_f(t) = t^2(t-5)$. Le informazioni precedenti ci dicono anche che il nucleo e l'immagine di f hanno dimensione 2. Poiche' i vettori $-2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_3 + 2\mathbf{b}_4$ stanno nell'immagine, e sono indipendenti, ne costituiscono una base. Poiche' i vettori $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ e $2\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4$ stanno nel nucleo, e sono indipendenti, ne costituiscono una base. ■

Esercizio 4. *Si considerino le seguenti matrici*

$$A_h := \begin{bmatrix} 6-3h & 3-2h & -4+3h \\ -3 & -1 & 3 \\ 2-3h & 1-2h & 3h \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

dove A_h e' una matrice che varia al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$. Per quali valori di h la matrice A_h e' simile a B?

Svolgimento. Entrambe le matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico, cioe' $p(t) = -(t-1)(t-2)^2$. Poiche' B e' diagonalizzabile, allora A_h e B saranno simili se e solo se la matrice

$$A_h - 2I = \begin{bmatrix} 4-3h & 3-2h & -4+3h \\ -3 & -3 & 3 \\ 2-3h & 1-2h & 3h-2 \end{bmatrix}$$

ha rango 1. E cio' equivale ad $h = 1$. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + 9x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 + 7x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. La soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At} occorre calcolare la forma canonica di Jordan J di L_A, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per L_A. La matrice P che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora A ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-2)(t-4)^2$, e l'autovalore 4 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di L_A ha due blocchi, ed e'

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore 2 e' $\mathbf{e}_1$. D'altra parte, poiche'

$$(A-4I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

allora l'equazione $x = 0$ rappresenta l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_4$ per L_A relativo a $\lambda = 4$. Percio' una base per tale autospazio e' data dai vettori canonici $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$. La matrice che rappresenta l'operatore L_{A-4I}, ristretto su $\widetilde{V}_4$, rispetto a tale base, e'

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

allora una stringa di lunghezza 2, relativa all'autovalore 4, per A, e' data dai vettori di $\widetilde{V}_3$ che rispetto alla base $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ hanno coordinate $(1,0)$ e $(-3,-1)$, presi in ordine opposto, cioe' e' data dai vettori $(0,-3,-1)$ e $(0,1,0)$. Ne consegue che una base a stringhe per L_A e' data dalle colonne della matrice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

la cui inversa e' la matrice

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Siamo in grado di calcolare la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$. Essa e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ (1+6t)e^{4t} \\ (1+2t)e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,1,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che $\dot{y}_1 = 2e^{2t}$, che e' uguale a $2y_1$. Invece $\dot{y}_2 = e^{4t}(10+24t)$, che e' uguale a $y_2 + 9y_3$. Infine $\dot{y}_3 = e^{4t}(6+8t)$, che e' uguale a $-y_2 + 7y_3$. ■

Esercizio 6. *Sia* $(\mathbf{R}^3, q)$ *lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica* $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$*, dove*

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2 + x_3^2.$$

Provare che $(\mathbf{R}^3, q)$ *e' uno spazio euclideo, e polarizzare* q*. Infine, denotato con* U *il sottospazio di* $(\mathbf{R}^3, q)$ *generato dal vettore* $(1,0,1)$*, e con* V *quello generato dal vettore* $(0,1,1)$*, calcolare una base di* $U^\perp \cap V^\perp$*, dove* $U^\perp$ *e* $V^\perp$ *denotano il complemento ortogonale di* U *e* V *in* $(\mathbf{R}^3, q)$*.*

Svolgimento. La matrice di Gram G di q rispetto alla base canonica e':

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dsl criterio dei minori principali si evince che $G > 0$, percio' lo spazio $(\mathbf{R}^3, q)$ e' definito positivo. La polarizzazione e' data dalla formula:

$$\phi = \mathbf{x}^T \cdot G \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2 + x_3y_3.$$

Ne consegue che $U^\perp$ e' rappresentato dall'equazione $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$, mentre $V^\perp$ e' rappresentato dall'equazione $-3x_1 + 10x_2 + x_3 = 0$. Mettendo a sistema le due equazioni, si vede che una base di $U^\perp \cap V^\perp$ e' data dal vettore $(-13,-4,1)$. ■

Geometria (9 CFU), III appello, 18 giugno 2019.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(2,-3,4,5)$, $(6,1,2,-3)$, $(2,7,-6,-13)$. Determinare una rappresentazione cartesiana di U.*

Svolgimento. Disponendo in riga i generatori di U, e riducendo a scala la matrice risultante, si vede che i vettori $(2,-3,4,5)$, $(0,5,-5,-9)$ formano una base di U. Allora, riducendo a scala la seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & x \\ -3 & 5 & y \\ 4 & -5 & z \\ 5 & -9 & t \end{bmatrix},$$

ed imponendo che abbia rango pari a $\dim U = 2$, si ottiene la rappresentazione cartesiana cercata:

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 18y + 10t = 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} 2x + 3y + (k-2)z = k+4 \\ 3x + 5y + (2k-3)z = 2k+6 \\ 4x + 6y + (3k-6)z = 3k+7. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Per i valori di k per cui $\mathcal{S}_k$ e' compatibile, determinarne le soluzioni.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-\frac{3}{2})$, $e_{31}(-2)$, e $e_2(2)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & k-2 & k+4 \\ 0 & 1 & k & k \\ 0 & 0 & k-2 & k-1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k \neq 2$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che essa e'

$$(x,y,z) = \frac{1}{k-2}(4k-5, -k, k-1).$$

- Se $k = 2$, il sistema $\mathcal{S}_2$ non ha soluzioni.
- Non esistono valori di k per i quali $\mathcal{S}_k$ abbia infinite soluzioni. $\blacksquare$

Esercizio 3. *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(2,2,-1) = (-4,-4,2)$, $f(3,3,-1) = (-4,-4,2)$, $f(3,2,-1) = (1,-4,2)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica, una base per il nucleo di f, ed una base per l'immagine. Inoltre calcolare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f, e calcolare il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f, quello minimo $m_f(t)$, e la forma canonica di Jordan J_f di f.*

Svolgimento. Tenuto conto che f e' lineare, dai dati a disposizione sappiamo che:

$$\begin{cases} 2f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) = -4\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ 3f(\mathbf{e}_1) + 3f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) = -4\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ 3f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Ne consegue che

$$f(\mathbf{e}_1) = 5\mathbf{e}_1, \quad f(\mathbf{e}_2) = -5\mathbf{e}_1, \quad f(\mathbf{e}_3) = 4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3.$$

Percio' abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

In particolare: una base per il nucleo e' data dal vettore $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$; una base per l'immagine e' formata dai vettori $\mathbf{e}_1$ ed $2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$; $p_f(t)=-t(t+2)(t-5)$; $m_f(t)=t(t+2)(t-5)$; una base di autovettori e' data dai vettori $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ (base per l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda=0$), $\mathbf{e}_1$ (base per l'autospazio relativo a $\lambda=5$), e $-2\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ (base per l'autospazio relativo a $\lambda=-2$). Infine, la forma canonica di Jordan di f e':

$$J_f=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&5&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.\quad\blacksquare$$

Esercizio 4. *Una matrice quadrata A di ordine 30, e' nilpotente con indice $p=5$, e soddisfa le condizioni $rkA=20$, $rkA^2=12$, $rkA^4=2$. Quali sono le possibili forme canoniche per A?*

Svolgimento. Abbiamo:

$$\begin{cases}\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4+\mu_5=\mathrm{rk}A^0=30\\ \mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=\mathrm{rk}A=20\\ \mu_1+\mu_2+\mu_3=\mathrm{rk}A^2=12\\ \mu_1+\mu_2=\mathrm{rk}A^3\\ \mu_1=\mathrm{rk}A^4=2.\end{cases}$$

Poiche' $\mu_1\leq\mu_2\leq\mu_3\leq\mu_4\leq\mu_5$, ne consegue che $2\leq\mu_2\leq5$. Allora deduciamo quanto segue.

• Se $\mu_2=2$, allora $(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)=(2,2,8,8,10)$. In tal caso J_A possiede due blocchi di ordine 5 ($2=\mu_1$), nessuno di ordine 4 ($0=\mu_2-\mu_1$), sei di ordine 3 ($6=\mu_3-\mu_2$), nessuno di ordine 2 ($0=\mu_4-\mu_3$), e due di ordine 1 ($2=\mu_5-\mu_4$). Cioe':

$$(\sharp J_{0,5},\sharp J_{0,4},\sharp J_{0,3},\sharp J_{0,2},\sharp J_{0,1})=(2,0,6,0,2).$$

• Se $\mu_2=3$, allora $(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)=(2,3,7,8,10)$. In tal caso J_A possiede due blocchi di ordine 5, uno di ordine 4, quattro di ordine 3, uno di ordine 2, e due di ordine 1. Cioe':

$$(\sharp J_{0,5},\sharp J_{0,4},\sharp J_{0,3},\sharp J_{0,2},\sharp J_{0,1})=(2,1,4,1,2).$$

• Se $\mu_2=4$, allora $(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)=(2,4,6,8,10)$. In tal caso J_A possiede due blocchi per ogni ordine da 1 a 5. Cioe':

$$(\sharp J_{0,5},\sharp J_{0,4},\sharp J_{0,3},\sharp J_{0,2},\sharp J_{0,1})=(2,2,2,2,2).$$

• Se $\mu_2=5$, allora $(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)=(2,5,5,8,10)$. In tal caso J_A possiede due blocchi di ordine 5, tre di ordine 4, tre di ordine 2, e due di ordine 1. Cioe':

$$(\sharp J_{0,5},\sharp J_{0,4},\sharp J_{0,3},\sharp J_{0,2},\sharp J_{0,1})=(2,3,0,3,2).\quad\blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1+x_2+2x_3\\ \dot{x}_2=-2x_2+3x_3\\ \dot{x}_3=-2x_3\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1(0)=1\\ x_2(0)=1\\ x_3(0)=1.\end{cases}$$

Svolgimento. La soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t)=e^{At}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A:=\begin{bmatrix}-2&1&2\\0&-2&3\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

Quindi:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-2t} e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= e^{-2t} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t & 2t + \frac{3}{2}t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 + 3t + \frac{3}{2}t^2 \\ 1 + 3t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,1,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che $\dot{y}_1 = e^{-2t}(1 - 3t - 3t^2)$, che e' uguale a $-2y_1 + y_2 + 2y_3$. Invece $\dot{y}_2 = e^{-2t}(1 - 6t)$, che e' uguale a $-2y_2 + 3y_3$. Infine $\dot{y}_3 = -2e^{-2t}$, che e' uguale a $-2y_3$. ■

Esercizio 6. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai seguenti vettori $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b}_3 = -\mathbf{e}_2$. Siano $(x_1', x_2', x_3')^T$ le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ del generico vettore $\mathbf{u}$ di $\mathbf{R}^3$. Sia $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita ponendo:*

$$q(\mathbf{u}) = {x_1'}^2 + 2x_1'x_2' + 4x_1'x_3' + {x_2'}^2 + 2x_2'x_3' + 2{x_3'}^2.$$

Calcolare gli invarianti dello spazio pseudoeuclideo $(\mathbf{R}^3, q)$, ed una base ortonormale.

Svolgimento. La matrice di Gram G di q rispetto alla base $\mathcal{B}$ e':

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[G \mid I]$ (cioe' le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-2)$, $e^{21}(-1)$, $e^{31}(-2)$, p_{23}, p^{23}, $e_{32}(-\frac{1}{2})$, $e^{32}(-\frac{1}{2})$, p_{23}, p^{23}, $e_2(\sqrt{2})$, $e_3(\frac{\sqrt{2}}{2})$) si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che gli invarianti sono $(n, p, r, s) = (3, 3, 2, 1)$, e che i vettori $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$, le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono date dai vettori numerici $(1,0,0)$, $(0, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\sqrt{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, formano una base ortonormale. Cioe', una base ortonormale per $(\mathbf{R}^3, q)$ e' data dai vettori:

$$\mathbf{c}_1 = (1,1,1), \quad \mathbf{c}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(2,3,4), \quad \mathbf{c}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(2,3,2). \qquad ■$$

Geometria (9 CFU), IV appello, 2 luglio 2019.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare omogeneo nelle variabili x, y, z:*

$$\begin{cases} hx + y + z - ht = 0 \\ x + hy + hz - t = 0, \end{cases}$$

e sia $U_h \subseteq \mathbf{R}^4$ lo spazio delle soluzioni di tale sistema. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$. Determinare tutti i valori del parametro h per cui U_h e' contenuto in V.

Svolgimento. Risolvendo il sistema lineare assegnato, si vede che se $h \neq \pm 1$ allora U_h e' generato dai vettori $(0, -1, 1, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$. Se invece $h = 1$ allora U_1 ammette come rappresentazione cartesiana l'equazione $x+y+z-t = 0$. Se $h = -1$ allora U_{-1} e' rappresentato dall'equazione $x - y - z - t = 0$.

D'altra parte, una rappresentazione cartesiana di V e' data dall'equazione $x + y + z - t = 0$. Percio', se $h \neq \pm 1$ allora U_h e' contenuto in V; se $h = 1$ allora $U_1 = V$; se $h = -1$, U_{-1} non e' contenuto in V.

In conclusione, U_h e' contenuto in V se e solo se $h \neq -1$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} x + (k+5)y + 2z = 1 \\ x + 2(k+5)y + (k+7)z = k+1 \\ x + 2(k+5)y + (2k+9)z = 2k+3. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Per i valori di k per cui $\mathcal{S}_k$ e' compatibile, determinarne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, e $e_{32}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & k+5 & 2 & 1 \\ 0 & k+5 & k+5 & k \\ 0 & 0 & k+2 & k+2 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k \neq -2, -5$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che essa e'

$$(x, y, z) = \left(4, -\frac{5}{k+5}, 1\right)^T.$$

- Se $k = -5$, il sistema $\mathcal{S}_{-5}$ non ha soluzioni.
- Se $k = -2$, il sistema $\mathcal{S}_{-2}$ ha infinite soluzioni, date da $\left(3 + z, -\frac{2}{3} - z, z\right)$, $z \in \mathbf{R}$.

Per quel che riguarda il sistema omogeneo associato abbiamo:

- Se $k \neq -2, -5$, il sistema $\mathcal{S}_k^*$ e' di Cramer, e percio' ha soltanto la soluzione banale $(0, 0, 0)$.
- Se $k = -5$, l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{-5}^*$ coincide con $\mathrm{Span}((0, 1, 0))$.
- Se $k = -2$, l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{-2}^*$ coincide con $\mathrm{Span}((1, -1, 1))$. ■

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 5)$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare tale che*

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -22 \\ 2 & 16 & 36 \\ 0 & 6 & 15 \end{bmatrix}.$$

Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, una base per il nucleo di f, ed una per l'immagine. Inoltre calcolare il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f, il polinomio minimo $m_f(t)$, la forma canonica J_f, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per f.

Svolgimento. Possiamo calcolare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ al seguente modo.

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -22 \\ 2 & 16 & 36 \\ 0 & 6 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -8 & -22 \\ 2 & 16 & 36 \\ 0 & 6 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che: una base per il nucleo di f e' formata dal vettore $(1,-1,0)$; una base dell'immagine di f e' formata dai vettori $(1,2,0)$ e $(-5,6,3)$; $p_f(t) = -t(t-3)^2$. Poi osserviamo che $m_g(3) = 1$, percio'

$$J_f = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e $m_f(t) = -p_f(t)$.

Per concludere, occorre trovare una base a stringhe per f. A tale proposito, osserviamo che

$$(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) - 3I)^2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 16 \\ -6 & 3 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base per l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_3$ si ottiene risolvendo l'equazione $6x - 3y + 16z = 0$. Deduciamo che una base per $\widetilde{V}_3$ e' formata dai vettori $(1,2,0)$, $(-8,0,3)$. Poiche'

$$(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) - 3I) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad (M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) - 3I) \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

allora i vettori $(1,2,0)$ e $(-8,0,3)$ formano una stringa di lunghezza 2 per f relativa all'autovalore $\lambda = 3$. Quindi una base a stringhe $\mathcal{S}$ per f e' costituita dai vettori:

$$(1,2,0), \quad (-8,0,3), \quad (1,-1,0). \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Sia $J = J_{0,10}$ il blocco di Jordan relativo all'autovalore $\lambda = 0$, di ordine 10. Qual e' la forma canonica di J^3?*

Svolgimento. Poniamo $A := J^3$. Allora A ha rango 7, $A^2 = J^6$ ha rango 4, $A^3 = J^9$ ha rango 1, e $A^4 = J^{12} = \mathbf{0}$. In particolare, A e' nilpotente con indice $p = 4$. Percio':

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = \mathrm{rk}A^0 = 10 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mathrm{rk}A = 7 \\ \mu_1 + \mu_2 = \mathrm{rk}A^2 = 4 \\ \mu_1 = \mathrm{rk}A^3 = 1. \end{cases}$$

Quindi $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (1,3,3,3)$. Allora il numero di blocchi che appaiono in J_A e':

$$(\sharp J_{0,4}, \sharp J_{0,3}, \sharp J_{0,2}, \sharp J_{0,1}) = (\mu_1, \mu_2 - \mu_1, \mu_3 - \mu_2, \mu_4 - \mu_3) = (1,2,0,0).$$

Cioe' la forma canonica J_A di $A = J^3$ e':

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - 5x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ \dot{x}_3 = 3x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. La soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = Pe^{Jt}P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove J e' la forma canonica della matrice A dei coefficienti dell'equazione

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

e P e' la matrice che si ottiene disponendo in colonna una base a stringhe per L_A. Confrontando con lo svolgimento dell'esercizio 3, sappiamo che

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e che possiamo porre

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi:

$$\mathbf{y}(t) = Pe^{Jt}P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 16 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} e^{3t}(3t - 16) + 16 \\ e^{3t}(6t + 16) - 16 \\ 9e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (0, 0, 1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

- $\dot{y}_1 = e^{3t}(t - 5)$, che e' uguale a $y_1 + y_2 - 5y_3$;
- $\dot{y}_2 = e^{3t}(6 + 2t)$, che e' uguale a $2y_1 + 2y_2 + 6y_3$;
- $\dot{y}_3 = 3e^{3t}$, che e' uguale a $3y_3$. ■

Esercizio 6. *Si consideri la forma quadratica* $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *definita ponendo:*

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 + 12x_2x_3 + 8x_3^2.$$

Trovare un cambiamento delle coordinate $\mathbf{x} = R \cdot \mathbf{x}'$ *tale che*

$$q(\mathbf{x}') = {x_1'}^2 + 4x_1'x_3' - {x_2'}^2 - 4x_2'x_3' - {x_3'}^2.$$

Svolgimento. Sia G la matrice di Gram di q rispetto alle coordinate $\mathbf{x}$, e G' la matrice di Gram di q rispetto alle coordinate $\mathbf{x}'$. Il problema consiste nel trovare una matrice invertibile R tale che

$$G' = R^T \cdot G \cdot R.$$

Disponendo accanto alla matrice G la matrice unitaria I, ed applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange, otteniamo:

$$[G \,|\, I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Posto

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sappiamo che

$$D = P^T \cdot G \cdot P.$$

Similmente, per G' otteniamo:

$$[G' \mid I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

E posto

$$Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

abbiamo anche

$$D = Q^T \cdot G' \cdot Q.$$

Percio'

$$D = P^T \cdot G \cdot P = Q^T \cdot G' \cdot Q.$$

Quindi avremo:

$$G' = (P \cdot Q^{-1})^T \cdot G \cdot (P \cdot Q^{-1}).$$

La matrice cercata e'

$$R = P \cdot Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), V appello, 28 agosto 2019.

