Дифференциальные уравнения
Лекция №1.

Григорий Матюхин

8 ноября 2022 г.

Содержание

1 Лекция

1.1 Задача №1.1(a)

Условие Точка движется по оси x со скоростью v.
Найти возможные законы ее движения. Определить среди этих законов тот, для которого $x = 0$ при $t = 0$, а также тот, для которого $x = 1$ при $t = 1$.

Решение

$$x = x(t)$$
$$x'(t) = v(t) \tag{1}$$
$$x(t) = \int v(t)dt + C$$

Получили уравнение возможных законов движения для точки.

Если $v = 3$**:**

$$x(t) = \int 3dt + C$$
$$x(t) = 3\int dt$$
$$x(t) = 3t + C \tag{2}$$

Из 2, $x = 0$ при $t = 0$:

$$0 = 3 \cdot 0 + C$$
$$0 = 0 + C$$
$$C = 0$$
$$x(t) = 3t$$

Из 2, $x = 1$ при $t = 1$:

$$1 = 3 \cdot 1 + C$$
$$1 = 3 + C$$
$$C = -2$$
$$x(t) = 3t - 2$$

Если $v = 2t$: Из 1:

$$x(t) = \int 2tdt$$

$$x(t) = 2\int tdt$$

$$x(t) = 2\frac{t^2}{2} + C$$

$$x(t) = t^2 + C \tag{3}$$

Из 3, $x = 0$ при $t = 0$:

$$0 = 0^2 + C$$

$$0 = 0 + C$$

$$C = 0$$

$$x(t) = t^2$$

Из 3, $x = 1$ при $t = 1$:

$$1 = 1^2 + C$$

$$1 = 1 + C$$

$$C = 0$$

$$x(t) = t^2$$

2 Семинар

2.1 Задачи №1.2, 1.4

Условие Проверить, что данная функция является решением соответствующего дифференциального уравнения.

Решение

1.2:
$y = \cos 3x, y' + 3\sin 3x = 0$

$$y' + 3\sin 3x = 0$$

$$y' = -3\sin 3x$$

$$y = \int -3\sin 3x dx$$

$$y = -3\int \sin 3x dx$$

Заменим $u = 3x$ и $du = 3dx$

$$y = -3\int (-\frac{1}{3})\sin u du$$

$$y = \int \sin u du$$

$$y = \cos u$$

Обратная замена:

$$y = \cos 3x$$

Верно

1.4:
$y = 3^x + x^2, x\frac{dy}{dx} - 2y = 3^x(-x\ln 3 + 2)$

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = -3^x(-x\ln 3 + 2)$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x}$$
$$\frac{\frac{dy}{dx}}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x^3}$$

Заменим $-\frac{2}{x^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{x^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x^3}$$

Применим $f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{fx} = \frac{d}{dx}(fg)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x^3}$$
$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) dx = \int -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x^3} dx$$
$$\frac{y}{x^2} = \int -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x^3} dx$$
$$\frac{y}{x^2} = \int \left(\frac{3^x \ln 3}{x^2} - \frac{2 \cdot 3^x}{x^3}\right) dx$$
$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{3^x \ln 3}{x^2} dx - \int \frac{2 \cdot 3^x}{x^3} dx$$

Интегрируем $\int \frac{2\cdot 3^x}{x^3} dx$ по частям:

$$\int f dg = fg - \int g df,$$

где $f = 3^x$, $dg = -\frac{2}{x^3}dx$, $df = 3^x \ln 3 dx$, $g = \frac{1}{x^2}$

$$\frac{y}{x^2} = \frac{3^x}{x^2} - \int \frac{3^x \ln 3}{x^2} dx + \int \frac{3^x \ln 3}{x^2} dx$$
$$\frac{y}{x^2} = \frac{3^x}{x^2} + C$$
$$y = 3^x + Cx^2$$

Верно при $C = 1$

2.2 Задачи №1.7, 1.15

Условие Проверить, что данная функция является решением соответствующего дифференциального уравнения и найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, там, где это требуется.

