Capitolo 1

Metodi numerici

1.1 Multi Criteria Decision Making

I problemi decisionali hanno ispirato, nel corso dei secoli, il pensiero di molti filosofi: Aristotle, Platone e Tommaso d'Aquino, solo per citarne alcuni, discussero della capacità dell'uomo di prendere delle decisioni una volta analizzato il contesto in cui opera e indicarono in questa sua dote il carattere principale che lo distingue dagli animali [1]. Per meglio spiegare cosa si intenda con il termine "problemi decisionali", mi si permetta di citare una lettera scritta da Benjamin Franklin a Joseph Prestly presa da un paper di MacCrimmon [4]:

> London, Sept 19, l772
> Dear Sir,
> In the affair of so much importance to you, wherein you ask my advice, I cannot, for want of sufficient premises, advise you what to determine, but if you please I will tell you how. [...], my way is to divide half a sheet of paper by a line into two columns; writing over the one Pro, and over the other Con. [...] When I have thus got them all together in one view, I endeavor to estimate their respective weights; and where I find two, one on each side, that seem equal, I strike them both out. If I find a reason pro equal to some two reasons con, I strike out the three. If I judge some two reasons con, equal to three reasons pro, I strike out the five; and thus proceeding I find at length where the balance lies; and if, after a day or two of further consideration, nothing new that is of importance occurs on

> either side, I come to a determination accordingly. [...] I have found great advantage from this kind of equation, and what might be called moral or prudential algebra. Wishing sincerely that you may determine for the best, I am ever, my dear friend, yours most affectionately.
> B. Franklin

Effettuare una scelta corrisponde al considerare da di versi punti di vista il problema che si è tenuti a risolvere, confrontare tra loro le conseguenze che ogni azione intrapresa potrebbe comportare ed infine decidere su quale sia la migliore strada da percorrere; ciò significa quindi che l'atto dello scegliere è strettamente legato ad una pluralità di aspetti da tenere sotto controllo; tali particolari vengono sommariamente denominati *criteri*.

Contrariamente a quanto sopra osservato, per molti anni l'unica via percorsa per risolvere problemi decisionali è stata quella di considerare i sistemi come fossero monocriterio e quindi si potessero accorpare tutti gli aspetti multidimensionali in un unico obiettivo o in un'unica scala di misura. Questa osservazione ancor oggi rimane vera tanto nei testi di finanza [11] quanto in quelli di ricerca operativa: ideato un generico indice di profitto (o di costo) che rappresenti l'utilità di un soggetto, si richiede semplicemente di massimizzare (o minimizzare) tale singolo obiettivo. Questo modo di procedere non solo è riduttivo ma, in un certo qual senso, innaturale. Questo è il motivo per cui, negli ultimi trent'anni, una nuova filosofia di approccio a questo tipo di problematiche ha preso piede ed ha attirato l'attenzione di ricercatori e professionisti: il Multi Criteria Decision Making (MCDM).

Con l'acronimo MCDM (oppure MCDA dova A sta per Aid) viene indicata un'intera serie di strumenti evoluti allo scopo di permettere al "Decision Maker" (DM) (colui che è tenuto a produrre delle scelte) di risolvere, in modo coerente e complesso, problemi decisionali caratterizzati da svariati attributi - spesso contraddittori - tenendo conto di essi e del loro grado di importanza. Il primo fattore a cui bisogna prestare attenzione quando si trattano questo tipo di problemi è che non esiste, in generale, alcuna decisione (soluzione o azione) che sia simultaneamente la migliore da tutti i punti di vista; perciò la parola "ottimizzazione" non trova cittadinanza in questo contesto: in contrasto con le altre tecniche della ricerca operativa, i metodi "*multicriteria*" non ricercano la soluzione "oggettivamente migliore".

1.1.1 Metodi MCDM: elementi base e classificazione

Gli ingredienti base di ogni metodo MCDA sono molto semplici: un set finito o infinito di azioni (dette anche alternative, soluzioni, etc.) descritte da un numero finito di criteri o attributi[1] che abbiano importanza relativa anche diversa e, ovviamente, almeno un decisore. Dati questi elementi base si può ottenere un aiuto nella scelta da effettuare sotto forma di classifica, ordinamento, *score* o simili.

Un problema MCDA può comprendere l'utilizzo di attributi sia quantitativi che qualitativi[2] e i metodi devono permettere di poter trattare indistintamente questi tipi di dati.

Generalmente studiando un problema con n alternative e k attributi si fa riferimento ad una matrice detta *matrice decisionale* così composta:

Alternative designs	Attributes			
	y_1	y_2	$\cdots$	y_k
a_1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1k}
a_2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2k}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_n	y_{n1}	y_{n2}	$\cdots$	y_{nk}

Tabella 1.1 : Matrice decisionale.

nella quale y_{ij} é il valore dell'attributo y_j per l'alternativa a_i $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, k)$. Quando invece si vogliano trattare problemi di carattere esclusivamente qualitativo é necessario costruire la matrice di confronto binario (dall'inglese*pairwise comparison matrix*) M espressa nell'equazione 1.1

$$M = \{m_{il}\}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & 1 & \ldots & m_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

nella quale m_{il} rappresenta l'importanza relativa di a_i rispetto ad a_l tenendo conto di ogni attributo y_j $(j = 1, \ldots, k)$.