Esercizio 1. *Siano A, B e C i sottoinsiemi di* $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ *definiti come segue:* $A = \{p(t) : p(t)_{|t=1} = 0\}$, $B = \{p(t) : p(t)_{|t=1} = 0 \text{ e } p(t)_{|t=2} = 0\}$, $C = \{p(t) : p^2(t)_{|t=1} = 0\}$. *Dire quali di essi e' un sottospazio di* $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$*, e, per tali sottospazi, calcolare la dimensione ed una base.*

Svolgimento. Sia

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

il generico polinomio di grado al piu' 3. Possiamo identificare $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ con $\mathbf{R}^4$ facendo corrispondere $p(t)$ alle sue coordinate (a_0, a_1, a_2, a_3) rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$.

In tale corrispondenza, il sottoinsieme A corrisponde al sottoinsieme A' di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori (a_0, a_1, a_2, a_3) tali che $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Percio' A' e' un sottospazio di $\mathbf{R}^4$. Poiche' l'applicazione delle coordinate e' un isomorfismo, allora anche A e' un sottospazio di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$. Inoltre, risolvendo l'equazione omogenea $a_0+a_1+a_2+a_3 = 0$, deduciamo che A' ha dimensione 3, ed una sua base e' costituita dai vettori $(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)$. Percio' anche A ha dimensione 3, ed una sua base e' costituita dai polinomi $-1 + t, -1 + t^2, -1 + t^3$.

Poiche' $A = C$, anche C e' un sottospazio di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$, con la stessa dimensione e la stessa base.

Infine, B corrisponde alle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0. \end{cases}$$

Percio' anche B e' un sottospazio, di dimensione 2, ed una sua base e' costituita dai polinomi $2 - 3t + t^2$, $6 - 7t + t^3$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in* $\mathbf{R}$*, si consideri il seguente sistema lineare* $\mathcal{S}_k$ *nelle variabili* x, y, z*:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} (k+5)x + y + z = 1 \\ (2k+10)x + (k+5)y + 3z = k+5 \\ (k+5)x + y + (k+3)z = k^2 - 3. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ *ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Per i valori di k per cui* $\mathcal{S}_k$ *e' compatibile, determinarne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema omogeneo associato* $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-2)$ e $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} k+5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+3 & 1 & k+3 \\ 0 & 0 & k+2 & k^2-4 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k \neq -2, -3, -5$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che essa e'

$$(x, y, z) = \left(\frac{4 - k^2}{(k+3)(k+5)}, \frac{5}{k+3}, k - 2 \right)^T.$$

- Se $k = -2$, il sistema $\mathcal{S}_{-2}$ ha ∞^1 soluzioni, e sono $(0, 1 - z, z)^T$, al variare di z in $\mathbf{R}$.
- Se $k = -3$, oppure $k = -5$, il sistema $\mathcal{S}_k$ non ha soluzioni.

Per quel che riguarda il sistema omogeneo associato abbiamo:

- Se $k \neq -2, -3, -5$, il sistema $\mathcal{S}_k^*$ e' di Cramer, e percio' ha soltanto la soluzione banale $(0, 0, 0)^T$.
- Se $k = -2$, l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{-2}^*$ coincide con $\text{Span}((0, -1, 1))$.
- Se $k = -3$, l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{-3}^*$ coincide con $\text{Span}((-1, 2, 0))$.
- Se $k = -5$, l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_{-5}^*$ coincide con $\text{Span}((1, 0, 0))$. ■

Esercizio 3. *Sia* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *un operatore lineare. Si considerino i seguenti sistemi lineari:*

$$\mathcal{S}_1 = \begin{cases} x - z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{S}_2 = \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Si assuma che $\mathcal{S}_1$ sia una rappresentazione cartesiana per il nucleo di f, ed $\mathcal{S}_2$ per l'autospazio di f associato all'autovalore 7. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, una base per il nucleo di f, ed una per l'immagine. Inoltre calcolare il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f, il polinomio minimo $m_f(t)$, la forma canonica J_f, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per f.

Svolgimento. Risolvendo i sistemi lineari assegnati, otteniamo una base per il nucleo di f, cioe' $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4\}$, ed una base per l'autospazio V_7, cioe' $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Disponendo in colonna tali vettori, formiamo la seguente matrice

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice e' invertibile. Percio' i vettori precedenti, riuniti, formano una base di $\mathbf{R}^4$:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}.$$

Naturalmente si ha $P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^4})$.

Ora osserviamo che, poiche' i vettori $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$ stanno nel nucleo di f, allora si ha

$$f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) = \mathbf{0}.$$

Inoltre, poiche' i vettori $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ sono autovettori relativi all'autovalore 7, allora si ha

$$f(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) = 7(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \quad \text{e} \quad f(\mathbf{e}_4) = 7\mathbf{e}_4.$$

Percio', tenuto conto della definizione di matrice rappresentativa, abbiamo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

A questo punto possiamo gia' dire che $J_f = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}$, $p_f(t) = t^2(t-7)^2$, $m_f(t) = t(t-7)$, e che $\mathcal{B}_1$ e' una base del nucleo, e che $\mathcal{B}_2$ lo e' per l'immagine. Infine, il calcolo mostra che

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Percio'

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = P \cdot J_f \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 7 & 0 \\ -14 & 0 & 14 & 0 \\ -14 & 0 & 14 & 0 \\ -14 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Di una data matrice quadrata A, si sa che $A^4 - 4A^3 + 4A^2 = \mathbf{0}$ e $(A - I)(A^3 - 5A^2 + 8A - 4I) = \mathbf{0}$. Dire se e' vero oppure no che A e' diagonalizzabile.*

Svolgimento. La matrice A e' una radice dei seguenti polinomi: $t^2(t-2)^2$ e $(t-1)^2(t-2)^2$. Percio', condizione necessaria e sufficiente affinche' A soddisfi le date condizioni, e' che il suo polinomio minimo sia un fattore di $(t-2)^2$. Possiamo dire allora che non e' detto che A sia diagonalizzabile. Per esempio, la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

soddisfa entrambe le condizioni, ma non e' diagonalizzabile.

In conclusione, la risposta e' no. $\blacksquare$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -7x_1 + 5x_3 \\ \dot{x}_2 = -8x_1 - 2x_2 + 9x_3 \\ \dot{x}_3 = -10x_1 + 8x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. La soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = Pe^{Jt}P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove J e' la forma canonica della matrice A dei coefficienti dell'equazione

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 5 \\ -8 & -2 & 9 \\ -10 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

e P e' la matrice che si ottiene disponendo in colonna una base a stringhe per L_A. Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -(t+2)^2(t-3)$, e la molteplicita' geometrica dell'autovalore -2 e' 1. Quindi

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore 3 e' $(1, 2, 2)$.

L'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_{-2}$ relativo all'autovalore -2 ha come rappresentazione cartesiana il sistema lineare omogeneo

$$(A + 2I)^2 \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -8 & 0 & 9 \\ -10 & 0 & 10 \end{bmatrix}^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

che equivale a

$$x - z = 0.$$

Quindi i vettori $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ formano una base per $\widetilde{V}_{-2}$. E poiche'

$$(A + 2I) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (A + 2I) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

allora i vettori $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ formano anche una stringa di lunghezza 2 relativa all'autovalore -2. Percio' possiamo porre

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

E quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) = Pe^{Jt}P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{3t} \\ (2 + 2t)e^{-2t} - 2e^{3t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

- $\dot{y}_1 = -4e^{-2t} - 3e^{3t}$, che e' uguale a $-7y_1 + 5y_3$;
- $\dot{y}_2 = -(2 + 4t)e^{-2t} - 6e^{3t}$, che e' uguale a $-8y_1 - 2y_2 + 9y_3$;
- $\dot{y}_3 = -4e^{-2t} - 6e^{3t}$, che e' uguale a $-10y_1 + 8y_3$. ■

Esercizio 6. *Sia* (x, y, z) *il generico vettore di* $\mathbf{R}^3$. *Decomporre* (x, y, z) *nella somma* $(x, y, z) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ *di un vettore* $\mathbf{a}$ *parallelo ad* $(1, 1, 1)$, *e di un vettore* $\mathbf{b}$ *ortogonale ad* $(1, 1, 1)$. *Spiegare perche' l'applicazione* $f : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \to \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$ *e' lineare, e determinarne la matrice rappresentativa rispetto alla base canonica.*

Svolgimento. Il vettore $\mathbf{a}$ e' dato dalla proiezione ortogonale di (x, y, z) su $(1, 1, 1)$, cioe'

$$\mathbf{a} = p_{(1,1,1)}(x, y, z) = \frac{< (x, y, z), (1, 1, 1) >}{< (1, 1, 1), (1, 1, 1) >} \cdot (1, 1, 1) = \frac{x + y + z}{3} \cdot (1, 1, 1).$$

Quindi a fortiori

$$\mathbf{b} = (x, y, z) - \frac{x + y + z}{3} \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right).$$

L'espressione di $\mathbf{b}$ e' un vettore con componenti polinomi omogenei di primo grado in x, y, z. Cio' prova che f e' lineare. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ e':

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), VI appello, 11 settembre 2019.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,2,1,1)$, $(1,-3,0,1)$, $(2,-1,1,2)$, e sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori (x,y,z,t) che soddisfano le equazioni $x+3z-2t=0$ e $y+z+t=0$. Calcolare la dimensione ed una base per U, V, $U \cap V$ ed $U+V$, ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.*

Svolgimento. Il vettore $(2,-1,1,2)$ e' la somma di $(1,2,1,1)$ con $(1,-3,0,1)$. Percio' U ha dimensione 2, ed una sua base e' formata dai vettori $(1,2,1,1)$, $(1,-3,0,1)$.

Risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x+3z-2t=0 \\ y+z+t=0, \end{cases}$$

si vede che V ha dimensione 2, ed una sua base e' formata dai vettori $(2,-1,0,1)$, $(-3,-1,1,0)$.

Disponendo in riga i vettori della base di U e della base di V, si ottiene la seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala per righe tale matrice, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che $U+V$ ha dimensione 3, ed una sua base e' formata dai vettori $(1,2,1,1)$, $(0,-5,-1,0)$, $(0,0,1,1)$. Per ottenere una rappresentazione cartesiana di $U+V$, disponiamo in colonna i vettori di tale base, affiancando il vettore colonna generico di $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 2 & -5 & 0 & y \\ 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 0 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

La rappresentazione cercata consiste nell'imporre che il determinante di tale matrice sia nullo. Si ottiene cosi' che una rappresentazione cartesiana di $U+V$ e' data dall'equazione

$$2x-y+5z-5t=0.$$

Infine andiamo a studiare $U \cap V$. Per la formula di Grassmann sappiamo che tale spazio ha dimensione 1. Per trovarne una base, sara' sufficiente individuarne un vettore non nullo. Possiamo procedere cosi'. Il vettore generico di U e' della forma:

$$a(1,2,1,1)+b(1,-3,0,1)=(a+b,2a-3b,a,a+b).$$

Tale vettore appartiene a V se e solo se e' una soluzione del sistema che rappresenta V, cioe' se e solo se

$$2a-b=0.$$

Allora ponendo $a=1$ e $b=2$, otteniamo un vettore non nullo di $U \cap V$, che ne costituisce una base:

$$1 \cdot (1,2,1,1)+2 \cdot (1,-3,0,1)=(3,-4,1,3). \quad \blacksquare$$

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} x+ky-kz=1 \\ x+(2k+2)y+2z=k+3 \\ 2x+(3k+2)y+(2-k)z=k+4. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Per i valori di k per cui $\mathcal{S}_k$ e' compatibile, determinarne le soluzioni. Rispondere alla stessa domanda per il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-2)$ e $e_{32}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & k & -k & 1 \\ 0 & k+2 & k+2 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k \neq -2$, il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette ∞^1 soluzioni date da

$$(x, y, z) = (1 - k + 2kz, 1 - z, z)^T, \quad z \in \mathbf{R}.$$

- Se $k = -2$, il sistema $\mathcal{S}_{-2}$ ha ∞^2 soluzioni date da

$$(1 + 2y - 2z, y, z)^T, \quad y, z \in \mathbf{R}.$$

Per quel che riguarda il sistema omogeneo associato abbiamo:

- Se $k \neq -2$, l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}^*_k$ coincide con $\mathrm{Span}((2k, -1, 1))$.
- Se $k = -2$, l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}^*_{-2}$ coincide con $\mathrm{Span}((2, 1, 0), (-2, 0, 1))$. ■

Esercizio 3. *Si consideri lo spazio $\mathcal{M}(2,2)$ delle matrici quadrate di ordine 2, e la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Sia $f : \mathcal{M}(2,2) \to \mathcal{M}(2,2)$ l'operatore lineare definito ponendo $f(X) = A \cdot X - X \cdot A$. Calcolare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}(2,2)$, una base per il nucleo ed una per l'immagine di f, e la forma canonica J_f di f.*

Svolgimento. Sia

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

la generica matrice quadrata di ordine 2. Allora il calcolo prova che

$$f(X) = \begin{bmatrix} -3y + 2z & -2x - 3y + 2t \\ 3x + 3z - 3t & 3y - 2z \end{bmatrix}.$$

Percio'

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2. Poiche' I ed A stanno nel nucleo, ne consegue che ne formano una base. Mentre una base per l'immagine e' costituita dalle matrici

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Infine, calcolando il polinomio caratteristico di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ otteniamo (nel primo passaggio sommiamo alla prima colonna la quarta, poi mettiamo in evidenza $-t$):

$$p_f(t) = \det \begin{bmatrix} -t & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3-t & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3-t & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -t \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -t & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3-t & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-t & -3 \\ -t & 3 & -2 & -t \end{bmatrix}$$

$$= -t \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3-t & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-t & -3 \\ 1 & 3 & -2 & -t \end{bmatrix} = -t \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3-t & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-t & -3 \\ 0 & 6 & -4 & -t \end{bmatrix}$$

$$= -t \cdot \det \begin{bmatrix} -3-t & 0 & 2 \\ 0 & 3-t & -3 \\ 6 & -4 & -t \end{bmatrix} = t^2(t^2 - 33).$$

Percio' f e' diagonalizzabile, e

$$J_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{33} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Sia J il blocco di Jordan di ordine $p \geq 2$, relativo all'autovalore $\lambda = 0$. Qual e' la forma canonica di J^{p-1}?*

Svolgimento. Posto $A = J^{p-1}$, si ha $A^2 = J^{2p-2} = \mathbf{0}$. Percio', poiche' A ha rango 1, la sua forma canonica consiste di un blocco nilpotente di ordine 2, e di $p-2$ blocchi nilpotenti di ordine 1. $\blacksquare$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -8x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. La soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = Pe^{Jt}P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove J e' la forma canonica della matrice A dei coefficienti dell'equazione

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ -8 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e P e' la matrice che si ottiene disponendo in colonna una base a stringhe per L_A. Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -t^2(t-1)$, e la molteplicita' geometrica dell'autovalore 0 e' 1. Quindi

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore 1 e' $(1, 3, 5)$.

L'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_0$ relativo all'autovalore 0 ha come rappresentazione cartesiana il sistema lineare omogeneo

$$A^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

che equivale a

$$x + y - z = 0.$$

Quindi i vettori $(-1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ formano una base per $\widetilde{V}_0$.

Ora consideriamo l'operatore L_A ristretto su $\widetilde{V}_0$:

$$\mathbf{x} \in \widetilde{V}_0 \to A \cdot \mathbf{x} \in \widetilde{V}_0.$$

Tale operatore porta $(-1, 1, 0)$ in $(3, 6, 9)$, e $(1, 0, 1)$ in $(-2, -4, -6)$. Percio' la matrice rappresentativa di tale operatore, rispetto alla base $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, e':

$$M = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice porta $(1,0)$ in $(6,9)$, e $(6,9)$ in $(0,0)$. Quindi $(6,9)$ e $(1,0)$ rappresentano le coordinate di due vettori di $\widetilde{V}_0$ (cioe' $(3,6,9)$ e $(-1,1,0)$) che formano una stringa di lunghezza 2 per L_A relativa all'autovalore 0. Possiamo formare allora la matrice P:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto che

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & 6 & -3 \\ -9 & -9 & 9 \end{bmatrix},$$

siamo in condizione di calcolare la soluzione $\mathbf{y}(t)$ del problema assegnato. Infatti:

$$\mathbf{y}(t) = Pe^{Jt}P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & 6 & -3 \\ -9 & -9 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 - t - e^t \\ 3 - 2t - 3e^t \\ 5 - 3t - 5e^t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

- $\dot{y}_1 = -1 - e^t$, che e' uguale a $-2y_1 + y_2$;
- $\dot{y}_2 = -2 - 3e^t$, che e' uguale a $-5y_1 + y_2 + y_3$;
- $\dot{y}_3 = -3 - 5e^t$, che e' uguale a $-8y_1 + y_2 + 2y_3$. ■

Esercizio 6. *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, sia $q_k : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita ponendo*

$$q_k(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + kx_3^2.$$

Sia $\phi_k : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la polarizzazione di q_k. Calcolare $\phi_k((1,1,1),(1,0,-1))$, e determinare i valori di k per i quali q_k e' definita positiva, ed i valori di k per i quali q_k e' definita negativa.

