Дифференциальные уравнения
Лекция №1.

Григорий Матюхин

8 ноября 2022 г.

Содержание

1 Лекция

1.1 Задача №1.1

Условие Точка движется по оси x со скоростью $v = 3$.
Найти возможные законы ее движения. Определить среди этих законов тот, для которого $x = 0$ при $t = 0$, а также тот, для которого $x = 1$ при $t = 1$.

Решение

$$x = x(t)$$

$$x'(t) = v(t)$$

$$x(t) = \int v(t)dt + C \tag{1}$$

Получили уравнение возможных законов движения для точки.

Если $v = 3$:

$$x(t) = \int 3dt + C$$

$$x(t) = 3\int dt + C$$

$$x(t) = 3t + C \tag{2}$$

Из 2, $x = 0$ при $t = 0$:

$$0 = 3 \cdot 0 + C$$

$$0 = 0 + C$$

$$C = 0$$

$$x(t) = 3t$$

Из 2, $x = 1$ при $t = 1$:

$$1 = 3 \cdot 1 + C$$

$$1 = 3 + C$$

$$C = -2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

Если $v = 2t$**:** Из 1:

$$x(t) = \int 2tdt + C$$

$$x(t) = 2\int tdt + C$$

$$x(t) = 2\frac{t^2}{2} + C$$

$$x(t) = t^2 + C \tag{3}$$

Из 3, $x = 0$ при $t = 0$:

$$0 = 0^2 + C$$

$$0 = 0 + C$$

$$C = 0$$

$$x(t) = t^2$$

Из 3, $x = 1$ при $t = 1$:

$$1 = 1^2 + C$$

$$1 = 1 + C$$

$$C = 0$$

$$x(t) = t^2$$

2 Семинар

2.1 Задачи №1.2, 1.4

Условие Проверить, что данная функция является решением соответствующего дифференциального уравнения.

Решение

1.2:
$y = \cos 3x, y' + 3\sin 3x = 0$

$$y' + 3\sin 3x = 0$$

$$y' = -3\sin 3x$$

$$y = \int -3\sin 3x dx$$

$$y = -3\int \sin 3x dx$$

Заменим $u = 3x$ и $du = 3dx$

$$y = -3\int (-\frac{1}{3})\sin u du$$

$$y = \int \sin u du$$

$$y = \cos u$$

Обратная замена:

$$y = \cos 3x$$

Верно

1.4:
$y = 3^x + x^2, x\frac{dy}{dx} - 2y = 3^x(-x\ln 3 + 2)$

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = -3^x(-x\ln 3 + 2)$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x}$$
$$\frac{\frac{dy}{dx}}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x^3}$$
Заменим $-\frac{2}{x^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{x^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x^3}$$

Применим $f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{fx} = \frac{d}{dx}(fg)$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x^3}$$
$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) dx = \int -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x^3} dx$$
$$\frac{y}{x^2} = \int -\frac{3^x(-x\ln 3 + 2)}{x^3} dx$$
$$\frac{y}{x^2} = \int \left(\frac{3^x \ln 3}{x^2} - \frac{2 \cdot 3^x}{x^3}\right) dx$$
$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{3^x \ln 3}{x^2} dx - \int \frac{2 \cdot 3^x}{x^3} dx$$
Интегрируем $\int \frac{2\cdot 3^x}{x^3} dx$ по частям:

$$\int f dg = fg - \int g df,$$

где $f = 3^x$, $dg = -\frac{2}{x^3}dx$, $df = 3^x \ln 3 dx$, $g = \frac{1}{x^2}$

$$\frac{y}{x^2} = \frac{3^x}{x^2} - \int \frac{3^x \ln 3}{x^2} dx + \int \frac{3^x \ln 3}{x^2} dx$$

$$\frac{y}{x^2} = \frac{3^x}{x^2} + C$$
$$y = 3^x + Cx^2$$

Верно при $C = 1$

2.2 Задачи №1.7, 1.15

Условие Проверить, что данная функция является решением соответствующего дифференциального уравнения и найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию, там, где это требуется.

Решение

1.7:
$y = \ln(Cx), y' - \frac{1}{x} = 0, y(1) = \ln 2$

$$y' - \frac{1}{x} = 0$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \int \frac{1}{x} dx$$

$$y = \ln x + C$$

$$y = \ln x + C$$

Частное решение:
при $y(1) = \ln 2$

$$\ln 2 = \ln 1 + C$$

$$C = \ln 2$$

1.15:
$y = \frac{C \cos x}{1 - C \cos x}, y' \cos x + y(1+y) \sin x = 0$

$$y' \cos x + y(1+y) \sin x = 0$$

$$y' = -\frac{y(1+y) \sin x}{\cos x}$$

$$y' = -y(1+y) \tan x$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y(1+y)} = -\tan x$$

$$\int \frac{\frac{dy}{dx}}{y(1+y)} dx = \int -\tan x dx$$

$$\int \frac{\frac{dy}{dx}}{y(1+y)} dx = \ln(\cos x) + C$$

Для $\int \frac{\frac{dy}{dx}}{y(1+y)} dx$ заменим $u = y, du = y'(x)dx$:

$$\int \frac{1}{u(u+1)} du = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u+1} du = \ln(\cos x) + C$$

$$\ln(u) + C - \int \frac{1}{u+1} du = \ln(\cos x) + C$$

Для $\int \frac{1}{u+1} du$ заменим $s = u + 1, ds = du$:

$$\ln(u) + C - \int \frac{1}{s} ds = \ln(\cos x) + C$$

$$\ln(u) + C - \ln(s) + C = -\ln(\cos x) + C$$

Обратная замена:

$$\ln(u) + C - \ln(u+1) + C = \ln(\cos x) + C$$

Обратная замена:

$$\ln(y) + C - \ln(y+1) = \ln(\cos x)$$

$$\ln(y) + C + \ln\left(\frac{1}{y+1}\right) = \ln(\cos x)$$

$$C + \ln\left(\frac{y}{y+1}\right) = \ln(\cos x)$$

$$\ln\left(\frac{y}{y+1}\right) = \ln(\cos x) - C$$

$$\frac{y}{y+1} = e^{-C}\cos x$$
$$e^{C}y = \cos x(y+1)$$
$$e^{C}y = y\cos x + \cos x$$
$$y(e^{C} - \cos x) = \cos x$$
$$y = \frac{\cos x}{e^{C} - \cos x}$$

