Catégories Dérivées en Cohomologie ℓ-adique

par

Jean-Pierre JOUANOLOU

N° d'enregistrement

au C.N.R.S

A.0.3374

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT

ès SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

M. JOUANOLOU Jean-Pierre

pour obtenir le grade Docteur ès-Sciences

Sujet de thèse : Catégories Dérivées en Cohomologie ℓ-adique

soutenue le : 3 Juillet 1969 devant la Commission d'examen

MM. SAMUEL Président

GROTHENDIECK

VERDIER Examinateurs

DIXMIER

PREFACE

Description

TABLE DE MATIÈRES

§ I. — CATÉGORIES DES FAISCEAUX SUR UN IDÉOTOPE

1. Généralités.

Définition **1.1.** — *On appelle* idéotope *un triple* (X,A,J) *formé d'un topos* X*, d'un anneau commutatif unifère* A *et d'un idéal propre* J *de* A*.*

On suppose donné dans la suite du paragraphe un idéotope (X,A,J). On note $A-\mathrm{Mod}_X$ la catégorie des faisceaux de A_X-Modules et

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$$

la catégorie abélienne des systèmes projectifs indexés par $\mathbf{N}$ de A_X-Modules.

Définition **1.2.** — *On appelle* (A,J)-faisceau *sur* X*, ou s'il n'y a pas de confusion possible* A-faisceau *sur* X*, un système projectif*

$$F = (F_n, u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}, m\geq n}$$

de A_X*-Modules, vérifiant*

$$J^{n+1}F_n = 0$$

pour tout entier $n \geq 0$*. On note* $\mathscr{E}(X,J)$ *la sous-catégorie, abélienne, pleine de* $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$ *engendrée par les* A*-faisceaux.*

Pour des raisons qui apparaîtront par la suite, la catégorie $\mathscr{E}(X,J)$ ne mérite pas le nom de catégorie des A-faisceaux sur X ; c'est seulement une catégorie quotient de la précédente que nous baptiserons ainsi. Aussi, pour éviter le risque de confusion, nous arrivera-t-il, étant donnés deux A-faisceaux E et F, de noter

$$\mathrm{Hom}_a(E,F)$$

(a pour anodin) l'ensemble des $\mathscr{E}(X,J)$-morphismes de E dans F.

Notons pour tout objet T de X par $\mathbf{T}$, ou même T s'il n'y a pas de confusion possible, le topos X/T. Le foncteur restriction pour les faisceaux de A-Modules induit de façon évidente un foncteur restriction

$$\mathscr{E}(X,J) \longrightarrow \mathscr{E}(T,J)$$

$$E \mapsto E|T.$$

Proposition-définition **1.4.** — *Soit* $E = (E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *un* A*-faisceau sur* X*:*

1) *On dit que E est* essentiellement nul *s'il est nul en tant que pro-objet, ce qui revient à dire que pour tout entier $n \geq 0$, il existe un entier $p \geq 0$ tel que le morphisme de transition*

$$E_{n+p} \longrightarrow E_n$$

soit nul.

2) *On dit que E est* négligeable *s'il vérifie l'une des reltions équivalentes suivantes :*

   (i) *Il existe un recouvrement $(T_i \longrightarrow e_X)_{i \in I}$ de l'objet final e_X de X tel que les A-faisceaux $E|T_i$ soient essentiellement nuls.*

   (ii) *Idem, mais en supposant de plus que les T_i sont des ouverts de X.*

Preuve: Pour voir l'équivalence de (i) et (ii), il suffit d'observer que pour tout $i \in I$, le faisceau image U_i de T_i par le morphisme canonique $T_i \longrightarrow e_X$ est tel que le morphisme restriction

$$\mathbf{U}_i \longrightarrow \mathbf{T}_i$$

soit fidèle.

Il est clair que lorsque l'objet final de X est quasicompact (SGA4 VI 1.1), il revient au même pour un A-faisceau de dire qu'il est essentiellement nul ou qu'il est négligeable. Il est par ailleurs immédiat que la sous-catégorie pleine

(1.4.1) $$N(X,J) \quad \text{(ou plus simplement } N_X\text{)}$$

de $\mathscr{E}(X,J)$ engendré par les A-faisceaux négligeables est *épaisse* dans $\mathscr{E}(X,J)$.

Définition **1.5**. — *Soit (X,A,J) un idéotope. On appelle* catégorie *des* (A,J)-faisceaux *(ou A-faisceaux s'il n'y a pas de confusion possible) sur X et on note*

$$(A,J)-\mathrm{fsc}(X) \quad \textit{(ou plus simplement } A-\mathrm{fsc}(X))$$

la catégorie abélienne quotient (thèse Gabriel III.1)

$$\mathscr{E}(X,J)/N_X.$$

1.6. Soit T un objet de X. Il est clair que le foncteur restriction (1.3) est exact et envoie N_X dans N_T, d'où par passage au quotient un foncteur exact, appelé encore *restriction*,

$$r_{T,X} : A-\text{fsc}(X) \longrightarrow A-\text{fsc}(T). \tag{1.6.1}$$

Soient maintenant T et T' deux objets de X et $f : T \longrightarrow T'$ un morphisme. Se plaçant dans le topos $\mathbf{T}'$, on déduit de (1.6.1) un foncteur exact

$$f^* : A-\text{fsc}(T') \longrightarrow A-\text{fsc}(T), \tag{1.6.2}$$

vérifiant les propriétés de transitivité habituelles.

Ces remarques étant faites, nous utiliserons dans la suite sans plus d'explications le langage local pour les A-faisceaux.

Proposition **1.7**. — *Les propriétés suivantes sont de nature locale pour la topologie de X.*

(i) La propriété pour un A-faisceau d'être nul, i.e. isomorphe au système projectif nul.

(ii) La propriété pour une suite

$$E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E''$$

de A-faisceaux d'être exacte.

(iii) La propriété pour un morphisme $u : E \longrightarrow F$ de A-faisceaux d'être un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme).

(iv) La propriété pour deux morphismes $u, v : E \rightrightarrows F$ d'être égaux.

Preuve : L'assertion (i) est immédiate. On en déduit (ii) en l'appliquant successivement à $\text{Im}(v \circ u)$ et à $\text{Ker}(v)/\text{Im}(u)$. L'assertion (iii) est un cas particulier de (ii). Enfin (iv) s'obtient en appliquant (i) à $\text{Im}(v - u)$.

Corollaire **1.7.1**. — *Soient T et T' deux objets de X et $f : T \longrightarrow T'$ un épimorphisme. Le foncteur*

$$f^* : A-\text{fsc}(T') \longrightarrow A-\text{fsc}(T)$$

est fidèle.

Preuve: Appliquer 1.7 (i) au topos $\mathbf{T}'$.

Corollaire **1.7.2**. — *Soient E et F deux A-faisceaux sur X. Lorsque T parcourt les objets de X, le préfaisceau*

$$T \mapsto \mathrm{Hom}(E|T, F|T)$$

est séparé.

Preuve: Simple traduction de 1.7 (iv).

Remarque 1.7.3. En général, le préfaisceau précédent n'est pas un faisceau. Nous verrons toutefois qu'il en est ainsi, à peu de choses près, lorsque le topos X est noethérien (SGA4 VI 2.11), ou lorsque E est de type J-adique (3).