Catégories Dérivées en Cohomologie ℓ-adique

par

Jean-Pierre JOUANOLOU

N° d'enregistrement

au C.N.R.S

A.0.3374

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT

ès SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

M. JOUANOLOU Jean-Pierre

pour obtenir le grade Docteur ès-Sciences

Sujet de thèse : Catégories Dérivées en Cohomologie ℓ-adique

soutenue le : 3 Juillet 1969 devant la Commission d'examen

MM. SAMUEL Président

GROTHENDIECK

VERDIER Examinateurs

DIXMIER

PREFACE

Description

TABLE DE MATIÈRES

§ I. — CATÉGORIES DES FAISCEAUX SUR UN IDÉOTOPE

2. Cas où l'objet final de X est quasicompact.

On se propose maintenant de donner un certain nombre de catégories équivalentes à $A-\mathrm{fsc}(X)$, lorsque l'objet final de X est quasicompact. Nous aurons besoin pour cela d'un certain nombre de lemmes techniques, dont la plupart n'utilisent pas cette hypothèse.

2.1. Soit (X,A,J) un idéotope. Étant donnés un objet M de $\underline{\mathrm{Hom}}(N^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$, et une application croissante $\gamma \geq \mathrm{id} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, on définit un nouveau système projectif $c_\gamma(M)$ en posant

$$c_\gamma(M)_n = M_{\gamma(n)} \quad (n \geq 0),$$

avec les morphismes de transition évidents. De plus, si γ et δ sont deux applications de ce type, avec $\delta \geq \gamma$, on a un morphisme évident de systèmes projectifs

$$c_\delta(M) \longrightarrow c_\gamma(M).$$

Ceci permet de définir une nouvelle catégorie, notée

$$\underline{\mathrm{Hom}}_1(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X), \quad \text{comme suit.}$$

(i) Ses objets sont ceux de $\underline{\mathrm{Hom}}(N^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$.

(ii) Si M et M' sont deux objets de $\underline{\mathrm{Hom}}(N^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$, l'ensemble des morphismes de M dans M' est

$$\mathrm{Hom}_1(M, M') = \varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}(c_\gamma(M), M'),$$

avec la loi de composition évidente.

Il est clair qu'un morphisme de $\underline{\mathrm{Hom}}(N^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$ définit un morphisme de $\underline{\mathrm{Hom}}_1(N^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$, d'où un foncteur "projection"

$$q : \underline{\mathrm{Hom}}(N^\circ, A-\mathrm{Mod}_X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_1(N^\circ, A-\mathrm{Mod}_X),$$

qui est une bijection sur les objets.

2.2. Soient maintenant M un objet de $\mathscr{E}(X,J)$ et $\gamma \geq \mathrm{id} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ une application croissante. On définit un nouvel objet $\chi_\gamma(M)$ de $\mathscr{E}(X,J)$, fonctoriel en M, par

$$(\chi_\gamma(M))_n = M_{\gamma(n)}/J^{n+1}M_{\gamma(n)} \quad (n \geq 0),$$

avec les morphismes de transition évidents. De plus, si δ est une application de même type, avec $\delta \geq \gamma$, on a un morphisme canonique

$$\chi_\delta(M) \longrightarrow \chi_\gamma(M).$$

Ceci permet de définir une nouvelle catégorie $\mathscr{E}_1(X,J)$ comme suit.

(i) Ses objets sont ceux de $\mathscr{E}(X,J)$.

(ii) Si M et N sont deux objets de $\mathscr{E}(X,J)$, l'ensemble des $\mathscr{E}_1(X,J)$-morphismes de M dans N est

$$\mathrm{Hom}_1(M,N) = \varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}(\chi_\gamma(M),N),$$

avec la loi de composition évidente.

De même que précédemment, on a un foncteur projection

$$q : \mathscr{E}(X,J) \longrightarrow \mathscr{E}_1(X,J).$$

Il est clair que la catégorie $\mathscr{E}_1(X,J)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Hom}}_1(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$ engendrée pas les A-faisceaux, et que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X) \arrow[r, "q"] & \underline{\mathrm{Hom}}_1(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X) \\
\mathscr{E}(X,J) \arrow[u, hook] \arrow[r, "q"] & \mathscr{E}_1(X,J), \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont les inclusions canoniques, est commutatif.