[1] Ecco perché talvolta si parla anche di MADM ovvero Multi Attribute Decision Making.

[2] Problemi di valutazione qualitativa si hanno ogni qual volta che le alternative non sono misurabili numericamente rispetto ad ogni attributo ma comunque sono valutabili per mezzo di giudizi soggettivi.

Nonostante gli *input* e gli *output* sopra elencati siano pressappoco comuni all'interno del campo del *multicriteria decision-aid*, è stata sviluppata una vasta varietà di metodi, ognuno dei quali ha proprie caratteristiche e quindi diversamente utile a seconda della particolare esigenza. Gli specialisti in materia hanno preso l'abitudine di dividere i metodi in tre grandi famiglie (anche se le divisioni tra queste famiglie devono considerarsi labili) [14]:

1. multiple attribute utility theory (MAUT),
2. outranking methods,
3. interactive methods.

La prima famiglia, di ispirazione americana, unisce tutte quelle metodologie che aggregano i diversi punti di vista in un'unica funzione conseguentemente ad una ottimizzazione. Il lavoro principale consiste nello studio matematico delle condizioni e della particolare funzione di aggregazione e la realizzazione della costruzione del metodo.

La seconda famiglia, di ispirazione francese, mira a creare una relazione detta di *outranking* (che si può tradurre come relazione di "superamento di grado") che esprima chiaramente le preferenze espresse dal decisore; tale relazione dunque non è nè completa nè tanto meno transitiva.

La terza (e più recente) famiglia propone metodi che alternano fasi di calcolo (che producono successive soluzioni di compromesso) e fasi di interazione (che mirano a produrre extra informazioni sulle preferenze del decisore).

Per meglio comprendere la filosofia che sta alla base di ogni metodologia decision-aid si consiglia la lettura del libro del prof. Bernard Roy[3] [7].

1.1.2 Tecniche di attribuzione dei pesi

Definire accuratamente l'importanza relativa dei criteri ovvero la rilevanza di un aspetto o punto di vista rispetto agli altri, è uno degli aspetti cruciali del MCDA. La maggior parte dei metodi traduce in numeri tale importanza relativa e spesso vengo appellati con il nome di "pesi".

Nel corso degli anni sono stati sviluppati molti metodi di creazione ed attribuzione dei pesi; di seguito verranno discusse alcune di queste tecniche.

[3] Professore Emerito presso l'Université Paris-Dauphine, è fondatore e, dal 1999, direttore onorario del LAMSADE, un gruppo di ricerca che si concentra sul tema del *decision aiding*. Dal 1980 è consulente scientifico della RATP (l'autorita del trasporto cittadino di Parigi).

1.1.2.1 Assegnazione diretta

Quando il *decision maker* è particolarmente esperto del problema nel quale è tenuto ad intervenire, egli potrebbe essere in grado di valutare l'importanza relativa di ogni attributo rispetto agli altri assegnando un voto usando una scala standard di valutazione. Ad esempio potrebbe usare, come suggerito da Hwang e Yoon nel 1981 [2], una scala a dieci punti così costruita:

Valutazione attributo	Valore
estremamente trascurabile	0
molto trascurabile	1.0
trascurabile	3.0
mediocre	5.0
importante	7.0
molto importante	9.0
estremamente importante	10.0

Tabella 1.2 : Scala a 10 punti per l'assegnazione dei pesi.

Il risultato dell'assegnazione diretta è un vettore $W = [w_1 \cdots w_k]$ con k pari al numero totale degli attributi che caratterizzano il problema di natura decisionale.

Il metodo sopra esposto, semplice ed intuitivo da utilizzare, nasconde delle insidie: ad esempio, è stato dimostrato come qualsiasi individuo sia impossibilitato a distinguere tra due valori di importanza relativa molto simili tra loro tipo3.00 e 3.02. Esperimenti psicologici hanno portato poi alla luce un aspetto interessante: la maggior parte delle persone non è in grado di comparare simultaneamente più di sette oggetti (più o meno due) [5]. Questa è la ragione principale che spinse Saaty nel 1980 a stabilire una scala diversa così come spiegato nel prossimo paragrafo 1.1.2.2.

1.1.2.2 Scala definita nell'intervallo $[9, 1/9]$

Così come spiegato in precedenza, al fine di rendere più oggettiva la valutazione dei pesi degli attributi, Saaty propose [8] la scala definita nell'intervallo$[9, 1/9]$ e riportata in Tabella 1.3.

È da notare che la scala di Saaty è composta dal set di numeri {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9}, raggruppabili in due sotto-intervalli: il primo uniformemente distribuito $[9, 1]$ mentre il secondo distorto verso l'estremo destro $[1, 1/9]$.

Valore	Definizione	Descrizione
1	Uguale importanza	I due attributi contribuiscono in egual misura alla definizione del problema
3	Debole importanza di un indice rispetto all'altro	L'esperienza e l'opinione del DM depone leggermente in favore di un attributo rispetto all'altro
5	Importanza forte o elemento essenziale	L'esperienza e l'opinione del DM depone fortemente in favore di un attributo rispetto all'altro
7	Importanza dimostrata	Un attributo è fortemente da favorire e la sua dominanza è dimostrata dalla pratica
9	Importanza assoluta	La comprovata importanza di un attributo rispetto agli altri è la più alta in assoluto
$2, 4, 6, 8$	Valori intermedi rispetto ai due giudizi adiacenti	Quando si ritiene necessario adottare un compromesso
Valori reciproci	Se l'attributo i è già stato valutato nei confronti dell'attributo j, quest'ultimo assumerà il valore reciproco quando confrontato con i.	