Svolgimento. La matrice di Gram di q_k rispetto alla base canonica e':

$$G_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

Applicando l'Algoritmo di Gauss-Lagrange, si riesce a portare G_k nella matrice

$$D_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che $q_k > 0$ se e solo se $k > 1$, e che q_k non e' mai definita negativa. Infine:

$$\phi_k((1,1,1),(1,0,-1)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 - k. \quad ■$$

Geometria (9 CFU), I appello, 21 gennaio 2020.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ con rappresentazione cartesiana $3x+2y-z-t=0$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$ e $\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_4$. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $3\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_4$ e $4\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_3+3\mathbf{e}_4$. Calcolare una base di $U\cap V$, ed una rappresentazione cartesiana di $(U\cap V)+W$.*

Svolgimento. Una rappresentazione cartesiana di V e' data dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x-2z+t=0 \\ x-y=0. \end{cases}$$

Inserendo l'equazione di U, si ottiene una rappresentazione cartesiana di $U\cap V$:

$$\begin{cases} 3x+2y-z-t=0 \\ x-2z+t=0 \\ x-y=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene una base per $U\cap V$, che e' costituita da un solo vettore:

$$\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3+3\mathbf{e}_4\}.$$

Tale vettore, insieme ai vettori $3\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_4$, forma una base per $(U\cap V)+W$. Tale spazio ha percio' rappresentazione cartesiana data dall'equazione:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 2 & 3 & 0 & z \\ 3 & 0 & 3 & t \end{bmatrix}=0.$$

Cioe', una rappresentazione cartesiana per $(U\cap V)+W$ e' data dall'equazione $3x+6y-3z-t=0$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} 2x-y-z=-2 \\ 2x-2y+(k+1)z=-3 \\ 2x-y+(k^2-5k+5)z=k-4. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$ ed $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & k+2 & -1 \\ 0 & 0 & k^2-5k+6 & k-2 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k\neq 2$ e $k\neq 3$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e'

$$\frac{1}{k-3}\,(3,2k-1,1)^T.$$

- Se $k=2$, il sistema $\mathcal{S}_2$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x-y-z=-2 \\ y-4z=1. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}_2$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$(-1/2,1,0)^T+z(5/2,4,1)^T, \quad z\in\mathbf{R}.$$

- Se $k=3$ il sistema $\mathcal{S}_3$ e' incompatibile. ■

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'operatore lineare definito ponendo $f(x,y,z) = (3x+2y+2z, 5x+3y+3z)$. Sia $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito ponendo $g(2,3) = (1,-1,1)$ e $g(3,5) = (3,-3,1)$. Sia $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore composto $h = g \circ f$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(h)$ di h rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^3$, il polinomio caratteristico di h, la forma canonica di Jordan di h, il polinomio minimo di h, ed una base a stringhe per h.*

Svolgimento. Denotiamo con $\mathcal{E}_2$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$, e con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^2$ formata dai vettori $(2,3)$ e $(3,5)$. Allora si ha:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(h) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g \circ f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_2}(g) \cdot M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}}(f)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p_h(t) = -t(t-1)(t-2)$. Percio' h e' diagonalizzabile, la forma canonica di h e':

$$J_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

il polinomio minimo di h e' $m_h(t) = t(t-1)(t-2)$. Infine, il calcolo mostra che una base a stringhe per h e' costituita dai vettori $(0,1,-1), (-1,1,1), (1,-1,0)$ (e' una base di autovettori). ■

Esercizio 4. *Sia J il blocco di Jordan nilpotente, di ordine 201. Qual e' la forma canonica di J^2?*

Svolgimento. Poniamo $A := J^2$. Allora $A^{100} = J^{200} \neq \mathbf{0}$, e $A^{101} = J^{202} = \mathbf{0}$. Percio' A e' nilpotente, con indice di nilpotenza $p = 101$. Inoltre, il rango di $A^{p-1} = J^{200}$ e' pari a 1, mentre il rango di $A^{p-2} = J^{198}$ e' pari a 3. Percio' $\mu_1 = rkA^{p-1} = 1$ e $\mu_1 + \mu_2 = rkA^{p-2} = 3$. Ne consegue che nella forma canonica J_A di A c'e' un blocco di ordine 101, ed un blocco di ordine 100. Cio' determina J_A, perche' non c'e' spazio per altri blocchi. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = 12x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 12 & 7 & 4 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At}, andiamo a calcolare una base a stringhe $\mathcal{S}$ per l'operatore L_A. Mettendo in colonna i vettori di tale base, otterremo una matrice P tale che $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, dove J e' la forma canonica di A.

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -(t+1)(t-1)^2$, e la molteplicita' geometrica dell'autovalore 1 e' 1. Percio' la forma canonica di A e':

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Un autovettore per l'autovalore -1 e' $(1,-2,1)$.

Ora andiamo a studiare l'autovalore 1. L'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_1$ e' il nucleo dell'operatore $L_{(A-I)^2}$. Tale nucleo e' rappresentato dall'equazione $2x + y + z = 0$. Percio' una base per $\widetilde{V}_1$ e' $\mathcal{B} = \{(1,0,-2), (1,-2,0)\}$. La matrice rappresentativa rispetto a tale base della restrizione di L_{A-I} su $\widetilde{V}_1$ e':

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per l'operatore L_M i vettori $(0,-2)$ ed $(1,0)$ formano una stringa di lunghezza 2, relativa all'autovalore nullo. Percio' una stringa di lunghezza 2 per L_A, relativa all'autovalore 1, e' data dai vettori:

$$(-2,4,0),(1,0,-2).$$

Allora una base a stringhe per L_A e':

$$\mathcal{S}=\{(1,-2,1),(-2,4,0),(1,0,-2)\}.$$

E si ha

$$P=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{S}}(id_{\mathbf{R}^3})=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&0\\1&0&-2\end{bmatrix}.$$

Possiamo calcolare la soluzione del problema assegnato.

$$\mathbf{y}(t)=e^{At}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=P\cdot e^{Jt}\cdot P^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^t&te^t\\0&0&e^t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3/4&1/2\\1&1/2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-t}-(1+t)e^t\\-2e^{-t}+(3+2t)e^t\\e^{-t}-e^t\end{bmatrix}.$$

Per verificare che il risultato e' esatto, osserviamo innanzitutto che

$$\dot{\mathbf{y}}(t)=\begin{bmatrix}-e^{-t}-(2+t)e^t\\2e^{-t}+(5+2t)e^t\\-e^{-t}-e^t\end{bmatrix}.$$

E poi che tale funzione vettoriale coincide con la funzione che si ottiene moltiplicando la matrice A con $\mathbf{y}(t)$:

$$A\cdot\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}-5&-3&-2\\12&7&4\\-4&-2&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-t}-(1+t)e^t\\-2e^{-t}+(3+2t)e^t\\e^{-t}-e^t\end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia $\phi:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che $\phi(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=1$, $\phi(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)=-1$, $\phi(2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2,2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)=-14$. Calcolare la matrice di Gram $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ di ϕ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, e gli invarianti di ϕ.*

Svolgimento. Osserviamo che i vettori $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ e $2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2$ formanno una base di $\mathbf{R}^2$. Chiamiamo $\mathcal{B}$ tale base. Dai dati sappiamo che:

$$G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-14\end{bmatrix}.$$

Percio'

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})^T\cdot G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})$$

$$=\begin{bmatrix}3&-1\\-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-14\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\3&-6\end{bmatrix}.$$

L'algoritmo di Gauss-Lagrange porta la matrice $\begin{bmatrix}1&3\\3&-6\end{bmatrix}$ nella matrice $\begin{bmatrix}1&0\\0&-15\end{bmatrix}$. Ne consegue che gli invarianti di ϕ sono $(2,2,1,0)$. $\blacksquare$

Geometria (9 CFU), II appello, 6 febbraio 2020.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito dalla rappresentazione cartesiana*

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z-ht=0 \\ 2x+(1-h)t=0, \end{cases}$$

e sia V_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori

$$(h-1,-h-3,2,2), \quad (h-1,1-h,-2,2), \quad (2h-2,-2h-2,h+2,4).$$

Determinare i valori di h per cui $U_h \subseteq V_h$, quelli per cui $U_h = V_h$, e quelli per cui $U_h \supseteq V_h$.

Svolgimento. Il rango della matrice dei coefficienti della rappresentazione cartesiana di U_h e' 2. Percio' $\dim U_h = 4-2 = 2$ per ogni h. Osserviamo anche che i primi due generatori di V_h sono indipendenti e, poiche' soddisfano le equazioni di U_h, formano una base per U_h. Possiamo dire allora che U_h e' sempre contenuto in V_h. Inoltre, il terzo generatore di V_h soddisfa le equazioni di U_h, cioe' appartiene ad U_h, se e solo se $h=-2$. Ne consegue che $V_h \subseteq U_h$ se e solo se $U_h = V_h$ se e solo se $h=-2$. In conclusione, $U_h \subseteq V_h$ per ogni $h \in \mathbf{R}$, $U_h = V_h$ se e solo se $h=-2$, e $U_h \supseteq V_h$ se e solo se $h=-2$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+(k+1)z=2 \\ kx+ky+(k^2+4k+2)z=2k+1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$. Rispondere alla stessa domanda per il sistema omogeneo associato $\mathcal{S}_k^*$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$ ed $e_{31}(-k)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & k^2+3k+2 & k+1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

• Se $k \neq -2$ e $k \neq -1$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e'

$$\frac{1}{k+2}\,(k-1,2,1)^T.$$

• Se $k=-1$, il sistema $\mathcal{S}_{-1}$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=1. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}_{-1}$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$(0,1,0)^T + z(-2,1,1)^T, \quad z \in \mathbf{R}.$$

• Se $k=-2$ il sistema $\mathcal{S}_3$ e' incompatibile.

Per quel che riguarda il sistema omogeneo $\mathcal{S}_k^*$, con le stesse operazioni precedenti, perveniamo alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2+3k+2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio':

• Se $k \neq -2$ e $k \neq -1$, il sistema $\mathcal{S}_k^*$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, che e' quella nulla.

• Se $k = -1$, il sistema $\mathcal{S}^*_{-1}$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}^*_{-1}$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$z(-2, 1, 1)^T, \quad z \in \mathbf{R}.$$

• Se $k = -2$, il sistema $\mathcal{S}^*_{-2}$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 2z = 0. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}^*_{-2}$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$z(-3, 2, 1)^T, \quad z \in \mathbf{R}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3. *L'endomorfismo* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *soddisfa le seguenti condizioni:* $f(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2$, $f(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2$, $f(\mathbf{e}_3) = -6\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. *Calcolare la matrice rappresentativa* $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ *di* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$ *di* $\mathbf{R}^3$*, il polinomio caratteristico, la forma canonica di Jordan, il polinomio minimo, ed una base a stringhe per* f*.*

Svolgimento. Poiche' f e' lineare, abbiamo:

$$3\mathbf{e}_2 = f(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) = f((\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2) - (\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2)) = f(\mathbf{e}_2)$$

e

$$\mathbf{e}_1 = 4f(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) - 3f(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2) = f(4(\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2) - 3(\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2)) = f(\mathbf{e}_1).$$

Percio'

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che il polinomio caratteristico e' $p_f(t) = -(t-1)^2(t-3)$. La molteplicita' geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ e' 2. Quindi f e' diagonalizzabile e

$$J_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Deduciamo che $m_f(t) = (t-1)(t-3)$, ed il calcolo mostra che una base di autovettori per f e' data dai vettori $\mathbf{e}_1$, $3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2$. $\blacksquare$

Esercizio 4. *Una matrice* A *e' quadrata di ordine* 6*, e si sa che* $(A + 2I)^2 \neq \mathbf{0}$ *e* $(A + 2I)^4 = \mathbf{0}$*. Quali sono le possibili forme canoniche di Jordan di* A*?*

Svolgimento. Poniamo $B := A + 2I$. Allora B e' nilpotente, ed il suo indice di nilpotenza e' $p = 3$ oppure $p = 4$. Nel primo caso, in J_B deve apparire necessariamente un blocco di ordine 3, e tutti gli altri blocchi hanno ordine ≤ 3. In tal caso, tenuto conto che B ha ordine 6, le forme canoniche possibili per B sono: quella con due blocchi di ordine 3, quella con un solo blocco di ordine 3, uno di ordine 2 ed uno di ordine 1, e quella con un blocco di ordine 3, e tre blocchi di ordine 1. Cioe':

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se invece $p = 4$, allora in J_B deve apparire necessariamente un blocco di ordine 4, e tutti gli altri blocchi hanno ordine ≤ 4 (cioe' ≤ 2, perche' B ha ordine 6). In tal caso le forme canoniche possibili per B sono: quella con un blocco di ordine 4 ed uno di ordine 2, e quella con un blocco di ordine 4 e due di ordine 1. Cioe':

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Collocando $\lambda = -2$ sulla diagonale principale delle matrici elencate, si ottengono tutte le possibili forme canoniche di A. $\blacksquare$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = -16x_1 - 8x_2 - 4x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ -16 & -8 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At}, andiamo a calcolare una base a stringhe $\mathcal{S}$ per l'operatore L_A. Mettendo in colonna i vettori di tale base, otterremo una matrice P tale che $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, dove J e' la forma canonica di A.

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -t(t-2)^2$, e la molteplicita' geometrica dell'autovalore 2 e' 1. Percio' la forma canonica di A e':

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un autovettore per l'autovalore $\lambda = 0$ e' $(-1, 2, 0)$.

Ora andiamo a studiare l'autovalore 2. L'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_2$ e' il nucleo dell'operatore $L_{(A-2I)^2}$. Tale nucleo e' rappresentato dall'equazione $5x + 3y + z = 0$. Percio' una base per $\widetilde{V}_2$ e' $\mathcal{B} = \{(-3, 5, 0), (-1, 0, 5)\}$. La matrice rappresentativa rispetto a tale base della restrizione di L_{A-2I} su $\widetilde{V}_2$ e':

$$M = \begin{bmatrix} -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

Per l'operatore L_M i vettori $(-2/5, 1/5)$ ed $(1, 0)$ formano una stringa di lunghezza 2 per l'autovalore nullo. Percio' una stringa di lunghezza 2 per L_A relativa all'autovalore 2, e' data dai vettori:

$$(1, -2, 1), (-3, 5, 0).$$

Allora una base a stringhe per L_A e':

$$\mathcal{S} = \{(1, -2, 1), (-3, 5, 0), (-1, 2, 0)\}.$$

E si ha

$$P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{S}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo calcolare la soluzione del problema assegnato.

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t}(3-t) - 3 \\ e^{2t}(2t-5) + 6 \\ -te^{2t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare che il risultato e' esatto, osserviamo innanzitutto che la condizione iniziale e' soddisfatta $\mathbf{y}(0) = (0,1,0)^T$. Poi osserviamo che

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}(5-2t) \\ e^{2t}(-8+4t) \\ e^{2t}(-1-2t) \end{bmatrix},$$

e che tale funzione vettoriale coincide con la funzione che si ottiene moltiplicando la matrice A con $\mathbf{y}(t)$:

$$A \cdot \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ -16 & -8 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t}(3-t) - 3 \\ e^{2t}(2t-5) + 6 \\ -te^{2t} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Per quali valori del parametro $h \in \mathbf{R}$, la matrice*

$$G_h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & h+3 \end{bmatrix}$$

ha rango 3 *ed indice* 2*?*

Svolgimento. Applicando le operazioni elementari $e_{21}(-1)$, $e^{21}(-1)$, $e_{31}(1)$ ed $e^{31}(1)$, portiamo la matrice G_h nella matrice diagonale D_h ad essa congruente

$$D_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & h+2 \end{bmatrix}.$$

Percio' G_h ha rango 3 ed indice 2 se e solo se $h < -2$. $\blacksquare$

Geometria (9 CFU), III appello, 18 giugno 2020.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dalle equazioni $3x-5y-z=0$, $x-z=0$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(-2,1,1),(4,-2,-2)$. Determinare una base ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.*

Svolgimento. Risolvendo il sistema costituito dalle due equazioni che definiscono U, si vede che U e' generato dal vettore $(5,2,5)$. Poiche' V e' generato da $(-2,1,1)$, allora i vettori $(5,2,5)$ e $(-2,1,1)$ formano una base di $U+V$, ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$ e' data da:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & z \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' $x+5y-3z=0$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} x+2ky+2kz=2 \\ x+(2k+1)y+3kz=4 \\ 2x+4ky+(k^2+10k)z=k+10. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$ ed $e_{31}(-2)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2k & 2k & 2 \\ 0 & 1 & k & 2 \\ 0 & 0 & k^2+6k & k+6 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k\neq 0$ e $k\neq -6$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e'

$$\left(-2k, 1, \frac{1}{k}\right)^T.$$

- Se $k=-6$, il sistema $\mathcal{S}_{-6}$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x-12y-12z=2 \\ y-6z=2. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}_{-6}$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$(26,2,0)^T + z(84,6,1)^T, \quad z\in\mathbf{R}.$$

- Se $k=0$, il sistema $\mathcal{S}_0$ e' incompatibile. ■

Esercizio 3. *L'endomorfismo $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(\mathbf{e}_1)=10\mathbf{e}_1+8\mathbf{e}_2+11\mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)=2(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$, $2f(\mathbf{e}_2)+f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)=\mathbf{0}$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^3$, e calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $P^{-1}\cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)\cdot P=D$.*

Svolgimento. Per ipotesi sappiamo che

$$f(\mathbf{e}_1)=10\mathbf{e}_1+8\mathbf{e}_2+11\mathbf{e}_3.$$

Inoltre sappiamo anche che:

$$f(\mathbf{e}_2)=-\frac{1}{2}f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)=-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3.$$

E poiche' f e' lineare, abbiamo $f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)=f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_3)$, e percio':

$$f(\mathbf{e}_3)=f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)-f(\mathbf{e}_1)=2(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)-(10\mathbf{e}_1+8\mathbf{e}_2+11\mathbf{e}_3)=-8\mathbf{e}_1-6\mathbf{e}_2-9\mathbf{e}_3.$$

In definitiva:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 10 & -1 & -8 \\ 8 & -1 & -6 \\ 11 & -1 & -9 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ e' $p_f(t) = -t(t-1)(t+1)$. L'autospazio V_1 e' generato dal vettore $(1,1,1)$, l'autospazio V_0 dal vettore $(1,2,1)$, e l'autospazio V_{-1} dal vettore $(3,1,4)$. Percio', posto

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

la matrice P e' invertibile, e

$$P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot P = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Una matrice A e' quadrata di ordine 5, soddisfa la condizione $A^3 = \mathbf{0}$, ed ha rango uguale a 3. Qual e' la forma canonica di Jordan di A?*

Svolgimento. Sia p l'indice di nilpotenza di A. Allora $p \leq 3$.

Se $p = 3$, le possibilita' per J_A sono:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $p = 2$, le possibilita' per J_A sono:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $p = 1$ allora A e' la matrice nulla.

Percio', tenuto conto che A ha rango 3, ne consegue che la forma canonica di A e':

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 9x_2 - 13x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 + 4x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 9 & -13 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At}, andiamo a calcolare una base a stringhe $\mathcal{S}$ per l'operatore L_A. Mettendo in colonna i vettori di tale base, otterremo una matrice P tale che $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, dove J e' la forma canonica di A.

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$, e la molteplicita' geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ e' 1. Percio' la forma canonica di A e':

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Un autovettore per l'autovalore $\lambda = 2$ e' $(-5, 2, 1)$.

Ora andiamo a studiare l'autovalore $\lambda = 1$. L'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_1$ e' il nucleo dell'operatore $L_{(A-I)^2}$. Tale nucleo e' rappresentato dall'equazione $x + y + 4z = 0$. Percio' una base per $\widetilde{V}_1$ e' $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-4, 0, 1)\}$. La matrice rappresentativa rispetto a tale base della restrizione di L_{A-I} su $\widetilde{V}_1$ e':

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Per l'operatore L_M i vettori $(-3, -1)$ ed $(1, 0)$ formano una stringa di lunghezza 2 per l'autovalore nullo. Percio' una stringa di lunghezza 2 per L_A relativa all'autovalore $\lambda = 1$, e' data dai vettori:

$$(7, -3, -1), (-1, 1, 0).$$

Allora una base a stringhe per L_A e':

$$\mathcal{S} = \{(7, -3, -1), (-1, 1, 0), (-5, 2, 1)\}.$$

E si ha

$$P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{S}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Possiamo calcolare la soluzione del problema assegnato.