Решение

1.7:
$y = \ln(Cx), y' - \frac{1}{x} = 0, y(1) = \ln 2$

$$y' - \frac{1}{x} = 0$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \int \frac{1}{x} dx$$

$$y = \ln x + C$$

$$y = \ln x + C$$

Частное решение:
при $y(1) = \ln 2$

$$\ln 2 = \ln 1 + C$$

$$C = \ln 2$$

1.15:
$y = \frac{C \cos x}{1 - C \cos x}, y' \cos x + y(1+y) \sin x = 0$

$$y' \cos x + y(1+y) \sin x = 0$$

$$y' = -\frac{y(1+y) \sin x}{\cos x}$$

$$y' = -y(1+y) \tan x$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y(1+y)} = -\tan x$$

$$\int \frac{\frac{dy}{dx}}{y(1+y)} dx = \int -\tan x dx$$

$$\int \frac{\frac{dy}{dx}}{y(1+y)} dx = \ln(\cos x) + C$$

Для $\int \frac{\frac{dy}{dx}}{y(1+y)} dx$ заменим $u = y, du = y'(x)dx$:

$$\int \frac{1}{u(u+1)} du = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u+1} du = \ln(\cos x) + C$$

$$\ln(u) + C - \int \frac{1}{u+1} du = \ln(\cos x) + C$$

Для $\int \frac{1}{u+1} du$ заменим $s = u+1, ds = du$:

$$\ln(u) + C - \int \frac{1}{s} ds = \ln(\cos x) + C$$

$$\ln(u) + C - \ln(s) + C = -\ln(\cos x) + C$$

Обратная замена:

$$\ln(u) + C - \ln(u+1) + C = \ln(\cos x) + C$$

Обратная замена:

$$\ln(y) + C - \ln(y+1) = \ln(\cos x)$$

$$\ln(y) + C + \ln\left(\frac{1}{y+1}\right) = \ln(\cos x)$$

$$C + \ln\left(\frac{y}{y+1}\right) = \ln(\cos x)$$

$$\ln\left(\frac{y}{y+1}\right) = \ln(\cos x) - C$$

$$\frac{y}{y+1} = e^{-C}\cos x$$
$$e^{C}y = \cos x(y+1)$$
$$e^{C}y = y\cos x + \cos x$$
$$y(e^{C} - \cos x) = \cos x$$
$$y = \frac{\cos x}{e^{C} - \cos x}$$

Верно при $C = 0$

2.3 Задачи №1.37, 1.38, 1.45, 1.46

Условие Составить дифференциальное уравнение данного семейства кривых.

Решение

1.37:
$\tan y = Ce^{-x^2}$
$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}Ce^{-x^2}$$
$$\frac{y'}{\cos^2 y} = C\frac{d}{dx}e^{-x^2}$$

Замена $\frac{d}{dx}e^{-x^2} = \frac{de^u}{du}\frac{du}{dx}$, где $u = -x^2$ и $\frac{d}{du}e^u = e^u$:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = Ce^u(\frac{d}{dx} - x^2)$$

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = -Ce^u \cdot 2x$$

Обратная замена:
$$\frac{y'}{\cos^2 y} = -2xCe^{-x^2} \tag{4}$$

Найдем из условия значение C:

$$C = e^{x^2}\tan y$$

Подставим значение C в 4:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = -2x \cdot \tan y$$

$$y' = -2x \tan y \cos^2 y$$

$$y' = -2x \sin y \cos y$$

$$y' = -x \sin 2y$$

$$y' + x \sin 2y = 0$$

1.38:
$y = Cx^2 - x$

$$y' = \frac{d}{dx}(Cx^2 - x)$$

$$y' = \frac{d}{dx}(Cx^2 - x)$$

$$y' = \frac{d}{dx}Cx^2 - \frac{d}{dx}x$$

$$y' = C2x - 1 \tag{5}$$

Найдем из условия значение C:

$$C = \frac{y - x}{x^2}$$

Подставим значение C в 5:

$$y' = \frac{y - x}{x^2}2x - 1$$

$$y' = 2\frac{y - x}{x} - 1$$

$$y' - 2\frac{y - x}{x} + 1 = 0$$

1.45:
$(y-C)^2=\frac{1}{x}$

$$(y-C)^2=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(y-C)^2=\frac{d}{dx}\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(y-C)^2=-x^{-2}$$