Tabella 1.3 : Scala di pesi definita nell'intervallo $[9, 1/9]$ *da Saaty nel 1980.*

La scala di Saaty a differenza di quella presentata in Tabella 1.2 non permette di produrre direttamente un vettore dei pesi però può essere impiegata quale input in altri metodi di assegnazione come vedremo in seguito.

1.1.2.3 Metodo degli autovettori

Il metodo agli autovettori utilizza la matrice di confronto binario esplicitata dall'equazione (1.1) nella quale il valore m_{lh} indica che l'attributo f_l ha una importanza relativa pari a m_{lh} volte quella dell'attributo f_h; il valore m_{lh} può essere fornito seguendo le indicazioni raccolte in Tabella 1.3 o utilizzando una qualsiasi altra scala equivalente [12]. I valori m_{lh} devono essere forniti per ogni $l, h = 1, \ldots, n; l \neq h$. I pesi relativi w_i possono essere ricavati dalla seguente equazione:

$$MW = \lambda_{max} W \tag{1.2}$$

dove $W = [w_1 \cdots w_k]^T$ e λ_{max} è il massimo autovalore per la matrice di confronto M.

Nel caso ideale in cui il decision maker avesse prodotto una matrice M consistente, le seguenti condizioni sarebbero soddisfatte:

$$
\begin{aligned}
& m_{lh} = \tfrac{1}{m_{hl}} \quad \text{e} \quad m_{lk}m_{kh} = m_{lh} \\
& \forall\ (l,h,k) = 1,\ldots,n; l \neq h
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Essendo che, secondo le indicazioni di Saaty, $m_{lh} = \frac{w_l}{w_h}$, nelle condizioni descritte dall'equazione (1.3), otterrei sostituendo (1.3) in (1.2):

$$
\sum_{h=1}^{n}(m_{lh}w_h) = \sum_{h=1}^{n} w_l = nw_l \qquad \forall\ i = 1,\ldots,n \tag{1.4}
$$

ovvero:

$$
MW = nW \tag{1.5}
$$

il che equivale ad affermare che $\lambda_{max} = n$. Purtroppo solo raramente la matrice M è consistente e quindi l'autovettore deve essere determinato[4]. Al riguardo del calcolo dell'autovettore, Saaty propose di adottare un **indice di consistenza (CI)**:

$$
CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} \tag{1.6}
$$

La consistenza della matrice M sarebbe garantita dal rispetto del vincolo $CI < 0.1$[5]; nel caso in cui il vincolo non fosse rispettato si deve invitare il decision maker a rivedere i propri giudizi.

1.1.2.4 Metodo dell'entropia

Il metodo dell'entropia è particolarmente consigliato quando si debbano trattare problemi decisionali caratterizzati da una matrice decisionale simile a quella riportata in Tabella 1.1 e si vogliano investigare le differenze tra set di dati [2].

La determinazione dei pesi avviene seguendo i seguenti step:

Step 1: ogni attributo viene normalizzato secondo la seguente:

$$
p_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} y_{ij}} \qquad \forall\ i,j. \tag{1.7}
$$

[4]In [10] e soprattutto in [12], ai quali si rimanda, vi è una estesa trattazione del problema.

[5]Per completezza, oltre a quanto riportato in questo paragrafo, si dovrebbe discutere anche del calcolo del *consistency ration (CR)* e del *random consistency index (CRI)*, entrambe fattori indispensabili nel controllo della consistenza della matrice M. Poiché la descrizione di tale strumenti esula dagli intenti di questo lavoro, si rimanda chi fosse interessato a consultare quanto descritto da Triantaphyllou in [12].

Step 2: L'entropia E_j del set di dati per l'attributo j è dato da:

$$E_j = -\alpha \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \ln(p_{ij}) \qquad \forall\, j \tag{1.8}$$

dove α è una costante definita come:

$$\alpha = \frac{1}{\ln(n)} \tag{1.9}$$

che garantisce che $0 \leq E_j \leq 1$.

Step 3: Se *a priori* non sono state effettuate altre scelte, i pesi migliori da utilizzare sono:

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{i=1}^{k} d_i} \qquad \forall\, j \tag{1.10}$$

con $d_j = 1 - E_j$ definito come "grado di differenziazione" dell'informazione apportata dall'attributo j-esimo.

Step 4: Se *a priori* il designer, secondo le proprie competenze, ha fissato invece dei pesi $\widehat{w_j}$, questi possono essere corretti per mezzo del metodo dell'entropia producendo i nuovi pesi $\widetilde{w_j}$:

$$\widetilde{w_j} = \frac{\widehat{w_j} w_j}{\sum_{i=1}^{k} \widehat{w_j} w_j} \tag{1.11}$$

1.1.3 Alcuni metodi MCDM

Nelle pagine che seguono verranno descritti alcuni tra i metodi MCDM più famosi ed utilizzati nel campo della tecnica e della ricerca operativa .