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t(5 + 14t) - 5e^{2t} \\ e^t(-1 - 6t) + 2e^{2t} \\ e^t(-1 - 2t) + e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare che il risultato e' esatto, osserviamo innanzitutto che la condizione iniziale e' soddisfatta $\mathbf{y}(0) = (0, 1, 0)^T$. Poi osserviamo che

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} e^t(19 + 14t) - 10e^{2t} \\ e^t(-7 - 6t) + 4e^{2t} \\ e^t(-3 - 2t) + 2e^{2t} \end{bmatrix},$$

e che tale funzione vettoriale coincide con la funzione che si ottiene moltiplicando la matrice A con $\mathbf{y}(t)$:

$$A \cdot \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -13 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t(5 + 14t) - 5e^{2t} \\ e^t(-1 - 6t) + 2e^{2t} \\ e^t(-1 - 2t) + e^{2t} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia* $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *la forma quadratica definita ponendo:*

$$q(x, y, z) = x^2 + 6xy + 2xz + 10y^2 + 6yz + z^2.$$

Calcolare gli invarianti di q*, e determinare tutti i vettori* $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ *tali che* $q(x, y, z) = 0$.

Svolgimento. Sia G la matrice di Gram di q rispetto alla base canonica:

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Affiancando a G la matrice unitaria I, ed applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[G \,|\, I]$, con le operazioni elementari $e_{21}(-3)$, $e^{21}(-3)$, $e_{31}(-1)$, $e^{31}(-1)$, si perviene alla matrice:

$$[G \,|\, I] \longrightarrow [D \,|\, P^T] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi gli invarianti di G sono $(n, p, r, s) = (3, 2, 2, 2)$. Inoltre, se denotiamo con (x', y', z') le coordinate in $\mathbf{R}^3$ rispetto alla base costituita dalle colonne di P, allora

$$q(x', y', z') = {x'}^2 + {y'}^2.$$

Percio' i vettori per cui $q(x', y', z') = 0$ sono tutti e soli i vettori per cui $x' = y' = 0$. Cioe' sono i vettori multipli della terza colonna di P. Quindi:

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, q(x, y, z) = 0\big\} = \mathrm{Span}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3). \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), IV appello, 7 luglio 2020.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori* $(1,3,6,1)$, $(1,5,8,5)$, $(1,4,7,3)$. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dalle equazioni $2x-y=0$, $16x-3z+t=0$, $18x-y-3z+t=0$. Determinare una base di $U\cap V$, ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.*

Svolgimento. Una base per U e' data dai vettori $(1,3,6,1)$, $(1,4,7,3)$. Risolvendo le equazioni di V, si ottiene la seguente base di V: $(3,6,16,0)$, $(-1,-2,0,16)$. Percio' $U+V$ e' generato dai vettori $(1,3,6,1)$, $(1,4,7,3)$, $(3,6,16,0)$, $(-1,-2,0,16)$. Disponendo in riga tali vettori, e riducendo a scala per righe, si ottiene la seguente base per $U+V$: $(1,3,6,1)$, $(0,1,1,2)$, $(0,0,1,3)$. Quindi $U+V$ ha dimensione 3, ed una sua rappresentazione cartesiana e' data da:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}=0.$$

Cioe' $14x+y-3z+t=0$.

Dalla base di U otteniamo la seguente rappresentazione cartesiana di U:

$$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ 5x-2y+t=0. \end{cases}$$

Mettendo a sistema con le equazioni di V (la terza e' sovrabbondante), si ottiene una rappresentazione cartesiana di $U\cap V$:

$$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ 5x-2y+t=0 \\ 2x-y=0 \\ 16x-3z+t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente base per $U\cap V$: $(1,2,5,-1)$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} x-2y+(k^2+2k)z=2k-2 \\ x-y+(k^2+3k+2)z=2k+1 \\ x-2y+(2k^2+4k)z=3k-2. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$ ed $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & k^2+2k & 2k-2 \\ 0 & 1 & k+2 & 3 \\ 0 & 0 & k^2+2k & k \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k\neq 0$ e $k\neq -2$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e'

$$\left(k+2,\, 2,\, \frac{1}{k+2}\right)^T.$$

- Se $k=0$, il sistema $\mathcal{S}_0$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x-2y=-2 \\ y+2z=3. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}_0$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$(4,3,0)^T+z(-4,-2,1)^T,\quad z\in\mathbf{R}.$$

• Se $k = -2$, il sistema $\mathcal{S}_{-2}$ e' incompatibile. ■

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ che trasforma il vettore $\mathbf{u}$ di coordinate $\mathbf{x}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, nel vettore $f(\mathbf{u})$ di coordinate $\mathbf{y}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, date dalle formule:*

$$\begin{cases} y_1' = -10x_1' - 12x_2' + 9x_3' \\ y_2' = 2x_1' + x_2' - 2x_3' \\ y_3' = -4x_1' - 6x_2' + 3x_3'. \end{cases}$$

Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^3$, e calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot P = D$.

Svolgimento. I dati ci dicono qual e' la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -10 & -12 & 9 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Percio'

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -10 & -12 & 9 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 7 \\ -2 & -4 & 5 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ e' $p_f(t) = -(t+1)(t+2)(t+3)$. L'autospazio V_{-1} e' generato dal vettore $(1, 1, 1)$, l'autospazio V_{-2} dal vettore $(1, -1, 0)$, e l'autospazio V_{-3} dal vettore $(2, 1, 1)$. Percio', posto

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la matrice P e' invertibile, e

$$P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot P = D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 4. *Una matrice A e' quadrata di ordine 3, non e' diagonalizzabile, ne' nilpotente, e soddisfa le condizioni $A^4 = 5A^3$ e $A^4 = 6A^3 - 5A^2$. Qual e' la forma canonica di Jordan J_A di A?*

Svolgimento. Sia $m(t)$ il polinomio minimo di A. Dalle ipotesi deduciamo che $m(t)$ divide simultaneamente i polinomi $t^4 - 5t^3 (= t^3(t-5))$ e $t^4 - 6t^3 + 5t^2 (= t^2(t-5)(t-1))$. Il che equivale a dire che $m(t)$ divide il massimo comun divisore di $t^3(t-5)$ e $t^2(t-5)(t-1)$, che e' il polinomio $t^2(t-5)$:

$$MCD(t^3(t-5), t^2(t-5)(t-1)) = t^2(t-5).$$

Percio' $m(t)$ deve essere uno dei seguenti polinomi:

$$t, \quad t-5, \quad t^2, \quad t(t-5), \quad t^2(t-5).$$

Possiamo scartare i polinomi t, $\quad t-5$, $\quad t(t-5)$ perche' A non e' diagonalizzabile, ed anche t^2 perche' A non e' nilpotente. Allora $m(t)$ deve necessariamente essere $t^2(t-5)$, e quindi

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -t^3$. Percio' $A^3 = \mathbf{0}$, A e' nilpotente, e possiamo calcolare direttamente la matrice esponenziale utilizzando la sua definizione, cioe' lo sviluppo di Taylor:

$$e^{At} = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2}A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} & -t - t^2 \\ -t + \frac{t^2}{2} & 1 - 2t + \frac{t^2}{2} & 3t - t^2 \\ \frac{t^2}{2} & -t + \frac{t^2}{2} & 1 + t - t^2 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata e' allora la terza colonna di e^{At}:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -t - t^2 \\ 3t - t^2 \\ 1 + t - t^2 \end{bmatrix}.$$

Per verificare che il risultato e' esatto, osserviamo innanzitutto che la condizione iniziale e' soddisfatta $\mathbf{y}(0) = (0, 0, 1)^T$. Poi osserviamo che

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} -1 - 2t \\ 3 - 2t \\ 1 - 2t \end{bmatrix},$$

e che tale funzione vettoriale coincide con la funzione che si ottiene moltiplicando la matrice A con $\mathbf{y}(t)$:

$$A \cdot \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -t - t^2 \\ 3t - t^2 \\ 1 + t - t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2t \\ 3 - 2t \\ 1 - 2t \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{y}}(t). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia $V = \mathbf{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due. Sia $\phi : V \times V \to \mathbf{R}$ la forma bilineare simmetrica definita ponendo $\phi(p(t), q(t)) := p(-1) \cdot q(-1)$. Calcolare gli invarianti ed una base ortonormale dello spazio pseudoeuclideo (V, ϕ).*

Svolgimento. Denotiamo con $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ due generici elementi di V. Allora

$$\phi(p(t), q(t)) = p(-1) \cdot q(-1) = (a_0 - a_1 + a_2) \cdot (b_0 - b_1 + b_2)$$
$$= a_0 b_0 - a_0 b_1 + a_0 b_2 - a_1 b_0 + a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_0 - a_2 b_1 + a_2 b_2.$$

Quindi, se $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ e' la base canonica di V, e G e' la matrice di Gram di ϕ rispetto ad $\mathcal{E}$, si ha:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Affiancando a G la matrice unitaria I, ed applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[G \,|\, I]$, con le operazioni elementari $e_{21}(1)$, $e^{21}(1)$, $e_{31}(-1)$, $e^{31}(-1)$, si perviene alla matrice:

$$[G \,|\, I] \longrightarrow [D \,|\, P^T] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi gli invarianti di (V, ϕ) sono $(n, p, r, s) = (3, 1, 1, 1)$, ed una base ortonormale per (V, ϕ) e' costituita dai polinomi che hanno per coordinate rispetto alla base canonica date dalle colonne di P:

$$\{1,\, 1 + t,\, -1 + t^2\}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), V appello, 25 agosto 2020.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori*

$$(-2,\, h-6,\, 2-3h),\ (1,\, 2,\, h),\ (1,\, h,\, 2).$$

Determinare una rappresentazione cartesiana di U_h.

Svolgimento. Disponendo in riga i generatori di U_h, ed eseguendo le operazioni elementari p_{12}, p_{23}, $e_{21}(-1)$, $e_{31}(2)$, $e_{32}(-1)$, si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} -2 & h-6 & 2-3h \\ 1 & 2 & h \\ 1 & h & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & h \\ 0 & h-2 & 2-h \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deduciamo:

• Se $h \neq 2$ allora U_h ha dimensione 2, ed una base per U_h e' costituita dai vettori $(1, 2, h)$, $(0, 1, -1)$. In tal caso una rappresentazione cartesiana per U_h e' data dall'equazione:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ h & -1 & z \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' $(2+h)x - y - z = 0$.

• Se $h = 2$ allora U_2 e' generato dal vettore $(1, 2, 2)$. In tal caso una rappresentazione cartesiana di U_2 si ottiene imponendo che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \\ 2 & z \end{bmatrix}$$

abbia rango ≤ 1. Quindi una rappresentazione cartesiana di U_h e':

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - z = 0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} (k+1)x + ky - 2z = k+3 \\ (k+1)x + (2k+2)y - 8z = k+5 \\ (k+1)x + ky + (k^2-3)z = 2k+4. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$ ed $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} k+1 & k & -2 & k+3 \\ 0 & k+2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k+1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

• Se $k \neq -2, -1, 1$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e'

$$\left(1, \frac{2}{k-1}, \frac{1}{k-1}\right)^T.$$

• Se $k = -2$, il sistema $\mathcal{S}_{-2}$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ 3z = -1, \end{cases}$$

la cui matrice completa e'

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema e' compatibile, ha rango 2, ed ha y come variabile libera, in quanto i pivots delle righe della matrice incompleta stanno nelle colonne dei coefficienti di x e di z. Quindi, $\mathcal{S}_{-2}$ ha ∞^1 soluzioni [3], date dai vettori numerici

$$-\frac{1}{3}(1,0,1)^T + y(-2,1,0)^T, \quad y \in \mathbf{R}.$$

- Se $k=-1$, il sistema $\mathcal{S}_{-1}$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y+2z=-2 \\ 2z=-1, \end{cases}$$

la cui matrice completa e'

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema e' compatibile, ha rango 2, ed ha x come variabile libera, in quanto i pivots delle righe della matrice incompleta stanno nelle colonne dei coefficienti di y e di z. Quindi, $\mathcal{S}_{-1}$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$-\frac{1}{2}(0,2,1)^T + x(1,0,0)^T, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- Se $k=1$, il sistema $\mathcal{S}_1$ e' incompatibile. ■

Esercizio 3. *Il nucleo dell'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ e' rappresentato dall'equazione cartesiana $x+y-3z=0$. Inoltre, il vettore $(1,6,2)$ e' autovettore per f relativo all'autovalore $\lambda=2$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^3$, ed il polinomio caratteristico $p_f(t)$ ed il polinomio minimo $m_f(t)$ di f. Infine, calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot P = D$.*

Svolgimento. Risolvendo l'equazione $x+y-3z=0$ otteniamo una base per il nucleo di f, data, per esempio, dai vettori $(-1,1,0)$, $(3,0,1)$. Aggiungendo a tali vettori l'autovettore $(1,6,2)$, otteniamo una base di autovettori per f:

$$\mathcal{A} = \{(-1,1,0),(3,0,1),(1,6,2)\}.$$

Percio'

$$P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$p_f(t) = -t^2(t-2), \quad m_f(t) = t(t-2).$$

Infine

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -5 & 18 \\ -2 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 12 & 12 & -36 \\ 4 & 4 & -12 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 4. *Sia A una matrice quadrata di ordine $n \geq 2$, nilpotente, con indice di nilpotenza $p=n$. Dimostrare che l'equazione $X^2=A$ non ha soluzioni (cioe' non esiste una matrice X tale che $X^2=A$).*

Svolgimento. Sia X una tale matrice. Poiche' $X^2=A$, allora $X^{2n}=A^n=\mathbf{0}$. Quindi X e' nilpotente, e percio', essendo di ordine n, si avra' $X^n=\mathbf{0}$. Poiche' $2(n-1) \geq n$, allora sara' anche $X^{2(n-1)}=\mathbf{0}$. Cio' e' impossibile perche' $X^{2(n-1)}=A^{n-1} \neq \mathbf{0}$. ■

[3] In generale, un sistema lineare compatibile con n incognite, e con la matrice completa di rango p, ha $n-p$ variabili libere, e ∞^{n-p} soluzioni. Nel nostro caso, $n=3$ e $p=2$. Le variabili libere, in funzione delle quali si esprime la generica soluzione, sono le variabili che corrispondono alle colonne per le quali non passano i pivots della matrice ridotta a scala.

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -8x_1 - x_2 + 5x_3 \\ \dot{x}_2 = 6x_1 - x_2 - 5x_3 \\ \dot{x}_3 = -11x_1 - x_2 + 8x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = Pe^{Jt}P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

dove J e' la forma canonica della matrice A dei coefficienti dell'equazione

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 5 \\ 6 & -1 & -5 \\ -11 & -1 & 8 \end{bmatrix},$$

e P e' la matrice che si ottiene disponendo in colonna una base a stringhe per l'operatore $L_A : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \to A \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$.

Cominciamo a calcolare il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} -8-t & -1 & 5 \\ 6 & -1-t & -5 \\ -11 & -1 & 8-t \end{bmatrix}.$$

Eseguendo le operazioni elementari $e_{21}(1)$ ed $e^{12}(-1)$, ci riconduciamo al seguente calcolo:

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} -7-t & -1 & 5 \\ 0 & -2-t & 0 \\ -10 & -1 & 8-t \end{bmatrix}.$$

Sviluppando il determinante rispetto alla seconda riga, deduciamo che

$$p_A(t) = -(t+2)(t^2 - t - 6) = -(t+2)^2(t-3).$$

Quindi lo spettro di A e' costituito dagli autovalori $\lambda = -2$ e $\lambda = 3$.

L'autovalore $\lambda = -2$ ha molteplicita' algebrica 2, e molteplicita' geometrica

$$m_g(-2) = 3 - \operatorname{rk}(A + 2I) = 3 - \operatorname{rk} \begin{bmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & -5 \\ -11 & -1 & 10 \end{bmatrix} = 1.$$

Tenuto conto che $m_a(3) = m_g(3) = 1$, deduciamo che:

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Per rendere operativa la formula (1), rimane da calcolare la matrice P.

A tale proposito, cominciamo con lo studio dell'autovalore $\lambda = 3$. Poiche' $m_a(3) = 1$, allora $\lambda = 3$ contribuisce in P con una sola colonna (la terza, per come abbiamo disposto i blocchi in J). Tale colonna e' un qualunque vettore non nullo che genera l'autospazio V_3. L'autospazio coincide con il nucleo della matrice $A - 3I$, cioe' i vettori di V_3 sono le soluzioni del sistema lineare

$$(A - 3I) \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -11 & -1 & 5 \\ 6 & -4 & -5 \\ -11 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Risolvendo tale sistema deduciamo che V_3 e' generato dal vettore $(1, -1, 2)^T$. Percio', per il momento, possiamo dire che

$$P = \begin{bmatrix} * & * & 1 \\ * & * & -1 \\ * & * & 2 \end{bmatrix}.$$

Le prime due colonne $\mathbf{b}_1 = P^1$ e $\mathbf{b}_2 = P^2$ di P sono il contributo dell'autovalore $\lambda = -2$. Esse devono formare una stringa di lunghezza 2 per A, relativa all'autovalore $\lambda = -2$. Cioe' $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ devono soddisfare le seguenti condizioni: $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$ e

$$\mathbf{b}_2 \xrightarrow{A} -2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}_1 \xrightarrow{A} -2\mathbf{b}_1.$$

Cio' equivale a dire che $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ formano una stringa di lunghezza 2 per $A + 2I$, relativa all'autovalore $\lambda = 0$:

$$\mathbf{b}_2 \xrightarrow{A+2I} \mathbf{b}_1 \xrightarrow{A+2I} \mathbf{0}.$$

Per determinare $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$, possiamo procedere come segue.

Dalla teoria sappiamo che $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ vanno pescati nell'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_{-2}$. Quindi innanzitutto calcoliamo una base per l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_{-2}$. Occorre risolvere il sistema lineare

$$(A + 2I)^2 \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -25 & 0 & 25 \\ 25 & 0 & -25 \\ -50 & 0 & 50 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Una base per lo spazio delle soluzioni di tale sistema, cioe' una base per $\widetilde{V}_{-2}$, e'

$$\mathcal{B} = \left\{(0,1,0)^T, (1,0,1)^T\right\}$$

(in generale non e' detto che tale base sia una stringa). Adesso prendiamo il primo vettore di tale base, e calcoliamo [4]

$$(A + 2I) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dalla teoria sappiamo che $A + 2I$, valutata sui vettori di $\widetilde{V}_{-2}$, ha indice di nilpotenza 2. Percio' a priori sappiamo anche che

$$(A + 2I) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (A + 2I)^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cioe':

$$(0,1,0)^T \xrightarrow{A+2I} (-1,1,-1)^T \xrightarrow{A+2I} \mathbf{0}.$$

Abbiamo trovato la stringa:

$$\mathbf{b}_1 = P^1 = (-1,1,-1)^T, \quad \mathbf{b}_2 = P^2 = (0,1,0)^T.$$

Quindi

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finalmente possiamo calcolare la soluzione:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{3t} + e^{-2t}(2-t) \\ e^{3t} + e^{-2t}(t-1) \\ -2e^{3t} + e^{-2t}(2-t) \end{bmatrix}.$$

Per verificare che il risultato e' esatto, osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$. Poi osserviamo che

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} -3e^{3t} + e^{-2t}(2t-5) \\ 3e^{3t} + e^{-2t}(-2t+3) \\ -6e^{3t} + e^{-2t}(2t-5) \end{bmatrix}.$$

[4] Se il risultato della moltiplicazione di $A + 2I$ per $(0,1,0)^T$ fosse stato il vettore nullo, avremmo dovuto considerare il secondo vettore $(1,0,1)^T$ invece del primo.