Замена $\frac{d}{dx}(y-C)^2=\frac{du^2}{du}\frac{du}{dx}$, где $u=y-C$ и $\frac{d}{du}u^2=2u$:

$$2u\left(\frac{d}{dx}(u-C)\right)=-x^{-2}$$

$$2u\left(\frac{d}{dx}u-\frac{d}{dx}C\right)=-x^{-2}$$

Обратная замена:

$$2(y-C)\frac{d}{dx}(y-C)=-x^{-2}$$

$$2(y-C)\left(\frac{d}{dx}y-\frac{d}{dx}C\right)=-x^{-2}$$

$$2(y-C)y'=-x^{-2}$$

$$y'=\frac{-x^{-2}}{2(y-C)} \tag{6}$$

Найдем из условия значения C:

$$C_1=y-\frac{1}{\sqrt{x}}, x\neq 0$$

$$C_2=y+\frac{1}{\sqrt{x}}, x\neq 0$$

Подставим значения C в 6:

C_1**:**

$$y' = \frac{-x^{-2}}{2(y - y + \frac{1}{\sqrt{x}})}, x \neq 0$$

$$y' = \frac{-x^{-2}}{2\frac{1}{\sqrt{x}}}, x \neq 0$$

$$y' = -\frac{1}{2x^{3/2}}, x \neq 0$$

$$y' + \frac{1}{2x^{3/2}} = 0, x \neq 0$$

C_2**:**

$$y' = \frac{-x^{-2}}{2(y - y - \frac{1}{\sqrt{x}})}, x \neq 0$$

$$y' = \frac{-x^{-2}}{-2\frac{1}{\sqrt{x}}}, x \neq 0$$

$$y' = \frac{1}{2x^{3/2}}, x \neq 0$$

$$y' - \frac{1}{2x^{3/2}} = 0, x \neq 0$$

1.46:
$x^2 + 2x - (y - C)^2 = 2$

$$x^2 + 2x - (y - C)^2 = 2$$

$$x^2 + 2x - 2 = (y - C)^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2x - 2) = \frac{d}{dx}(y - C)^2$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}2x - \frac{d}{dx}2 = \frac{d}{dx}(y - C)^2$$

$$2x + 2 = \frac{d}{dx}(y - C)^2$$

Замена $\frac{d}{dx}(y - C)^2 = \frac{du^2}{du}\frac{du}{dx}$, где $u = y - C$ и $\frac{d}{du}u^2 = 2u$:

$$2x + 2 = 2u\frac{d}{dx}(y - C)$$

$$2x + 2 = 2u\left(\frac{d}{dx}y - \frac{d}{dx}C\right)$$
$$2x + 2 = 2uy'$$

Обратная замена:

$$2x + 2 = 2(y - C)y'$$
$$y' = \frac{x-1}{(y-C)} \tag{7}$$

Найдем из условия значения C:

$$C_1 = y - \sqrt{x^2 + 2x - 2}$$
$$C_1 = y + \sqrt{x^2 + 2x - 2}$$

Подставим значения C в 7:

C_1**:**

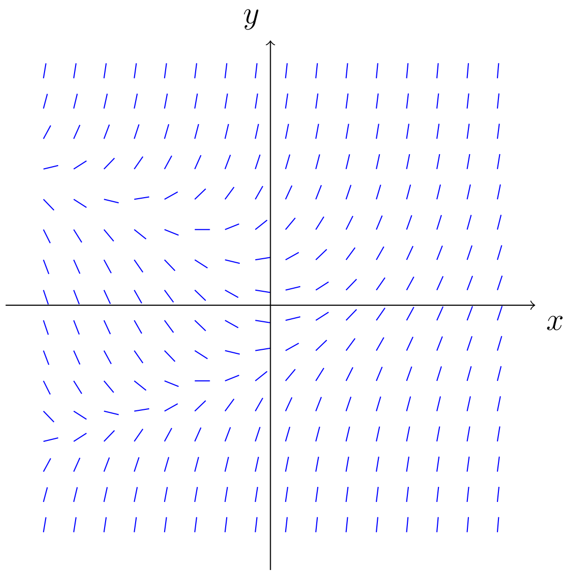
$$y' = \frac{x-1}{(y - y + \sqrt{x^2 + 2x - 2})}$$
$$y' = \frac{x-1}{(\sqrt{x^2 + 2x - 2})}$$
$$y' - \frac{x-1}{(\sqrt{x^2 + 2x - 2})} = 0$$

C_2**:**

$$y' = \frac{x-1}{(y - y - \sqrt{x^2 + 2x - 2})}$$
$$y' = \frac{x-1}{(-\sqrt{x^2 + 2x - 2})}$$
$$y' - \frac{x-1}{(-\sqrt{x^2 + 2x - 2})} = 0$$

2.4 Задача №1.53(a)

Условие Построить приближенно интегральные кривые уравнения $y' = x + y^2$



Интегральные кривые для $y' = x + y^2$.

3 Домашняя работа

3.1 Задачи №1.1 (в, г)

Условие Точка движется по оси x со скоростью v.
Найти возможные законы ее движения. Определить среди этих законов тот, для которого $x = 0$ при $t = 0$, а также тот, для которого $x = 1$ при $t = 1$.

Решение Подробное решение: 1

Если $v = \cos t$ **Из 1:**

$$x(t) = \int \cos t dt$$

$$x(t) = \sin t + C \tag{8}$$

Из 8, $x = 0$ при $t = 0$:

$$0 = \sin 0 + C$$

$$0 = 0 + C$$

$$C = 0$$

$$x(t) = \sin t$$

Из 8, $x = 1$ при $t = 1$:

$$1 = \sin 1 + C$$

$$C = 1 - \sin 1$$

$$x(t) = \sin t + 1 - \sin 1$$

Если $v = e^t$ **Из 1:**

$$x(t) = \int e^t$$

$$x(t) = \sin t + C \tag{9}$$

Из 9, $x = 0$ при $t = 0$:

$$0 = e^0 + C$$

$$0 = 1 + C$$

$$C = -1$$

$$x(t) = e^t - 1$$

Из 9, $x = 1$ при $t = 1$:

$$1 = e^1 + C$$

$$1 = e + C$$

$$C = 1 - e$$

$$x(t) = e^t - 1 + e$$

3.2 Задачи №1.6, 1.9, 1.12, 1.13, 1.14

Условие Проверить, что данная функция является решением соответствующего дифференциального уравнения и найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, там, где это требуется.

Решение

1.6:
$y = Cx^2 - x, y' = 1 + \frac{2y}{x}, y(1) = 1$

$$y' = 1 + \frac{2y}{x}$$

$$y' - \frac{2y}{x} = 1$$

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

Замена $-\frac{2}{x^3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^2}$:

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{d}{dx}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{x^2} - \frac{d}{dx}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

Применим $f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{fx} = \frac{d}{dx}(fg)$:

$$\frac{d}{dx}\frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{d}{dx}\frac{y}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}dx$$
$$\frac{y}{x^2} = -x^{-1} + C$$
$$\frac{y}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$
$$y = -x + Cx^2$$
$$y = Cx^2 - x$$

Верно при $C = 2$

1.9:
$y = xe^{Cx+1}, xy' = y\ln\frac{y}{x}, y(1) = e^3$

$$xy' = y\ln\frac{y}{x}$$

Пусть $y = xv(x)$, тогда $y' = xv(x)' + v(x)$

$$x(xv(x)' + v(x)) = x\ln(xv(x))v(x)$$
$$v(x)' = \frac{\ln(xv(x))v(x) - v(x)}{x}$$
$$\frac{v(x)'}{\ln(xv(x))v(x) - v(x)} = \frac{1}{x}$$
$$\int \frac{v(x)'}{\ln(xv(x))v(x) - v(x)}dx = \int \frac{1}{x}dx$$
$$\ln(\ln v(x) - 1) = \ln(x) + C$$
$$v(x) = e^{e^C x + 1}$$
$$v(x) = e^{Cx+1}$$
$$y = xe^{Cx+1}$$