1.1.3.1 Il metodo AHP

Studiato per simulare i processi mentali delle persone, il metodo AHP (*Analytic Hierarchy Process*) è stato sviluppato negli anni '70 da Thomas Saaty, professore alla Wharton School of Business, ed è tutt'ora il metodo più usato e rivisto dell'intera teoria del decision making. Il metodo AHP consiste in una procedura sistematica di rappresentazione gerarchica di ogni problema di tipo decisionale: attraverso di esso il decision maker può capire in che misura un elemento di un basso livello possa influenzare gli elementi governanti.

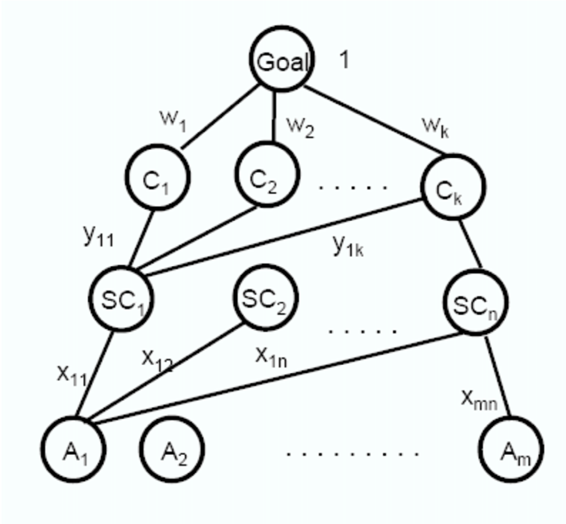

Figura 1.1 : Una struttura gerarchica a multi-strato.

Per meglio chiarire il concetto sopra esposto si faccia riferimento alla Figura 1.1 in cui è mostrata una struttura gerarchica di attributi caratterizzata dall'avere al massimo livello un solo elemento, ovvero l'obiettivo del problema, e, negli altri livelli, i restanti elementi, ognuno dei quali associato ad alcune o a tutte le unità poste al livello immediatamente sottostante.

Il metodo AHP si svolge percorrendo le seguenti fasi:

Step 1: Si stabilisce una gerarchia degli attributi così come mostrato in Figura 1.1.

Step 2: Seguendo le istruzioni reperibili al paragrafo 1.1.2.2, si produce una matrice di confronto binario tra gli attributi presenti ad un certo livello e tutti quelli stanti al livello immediatamente superiore.

Step 3: Si calcola il peso, w^1, dell'unico elemento presente al massimo livello. Si genera, utilizzando il metodo agli autovettori[7], il vettore delle precedenze (*priority vector*) per i dati relativi al secondo livello e lo si identifica con b_{21}. Terminata questa procedura si può passare alla determinazione del vettore dei pesi

[7] Saaty, in un recente lavoro [9], spiega che è indispensabile adottare il metodo agli autovettori, illustrato al paragrafo 1.1.2.3, quando si voglia produrre il vettore dei pesi relativi utilizzabile con AHP quale algoritmo di supporto alle decisioni.

relativo agli elementi del secondo livello, ovvero:

$$w^2 = b_{21} w^1 = B_2 w^1 \tag{1.12}$$

dove è stato posto $B_2 = b_{21}$.

Step 4: Detto b_{qj} il *priority vector* degli elementi al $q-$esimo livello rispetto all'elemento $j-$esimo del livello $(q-1)$ (con $q > 1$), la matrice delle priorità degli elementi al $q-$esimo livello viene definita come segue:

$$B_q = [b_{q1} \cdots b_{qj} \cdots] \tag{1.13}$$

quindi il vetotre dei pesi relativi degli elementi al $q-$esimo livello può essere calcolato come segue:

$$w^q = B_q w^{q-1} \tag{1.14}$$

Step 5: Tra le unità del livello q si individua l'elemento più vantaggioso in quello che presenta il maggior valore del peso relativo.

1.1.3.2 Il metodo UTA

Un numero considerevole di lavori è stato pubblicato riguardo al tema del *Multi Attribute Utility Theory* (MAUT) e utilizzato nell'ambito dell'analisi decisionale (*Decision Analysis*); tutte le opere afferenti a questa famiglia sono accumunate da una base assiomatica: l'esistenza di una funzione di utilità additiva.

1.1.3.2.1 La funzione d'utilità additiva (*Additive Utility Function*) Come abbiamo già visto, nell'MCDM si considera di dover scegliere tra un set A d'azioni (dette anche alternative, design, etc.), valutabili per mezzo di un serie di criteri $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_k)$. La convinzione che si possa aggregare tutti i criteri in uno solo ha capeggiato per molto tempo tra i classici metodi di risoluzione dei problemi decisionali [6]:

$$U(\mathbf{g}) = U(g_1, \ldots, g_k) \tag{1.15}$$

Indicando con P una relazione di preferenza stretta (*strict preference relation*) e con I una relazione di indifferenza (*indifference relation*) [7], si considerano valide per la funzione d'utilità le seguenti regole:

$$\begin{array}{lcl} U[\mathbf{g}(a)] > U[\mathbf{g}(b)] & \Leftrightarrow & aPb \\ U[\mathbf{g}(a)] = U[\mathbf{g}(b)] & \Leftrightarrow & aIb \end{array} \tag{1.16}$$

dove la relazione $R = P \cup I$ viene definita di ordine debole [3].