E poi che tale funzione vettoriale coincide con la funzione che si ottiene moltiplicando la matrice A con $\mathbf{y}(t)$:

$$A \cdot \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 5 \\ 6 & -1 & -5 \\ -11 & -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -e^{3t} + e^{-2t}(2-t) \\ e^{3t} + e^{-2t}(t-1) \\ -2e^{3t} + e^{-2t}(2-t) \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia $V = \mathbf{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due. Sia $(V, <\,,\,>)$ lo spazio euclideo definito ponendo $< f(t), g(t) >= f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$. Sia H il sottospazio di V generato dal polinomio $h(t) = 1 + t^2$. Sia $p_H : f \in V \to p_H(f) \in V$ l'operatore che associa ad ogni $f \in V$ la proiezione ortogonale $p_H(f)$ di f su H. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_H)$ di p_H rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{1,\, t,\, t^2\}$.*

Svolgimento. Possiamo calcolare la matrice utilizzando la definizione. Prendiamo il primo vettore di $\mathcal{E}$, cioe' 1, e calcoliamone la proiezione ortogonale:

$$p_H(1) = \frac{< 1, 1+t^2 >}{< 1+t^2, 1+t^2 >}(1+t^2) = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 5}{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 5\cdot 5}(1+t^2) = \frac{4}{15}(1+t^2).$$

Percio' la prima colonna di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_H)$ e' determinata:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_H) = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & * & * \\ 0 & * & * \\ \frac{4}{15} & * & * \end{bmatrix}.$$

Similmente si calcola:

$$p_H(t) = \frac{< t, 1+t^2 >}{< 1+t^2, 1+t^2 >}(1+t^2) = \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 5}{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 5\cdot 5}(1+t^2) = \frac{2}{5}(1+t^2),$$

$$p_H(t^2) = \frac{< t^2, 1+t^2 >}{< 1+t^2, 1+t^2 >}(1+t^2) = \frac{0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 5}{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 5\cdot 5}(1+t^2) = \frac{11}{15}(1+t^2).$$

In conclusione

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_H) = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 11 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), VI appello, 15 settembre 2020.

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori*

$$-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad -\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \quad -(2h+8)\mathbf{e}_1 + (h+3)\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_5.$$

Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^5$ rappresentato dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y + z + t + u = 0 \\ x + 2y + 2z + 2t + 2u = 0. \end{cases}$$

Calcolare la dimensione ed una base di $U_h \cap V$.

Svolgimento. I tre generatori di U_h sono liberi, per ogni h. Percio' una rappresentazione cartesiana di U_h si ottiene imponendo che la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2h-8 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & -1 & h+3 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & u \end{bmatrix}$$

abbia rango ≤ 3. Tramite le operazioni elementari $e_{21}(1)$, p_{23}, $e_{42}(1)$, p_{35}, $e_{43}(-h-3)$, $e_{53}(2h+8)$, si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2h-8 & x \\ 0 & -1 & h+3 & z \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & z+t-(h+3)u \\ 0 & 0 & 0 & x+y+(2h+8)u \end{bmatrix}.$$

Percio' una rappresentazione cartesiana per U_h e' data dal sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + (2h+8)u = 0 \\ z + t - (h+3)u = 0. \end{cases}$$

Ne consegue che una rappresentazione cartesiana di $U_h \cap V$ e' data dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z + t + u = 0 \\ x + 2y + 2z + 2t + 2u = 0 \\ x + y + (2h+8)u = 0 \\ z + t - (h+3)u = 0. \end{cases}$$

La matrice di tale sistema e':

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2h+8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -h-3 \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, $e_{43}(1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2h+7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h+4 \end{bmatrix}.$$

Il sistema lineare omogeneo con tale matrice dei coefficienti e' una rappresentazione cartesiana di $U_h \cap V$. Quindi:

- se $h \neq -4$, allora $U_h \cap V$ ha dimensione 1, ed una base e' data dal vettore $-\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$;
- se $h = -4$, allora $U_{-4} \cap V$ ha dimensione 2, ed una base e' data dai vettori $-\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $-\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_5$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} kx + ky + (k^2+k-1)z = 2k-1 \\ (k+2)x + (2k+1)y + (k^2+k+3)z = 2k+2 \\ (k+1)x + (k+1)y + (k^2+k)z = 2k. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$, $e_{31}(-1)$, p_{13}, $e_{21}(-2)$, ed $e_{31}(-k)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-1 & k-1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k \neq -1, 1$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e'

$$\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)^T.$$

- Se $k = -1$, il sistema $\mathcal{S}_{-1}$ e' incompatibile.
- Se $k = 1$, il sistema $\mathcal{S}_1$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2z=1, \end{cases}$$

la cui matrice completa e'

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema e' compatibile, ha rango 2, ed ha y come variabile libera, in quanto i pivots delle righe della matrice incompleta stanno nelle colonne dei coefficienti di x e di z. Quindi, $\mathcal{S}_1$ ha ∞^1 soluzioni [5], date dai vettori numerici

$$\frac{1}{2}(1,0,1)^T + y(-1,1,0)^T, \quad y \in \mathbf{R}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'operatore lineare definito dalle condizioni $f(1,0,0) = (1,-1)$, $f(0,1,1) = (4,1)$, $f(0,1,2) = (6,-1)$. Sia $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito ponendo*

$$g(x,y) = (2x+y, x+y, -x+2y).$$

Sia $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore composto $h = g \circ f$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(h)$ di h rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^3$, il polinomio caratteristico di h, il polinomio minimo di h, ed una matrice invertibile P ed una diagonale D tali che $D = P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(h) \cdot P$.

Svolgimento. Denotiamo con $\mathcal{E}_2$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$, e con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, e $(0,1,2)$. Allora si ha:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(h) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g \circ f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_2}(g) \cdot M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_2}(g) \cdot M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di tale matrice e' $p_h(t) = -(t+5)t(t-5)$. Percio' h e' diagonalizzabile, il polinomio minimo $m_h(t) = (t+5)t(t-5)$, ed il calcolo mostra che una base di autovettori per h e' costituita dai vettori $(1,0,-3)$, $(2,0,-1)$, $(-17,-10,1)$. Percio':

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -17 \\ 0 & 0 & -10 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

[5] In generale, un sistema lineare compatibile con n incognite, e con la matrice completa di rango p, ha $n-p$ variabili libere, e ∞^{n-p} soluzioni. Nel nostro caso, $n = 3$ e $p = 2$. Le variabili libere, in funzione delle quali si esprime la generica soluzione, sono le variabili che corrispondono alle colonne che non passano per i pivots delle righe della matrice completa ridotta a scala.

Esercizio 4. *Siano A e B due matrici quadrate di ordine 3. Provare che A e' simile a B se e solo se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e lo stesso polinomio minimo. E' vero per le matrici di ordine 4?*

Svolgimento. E' sufficiente osservare che, quando l'ordine e' 3, il polinomio caratteristico di A e quello minimo determinano la forma canonica. Infatti:

• Se $p_A(t)$ ha tre radici distinte, diciamo λ_1, λ_2 e λ_3, allora

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

• Se $p_A(t)$ ha due radici distinte, diciamo λ_1, λ_2, con $p_A(t) = -(t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)$, allora ci sono due possibilita' per il polinomio minimo: $m_A(t) = (t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)$, oppure $m_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$. Nel primo caso deve essere

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

mentre nel secondo deve essere

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

• Infine, se $p_A(t)$ ha una sola radice λ_1, allora per il polinomio minimo ci sono tre possibilita': $m_A(t) = (t-\lambda_1)^3$, $m_A(t) = (t-\lambda_1)^2$, $m_A(t) = (t-\lambda_1)$. Nel primo caso deve essere:

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

nel secondo

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

nel terzo

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Questa proprieta' non vale se l'ordine della matrice e' 4. Per esempio le matrici

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hanno lo stesso polinomio caratteristico ($= t^4$) e minimo ($= t^2$), ma non sono simili. Infatti una ha tre blocchi di Jordan, l'altra due. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -9x_1 - 4x_2 + 7x_3 \\ \dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ \dot{x}_3 = -9x_1 - 4x_2 + 7x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = Pe^{Jt}P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

dove J e' la forma canonica della matrice A dei coefficienti dell'equazione

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -4 & 7 \\ 5 & 2 & -4 \\ -9 & -4 & 7 \end{bmatrix},$$

e P e' la matrice che si ottiene disponendo in colonna una base a stringhe per l'operatore $L_A : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \to A \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$.

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -t^3$. Percio' A e' nilpotente. Inoltre l'autovalore $\lambda = 0$ ha molteplicita' geometrica

$$m_g(0) = 3 - \mathrm{rk} A = 3 - 2 = 1.$$

Deduciamo che:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per rendere operativa la formula (1), rimane da calcolare la matrice P.

Denotiamo con P^1, P^2, P^3 le colonne di P. Tali colonne devono formare una stringa di lunghezza 3 relativa all'autovalore $\lambda = 0$ per A, cioe' $P^1 \neq \mathbf{0}$, e

$$P^3 \xrightarrow{A} P^2 \xrightarrow{A} P^1 \xrightarrow{A} \mathbf{0}.$$

Per calcolare tale stringa possiamo procedere cosi'. Calcoliamo

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la prima colonna di A^2 non e' nulla. Osserviamo anche che:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A^2} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Percio', tenuto conto che $A^3 = \mathbf{0}$, avremo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \mathbf{0}.$$

Questa e' la stringa che cercavamo. Quindi

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & -9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente possiamo calcolare la soluzione:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -9 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & -9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -9 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 9t - t^2 \\ 5t + \frac{t^2}{2} \\ -9t - t^2 \end{bmatrix}.$$

Per verificare che il risultato e' esatto, osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$. Poi osserviamo che

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} -9 - 2t \\ 5 + t \\ -9 - 2t \end{bmatrix}.$$

E poi che tale funzione vettoriale coincide con la funzione che si ottiene moltiplicando la matrice A con $\mathbf{y}(t)$:

$$A \cdot \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -9 & -4 & 7 \\ 5 & 2 & -4 \\ -9 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - 9t - t^2 \\ 5t + \frac{t^2}{2} \\ -9t - t^2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Al variare dei parametri* $a, b \in \mathbf{R}$, *calcolare gli invarianti* (n, p, r, s) *della matrice simmetrica*

$$G_{a,b} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svolgimento. Utilizzando le operazione elementari $e_{21}(-a)$, $e^{21}(-a)$, $e_{31}(-b)$, $e^{31}(-b)$, vediamo che la matrice $G_{a,b}$ e' congruente alla matrice

$$H_{a,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - ab \\ 0 & 1 - ab & 1 - b^2 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che $\det H_{a,b} = -(a - b)^2$.

Cominciamo ad esaminare il caso $a = b$. Allora abbiamo

$$H_{a,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a^2 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a^2 \end{bmatrix},$$

che e' congruente alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio': se $1 - a^2 < 0$ allora $(n, p, r, s) = (3, 2, 1, 0)$, se $1 - a^2 = 0$ allora $(n, p, r, s) = (3, 1, 1, 1)$, se $1 - a^2 > 0$ allora $(n, p, r, s) = (3, 2, 2, 2)$.

Ora esaminiamo il caso $a \neq b$.

Se abbiamo anche $1-a^2 \neq 0$, allora dalla matrice $H_{a,b}$ deduciamo, tramite le operazioni $e_{32}(-\frac{1-ab}{1-a^2})$ ed $e^{32}(-\frac{1-ab}{1-a^2})$, che $G_{a,b}$ e' congruente alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(a-b)^2}{1-a^2} \end{bmatrix}.$$

Percio', in tal caso, $(n, p, r, s) = (3, 3, 2, 1)$.

Con calcoli analoghi si vede che tali sono gli invarianti anche nell'altro caso rimanente, cioe' $a \neq b$, $1 - a^2 = 0$.

Quindi, in conclusione:

- se $a = b$ e $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, allora $(n, p, r, s) = (3, 2, 1, 0)$;
- se $a = b$ e $a = \pm 1$, allora $(n, p, r, s) = (3, 1, 1, 1)$;
- se $a = b$ e $a \in (-1, 1)$, allora $(n, p, r, s) = (3, 2, 2, 2)$;
- se $a \neq b$, allora $(n, p, r, s) = (3, 3, 2, 1)$. $\blacksquare$

Geometria (9 CFU), I appello, 19 gennaio 2021.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $-a\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$, $(-1-a-b)\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$, $(-1-b)\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare*

$$\begin{cases} x-y+az+(b-2)t=0 \\ x+2y+az+(b+1)t=0. \end{cases}$$

Dire se e' vero oppure no che $U+V=U\oplus V$, e calcolare una rappresentazione cartesiana di $U+V$.

Svolgimento. Osserviamo che il terzo generatore di U e' sovrabbondante, perche' e' la differenza tra il secondo ed il primo. Quindi i vettori $-a\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$ e $(-1-a-b)\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$ formano una base di U. D'altra parte, risolvendo il sistema costituito dalle due equazioni che definiscono V, si vede che una base di V e' formata dai vettori $-a\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$ e $(-1-b)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4$. Osserviamo anche che $-a\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$ appartiene sia ad U che a V, percio' non e' vero che $U+V=U\oplus V$.

Ora sappiamo che $U+V$ e' generato dai vettori $-a\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$, $(-1-a-b)\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$ e $(-1-b)\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_4$. Tali vettori sono linearmente indipendenti. Quindi formano una base di $U+V$, e percio' una rappresentazione cartesiana di $U+V$ e' data dalla condizione:

$$\det\begin{bmatrix} -a & 1-b & -1-a-b & x \\ 0 & -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}=0,$$

cioe' $x+y+az+bt=0$.

In conclusione: 1) non e' vero che $U+V=U\oplus V$; 2) una rappresentazione cartesiana di $U+V$ e' $x+y+az+bt=0$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} (k-c)x+cy+3cz=2 \\ (c-k)x+(k-1)y+(1-3c)z=-1 \\ (k-c)x+cy+(k^2-c^2+3c)z=k-c+2. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo[6] a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(1)$ ed $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} k-c & c & 3c & 2 \\ 0 & k+c-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-c^2 & k-c \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k\neq -c,c,1-c$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e'

$$\frac{1}{k+c}\,(2,1,1)^T.$$

- Se $k=-c$ il sistema non ha soluzioni.
- Se $k=c$, il sistema $\mathcal{S}_c$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y+(6c-1)z=3 \\ 2cz=1. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}_c$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$\left(x,\frac{1}{2c},\frac{1}{2c}\right)^T, \quad x\in\mathbf{R}.$$

[6]Si assume $c\neq 0$ e $c\neq \frac{1}{2}$.

- Se $k = 1 - c$, il sistema $\mathcal{S}_{1-c}$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (1-2c)x + cy + 3cz = 2 \\ z = 1. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}_{1-c}$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$\left(\frac{2-3c-cy}{1-2c}, y, 1 \right)^T, \quad y \in \mathbf{R}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3. *L'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3) = 5\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 3a\mathbf{e}_3$, $f(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = -a\mathbf{e}_3$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^3$, e calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot P = D$.*

Svolgimento. Per ipotesi[7] sappiamo che

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3 \\ f(\mathbf{e}_1) + 2f(\mathbf{e}_2) + 3f(\mathbf{e}_3) = 5\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 3a\mathbf{e}_3 \\ 2f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_3) = -a\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Effettuando le operazioni elementari $e_{21}(-1)$ e $e_{31}(-2)$ si deduce che

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_2) + 2f(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2a\mathbf{e}_3 \\ -f(\mathbf{e}_2) - 3f(\mathbf{e}_3) = -4\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 - 3a\mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Sommando si ottiene

$$f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3.$$

Sostituendo si ha

$$f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad \text{e} \quad f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}.$$

Percio':

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ e' $p_f(t) = -t(t-1)(t-a)$. L'autospazio V_0 e' generato dal vettore $\mathbf{e}_1$, l'autospazio V_1 dal vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, e l'autospazio V_a dal vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (a-1)\mathbf{e}_3$. Percio', posto

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix},$$

la matrice P e' invertibile, e

$$P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot P = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Sia $J = J_{0,p}$ il blocco di Jordan relativo all'autovalore $\lambda = 0$, di ordine p. Si assuma p della forma $p = 3q + 1$. Qual e' la forma canonica di J^3?*

Svolgimento. Poniamo[8] $A = J^3$, e denotiamo con J_A la forma canonica di A. Tenuto conto che $p = 3q+1$, osserviamo che $A^q = J^{p-1} \neq \mathbf{0}$, mentre $A^{q+1} = J^p = \mathbf{0}$. Percio' A e' nilpotente, con indice $q+1$. In tal caso sappiamo che il numero μ_1 dei blocchi di ordine $q+1$ presenti in J_A e' uguale al rango di $A^q = J^{p-1}$, che e' 1. Inoltre il numero dei blocchi di ordine q presenti in J_A e' uguale a $\mu_2 - \mu_1$, con $\mu_1 + \mu_2 = \operatorname{rk} A^{q-1}$. Poiche' $A^{q-1} = J^{p-4}$ ha rango 4, segue che $\mu_2 = 3$, e dunque $\mu_2 - \mu_1 = 2$. Quindi in J_A c'e' un blocco di ordine $q+1$, e due blocchi di ordine q. Poiche' $p = (q+1) + 2q$, non ci possono essere altri blocchi.

[7] Si assume $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

[8] Si assume $p \geq 4$.

In conclusione, la forma canonica di J^3 ha un blocco di ordine $q+1$, e due blocchi di ordine q. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (-a-3)x_1 + (a+5)x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = (-a-3)x_1 + (a+5)x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = (2a+7)x_1 + (-2a-11)x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -a-3 & a+5 & 1 \\ -a-3 & a+5 & 1 \\ 2a+7 & -2a-11 & -2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At}, andiamo a calcolare una base a stringhe $\mathcal{S}$ per l'operatore L_A. Mettendo in colonna i vettori di tale base, otterremo una matrice P tale che $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, dove J e' la forma canonica di A.

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -t^3$, e la molteplicita' geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ e' 1. Percio' A e' nilpotente con indice $p = 3$, la forma canonica di A e':

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare una stringa di lunghezza 3, procediamo come segue. Calcoliamo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Allora una stringa di lunghezza 3 per L_A e':

$$\mathbf{e}_1 \xrightarrow{A} (-a-3)\mathbf{e}_1 + (-a-3)\mathbf{e}_2 + (2a+7)\mathbf{e}_3 \xrightarrow{A} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \xrightarrow{A} \mathbf{0}.$$

Percio'

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -a-3 & 1 \\ 1 & -a-3 & 0 \\ -2 & 2a+7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Possiamo calcolare la soluzione del problema assegnato.

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -a-3 & 1 \\ 1 & -a-3 & 0 \\ -2 & 2a+7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2a+7 & a+3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t^2/2 - (a+3)t + 1 \\ t^2/2 - (a+3)t \\ -t^2 + (2a+7)t \end{bmatrix}.$$

Per verificare che il risultato e' esatto, osserviamo innanzitutto che la condizione iniziale e' soddisfatta $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$. Poi osserviamo che

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} t-a-3 \\ t-a-3 \\ -2t+2a+7 \end{bmatrix},$$

e che tale funzione vettoriale coincide con la funzione che si ottiene moltiplicando la matrice A con $\mathbf{y}(t)$:

$$A \cdot \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -a-3 & a+5 & 1 \\ -a-3 & a+5 & 1 \\ 2a+7 & -2a-11 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t^2/2-(a+3)t+1 \\ t^2/2-(a+3)t \\ -t^2+(2a+7)t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia $\phi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la forma bilineare simmetrica soddisfacente le seguenti condizioni:*

$$\phi(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) = 7+h, \quad \phi(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2) = 10+2h, \quad \phi(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2) = 13+4h.$$

Calcolare la matrice di Gram $G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi)$ di ϕ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, e gli invarianti di ϕ.