Верно при $C = 3$

1.12:
$y = \frac{C}{x^2-1}, 2xy = (1-x^2)y', y(3) = 1$

$$2xy = (1-x^2)y'$$

$$y' = -\frac{2xy}{x^2+1}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{y'}{y}dx = \int -\frac{2x}{x^2+1}dx$$

Для $\int \frac{y'}{y}dx$ заменим $u = y, du = y'dx$:

$$\int \frac{y'}{y}dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{u}du \Leftrightarrow \ln u + C \Leftrightarrow \ln y + C$$

Для $\int \frac{y'}{y}dx$ заменим $s = x^2+1, ds = 2xdx$:

$$\int \frac{y'}{y}dx \Leftrightarrow -2 \cdot \frac{1}{2}\int \frac{1}{s}ds \Leftrightarrow -\int \frac{1}{s}ds \Leftrightarrow -\ln s + C \Leftrightarrow -\ln(x^2+1) + C$$

Получаем:

$$\ln y = -\ln(x^2+1) + C$$

$$e^{\ln y} = e^{-\ln(x^2+1)+C}$$

$$y = e^{-\ln(x^2+1)} \cdot e^C$$

$$y = \frac{1}{e^{\ln(x^2+1)}} \cdot e^C$$

$$y = \frac{1}{x^2+1} \cdot e^C$$

Упростим константу

$$y = \frac{C}{x^2+1}$$

Верно при $C = 10$

1.13:
$y = 1 + \frac{C}{x}, x(y+1)y' = 1 - y^2, y(1) = 2$

$$x(y+1)y' = 1 - y^2$$

$$x(y+1)y' = (1-y)(1+y)$$

$$(y+1)(xy' - 1 + y) = 0$$

Решим $y + 1 = 0$ и $xy' - 1 + y = 0$ отдельно:

$y + 1 = 0$**:**

$$y + 1 = 0$$

$$y = -1$$

$xy' - 1 + y = 0$**:**

$$xy' - 1 + y = 0$$

$$y' = \frac{1-y}{x}$$

$$\frac{y'}{1-y} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{y'}{1-y} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

Для $\int \frac{y'}{1-y} dx$ заменим $u = 1 - y, du = -y'$:

$$\int \frac{y'}{1-y} dx \Leftrightarrow -\int \frac{1}{u} du \Leftrightarrow -\ln u + C \Leftrightarrow -\ln(1-y) + C$$

Получаем:

$$-\ln(1-y) = \ln x + C$$

$$\ln(1-y) = -\ln x - C$$

$$e^{\ln(1-y)} = e^{-\ln x - C}$$

$$1 - y = e^{-\ln x} \cdot e^{-C}$$

$$1 - y = \frac{1}{x} \cdot e^{-C}$$

Упростим константу
$$1 - y = \frac{C}{x}$$
$$y = -\frac{C}{x} + 1$$
Верно при $C = -1$

1.14:
$y = -\lg(C - 10^x), y' = 10^{x+y}$
$$y' = 10^{x+y}$$
$$y' \cdot 10^{-y} = 10^x$$
$$\int y' \cdot 10^{-y} dx = \int 10^x dx$$
$$\int y' \cdot 10^{-y} dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C_1$$
Замена $u = -y, du = -y'dx$:
$$-\int 10^u du = \frac{10^x}{\ln 10} + C_1$$
$$-\frac{10^u}{\ln 10} + C_2 = \frac{10^x}{\ln 10} + C_1$$
$$-\frac{10^{-y}}{\ln 10} + C_2 = \frac{10^x}{\ln 10} + C_1$$
Упростим константы
$$-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + C$$
$$10^{-y} = -\ln 10 \cdot \left(\frac{10^x}{\ln 10} + C\right)$$
$$10^{-y} = -10^x - C \ln 10$$
$$\lg 10^{-y} = \lg(-10^x - C \ln 10)$$
$$-y = \lg(-10^x - C \ln 10)$$
Упростим константу
$$-y = \lg(C - 10^x)$$
$$y = -\lg(C - 10^x)$$
Верно

3.3 Задачи №1.32, 1.36, 1.40, 1.42, 1.43, 1.50, 1.52

Условие Составить дифференциальное уравнение данного семейства кривых.