La funzione di utilità si può dire additiva se vale:

$$U(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^{k} u_i(g_i) \tag{1.17}$$

con $u_i(g_i)$ "funzione di utilità marginale" dell'attributo g_i.

È uso comune, nelle applicazioni del metodo, normalizzare la funzione di utilità. Postulando la comune ipotesi che per ogni criterio g_i la funzione di utilità marginale sia monotona crescente, si ottiene quanto mostrato in Figura 1.2; usando la forma additiva vista all'equazione 1.17, il vincolo di normalizzazione da rispettare diventa:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_i^-) = 0 \quad \forall i \end{cases} \tag{1.18}$$

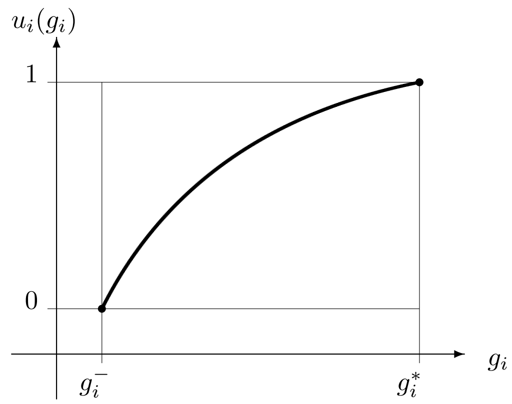

Figura 1.2 : La funzione normalizzata di utilità marginale.

1.1.3.2.2 Sviluppo del metodo UTA Siano $G_i = [g_i^- \ g_i^*]$ con $i = 1, \ldots, k$ gli intervalli nei quali sono definiti tutti i criteri g_i e supponiamo sia stato scelto un sottoinsieme di design (azioni) sia reali che immaginarie (che chiameremo $A^{'}$) e che queste siano state ordinate dal *decision maker* osservando tutti gli attributi secondo le proprie preferenze ovvero applicando le relazioni $R = P \cup I$ esplicitate nell' equazione (1.16).

Il metodo ora procede in due step successivi: lo studio di una funzione di utilità ottimale e la sua analisi di stabilità usando speciali tecniche di programmazione lineare.

Step 1: *Valutazione di una funzione d'utilità ottimale* $U^*(g)$

Assumendo che u_i sia una funzione lineare localmente (*piecewise linear function*) e dividendo ogni intervallo $G_i = [g_i^- \; g_i^*]$ in $(\alpha_i - 1)$ intervalli di uguale ampiezza $[g_i^j \; g_i^{j+1}]$, i punti finali di ogni intervallo sono dati dalla seguente:

$$g_i^j = g_i^- + \frac{j-1}{\alpha_i - 1}(y_i^* - y_i^-) \tag{1.19}$$

Le variabili da stimare però sono le $u_i(g_i^j)$. L'utilità marginale di un'alternativa a è approssimabile con un'interpolazione lineare. Dunque, per $g_i(a) \in [g_i^j \; g_i^{j+1}]$, si ha:

$$u_i[g_i(a)] = u_i(g_i^j) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j}[u_i(g_i^{j+1} - u_i(g_i^j)] \tag{1.20}$$

Considerando le equazioni (1.16) e (1.17), è possibile definire:

$$U^{'}[\mathbf{g}(a)] = \sum_{i=1}^{k} u_i[g_i(a)] + \sigma(a) \qquad \forall a \in A^{'} \tag{1.21}$$

essendo $\sigma(a) \geqslant 0, a \in A^{'}$, un potenziale errore relativo all'utilità:

$$U[\mathbf{g}(a)] = \sum_{i=1}^{k} u_i[g_i(a)]$$

È davvero utile riscrivere tutte le uguaglianze e disuguaglianze sopra descritte come:

$$U^{'}[\mathbf{g}(a)] - U^{'}[\mathbf{g}(b)] \geqslant \delta \Leftrightarrow aPb \tag{1.22}$$

con $\delta > 0$ un numero sufficientemente piccolo[8] e dipendente da $|A^{'}|$ e dal numero Q di classi di indifferenza in R.

Per le relazioni di indifferenza analogamente si pone:

$$U^{'}[\mathbf{g}(a)] - U^{'}[\mathbf{g}(b)] = 0 \Leftrightarrow aIb \tag{1.23}$$

[8] Siskos e Jacquet-Lagrèze in [3] consigliano di scegliere δ in modo tale da garantire una separazione significativa tra due classi di R, ma esso non deve essere maggiore di $1/Q$. Si raccomanda dunque di provare diversi valori, compresi nell'intervallo $[\frac{1}{10}Q, 1/Q]$, e scegliere quello che garantisca il miglior compromesso. In letteratura, in realtà, spesso viene utilizzato un valore di $\delta = 0.01$.