Svolgimento. Osserviamo che il sistema di vettori $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2\}$ forma una base di $\mathbf{R}^2$, e

$$G^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} 7+h & 10+2h \\ 10+2h & 13+4h \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})^T \cdot G^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7+h & 10+2h \\ 10+2h & 13+4h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & h \end{bmatrix}.$$

Applicando a tale matrice le operazioni elementari $e_{21}(-3)$ e $e^{21}(-3)$, si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h-9 \end{bmatrix}.$$

Percio' gli invarianti di ϕ sono

$$\begin{cases} (2,2,1,0) & \text{se } h<9 \\ (2,1,1,1) & \text{se } h=9 \\ (2,2,2,2) & \text{se } h>9. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Geometria (9 CFU), II appello, 2 febbraio 2021.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dall' equazione $(a+3)x-2y+(1-a)z-2t=0$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$(1,a+2,0,0),(a-1,0,a+2,0),(2,0,0,a+2),(-a,a+2,-a-2,-a-2).$$

Determinare una base di $U\cap V$.

Svolgimento. Il quarto[9] generatore di V e' sovrabbondante, ed i primi tre sono liberi. Percio' una rappresentazione cartesiana di V e'

$$\det\begin{bmatrix}1 & a-1 & 2 & x\\ a+2 & 0 & 0 & y\\ 0 & a+2 & 0 & z\\ 0 & 0 & a+2 & t\end{bmatrix}=0,$$

che equivale a $(a+2)x-y+(1-a)z-2t=0$. Allora il sistema

$$\begin{cases}(a+3)x-2y+(1-a)z-2t=0\\ (a+2)x-y+(1-a)z-2t=0\end{cases}$$

e' una rappresentazione cartesiana di $U\cap V$. Risolvendo tale sistema, si vede che una base per $U\cap V$ e' data dai vettori $(a-1,a-1,a+1,0)$, $(2,2,0,a+1)$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}_k:=\begin{cases}x+(k-3)y+(k-b)z=0\\ x+(2k-6)y+(k-b)z=-1\\ x+(k-3)y+(k^2-(b+2)k+2b)z=k-3.\end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$ ed $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix}1 & k-3 & k-b & 0\\ 0 & k-3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & (k-3)(k-b) & k-3\end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k\neq 3$ e $k\neq b$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e'

$$\left(0,\frac{1}{3-k},\frac{1}{k-b}\right)^T.$$

- Nei rimanenti casi $k=3$ e $k=b$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' incompatibile. ■

Esercizio 3. *L'applicazione lineare $f:\mathbf{R}^4\to\mathbf{R}^3$ ha il nucleo rappresentato dall'equazione $x+y+z+t=0$, ed e' tale che $f(1,0,0,0)=(1,2,a)$. Calcolare la matrice rappresentativa di $M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_3}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_4$ di $\mathbf{R}^4$ ed $\mathcal{E}_3$ di $\mathbf{R}^3$, una base per il nucleo di f, ed una base per l'immagine.*

Svolgimento. I vettori $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3$, ed $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_4$, formano una base per il nucleo di f. Poiche' l'immagine ha dimensione 1, allora $(1,2,a)$ forma una base per l'immagine. Per ipotesi la prima colonna di $M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_3}(f)$ e' proprio $(1,2,a)^T$. Poiche' $f(\mathbf{e}_1)=f(\mathbf{e}_2)=f(\mathbf{e}_3)=f(\mathbf{e}_4)$, allora

$$M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_3}(f)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\a&a&a&a\end{bmatrix}.\quad ■$$

---

[9]Si assume $a\neq -2$ e $a\neq -1$.

Esercizio 4. *Una matrice A e' quadrata di ordine 4, non e' diagonalizzabile, e soddisfa la condizione $A^4 + a^2A^2 = 2aA^3$. Quali sono le possibili forme canoniche di Jordan J_A di A?*

Svolgimento. La matrice A soddisfa l'equazione $t^2(t-a)^2 = 0$. Tenuto conto che A non e' diagonalizzabile, allora il polinomio minimo m_A di A rientra in uno dei seguenti[10]: t^2, $(t-a)^2$, $t^2(t-a)$, $t(t-a)^2$, $t^2(t-a)^2$.

Se $m_A = t^2$, allora J_A puo' essere:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $m_A = (t-a)^2$, allora J_A puo' essere:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Se $m_A = t^2(t-a)$, allora J_A puo' essere:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Se $m_A = t(t-a)^2$, allora J_A puo' essere:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $m_A = t^2(t-a)^2$, allora J_A deve essere:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (-2a+2)x_1 + ax_2 + (a-1)x_3 \\ \dot{x}_2 = (-3a+2)x_1 + 2ax_2 + (a-1)x_3 \\ \dot{x}_3 = (-3a+1)x_1 + (a+1)x_2 + (2a-1)x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo[11] che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -2a+2 & a & a-1 \\ -3a+2 & 2a & a-1 \\ -3a+1 & a+1 & 2a-1 \end{bmatrix}.$$

[10] Si assume $a \neq 0$.
[11] Si assume $a \neq 1$.

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At}, andiamo a calcolare una base a stringhe $\mathcal{S}$ per l'operatore L_A. Mettendo in colonna i vettori di tale base, otterremo una matrice P tale che $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, dove J e' la forma canonica di A.

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -(t-a)^2(t-1)$, e la molteplicita' geometrica dell'autovalore $\lambda = a$ e' 1. Percio' la forma canonica di A e':

$$J = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{at} & te^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Un autovettore per l'autovalore $\lambda = 1$ e' $(1,1,1)$.

Ora andiamo a studiare l'autovalore $\lambda = a$. L'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_a$ e' il nucleo dell'operatore $L_{(A-aI)^2}$. Tale nucleo e' rappresentato dall'equazione $3x - y - z = 0$. Percio' una base per $\widetilde{V}_a$ e' $\mathcal{B} = \{(1,3,0),(1,0,3)\}$. La matrice rappresentativa rispetto a tale base della restrizione di L_{A-aI} su $\widetilde{V}_a$ e':

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Per l'operatore L_M i vettori $\frac{1}{3}(-1,-2)$ ed $(0,1)$ formano una stringa di lunghezza 2 per l'autovalore nullo. Percio' una stringa di lunghezza 2 per L_A relativa all'autovalore $\lambda = a$, e' data dai vettori:

$$(-1,-1,-2),(1,0,3).$$

Allora una base a stringhe per L_A e':

$$\mathcal{S} = \{(-1,-1,-2),(1,0,3),(1,1,1)\}.$$

E si ha

$$P = M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Possiamo calcolare la soluzione del problema assegnato.

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{at} & te^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{at}(-2-t) + 3e^t \\ e^{at}(-3-t) + 3e^t \\ e^{at}(-3-2t) + 3e^t \end{bmatrix}.$$

Per verificare che il risultato e' esatto, osserviamo innanzitutto che la condizione iniziale e' soddisfatta $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$. Poi osserviamo che

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} e^{at}(-2a - at - 1) + 3e^t \\ e^{at}(-3a - at - 1) + 3e^t \\ e^{at}(-3a - 2at - 2) + 3e^t \end{bmatrix},$$

e che tale funzione vettoriale coincide con la funzione che si ottiene moltiplicando la matrice A con $\mathbf{y}(t)$:

$$A \cdot \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -2a+2 & a & a-1 \\ -3a+2 & 2a & a-1 \\ -3a+1 & a+1 & 2a-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{at}(-2-t) + 3e^t \\ e^{at}(-3-t) + 3e^t \\ e^{at}(-3-2t) + 3e^t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita ponendo:*

$$q(x,y,z) = x^2 + 4xy - 6xz + y^2 + z^2.$$

Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dal sistema di vettori $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 - a\mathbf{e}_1\}$. Sia $q_1 : \mathbf{u} \in U \to q(\mathbf{u}) \in \mathbf{R}$ la restrizione di q su U. Calcolare la matrice di Gram $G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q_1)$ di q_1 rispetto alla base $\mathcal{B}$, e gli invarianti di q_1.

Svolgimento. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, e $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - a\mathbf{e}_1\}$ la base di U data dal testo. Allora si ha:

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Percio' la polarizzazione ϕ di q e'

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y}.$$

Ne consegue

$$\phi(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = -2, \quad \phi(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - a\mathbf{e}_1) = 3 - a, \quad \phi(\mathbf{e}_3 - a\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - a\mathbf{e}_1) = a^2 + 6a + 1.$$

Percio'

$$G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q_1) = \begin{bmatrix} -2 & 3 - a \\ 3 - a & a^2 + 6a + 1 \end{bmatrix}.$$

L'algoritmo di Gauss-Lagrange porta tale matrice nella matrice:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(3a^2 + 6a + 11) \end{bmatrix}.$$

Poiche' $3a^2 + 6a + 11 > 0$, ne consegue che gli invarianti di q_1 sono:

$$(n, p, r, s) = (2, 2, 1, 0). \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), III appello, 15 giugno 2021.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,-1,-1)$, $(4,-1,-2)$, $(5,-2,-3)$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(-2,2,1)$, $(1,-4,1)$. Determinare una base ed una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$.*

Svolgimento. Una rappresentazione cartesiana di U e' data dall'equazione $x-2y+3z=0$, mentre una per V e' $2x+y+2z=0$. Percio', una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ e' data dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y+2z=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, troviamo che una base di $U \cap V$ e' data dal vettore $(-7,4,5)$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} x+(2-2k)y=k \\ x+(3+k)y=1 \\ kx-(1+2k)y=-1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. La matrice completa del sistema $\mathcal{S}_k$ e':

$$\begin{bmatrix} 1 & 2-2k & k \\ 1 & 3+k & 1 \\ k & -1-2k & -1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha determinante pari a $-k^2(k+7)$. Ne consegue:

- Se $k \neq 0, -7$, il sistema $\mathcal{S}_k$ non ha soluzioni.
- Se $k=0$, il sistema $\mathcal{S}_0$ ha un'unica soluzione, che e'

$$(x,y)=(-2,1)^T.$$

- Se $k=-7$, il sistema $\mathcal{S}_{-7}$ ha un'unica soluzione, che e'

$$(x,y)=\frac{-1}{5}(3,2)^T. \quad ■$$

Esercizio 3. *L'endomorfismo $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(0,0,1)=(-3,5,4)$, $f(-3,5,4)=(-3,5,4)$, ed il vettore $(-2,3,2)$ e' un autovettore relativo all'autovalore $\lambda=-2$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^3$, e calcolare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $P^{-1}\cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)\cdot P=D$.*

Svolgimento. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(-3,5,3)$, $(-3,5,4)$, $(-2,3,2)$. Dalle ipotesi sappiamo che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(si osservi che $f(-3,5,4)-f(0,0,1)=\mathbf{0}$, e percio' il vettore $(-3,5,3)$ sta nel nucleo di f).

Allora le matrici cercate sono:

$$D=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})=\begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

e

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)=P\cdot D\cdot P^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -23 & -12 & -3 \\ 35 & 18 & 5 \\ 24 & 12 & 4 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 4. *Sia A una matrice nilpotente $n \times n$, tale che $rk A = 5$ e $rk A^3 = 1$. Quali sono le possibili forme canoniche di A?*

Svolgimento. L'indice di nilpotenza di A e' $p = 4$. Percio' nella forma canonica J_A di A deve figurare almeno un blocco di ordine 4 (che ha rango 3), e nessun blocco di ordine maggiore. Non ci puo' essere un altro blocco di ordine 4, perche' altrimenti il rango di A sarebbe > 5. Poiche' il rango di A e' 5, allora ci puo' essere o un solo blocco di ordine 3, oppure due blocchi di ordine 2. Tutti gli altri blocchi sono nulli, di ordine 1.

In conclusione, J_A e' formata da un unico blocco di ordine 4, un unico blocco di ordine 3, ed $n-7$ blocchi di ordine 1, oppure J_A e' formata da un unico blocco di ordine 4, esattamente due blocchi di ordine 2, ed $n-8$ blocchi di ordine 1. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 5x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + 2x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -3 & -5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e' nilpotente con indice di nilpotenza 3. E si ha

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base a stringhe per A e' data dai vettori $(-2,1,1)$, $(-1,1,0)$, $(0,0,1)$. La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ e' allora:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3t-t^2 \\ 2t+\frac{t^2}{2} \\ t+\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -3 - 2t$$

che e' uguale a

$$-3y_1 - 5y_2 - y_3 = -3(1-3t-t^2) - 5\left(2t + \frac{t^2}{2}\right) - \left(t + \frac{t^2}{2}\right) = -3 - 2t.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -3x_1 - 5x_2 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 6. *Sia $\phi : \mathbf{R}[t]_{\leq 2} \times \mathbf{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbf{R}$ la forma bilineare simmetrica definita ponendo*

$$\phi(p(t), q(t)) = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1).$$

Calcolare gli invarianti ed una base ortogonale per ϕ.

Svolgimento. Poniamo

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2.$$

Allora

$$\phi(p(t), q(t)) = 2a_0b_0 + a_0b_1 + a_0b_2 + a_1b_0 + a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_0 + a_2b_1 + a_2b_2.$$

Percio' la matrice di Gram di ϕ, riferita alla base canonica $\{1,\, t,\, t^2\}$ di $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$, e':

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[\, G \,|\, I \,]$ si ottiene la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che gli invarianti di ϕ sono $(n,p,r,s) = (3,2,2,2)$, ed una base ortogonale e' formata dai polinomi t^2, $t - t^2$, $1 - t^2$. ■

Geometria (9 CFU), IV appello, 1 luglio 2021.

Esercizio 1. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare omogeneo*

$$\begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ x-y+3z+t=0. \end{cases}$$

Al variare del parametro reale $h \in \mathbf{R}$, sia U_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 3x+y+7z-t=0 \\ hx+hy+2hz+(2h^2+4h)t=0. \end{cases}$$

Per quali valori di h si ha $V=U_h$?

Svolgimento. Si osservi che $\dim V=2$, mentre U_h, quando $h=0$, ha dimensione 3. Percio' possiamo assumere $h \neq 0$. In tal caso, U_h ammette come rappresentazione cartesiana il sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x+y+7z-t=0 \\ x+y+2z+(2h+4)t=0. \end{cases}$$

Quindi anche U_h ha dimensione 2, per ogni $h \neq 0$. Percio', U_h coincide con V se e solo $V \cap U_h = V$. Infatti, se $V \cap U_h = V$, allora $V \cap U_h$ ha dimensione 2, ed essendo un sottospazio di U_h, che ha dimensione 2, si avra' anche $V \cap U_h = U_h$, e quindi $V = U_h$. La condizione $V \cap U_h = V$ e' equivalente a dire che il sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ x-y+3z+t=0 \\ 3x+y+7z-t=0 \\ x+y+2z+(2h+4)t=0 \end{cases}$$

ha ∞^2 soluzioni. Ora, la matrice del sistema ammette la seguente riduzione a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2h+5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $V=U_h$ se e solo se $2h+5=0$, cioe' se e solo se $h=-\frac{5}{2}$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} x+2y=2 \\ 3x+6y=k+7 \\ x+(k+2)y=1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. La matrice completa del sistema $\mathcal{S}_k$ e':

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & k+7 \\ 1 & k+2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha determinante pari a $-k(k+1)$. Ne consegue:

- Se $k \neq 0, -1$, il sistema $\mathcal{S}_k$ non ha soluzioni.
- Anche se $k=0$, il sistema $\mathcal{S}_0$ non ha soluzioni. Infatti la matrice completa si riduce per righe alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio' la matrice completa ha rango strettamente maggiore del rango della matrice incompleta.

• Se $k = -1$, il sistema $\mathcal{S}_{-1}$ ha un'unica soluzione, che e'

$$(x, y) = (0, 1)^T. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3. *L'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ha l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$ rappresentato dall'equazione $x + y - 2z = 0$, e l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = -2$ rappresentato dal sistema lineare*

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^3$, e una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $P^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot P = D$. Inoltre, calcolare il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f, il polinomio minimo $m_f(t)$ di f, e la forma canonica di Jordan J_f di f.

Svolgimento. L'autospazio V_1 e' generato dai vettori $(-1, 1, 0)$ e $(2, 0, 1)$, mentre l'autospazio V_{-2} dal vettore $(2, 1, 1)$. Tali vettori, messi insieme, formano una base $\mathcal{A}$ di autovettori di f. Percio', posto

$$P = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

si ha

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 12 \\ -3 & -2 & 6 \\ -3 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

A questo punto e' chiaro che $D = J_f$ e che

$$p_f(t) = -(t-1)^2(t+2), \quad m_f(t) = (t-1)(t+2). \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Sia $J = J_{\lambda, 2}$ il blocco di Jordan di ordine 2, relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbf{R}$. Qual e' la forma canonica di Jordan di J^2 ?*

Svolgimento. Osserviamo che

$$J^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Percio', se $\lambda = 0$ allora la forma canonica di J^2 e' la matrice nulla. Altrimenti, e' data dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 1 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - 5x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 3. \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t+3)(t+4)^2$. Entrambi gli autovalori hanno molteplicita' geometrica 1, percio'

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t} & te^{-4t} \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

Il vettore $(1,0,1)$ e' un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = -3$, mentre i vettori $(0,1,0)$, $(1,0,2)$ formano una stringa di lunghezza 2 per $\lambda = -4$.

Possiamo allora calcolare la soluzione $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ del problema.

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t} & te^{-4t} \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-4t} - e^{-3t} \\ 2te^{-4t} \\ 4e^{-4t} - e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,3)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -8e^{-4t} + 3e^{-3t}$$

che e' uguale a

$$-2y_1 - y_3 = -4e^{-4t} + 2e^{-3t} - 4e^{-4t} + e^{-3t}.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -2x_1 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

Esercizio 6. *Sia $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forma quadratica definita ponendo*

$$q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2.$$

Determinare gli invarianti di q, e tutti i vettori (x,y,z) tali che $q(x,y,z) = 1$.

Svolgimento. La matrice di Gram di q, riferita alla base canonica, e':

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[\,G \,|\, I\,]$ si ottiene la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Percio' gli invarianti sono

$$(n,p,r,s) = (3,1,1,1).$$

Inoltre, posto

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ed

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

nelle nuove coordinate $\mathbf{x}'$ abbiamo

$$q(x',y',z') = x'^2.$$

Percio' $q = 1$ se e solo se $x' = \pm 1$. Poiche' $x' = x + y + z$, ne consegue che $q = 1$ se e solo se $x + y + z = \pm 1$. Quindi tutti e soli i vettori che soddisfano la condizione richiesta sono i vettori del tipo:

$$(x,y,z) = (\pm 1 - h - k,\ h,\ k), \quad h,k \in \mathbf{R}. \quad ■$$

Geometria (9 CFU), V appello, 25 agosto 2021.