Enfin, on vérifie, comme dans (SGA5 V 2.4.1), que la famille des flèches canoniques du type $\chi_\gamma(M) \longrightarrow M$ permet un calcul de fractions à droite, ce qui permet d'identifier $\mathscr{E}_1(X,J)$ à la catégorie obtenue à partir de $\mathscr{E}(X,J)$ en inversant ces flèches.

Lemme **2.3**. — *La catégorie* $\underline{\mathrm{Hom}}_1(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$ *(resp.* $\mathscr{E}_1(X,J)$*) est abélienne et le foncteur* q *est exact.*

Preuve: Montrons tout d'abord l'assertion non respée. Il est évident que la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_1(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$ est additive et que le foncteur q rend inversibles toutes les flèches canoniques de la forme $c_\gamma(M) \longrightarrow M$. Si $u : P \longrightarrow Q$ est un élément de $\mathrm{Hom}_1(P,Q)$, alors u est la classe d'une flèche $f : c_\gamma(P) \longrightarrow Q$ et, en notant $c : c_\gamma(P) \longrightarrow P$ la flèche canonique, on a donc $u = q(f) \circ q(c)^{-1}$; par suite, toute flèche de $\underline{\mathrm{Hom}}_1(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$ est isomorphe à l'image par q d'une flèche de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$. Il en résulte que pour voir que $\underline{\mathrm{Hom}}_1(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$ est abélienne, il suffit de montrer que le foncteur q est exact. Soient donc P et

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

respectivement un objet et une suite exacte de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$.

Comme les foncteurs c_γ sont exacts et les limites inductives filtrantes de groupes abéliens sont exactes, les suites évidentes

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}(c_\gamma(P), M') \longrightarrow \varinjlim_{\gamma} (c_\gamma(P), M) \longrightarrow \varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}(c_\gamma(P), M'')$$

et

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}(c_\gamma(M''), P) \longrightarrow \varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}(c_\gamma(M), P) \longrightarrow \varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}(c_\gamma(M'), P)$$

sont exactes, d'où l'assertion. L'assertion respée se voit de façon analogue; en fait, on montre en même temps que le foncteur d'inclusion

$$\mathscr{E}_1(X,J) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_1(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$$

est exact

2.4. Soient P et Q deux objets de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$, $\gamma \geq \mathrm{id}$ une application croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et $f : c_\gamma(P) \longrightarrow Q$ un morphisme de systèmes projectifs. Désignant pour tout $n \in \mathbf{N}$ par ξ_n la classe de f_n dans $\varinjlim_m \mathrm{Hom}(P_m, Q_n)$, il est clair que l'ensemble des ξ_n ($n \in \mathbf{N}$) définit un élément de

$$\varprojlim_{n} \varinjlim_{m} \mathrm{Hom}(P_m, Q_n),$$

qui ne dépend que de la classe de f dans $\mathrm{Hom}_1(P,Q)$. On définit ainsi un foncteur

$$\rho : \underline{\mathrm{Hom}}_1(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X) \longrightarrow \mathrm{Pro}(A-\mathrm{Mod}_X),$$

d'où un foncteur

$$\delta : \mathscr{E}_1(X,J) \longrightarrow \mathrm{Pro}(A-\mathrm{Mod}_X),$$

obtenu par restriction de ρ à $\mathscr{E}_1(X,J)$.

Lemme **2.5**. — *Les foncteurs ρ et δ ci-dessus sont des injections sur les objets et sont pleinement fidèles.*

Preuve : Il suffit de le voir pour ρ. Dans ce cas, la seule assertion non tautologique est que ρ est pleinement fidèle. Soient donc P et Q deux objets de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$, et montrons que l'application canonique

$$\varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}(c_\gamma(P), Q) \longrightarrow \varprojlim_{n} \varinjlim_{m} \mathrm{Hom}(P_m, Q_n)$$

est bijective.