Allo scopo di minimizzare la deviazione totale, si utilizza la seguente funzione obiettivo lineare:

$$F = \sum_{a \in A'} \sigma(a) \tag{1.24}$$

. Inoltre è anche possibile pesare gli errori potenziali (con dei pesi $p(a)$) in modo tale da poter tenere in considerazione il diverso grado di confidenza che si può avere nei confronti delle classificazioni effettuate:

$$F = \sum_{a \in A'} p(a)\sigma(a) \tag{1.25}$$

. Il problema di programmazione lineare è dunque il seguente (PL1):

$$\begin{cases} \textbf{[min]} \quad F = \sum_{a \in A'} \sigma(a) \\ \text{con i vincoli:} \\ \qquad \{\sum_{i=1}^{k} u_i[g_i(a)] - \sum_{i=1}^{k} u_i[g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) \geqslant \delta \quad \textit{se } aPb \\ \qquad \{\sum_{i=1}^{k} u_i[g_i(a)] - \sum_{i=1}^{k} u_i[g_i(b)]\} + \sigma(a) - \sigma(b) = 0 \quad \textit{se } aIb \\ \qquad u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^{j}) \geqslant s_t \\ \qquad \sum_{i=1}^{k} u_i(g_i^{*}) = 1 \\ \qquad u_i(g_i^{-}) = 0, \; u_i(g_i^{j}) \geqslant 0, \; \sigma(a) \geqslant 0 \qquad \forall a \in A' \end{cases} \tag{1.26}$$

con gli indici $i = 1, \ldots, k$ e $j = 1, 2, \ldots, \alpha_i - 1$.

Step 2: *Valutazione di un set di funzioni d'utilità attraverso un'analisi di post-processing* Poiché il problema (1.26) può avere più soluzioni, è necessario esplorare lo stesso spazio delle soluzioni alla ricerca di quelle più efficienti. Tralasciando ogni spiegazione formale (ampiamente descritte invece in [3]), basti sapere che, posto che sia F^* la soluzione ottimale del sistema (1.26), considerando un valore di soglia $k(F^*)$ che sia pari ad una porzione molto piccola di F^*, produrre una analisi post-ottimizzazione equivale a esplorare i vertici di un poliedro ottenuto con la seguente disequazione:

$$F \leqslant F^* + k(F^*) \tag{1.27}$$

ovvero

$$-\sum_{a \in A'} \sigma(a) \geqslant -[F^* + k(F^*)] \tag{1.28}$$

da aggiungere al set di vincoli di (1.26).

1.1.3.3 L'algoritmo TOPSIS

Hwang e Yoon svilupparono TOPSIS [2] (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Design), algoritmo facente parte della grande famiglia degli *outranking methods*, basandosi sul concetto che tra tutte le possibili soluzioni sia da scegliere quella che presenta la minor distanza (e quindi sia più vicina) da un'ideale alternativa ottima e la massima da quella pessima.

Gli unici input richiesti da TOPSIS sono una matrice decisionale (descritta già in Tabella 1.1) e un vettore di pesi relativi che apporti le informazioni necessarie circa le preferenze del decision maker, così come descritto al paragrafo 1.1.2.1 e seguenti.

Gli steps da seguire per produrre un'analisi secondo tale metodo sono:

Step 1: Supponendo che il problema possa essere rappresentato come in Tabella 1.1, si deve costruire la matrice decisionale normalizzata i cui elementi sono definiti da:

$$z_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_{ij}}^2}}, \quad i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, k. \tag{1.29}$$

Step 2: Si definisce la matrice decisionale normalizzata pesata i cui elementi sono ottenuti da:

$$x_{ij} = w_j z_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, k \tag{1.30}$$

dove w_j è il peso del $j-$esimo attributo.

Step 3: Si definiscono un punto ottimo ideale a^* ed uno pessimo (nadir) a^- come segue:

$$\begin{aligned} a^* &= \{(\max_i x_{ij} \mid j \in J), (\min_i x_{ij} \mid j \in \hat{J}) \mid i = 1, \ldots, n\} \\ &= \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*\} \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned} a^- &= \{(\min_i x_{ij} \mid j \in J), (\max_i x_{ij} \mid j \in \hat{J}) \mid i = 1, \ldots, n\} \\ &= \{x_1^-, x_2^-, \ldots, x_k^-\} \end{aligned} \tag{1.32}$$

dove J è l'insieme degli indici da massimizzare (es. vantaggi) mentre $\hat{J}$ è quello degli indici da minimizzare (es. costi).

Step 4: Si calcola poi la distanza dell'alternativa dall'*ideal point* a^* (ovvero un'alternativa ideale e perfetta):

$$S_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(x_{ij} - x_j^*\right)^2} \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.33}$$

e da un *negative ideal point* a^- (ovvero l'opposto di a^*):

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(x_{ij} - x_j^-\right)^2} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.34}$$

Step 5: Si calcola la vicinanza relativa (*relative closeness*) di ogni design dall'*ideal point*

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^*} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.35}$$

Step 6: Infine, ordinando le alternative in base alla grandezza C_i^*, si ottiene il contestuale loro ordinamento dalla migliore alla peggiore; infatti, se $C_i^* > C_j^*$ allora a_i "supera di grado" a_j.