Esercizio 1. *Sia $\mathcal{N}$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici nilpotenti. Sia N il sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$ generato da $\mathcal{N}$. Dire se e' vero oppure no che $\mathcal{N} = N$, e determinare una base e la dimensione di N.*

Svolgimento. Sia

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

una matrice nilpotente 2×2. Cio' equivale a dire che il polinomio caratteristico di A e' il polinomio $p_A(t) = t^2$. Poiche'

$$p_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc),$$

ne consegue che A e' nilpotente se e solo se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ ad - bc = 0. \end{cases}$$

In particolare sono nilpotenti le matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

allora $A_1 + A_2$ non e' nilpotente. Cio' prova che $\mathcal{N} \neq N$. Le equazioni precedenti ci dicono anche che $\mathcal{N}$ e' contenuto nel sottospazio $U \subset \mathcal{M}(2,2)$ definito dall'equazione $a + d = 0$. Percio' la dimensione di N e' ≤ 3. D'altra parte le matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

sono indipendenti, ed appartengono ad N. Ne consegue che $\dim N = 3$, e le tre matrici predenti formano una base per N. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} 2x + y + (9 + 5k)z = 0 \\ 4x + 3y + (10k + 12)z = 2 - k \\ 2x + y + (k^2 + 6k + 3)z = 2 - k \\ 6x + 4y + (k^2 + 16k + 15)z = 4 - 2k. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato con le operazioni $e_{21}(-2)$, $e_{31}(-1)$, $e_{41}(-3)$, $e_{42}(-1)$, $e_{43}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 + 5k & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 2 - k \\ 0 & 0 & k^2 + k - 6 & 2 - k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, tenuto conto che $k^2 + k - 6 = (k+3)(k-2)$, se $k \notin \{-3, 2\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione che e'

$$\left(\frac{1}{2}(k+3), \, -\frac{k^2 + k}{k+3}, \, -\frac{1}{k+3} \right)^T.$$

Se $k = 2$ il sistema $\mathcal{S}_2$ ammette le ∞^1 soluzioni

$$\left(-\frac{25}{2}z, \, 6z, \, z \right)^T, \qquad z \in \mathbf{R}.$$

Se $k = -3$ il sistema $\mathcal{S}_{-3}$ e' incompatibile. ■

Esercizio 3. *Sia $V = \mathcal{M}(2,2)$ lo spazio delle matrici 2×2. Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}(2,2)$, sia $f_A : V \to V$ l'endomorfismo definito ponendo $f_A(X) = A \cdot X$. Sia $\varphi : V \to End(V)$ l'applicazione lineare definita ponendo $\varphi(A) = f_A$. Dire se e' vero oppure no che φ e' iniettiva, e se e' vero oppure no che φ e' suriettiva. Infine, calcolare la matrice rappresentativa di f_A rispetto alla base canonica di V.*

Svolgimento. Sia
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
una generica matrice 2×2. Sia $\mathcal{E} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ la base canonica di V. Allora:
$$f_A(E_{11}) = A \cdot E_{11} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio' la prima colonna di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_A)$ e' data dal vettore numerico $(a, 0, c, 0)^T$. In modo simile si calcolano le altre colonne di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_A)$, e si perviene al risultato:
$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_A) = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}.$$

In particolare, se f_A e' l'endomorfismo nullo, allora $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_A)$ deve essere la matrice nulla, e percio' $A = \mathbf{0}$. Ne consegue che il nucleo di φ e' banale, e quindi che φ e' iniettiva. Infine, per il Teorema della dimensione, sappiamo che:
$$\dim \Im(V) = \dim \ker \varphi + \dim \Im(V) = \dim V = 4 < \dim \mathrm{End}(V) = 16.$$

Percio' φ non e' suriettiva. ■

Esercizio 4. *La matrice A e' quadrata, di ordine 3, non e' diagonalizzabile, e soddisfa le equazioni $A^3 = 2A^2$, $A^3 = 3A^2$. Qual e' la forma canonica di Jordan di A?*

Svolgimento. Sia $m_A(t)$ il polinomio minimo di A. Poiche' la matrice A annulla i polinomi $t^2(t-2)$ e $t^2(t-3)$, allora $m_A(t)$ e' un fattore del polinomio t^2. Tale fattore non puo' essere t, altrimenti A sarebbe la matrice nulla, in contrasto col fatto che A non e' diagonalizzabile. Allora $m_A(t) = t^2$. Quindi A e' nilpotente, e nella sua forma canonica deve esserci un blocco di ordine 2. Percio'
$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad ■$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy.*
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 - 16x_2 + 8x_3 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'
$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione
$$A := \begin{bmatrix} -6 & -16 & 8 \\ 3 & 8 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -t^3$. Percio' $A^3 = \mathbf{0}$, A e' nilpotente, e possiamo calcolare direttamente la matrice esponenziale utilizzando la sua definizione, cioe' lo sviluppo di Taylor:

$$e^{At} = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2}A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -6 & -16 & 8 \\ 3 & 8 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} -4 & -8 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 6t - 2t^2 & -16 - 4t^2 & 8t \\ 3t + t^2 & 1 + 8t + 2t^2 & -4t \\ t + \frac{t^2}{2} & 3t + t^2 & 1 - 2t \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata e' allora:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 18t + 2t^2 \\ -1 - 9t - t^2 \\ 1 - 4t - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Per verificare che il risultato e' esatto, osserviamo innanzitutto che la condizione iniziale e' soddisfatta $\mathbf{y}(0) = (1, -1, 1)^T$. Poi osserviamo che

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} 18 + 4t \\ -9 - 2t \\ -4 - t \end{bmatrix},$$

e che tale funzione vettoriale coincide con la funzione che si ottiene moltiplicando la matrice A con $\mathbf{y}(t)$:

$$A \cdot \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -6 & -16 & 8 \\ 3 & 8 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + 18t + 2t^2 \\ -1 - 9t - t^2 \\ 1 - 4t - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 4t \\ -9 - 2t \\ -4 - t \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{y}}(t). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia* $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *la forma quadratica definita ponendo*

$$q(x, y, z) = x^2 + xy + z^2.$$

Sia U *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *rappresentato dall'equazione* $x - y + 2z = 0$. *Sia* $q_1 : \mathbf{u} \in U \to q(\mathbf{u}) \in \mathbf{R}$ *la restrizione di* q *su* U. *Calcolare gli invarianti di* q_1*, ed una base ortogonale di* U *per* q_1.

Svolgimento. La matrice di Gram di q, riferita alla base canonica, e':

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ per U e' costituita dai vettori

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (-2, 0, 1).$$

Se denotiamo con ϕ la polarizzazione di q, abbiamo:

$$\phi(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) = (1, 1, 0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\phi(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = (1, 1, 0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3,$$

$$\phi(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2) = (-2, 0, 1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5.$$

Percio' la matrice di Gram di q_1, riferita alla base $\mathcal{B}$, e':

$$G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q_1) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice $[\,G\,|\,I\,]$ si ottiene la matrice (I denota la matrice identita' di ordine 2):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Percio' gli invarianti di q_1 sono

$$(n, p, r, s) = (2, 2, 2, 2).$$

Inoltre, la matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}^T$$

e' la matrice del cambiamento delle coordinate da una certa base $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$, ortogonale, alla base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_U) = P, \quad G_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(q_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = P^T \cdot G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q_1) \cdot P.$$

Percio' una base ortogonale per q_1 e' costituita dai vettori:

$$\mathbf{c}_1 = 1 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2 = (1, 1, 0), \qquad \mathbf{c}_2 = \frac{3}{2} \cdot \mathbf{b}_1 + 1 \cdot \mathbf{b}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right). \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), VI appello, 10 settembre 2021.

Esercizio 1. *Fissata una matrice* $A \in \mathcal{M}(2,2)$*, sia* U_A *il sottospazio di* $\mathcal{M}(2,2)$ *costituito da tutte le matrici* X *tali che* $A \cdot X = X \cdot A$*. Dire quali delle seguenti affermazioni e' vera:* (0) *esiste almeno una matrice* A *tale che* $\dim U_A = 0$*,* (1) *esiste almeno una matrice* A *tale che* $\dim U_A = 1$*,* (2) *esiste almeno una matrice* A *tale che* $\dim U_A = 2$*,* (3) *esiste almeno una matrice* A *tale che* $\dim U_A = 3$*,* (4) *esiste almeno una matrice* A *tale che* $\dim U_A = 4$*,* (5) *esiste almeno una matrice* A *tale che* $\dim U_A = 5$*.*

Svolgimento. Consideriamo una fissata, ma qualunque, matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Allora U_A e' costituito da quelle matrici

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

tali che

$$A \cdot X = X \cdot A.$$

Cioe' tali che

$$\begin{cases} cy - bz = 0 \\ bx + (d-a)y - bt = 0 \\ cx + (d-a)z - ct = 0 \\ cy - bz = 0. \end{cases}$$

Quindi, tramite l'applicazione delle coordinate, U_A si identifica con lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo nelle quattro incognite x, y, z, t, con matrice dei coefficienti data da:

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & c & -b & 0 \\ b & d-a & 0 & -b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio',

$$\dim U_A = 4 - \mathrm{rk} M_A,$$

ed il problema si riduce al calcolo del rango di una matrice.

E' chiaro che

$$\mathrm{rk} M_A = \mathrm{rk} \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ b & d-a & 0 \\ c & 0 & d-a \end{bmatrix}.$$

D'altra parte

$$\det \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ b & d-a & 0 \\ c & 0 & d-a \end{bmatrix} = 0.$$

Percio' $\mathrm{rk} M_A \leq 2$, e quindi $\dim U_A \geq 2$.

Ora osserviamo che se A e' la matrice nulla, allora U_A e' tutto lo spazio delle matrici, quindi $\dim U_A = 4$. Se $b = c = 0$, e $d - a \neq 0$, allora $\mathrm{rk} M_A = 2$, e quindi $\dim U_A = 2$. Infine, non e' possibile che il rango di M_A sia uguale ad 1. Infatti, se $c \neq 0$, M_A possiede il minore nonsingolare

$$\begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque, in questo caso il rango e' 2. Similmente, il rango e' 2 se $b \neq 0$. Se invece $c = b = 0$, il rango si riduce a quello della matrice

$$\begin{bmatrix} d-a & 0 \\ 0 & d-a \end{bmatrix},$$

che e' o 0, oppure 2.

In conclusione, le affermazioni vere sono soltanto la (2) e la (4). ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x, y, z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} x + 5y + z = 1 \\ 3x + 15y + (k^2 - k + 3)z = 3 - k \\ 3x + 14y + (k^2 - k + 4)z = 3 - k. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato con le operazioni $e_{21}(-3)$, $e_{31}(-3)$, p_{23}, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k^2 - k + 1 & -k \\ 0 & 0 & k^2 - k & -k \end{bmatrix}.$$

Quindi, se $k \notin \{0, 1\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione che e'

$$\frac{1}{k-1}\left(k + 5,\ -1,\ -1\right)^T.$$

Se $k = 0$ il sistema $\mathcal{S}_0$ ammette le ∞^1 soluzioni

$$(1 - 6z,\ z,\ z)^T, \qquad z \in \mathbf{R}.$$

Se $k = 1$ il sistema $\mathcal{S}_1$ e' incompatibile. ■

Esercizio 3. *Sia $f : \mathcal{M}(n, n) \to \mathbf{R}$ l'applicazione lineare che ad ogni matrice $A \in \mathcal{M}(n, n)$, associa la traccia di A, cioe' $f(A)$ e' la somma degli elementi sulla diagonale principale di A. Calcolare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine di f. Infine calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche.*

Svolgimento. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine n. Allora

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Percio', la matrice rappresentativa di f e' formata da un'unica riga, con n^2 componenti, tutte nulle, tranne quelle di posto $in + i + 1$ ($0 \le i \le n - 1$), che sono uguali ad 1.

E' chiaro che f e' suriettiva, percio' la dimensione dell'immagine e' 1, e quella del nucleo e' $n^2 - 1$.

Una base dell'immagine e' data dal numero $1 \in \mathbf{R}$.

Per quel che riguarda la base del nucleo, osserviamo che, se $n = 1$, e' il vuoto.

Nel caso $n \ge 2$, le matrici canoniche E_{ij}, con $i \ne j$, hanno tutte traccia nulla. Altre matrici con traccia nulla sono le matrici $E_{11} - E_{ii}$, con $2 \le i \le n$. Mettendo insieme tutte queste matrici, otteniamo un sistema linearmente indipendente [12] di matrici, con

$$(n^2 - n) + n - 1 = n^2 - 1$$

matrici. Quindi tale sistema e' una base per il nucleo di f. ■

Esercizio 4. *Un endomorfismo f ha polinomio caratteristico $p_f(t) = [(t-2)(t-5)(t+4)]^2$. Sapendo che gli autovettori di f generano uno spazio di dimensione 4, determinare tutte le possibili forme canoniche per f.*

[12] Sia

$$\sum_{i \ne j} a_{ij} E_{ij} + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}(E_{11} - E_{ii}) = \mathbf{0}$$

una relazione tra tali matrici. Possiamo riscrivere tale relazione sotto la forma

$$\sum_{i \ne j} a_{ij} E_{ij} + \left(\sum_{i=2}^{n} a_{ii}\right) E_{11} - \sum_{i=2}^{n} a_{ii} E_{ii} = \mathbf{0}.$$

Poiche' le matrici canoniche sono indipendenti, allora ogni a_{ij} deve essere nullo, e percio' la relazione di partenza e' necessariamente banale.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico assegnato ha grado 6, percio' l'endomorfismo e' definito su uno spazio di dimensione 6. La forma canonica di f sara' una matrice quadrata di ordine 6, con quattro blocchi, perche' il numero dei blocchi corrisponde alla molteplicita' geometrica, cioe' alla dimensione degli autospazi. Ciascun autovalore appare due volte sulla diagonale principale. Se un autovalore appare con due blocchi, allora gli altri due autovalori devono apparire ciascuno con un solo blocco. E deve esserci necessariamente un autovalore che appare con due blocchi. Percio', le forme canoniche possibili per f sono tre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 2 \\ x_3(0) = 2. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -t^2(t+2)$.

E' chiaro che $(0,1,0)$ e' un autovettore per -2, e che $\{(1,0,-1),\ (1,0,0)\}$ forma una stringa di lunghezza 2 per l'autovalore 0. Quindi, la forma canonica di A e'

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Allora, posto

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t+1 \\ 2e^{-2t} \\ 2-3t \end{bmatrix}.$$

Per verificare che il risultato e' esatto, osserviamo innanzitutto che la condizione iniziale e' soddisfatta $\mathbf{y}(0) = (1,2,2)^T$. Poi osserviamo che

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ -4e^{-2t} \\ -3 \end{bmatrix},$$

e che tale funzione vettoriale coincide con la funzione che si ottiene moltiplicando la matrice A con $\mathbf{y}(t)$:

$$A \cdot \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3t+1 \\ 2e^{-2t} \\ 2-3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4e^{-2t} \\ -3 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{y}}(t). \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia* $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *la forma quadratica definita ponendo*

$$q(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2.$$

Determinare una base $\mathcal{B}$ *di* $\mathbf{R}^2$ *tale che, se* (x', y') *denotano le coordinate rispetto a tale base, si abbia:*

$$q(x', y') = {x'}^2 + 4x'y' + 5{y'}^2.$$

Svolgimento. Il problema consiste nel determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che si abbia:

$$G^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

A tale proposito, cominciamo osservando che la matrice di Gram di q, riferita alla base canonica, e':

$$G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange, otteniamo la seguente decomposizione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Similmente, applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

otteniamo la seguente decomposizione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uguagliando le due decomposizioni, otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sia $\mathcal{B}$ la base formata dai vettori colonna della matrice a destra, cioe' $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$, ed

$$R = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

denoti la matrice del cambiamento delle coordinate dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica. La decomposizione precedente ci dice che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = R^T \cdot G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(q) \cdot R.$$

D'altra parte, dalla teoria, sappiamo che

$$G^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(q) = R^T \cdot G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(q) \cdot R.$$

Percio', la base cercata e' $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$. $\blacksquare$

Geometria (9 CFU), I appello, 27 gennaio 2022.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-3,2,0,0)$, $(1,0,2,0)$, $(-1,0,0,2)$. Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia V_h il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare*

$$\begin{cases} x+y+z+ht=0 \\ x+2y-2z-t=0. \end{cases}$$

Calcolare una rappresentazione cartesiana di U, ed una base di V_h. Inoltre, dire per quali valori di h il sottospazio V_h e' contenuto in U, per quali valori V_h e' uguale ad U, per quali valori V_h contiene U.

Svolgimento. Una rappresentazione cartesiana di U si ottiene imponendo:

$$\det \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & z \\ 0 & 0 & 2 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Percio' una rappresentazione cartesiana di U e'

$$2x+3y-z+t=0.$$

Poi, risolvendo il sistema lineare che rappresenta V_h, si vede che una base di V_h e' data dai vettori:

$$(-4,3,1,0),\ (-1-2h,1+h,0,1).$$

Quindi, V_h ha sempre dimensione 2, percio' non puo' mai essere uguale, o contenere, U. Infine, osserviamo che $(-4,3,1,0)$ soddisfa l'equazione di U. Percio' V_h e' contenuto in U se e solo se $(-1-2h,1+h,0,1)$ soddisfa l'equazione di U, cioe' se e solo se $h=2$.

In conclusione:
1) una rappresentazione cartesiana di U e' $2x+3y-z+t=0$;
2) una base di V_h e' data dai vettori $(-4,3,1,0)$ e $(-1-2h,1+h,0,1)$;
3) V_h non e' mai uguale ad U, e mai lo contiene, e V_h e' contenuto in U se e solo se $h=2$. ∎

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} 2x+(k+1)y+z=4 \\ 2x+(2k+2)y+(k+2)z=k+6 \\ 2x+(k+1)y+(k-1)z=k+2. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$ ed $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & k+1 & 1 & 4 \\ 0 & k+1 & k+1 & k+2 \\ 0 & 0 & k-2 & k-2 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k \neq -1,2$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e'

$$\frac{1}{k+1}\,(k+1,1,k+1)^T.$$

- Se $k=-1$ il sistema non ha soluzioni.
- Se $k=2$, il sistema $\mathcal{S}_2$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 3y+3z=4. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}_2$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$\left(0, \frac{4}{3}, 0\right)^T + z\,(1,-1,1)^T, \quad z \in \mathbf{R}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(1,0,0) = (2,1)$, $f(0,1,0) = (-1,-1)$, $f(0,1,1) = (1,0)$. Sia $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo*

$$g(x,y) = (x-y, 2x-y, -x).$$

Sia $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione composta $h = g \circ f$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(h)$ di h rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R}^3$, una base per il nucleo di h, una base per l'immagine di h, ed una rappresentazione cartesiana per l'immagine di h.