Elle est injective. Soient γ et γ' deux applications croissantes $\geq \mathrm{id}$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, et

$$f : c_\gamma(P) \longrightarrow Q \quad \text{et} \quad f' : c_{\gamma'}(P) \longrightarrow Q$$

deux morphismes ayant même image dans $\mathrm{Pro}\,\mathrm{Hom}(P,Q)$. Par hypothèse, pour tout entier $n \geq 0$, les morphismes f_n et f'_n définissent le même élément de $\varinjlim_m \mathrm{Hom}(P_m, Q_n)$, donc il existe un entier $\varphi(n) \geq \max(\gamma(n), \gamma'(n))$ tel que les composés

$$\begin{cases} P_{\varphi(n)} \xrightarrow{\mathrm{can}} P_{\gamma(n)} \xrightarrow{f_n} Q_n \\ P_{\varphi(n)} \xrightarrow{\mathrm{can}} P_{\gamma'(n)} \xrightarrow{f'_n} Q_n \end{cases}$$

soient égaux. Il est alors immédiat que l'application $\gamma'' : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ définie par

$$\gamma''(n) = \max_{n' \leq n} \delta(n')$$

est croissante supérieure à l'identité, et que pour tout $n \geq 0$ les composés

$$P_{\gamma''(n)} \xrightarrow{\mathrm{can}} P_{\gamma(n)} \xrightarrow{f_n} Q_n$$

et

$$P_{\gamma''(n)} \xrightarrow{\text{can}} P_{\gamma'(n)} \xrightarrow{f'_n} Q_n$$

sont égaux.

Elle est surjective. Soient donnés

a) Une application $\theta : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$.

b) Une application $\lambda : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ vérifiant

$$\lambda(j,k) \geq \max(\theta(j), \theta(k))$$

pour tout couple (j,k).

c) Pour tout entier j, un morphisme

$$\xi_j : P_{\theta(j)} \longrightarrow Q_j$$

tel que, dès que $k \geq j$, le diagramme évident

$$\begin{tikzcd}
 & P_{\theta(j)} \arrow[r, "\xi_j"] & Q_j \\
P_{\lambda(j,k)} \arrow[ur, "\text{can}"] \arrow[dr, "\text{can}"'] & & \\
 & P_{\theta(k)} \arrow[r, "\xi_k"'] & Q_k \arrow[uu, "\text{can}"']
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Il s'agit de trouver une application croissante $\gamma \geq \mathrm{id}$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ et un morphisme $f : c_\gamma(P) \longrightarrow Q$ tel que pour tout $j \in \mathbf{N}$, les morphismes f_j et ξ_j aient même classe dans

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}(P_i, Q_j).$$

On vérifie aisément que le couple (γ, f) défini par

$$\begin{cases} \gamma(j) = \sup_{k,l \leq j} \lambda(k,l) \\ f_j : P_{\gamma(j)} \xrightarrow{\text{can}} P_{\theta(j)} \xrightarrow{\xi_j} Q_j \end{cases}$$

répond à la question.

2.6. Supposons maintenant que l'objet final de X soit quasicompact. Il est clair que le foncteur $q : \mathscr{E}(X,J) \longrightarrow \mathscr{E}_1(X,J)$ envoie sur 0 les A-faisceaux essentiellement nuls, ou, ce qui renvient au même négligeables. D'après la propriété universelle des catégories abéliennes quotients (Thèse Gabriel III 1 Cor.2), il admet donc une factorisation unique

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}(X,J) \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\pi_X"'] & & \mathscr{E}_1(X,J) \\ & A-\mathrm{fsc}(X) \arrow[ur, "\overline{q}"'] & \end{tikzcd}$$

avec $\overline{q}$ un foncteur exact et π_X le foncteur canonique de passage au quotient.

Lemme **2.7**. — *Le foncteur $\overline{q}$ ci-dessus est un isomorphisme de catégories.*

Preuve : Tenant compte de l'interprétation de $\mathscr{E}_1(X,J)$ comme catégorie de fractions (2.2), il s'agit de voir que si C est une catégorie abélienne et

$$F : \mathscr{E}(X,J) \longrightarrow C$$

un foncteur exact, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) F annulle tout A-faisceau essentiellement nul.