1.1.3.4 L'algoritmo CODASID

Il metodo di supporto alle decisioni CODASID (COncordance and Discordance Analyses by Similarity to Ideal Designs) [10] fa parte della famiglia degli "outranking methods"; tali algoritmi permettono di individuare le alternative migliori attraverso l'estensione del concetto di dominanza sulla base dei giudizi di preferenza espressi dal decisore. In CODASID, effettuando dei confronti binari tra le alternative, si perviene alla definizione di tre indici che esprimono in vario modo la dominanza di una soluzione rispetto ad ogni altra; l'aggregazione finale delle informazioni, che si trovano espresse esplicitamente negli indici, permette di ottenere l'ordinamento delle azioni dalla migliore alla peggiore.

I tre indici generati prendono il nome di "preference concordance index", "evaluation concordance index" e "discordance index". Essi forniscono stime differenti (e tra loro indipendenti) delle caratteristiche di ogni design producendo così un nuovo spazio nel quale condurre la ricerca dell'alternativa migliore. Un modello di programmazione lineare e una procedura di aggiustamento iterativo dei pesi dei tre indici permette infine di aggregare le informazioni: si ottiene così facendo una misura di distanza (definita nel nuovo spazio disegnato) tra ogni alternativa e due ideali design, che rappresentano la migliore e la peggiore scelta attuabili. L'idea base di definire questa sorta di misura trae origine dal metodo TOPSIS [2] descritto al paragrafo 1.1.3.3.

1.1.3.4.1 Informazioni richieste e normalizzazione Definita[9] una *matrice decisionale* contenente le informazioni necessarie costruita cosí come mostrato in Tabella 1.1 nella quale y_{ij} è l'attributo y_j rispetto all'alternativa a_i ($i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, k$), supponiamo, senza perdere in generalità, che tutti gli attributi siano da massimizzare.

Supponiamo inoltre che sia dato il vettore dei pesi relativi degli attributi (costruito ad esempio così come descritto al paragrafo 1.1.2.1):

$$W = [w_1\ w_2\ \cdots\ w_n]^T\ ;\ w_j \geq 0,\ \text{con} \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \tag{1.36}$$

dove w_j è il peso relativo normalizzato dell'attributo y_j.

Poiché gli attributi sono generalmente tra loro non confrontabili (incomparabilità nelle unità di misura, negli ordini di grandezza, ecc.), la matrice decisionale deve essere normalizzata adottando la seguente trasformazione lineare:

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - y_j^{\min}}{y_j^{\max} - y_j^{\min}} \tag{1.37}$$

1.1.3.4.2 Nuova analisi di concordanza e discordanza Sulla base della matrice decisionale, tutte le alternative vengono tra loro comparate, per mezzo di confronti binari, attributo per attributo. Definita l'ipotesi che a_k sia da preferire ad a_l, indicata $a_k P a_l$, se $y_{kj} \geq y_{lj}$ allora si può affermare che il *j-esimo* attributo è *concordante* con (cioè supporta) tale assunzione; viceversa è *discordante*. In questo modo è possibile definire i seguenti sets:

$$C_{kl} = \{j | y_{kj} \geq y_{lj}, j = 1, \cdots, n\},\ D_{kl} = \{j | y_{kj} < y_{lj}, j = 1, \cdots, n\} \tag{1.38}$$

In seguito a quanto descritto è possibile definire le seguenti tre matrici:

$$PC = \begin{bmatrix} - & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & - & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & - \end{bmatrix},\ EC = \begin{bmatrix} - & e_{12} & \cdots & e_{1m} \\ e_{21} & - & \cdots & e_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & - \end{bmatrix},$$

[9] Oltre a quanto riportato in questo paragrafo l'algoritmo richiederebbe anche la definizione di un vettore delle "soglie di veto" ovvero un vettore composto da valori definiti per ogni attributo e tali che, se la differenza in valore assoluto tra gli attributi di due alternative è maggiore della soglia di veto allora l'alternativa col valore minore non dovrà mai dominare l'altra. Poiché la descrizione di tale strumento, non utilizzato negli studi effettuati, esula dagli intenti di questo lavoro, si rimanda chi fosse interessato a [10].

$$CD = \begin{bmatrix} - & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & - & \cdots & d_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & - \end{bmatrix}$$

PC *(Preference Concordance Index)*

$$p_{kl} = \sum_{j \in C_{kl}} w_j / S_p; \quad S_p = \sum_{j=1}^{n} w_j \tag{1.39}$$

Ogni elemento p_{kl} della matrice misura l'ampiezza dell'assunzione che a_k domini a_l in relazione al vettore dei pesi W; se $p_{kl} > p_{mn}$ allora è maggiormente supportata l'ipotesi $a_k P a_l$ rispetto a $a_m P a_n$.

EC *(Evaluation Concordance Index)*

$$e_{kl} = \sum_{j \in C_{kl}} |r_{kj} - r_{lj}| / n \tag{1.40}$$

Ogni elemento e_{kl} della matrice misura l'ampiezza dell'assunzione che a_k domini a_l in relazione al valore degli attributi; notare che $e_{kl} = 1$ indica che a_k è l'alternativa ideale e a_l è viceversa il "nadir".

CD *(Discordance Index)*

$$d_{kl} = \sum_{j \in D_{kl}} |z_{kj} - z_{lj}| / S_d; \quad S_d = \sum_{j=1}^{n} \max_{k,j} \{|z_{kj} - z_{lj}|\} \tag{1.41}$$

con $z_{ij} = w_j r_{ij}$ e $i = 1, \cdots, m$; $j = 1, \cdots, n$.