Svolgimento. Sia $\mathcal{E}_2$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Poiche'

$$f(0,0,1) = f(0,1,1) - f(0,1,0) = (1,0) - (-1,-1) = (2,1)$$

allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_2}(g) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio':

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(h) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_2}(g) \cdot M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Una base per il nucleo di h si ottiene risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Percio' il nucleo di h ha dimensione 1, ed una sua base e' data dal vettore $(-1,0,1)$. Una base per l'immagine di h e' data dai vettori $(1,3,-2)$, $(0,-1,1)$, ed una rappresentazione cartesiana dell'immagine di h e': $x - y - z = 0$. $\blacksquare$

Esercizio 4. *Sia $A = J_{\lambda,6}$ il blocco di Jordan relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbf{C}$, di ordine 6. Sia $B = J_{0,6}$ il blocco di Jordan nilpotente, di ordine 6. Qual e' la forma canonica di $A \cdot B$?*

Svolgimento. Osserviamo che $A = \lambda I + B$, percio' $A \cdot B = \lambda B + B^2$. Tale matrice ha componenti tutte uguali a λ sopra la diagonale principale, e sopra ha componenti tutte uguali ad 1. Tutte le altre componenti, comprese quelle sulla diagonale principale, sono nulle. Ne consegue che $A \cdot B$ e' nilpotente, e

$$m_g(0) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 2 & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

Quindi, se $\lambda \neq 0$, allora la forma canonica di $A \cdot B$ e' B. Se invece $\lambda = 0$, allora $A \cdot B = B^2$, ed in tal caso la forma canonica e' costituita da due blocchi nilpotenti di ordine 3. Infatti, l'indice di nilpotenza di B^2 e' $p = 3$, ed il rango di $(B^2)^{p-1} = B^4$, che coincide con il numero di blocchi di ordine massimo nella forma canonica di B^2, e' 2 (confrontare con l'Esercizio 4 a pag. 232). $\blacksquare$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = 11x_1 - 7x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 11 & -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At}, andiamo a calcolare una base a stringhe $\mathcal{S}$ per l'operatore L_A. Mettendo in colonna i vettori di tale base, otterremo una matrice P tale che $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, dove J e' la forma canonica di A.

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -t^2(t-1)$, e la molteplicita' geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ e' 1. Percio' la forma canonica di A e':

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Una stringa di lunghezza 1 relativa all'autovalore $\lambda = 1$ e' semplicemente un autovettore. Il calcolo mostra che l'autospazio V_1 e' generato dal vettore $(1, 2, -1)$.

Per calcolare una stringa di lunghezza 2 relativa all'autovalore 0, procediamo come segue. Calcoliamo

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_0$ relativo all'autovalore nullo ha equazione $x - y = 0$. Una base $\mathcal{B}$ per $\widetilde{V}_0$ e' data dai vettori $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. L'operatore L_A porta $(1, 1, 0)$ in $(2, 2, 4) = 2(1, 1, 0) + 4(0, 0, 1)$, e $(0, 0, 1)$ nel vettore $(-1, -1, -2) = -(1, 1, 0) - 2(0, 0, 1)$. Allora la matrice rappresentativa di L_A, ristretto su $\widetilde{V}_0$, rispetto alla base $\mathcal{B}$, e':

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice e' nilpotente, con indice di nilpotenza 2. L'operatore L_M porta $(0, 1)$ in $(-1, -2)$, e $(-1, -2)$ in $(0, 0)$:

$$(0, 1) \xrightarrow{M} (-1, -2) \xrightarrow{M} (0, 0).$$

I vettori $(0, 1)$ e $(-1, -2)$ corrispondono, tramite l'applicazione delle coordinate, ai vettori $(0, 0, 1)$ e $(-1, -1, -2)$. Quindi una stringa di lunghezza 2 per L_A e':

$$(0, 0, 1) \xrightarrow{A} (-1, -1, -2) \xrightarrow{A} (0, 0, 0).$$

Percio'

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente possiamo calcolare la soluzione del problema assegnato.

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^t + 2 + 4t \\ -2e^t + 2 + 4t \\ e^t + 8t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Rispetto a tale base, la forma quadratica $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ha la seguente espressione esplicita:*

$$q = {x'_1}^2 + 4x'_1x'_2 + 4x'_1x'_3 + 3{x'_2}^2 + 4x'_2x'_3.$$

Determinare l'espressione esplicita di q rispetto alle coordinate canoniche, gli invarianti di $(\mathbf{R}^3, q)$, ed una base ortogonale.

Svolgimento. Sappiamo che

$$G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'altra parte abbiamo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $\mathcal{E}$ denota la base canonica. Quindi

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})^T \cdot G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Percio' l'espressione esplicita di q rispetto alla base canonica e':

$$q = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Inoltre, tramite le operazioni $e_{21}(-1)$, $e^{21}(-1)$, $e_{31}(-2)$, $e^{31}(-2)$, $e_{32}(-2)$, $e^{32}(-2)$, l'Algoritmo di Gauss-Lagrange porta la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nella matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Percio' gli invarianti dello spazio pseudoeuclideo $(\mathbf{R}^3, q)$ sono $(n, p, r, s) = (3, 2, 1, 0)$, ed una base ortogonale per $(\mathbf{R}^3, q)$ e' data dai vettori $\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $-2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. $\blacksquare$

Geometria (9 CFU), II appello, 9 febbraio 2022.

Esercizio 1. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dal sistema lineare*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0. \end{cases}$$

Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(2,-1,0)$ e $(4,-2,0)$. Determinare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.

Svolgimento. Una base per U e' data dal vettore $(-1,0,1)$, mentre una base per V e' data dal vettore $(2,-1,0)$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $U+V$ e' data dall'equazione:

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' $x+2y+z=0$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili x,y,z:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} kx+y+z=k^2+3 \\ kx+(k+2)y+3z=k^2+k+8 \\ kx+y+kz=k^2+2k+1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema lineare assegnato $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, per quali k ammette infinite soluzioni, per quali k non ha soluzioni. Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$.

Svolgimento. Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare $\mathcal{S}_k$ con le operazioni $e_{21}(-1)$ ed $e_{31}(-1)$, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & k^2+3 \\ 0 & k+1 & 2 & k+5 \\ 0 & 0 & k-1 & 2k-2 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue:

- Se $k \neq 0,-1,1$, il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer, ha un'unica soluzione, ed il calcolo mostra che e'

$$(k,1,2)^T.$$

- Se $k=0$, il sistema $\mathcal{S}_0$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y+z=3 \\ z=2. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}_0$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$(x,1,2)^T, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- Se $k=-1$, il sistema $\mathcal{S}_{-1}$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ z=2. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}_{-1}$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$(y-2,y,2)^T, \quad y \in \mathbf{R}.$$

- Se $k=1$, il sistema $\mathcal{S}_1$ ha le stesse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ y+z=3. \end{cases}$$

Quindi, $\mathcal{S}_1$ ha ∞^1 soluzioni, date dai vettori numerici

$$(1,3,0)^T + z(0,-1,1)^T, \quad z \in \mathbf{R}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni $f(1,1,1) = (0,0,0)$, $f(1,2,1) = (2,4,2)$, $f(1,0,2) = (3,3,4)$. Calcolare la matrice rappresentativa $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f rispetto alla base canonica, il polinomio caratteristico $p_f(t)$ di f, il polinomio minimo $m_f(t)$ di f, ed una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.*

Svolgimento. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,0,2)$. Dai dati del testo sappiamo che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 5 \\ -11 & 4 & 7 \\ -8 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo del polinomio caratteristico mostra che $p_f(t) = -t(t-1)(t-2)$. Percio' $m_f(t) = t(t-1)(t-2)$. Inoltre, dai dati del problema si evince che $(1,1,1)$ e' un elemento del nucleo, percio' un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 0$, mentre $(1,2,1)$ e' un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 2$. Il calcolo mostra che un autovettore relativo a $\lambda = 1$ e' $(-1,1,-2)$. Quindi possiamo assumere:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 4. *Di una matrice A si sa che e' di ordine 4, che ha solo due autovalori, dati da 2 e 5, e che il suo polinomio minimo ha grado 3. Quali sono le possibili forme canoniche di A?*

Svolgimento. La matrice non puo' essere diagonalizzabile, altrimenti il suo polinomio minimo sarebbe $m_A(t) = (t-2)(t-5)$, di grado due, contro le ipotesi. Percio', il polinomio minimo di A deve essere $m_A(t) = (t-2)^2(t-5)$, oppure $m_A(t) = (t-2)(t-5)^2$. Nel primo caso le possibilita' per J_A sono:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nel secondo caso sono:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -9x_1 + x_2 + 8x_3 \\ \dot{x}_2 = -11x_1 + 2x_2 + 9x_3 \\ \dot{x}_3 = -10x_1 + x_2 + 9x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 5 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove A e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -9 & 1 & 8 \\ -11 & 2 & 9 \\ -10 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale e^{At}, andiamo a calcolare una base a stringhe $\mathcal{S}$ per l'operatore L_A. Mettendo in colonna i vettori di tale base, otterremo una matrice P tale che $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, dove J e' la forma canonica di A.

Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -t(t-1)^2$, e la molteplicita' geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ e' 1. Percio' la forma canonica di A e':

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Una stringa di lunghezza 1 relativa all'autovalore $\lambda = 0$ e' semplicemente un autovettore. Il calcolo mostra che l'autospazio V_0 e' generato dal vettore $(1, 1, 1)$.

Per calcolare una stringa di lunghezza 2 relativa all'autovalore 1, procediamo come segue. Calcoliamo

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -7 \\ 9 & -1 & -7 \\ 9 & -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Quindi l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_1$ relativo all'autovalore 1 ha equazione $9x - y - 7z = 0$. Una base $\mathcal{B}$ per $\widetilde{V}_1$ e' data dai vettori $(1, 9, 0)$, $(7, 0, 9)$. L'operatore L_{A-I} porta $(1, 9, 0)$ in

$$(-1, -2, -1) = -\frac{2}{9}(1, 9, 0) - \frac{1}{9}(7, 0, 9),$$

e $(7, 0, 9)$ nel vettore $(2, 4, 2)$. Allora la matrice rappresentativa di L_{A-I}, ristretto su $\widetilde{V}_1$, rispetto alla base $\mathcal{B}$, e':

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

Tale matrice e' nilpotente, con indice di nilpotenza 2. L'operatore L_M porta $(1, 0)$ in $(-\frac{2}{9}, -\frac{1}{9})$, e $(-\frac{2}{9}, -\frac{1}{9})$ in $(0, 0)$:

$$(1, 0) \xrightarrow{M} (-\tfrac{2}{9}, -\tfrac{1}{9}) \xrightarrow{M} (0, 0).$$

I vettori $(1, 0)$ e $(-\frac{2}{9}, -\frac{1}{9})$ corrispondono, tramite l'applicazione delle coordinate, ai vettori $(1, 9, 0)$ e $(-1, -2, -1)$. Quindi una stringa di lunghezza 2 per L_{A-I} e':

$$(1, 9, 0) \xrightarrow{A-I} (-1, -2, -1) \xrightarrow{A-I} (0, 0, 0).$$

La stringa precedente e' anche una stringa di lunghezza due per L_A, relativa all'autovalore 1. Percio'

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente possiamo calcolare la soluzione del problema assegnato.

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -1 & -7 \\ 9 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 - e^t(3+t) \\ 4 - e^t(-1+2t) \\ 4 - e^t(4+t) \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dalla base $\mathcal{B} = \{(-1,0,0,1),\ (0,-1,0,1),\ (0,0,-1,1)\}$. Sia $q : U \to \mathbf{R}$ la forma quadratica su U, la cui espressione esplicita rispetto alla base $\mathcal{B}$ e'*

$$q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Calcolare gli invarianti di (U, q), ed una base ortogonale.

Svolgimento. La matrice di Gram $G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q)$ di q rispetto alla base $\mathcal{B}$ e':

$$G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Affiancando a tale matrice la matrice I, ed eseguendo l'Algoritmo di Gauss-Lagrange, cioe' le operazioni elementari sulle righe $e_{12}(1)$, $e^{12}(1)$, $e_{21}(-\frac{1}{2})$, $e^{21}(-\frac{1}{2})$, $e_{31}(-1)$, $e^{31}(-1)$, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deduciamo che gli invarianti di (U, q) sono $(3, 3, 1, -1)$, ed una base ortogonale e' data dai vettori:

$$(-1,-1,0,2), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad (1,1,-1,-1).$$

Infatti:

$$(-1,-1,0,2) = 1 \cdot (-1,0,0,1) + 1 \cdot (0,-1,0,1) + 0 \cdot (0,0,-1,1),$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right) = -\frac{1}{2} \cdot (-1,0,0,1) + \frac{1}{2} \cdot (0,-1,0,1) + 0 \cdot (0,0,-1,1),$$

$$(1,1,-1,-1) = (-1) \cdot (-1,0,0,1) + (-1) \cdot (0,-1,0,1) + 1 \cdot (0,0,-1,1). \quad \blacksquare$$

Geometria (9 CFU), III appello, 14 giugno 2022.

Esercizio 1. *Siano U e V i sottospazi di $\mathbf{R}^4$ rappresentati, rispettivamente, dai sistemi lineari*

$$U := \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ x - y = 0, \end{cases} \qquad V := \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + y + 2z - 4t = 0. \end{cases}$$

Determinare una rappresentazione cartesiana per $U + V$.

Svolgimento. Una base per U e' data dai vettori $(1,1,1,1)$, $(1,1,0,0)$, mentre una base per V e' data dai vettori $(1,1,1,1)$, $(1,-1,0,0)$. Quindi una base per $U+V$ e' costituita dai vettori $(1,1,1,1)$, $(1,1,0,0)$, $(1,-1,0,0)$. Ne consegue che una rappresentazione cartesiana per $U+V$ e' data dall'equazione:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & -1 & y \\ 1 & 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' $z - t = 0$. ■

Esercizio 2. *Al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili x, y, z, t:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} 2x + (k+1)y + (k+1)z + (k+1)t = k - 1 \\ x + ky + kz + kt = k - 2 \\ x + y + z + t = 1. \end{cases}$$

Dire per quali valori di k il sistema e' compatibile, ed in tal caso determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}(k)$.

Svolgimento. Dopo aver eseguito le operazioni elementari $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 & k-1 & k-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, se $k = 1$, il sistema non e' compatibile. Quando invece $k \neq 1$, allora il sistema e' compatibile, ed ammette ∞^2 soluzioni. In tal caso, la generica soluzione espressa in funzione delle variabili libere z e t e'

$$\left(\frac{2}{k-1}, \frac{k-3}{k-1} - z - t, z, t \right). \quad ■$$

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un qualunque endomorfismo di $\mathbf{R}^3$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere, e quali sono false.*

(i) $\dim \ker f + \dim \Im f = 3$; *(ii)* $\mathbf{R}^3 = \ker f + \Im f$; *(iii)* $\mathbf{R}^3 = \ker f \oplus \Im f$;

(iv) se $f^2 = f$ allora $\ker f \subseteq \Im f$; *(v) se $f^2 = f$ allora* $\Im f \subseteq \ker f$; *(vi) se $f^2 = f$ allora* $\ker f \cap \Im f = \{\mathbf{0}\}$.

Svolgimento. Le affermazioni vere sono la prima e l'ultima. Le rimanenti sono false.

Infatti, la (i) segue dal Teorema della Dimensione.

L'endomorfismo definito dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha il nucleo generato da $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_3$, mentre l'immagine e' generata da $\mathbf{e}_1$. Questo esempio mostra che (ii) e (iii) sono false.

L'endomorfismo definito dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soddisfa la condizione $f^2 = f$, e mostra che (iv) e (v) sono false.

Infine, supponiamo che $f^2 = f$. Sia $\mathbf{u}$ un vettore che appartiene sia al nucleo che all'immagine. Allora possiamo scrivere $\mathbf{u} = f(\mathbf{v})$ per qualche $\mathbf{v}$. Poiche' $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, allora $f^2(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Ma $f^2(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$. Quindi $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. ■

Esercizio 4. *Sia J il blocco di Jordan nilpotente di ordine $p \geq 3$. Qual e' la forma canonica di Jordan di J^{p-2}?*

Svolgimento. Osserviamo che se $p = 3$, allora $J = J^{p-2}$, percio' in tal caso la forma canonica di J^{p-2} e' proprio J. Se invece $p \geq 4$, allora $J^{p-2} \neq \mathbf{0}$ e $(J^{p-2})^2 = \mathbf{0}$. In tal caso, J^{p-2} ha indice di nilpotenza 2, e la sua forma canonica di Jordan e' formata da blocchi nilpotenti di ordine 2, e da blocchi nilpotenti di ordine 1. Il numero dei blocchi nilpotenti di ordine 2 e' uguale al rango di J^{p-2}, cioe' 2. ■

Esercizio 5. *Utilizzando l'esponenziale di una matrice, risolvere il seguente problema di Cauchy.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -8x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. La soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = Pe^{Jt}P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove J e' la forma canonica della matrice A dei coefficienti dell'equazione

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ -8 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e P e' la matrice che si ottiene disponendo in colonna una base a stringhe per L_A. Il polinomio caratteristico di A e' $p_A(t) = -t^2(t-1)$, e la molteplicita' geometrica dell'autovalore 0 e' 1. Quindi

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore 1 e' $(1, 3, 5)$.

L'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_0$ relativo all'autovalore 0 ha come rappresentazione cartesiana il sistema lineare omogeneo

$$A^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

che equivale a

$$x + y - z = 0.$$

Quindi i vettori $(-1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ formano una base per $\widetilde{V}_0$.

Ora consideriamo l'operatore L_A ristretto su $\widetilde{V}_0$:

$$\mathbf{x} \in \widetilde{V}_0 \to A \cdot \mathbf{x} \in \widetilde{V}_0.$$

Tale operatore porta $(-1, 1, 0)$ in $(3, 6, 9)$, e $(1, 0, 1)$ in $(-2, -4, -6)$. Percio' la matrice rappresentativa di tale operatore, rispetto alla base $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, e':

$$M = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice porta $(1, 0)$ in $(6, 9)$, e $(6, 9)$ in $(0, 0)$. Quindi $(6, 9)$ e $(1, 0)$ rappresentano le coordinate di due vettori di $\widetilde{V}_0$ (cioe' $(3, 6, 9)$ e $(-1, 1, 0)$) che formano una stringa di lunghezza 2 per L_A relativa all'autovalore 0. Possiamo formare allora la matrice P:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto che

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & 6 & -3 \\ -9 & -9 & 9 \end{bmatrix},$$

siamo in condizione di calcolare la soluzione $\mathbf{y}(t)$ del problema assegnato. Infatti:

$$\mathbf{y}(t) = Pe^{Jt}P^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & 6 & -3 \\ -9 & -9 & 9 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t - 4t \\ 3e^t - 8t - 4 \\ 5e^t - 12t - 4 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 6. *Sia* $\phi : \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *la forma bilineare simmetrica tale che* $\phi(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2) = 1$*,* $\phi(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2) = 2$*,* $\phi(2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2) = 3$*. Calcolare la matrice di Gram* $G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi)$ *di* ϕ *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$*, e gli invarianti di* ϕ*.*

Svolgimento. Osserviamo che i vettori $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ formano una base di $\mathbf{R}^2$. Chiamiamo $\mathcal{B}$ tale base. Dai dati sappiamo che:

$$G^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Percio'

$$G^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\phi) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})^T \cdot G^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\phi)\cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

L'algoritmo di Gauss-Lagrange porta la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ nella matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ne consegue che gli invarianti di ϕ sono $(2, 2, 1, 0)$. $\blacksquare$