(ii) F rend inversible toute flèche canonique $\chi_\gamma(M) \longrightarrow M$.

Si M est un A-faisceau essentiellement nul, il existe une application croissante $\gamma \geq \mathrm{id} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que la flèche canonique $\chi_\gamma(M) \longrightarrow M$ soit nulle, d'où (ii) $\Rightarrow$ (i). Prouvons (i) $\Rightarrow$ (ii).

Si P et Q sont définis par l'exactitude de la suite $0 \longrightarrow P \longrightarrow \chi_\gamma(M) \xrightarrow{\text{can}} M \longrightarrow Q \longrightarrow 0$, il est immédiat que les morphismes canoniques $\chi_\gamma(P) \longrightarrow P$ et $\chi_\gamma(Q) \longrightarrow Q$ sont nuls, d'où aussitôt l'assertion.

Remarque 2.7.1. Plus généralement, l'argument précédent montre, sans hypothèse sur X, que $\mathscr{E}_1(X,J)$ est la catégorie abélienne quotient de $\mathscr{E}(X,J)$ par la sous-catégorie, abélienne engendrée par les A-faisceaux essentiellement nuls. On en déduit grâce à la description des morphismes d'une catégorie abélienne quotient, que tout morphisme (resp. isomorphisme) de $A-\mathrm{fsc}(X)$ est localement l'image d'un morphisme de $\mathscr{E}(X,J)$.

Proposition **2.8**. — *Soit* (X,A,J) *un idéotope. On suppose que l'objet final de* X *est quasicompact. Alors le foncteur canonique*

$$\sigma \circ \overline{q} : A-\mathrm{fsc}(X) \longrightarrow \mathrm{Pro}(A-\mathrm{Mod}_X)$$

induit un isomorphisme de $A-\mathrm{fsc}(X)$ *sur la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Pro}(A-\mathrm{Mod}_X)$ *engendrée par les* A*-faisceaux.*

Preuve: Résulte immédiatement de (2.5) et (2.7).

Remarques 2.8.1. La proposition précédente s'applique notamment lorsque X est le topos ponctuel.

2.8.2. La preuve qu'on a donnée de (2.8) n'utilise pas le fait que la catégorie des pro-objets d'une catégorie abélienne, et il ne semble pas que l'utilisation de ce fait apporte des simplifications notables.

Soit X un topos localement noethérien (SGA4 VI 2.11).

On rappelle que la sous-catégorie pleine de X engendrée par les objets noethériens est stable par produits fibrés finis et que munissant C de la structure de site induite par la topologie de X, le foncteur canonique

$$X \longrightarrow \widetilde{C}$$

est une équivalence de catégories.

Lemme **2.9**. — *Soient* (X,A,J) *un idéotope, avec* X *un topos localement noethérien, et* E *et* F *deux* A*-faisceaux sur* X*. La restriction au site des objets noethériens de* X *du préfaisceau*

$$T \longrightarrow \mathrm{Hom}(E|T, F|T)$$

est un faisceau.

Preuve: On est ramené à voir que si T est un objet noethérien de X et $(T_i \longrightarrow T)_{i\in I}$ est un recouvrement *fini* de T par des objets noethériens, alors la suite canonique

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}_a(\chi_\gamma(E)|T, F|T) \longrightarrow \prod \varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}_a(\chi_\gamma(E)|T, F|T),$$

$$\prod_j \varinjlim_{\gamma} \mathrm{Hom}_a(\chi_\gamma(E)|T_i \times_T T_j, F|T_i \times_T T_j)$$

est exacte (2.7). Comme les produits finis sont des sommes directes et les limites inductives filtrantes de groupes abéliens sont exactes, l'assertion résulte de l'exactitude des suites canoniques

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_a(\chi_\gamma(E)|T, F|T) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}_a(\chi_\gamma(E)|T_i, F|T_i) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_a(\chi_\gamma(E)|T_i \times_T T_j, F|T_i \times_T T_j).$$