Il valore di d_{kl} misura l'ampiezza dell'obbiezione all'assunzione che a_k sia da preferire ad a_l ($a_k P a_l$). È da notare che con $d_{kl} = 1$ si intende che a_k è il "nadir" e, ovviamente, a_l è l'alternativa ideale.

Allo scopo di aggregare tutte le informazioni fin qui prodotte ed incluse in ogni elemento di PC, EC e CD in un unico indice, si definiscono i seguenti elementi:

$$p_k = p(a_k) = \sum_{l=1 \; l \neq k}^{m} (p_{kl} - p_{lk}) \quad k = 1, \cdots, m \tag{1.42}$$

$$e_k = e(a_k) = \sum_{l=1\ l\neq k}^{m} (e_{kl} - e_{lk}) \quad k = 1, \cdots, m \tag{1.43}$$

$$d_k = d(a_k) = \sum_{l=1\ l\neq k}^{m} (d_{kl} - d_{lk}) \quad k = 1, \cdots, m \tag{1.44}$$

I tre indici costituiscono la "preference matrix" PM così come mostrato in Tabella 1.4.

	$p(a)$	$e(a)$	$d(a)$
a_1	p_1	e_1	d_1
a_2	p_2	e_2	d_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	p_m	e_m	d_m

Tabella 1.4 : La preference matrix.

Per poter produrre un ordinamento di tutte le alternative (*ranking*), devono essere assegnati o determinati i pesi λ_i per la preference matrix. L'autore dell'algoritmo consiglia di utilizzare i seguenti valori:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \tag{1.45}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.25 \quad \lambda_3 = 0.5 \tag{1.46}$$

in quanto $p(a)$ e $e(a)$ contribuiscono in egual misura a supportare l'ipotesi di dominanza ed entrambe le informazioni sono da considerarsi attendibili.

Definito un *ideal point* a^* (ovvero un'alternativa ideale e perfetta) e un *negative ideal point* a^- (l'opposto di a^*) come segue:

$$a^* = \{(\max(p_i\ ,\ e_i)\ ,\ min(d_i))\} = \{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*\} \tag{1.47}$$

$$a^- = \{(\min(p_i\ ,\ e_i)\ ,\ max(d_i))\} = \{x_1^-, x_2^-, \cdots, x_k^-\} \tag{1.48}$$

si calcola la distanza di ogni alternativa dall'ideal point e dal negative ideal point:

$$S_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(x_{ij} - x_j^*)^2} \quad i = 1, \cdots, n \tag{1.49}$$

$$S_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(x_{ij} - x_j^-)^2} \quad i = 1, \cdots, n \tag{1.50}$$

dove x_{ij} è il λ_i elemento pesato della Preference Matrix.

Entrambe le distanze sopra definite vengono usate per calcolare la vicinanza relativa di ogni alternativa all'idealità:

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^*} \tag{1.51}$$

Ordinando le alternative in base alla grandezza di C_i^*, si ottiene il loro contestuale ordinamento dalla migliore alla peggiore, in quanto affermare che $C_i^* > C_j^*$ equivale a dire che a_i è da preferire a a_j.

Bibliografia

[1] Greco S. Figueira J. and Ehrgott M., editors. *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*. Kluwer Academic Publishers, 2005.

[2] Hwang C. L. and Yoon K. Multiple Objective Decision Making Methods and Applications, A State-of-the-Art Survey . *Springer - Verlag*, 1981.

[3] Jacquet-Lagrèze E. and Siskos Y. Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making: the UTA method. *European Journal of Operational Research*, 10:151–164, 1982.

[4] MacCrimmon K.R. *Multiple Criteria Decision Making*, chapter An overview of multiple objective decision making, pages 18–43. University of South Carolina Press, 1973.

[5] Miller C. A. The magic number seven plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, volume 13, pages 81–97, 1956.

[6] Roy B. Problems and methods with multiple objective functions. *Mathematical Programming*, 1(2):239–266, november 1971.

[7] Roy B. *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*, volume 12 of *Nonconvex Optimization and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[8] Saaty T.L. *The Analytic Hierarchy Process, Planning, Piority Setting, Resource Allocation*. McGraw-Hill, New york, 1980.

[9] Saaty T. L. Decision-making with the ahp: Why is the principal eigenvector necessary. *European Journal of Operational Research*, 145(1):85–91, 2003.

[10] Sen, P. and J. Bo Jang. Multiple Criteria Decision Support in Engineering Design. Springer, 1998.

[11] Spronk J. Hallerbach W. The relevance of MCDM for financial decisions. Report series Research in management ERS-2002-69-F&A, Erasmus Research Institute of Management (ERIM), Erasmus Universiteit Rotterdam, P.O. Box 1738, 3000 DR Rotterdam, The Netherlands, July 2002.

[12] Triantaphyllou E. *Multi-criteria decision making methods: a comparative study* volume 44 of *Applied Optimization*. Kluwer Academic Publisher, 2000.

[13] Tsoukiàs A. From decision theory to decision aiding methodology. Technical Report 2003-21, DIMACS, June 2003.

[14] Vincke P. *Multicriteria Decision-aid*. John Wiley & Sons, 1992.