Решение

1.32:
$y = Ce^x$

$$\begin{aligned} y &= Ce^x \\ \frac{d}{dx}y &= \frac{d}{dx}Ce^x \\ y' &= Ce^x \end{aligned} \tag{10}$$

Найдем из условия значения C:

$$C = \frac{y}{e^x}$$

Подставим в 10:

$$y' = \frac{y}{e^x}e^x$$

$$y' = y$$

$$y' - y = 0$$

1.36:
$x^3 = C(x^2 - y^2)$

$$x^3 = C(x^2 - y^2)$$

$$x^3 = Cx^2 - Cy^2$$

$$x^3 - Cx^2 = -Cy^2$$

$$Cy^2 = Cx^2 - x^3$$

$$\frac{d}{dx}Cy^2 = \frac{d}{dx}(Cx^2 - x^3)$$

$$2yy' = \frac{d}{dx}(Cx^2 - x^3)$$

$$2yy' = \frac{d}{dx}Cx^2 - \frac{d}{dx}x^3$$

$$2yy' = 2Cx - 3x^2 \tag{11}$$

Найдем из условия значения C:

$$C = \frac{x^3}{x^2 - y^2}$$

Подставим в 11:

$$2yy' = 2\frac{x^3}{x^2 - y^2}x - 3x^2$$

Лень упрощать

1.40:
$y = (x - C)^2$

$$y = (x - C)^2$$
$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}(x - C)^2$$
$$y' = 2(x - C)\frac{d}{dx}(x - C)$$
$$y' = 2(x - C) \tag{12}$$

Найдем из условия значения C:

$$C_1 = x - \sqrt{C}$$

$$C_1 = x + \sqrt{C}$$

Подставим значения C в 12:

C_1**:**

$$y' = 2(x - x + \sqrt{C})$$
$$y' = 2\sqrt{C}$$

C_2**:**

$$y' = 2(x - x - \sqrt{C})$$
$$y' = -2\sqrt{C}$$

1.42:
$(x - C)^2 + y^2 = 1$

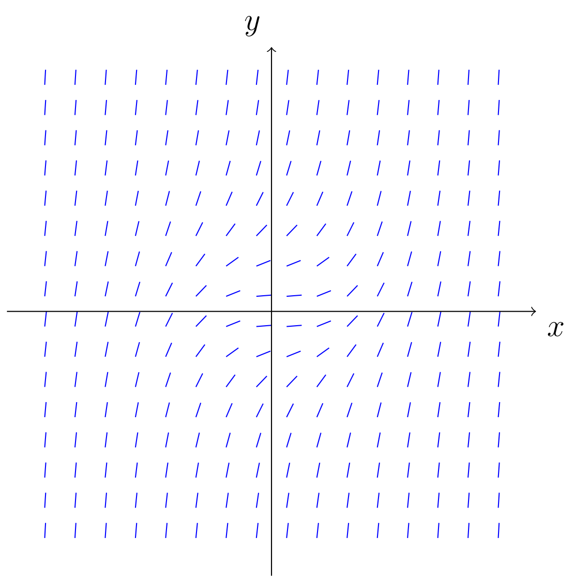
1.43:
$x^2 + (y - C)^2 = 1$

1.50:
$x^2 = (C + y)e^y$

1.52:
$y = C(x - C)^2$

3.4 Задача №1.53(б)

Условие Построить приближенно интегральные кривые уравнения $y' = x^2 + y^2$



Интегральные кривые для $y' = x^2 + y^2$.