Верно при $C = 0$

2.3 Задачи №1.37, 1.38, 1.45, 1.46

Условие Составить дифференциальное уравнение данного семейства кривых.

Решение

1.37:
$\tan y = Ce^{-x^2}$
$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}Ce^{-x^2}$$
$$\frac{y'}{\cos^2 y} = C\frac{d}{dx}e^{-x^2}$$

Замена $\frac{d}{dx}e^{-x^2} = \frac{de^u}{du}\frac{du}{dx}$, где $u = -x^2$ и $\frac{d}{du}e^u = e^u$:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = Ce^u(\frac{d}{dx} - x^2)$$

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = -Ce^u \cdot 2x$$

Обратная замена:
$$\frac{y'}{\cos^2 y} = -2xCe^{-x^2} \tag{4}$$

Найдем из условия значение C:

$$C = e^{x^2}\tan y$$

Подставим значение C в 4:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = -2x \cdot \tan y$$

$$y' = -2x \tan y \cos^2 y$$

$$y' = -2x \sin y \cos y$$

$$y' = -x \sin 2y$$

$$y' + x \sin 2y = 0$$

1.38:
$y = Cx^2 - x$

$$y' = \frac{d}{dx}(Cx^2 - x)$$

$$y' = \frac{d}{dx}(Cx^2 - x)$$

$$y' = \frac{d}{dx}Cx^2 - \frac{d}{dx}x$$

$$y' = C2x - 1 \tag{5}$$

Найдем из условия значение C:

$$C = \frac{y - x}{x^2}$$

Подставим значение C в 5:

$$y' = \frac{y - x}{x^2}2x - 1$$

$$y' = 2\frac{y - x}{x} - 1$$

$$y' - 2\frac{y - x}{x} + 1 = 0$$

1.45:
$(y-C)^2 = \frac{1}{x}$

$$(y-C)^2 = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(y-C)^2 = \frac{d}{dx}\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(y-C)^2 = -x^{-2}$$

Замена $\frac{d}{dx}(y-C)^2 = \frac{du^2}{du}\frac{du}{dx}$, где $u = y - C$ и $\frac{d}{du}u^2 = 2u$:

$$2u\left(\frac{d}{dx}(u-C)\right) = -x^{-2}$$

$$2u\left(\frac{d}{dx}u - \frac{d}{dx}C\right) = -x^{-2}$$

Обратная замена:

$$2(y-C)\frac{d}{dx}(y-C) = -x^{-2}$$

$$2(y-C)\left(\frac{d}{dx}y - \frac{d}{dx}C\right) = -x^{-2}$$

$$2(y-C)y' = -x^{-2}$$

$$y' = \frac{-x^{-2}}{2(y-C)} \tag{6}$$

Найдем из условия значения C:

$$C_1 = y - \frac{1}{\sqrt{x}}, x \neq 0$$

$$C_2 = y + \frac{1}{\sqrt{x}}, x \neq 0$$

Подставим значения C в 6:

C_1**:**

$$y' = \frac{-x^{-2}}{2(y - y + \frac{1}{\sqrt{x}})}, x \neq 0$$

$$y' = \frac{-x^{-2}}{2\frac{1}{\sqrt{x}}}, x \neq 0$$

$$y' = -\frac{1}{2x^{3/2}}, x \neq 0$$

$$y' + \frac{1}{2x^{3/2}} = 0, x \neq 0$$

C_2**:**

$$y' = \frac{-x^{-2}}{2(y - y - \frac{1}{\sqrt{x}})}, x \neq 0$$

$$y' = \frac{-x^{-2}}{-2\frac{1}{\sqrt{x}}}, x \neq 0$$

$$y' = \frac{1}{2x^{3/2}}, x \neq 0$$

$$y' - \frac{1}{2x^{3/2}} = 0, x \neq 0$$

1.46:

$x^2 + 2x - (y - C)^2 = 2$

$$x^2 + 2x - (y - C)^2 = 2$$

$$x^2 + 2x - 2 = (y - C)^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2x - 2) = \frac{d}{dx}(y - C)^2$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}2x - \frac{d}{dx}2 = \frac{d}{dx}(y - C)^2$$

$$2x + 2 = \frac{d}{dx}(y - C)^2$$

Замена $\frac{d}{dx}(y - C)^2 = \frac{du^2}{du}\frac{du}{dx}$, где $u = y - C$ и $\frac{d}{du}u^2 = 2u$:

$$2x + 2 = 2u\frac{d}{dx}(y - C)$$

$$2x+2=2u\left(\frac{d}{dx}y-\frac{d}{dx}C\right)$$
$$2x+2=2uy'$$

Обратная замена:
$$2x+2=2(y-C)y'$$
$$y'=\frac{x-1}{(y-C)} \tag{7}$$

Найдем из условия значения C:
$$C_1=y-\sqrt{x^2+2x-2}$$
$$C_1=y+\sqrt{x^2+2x-2}$$

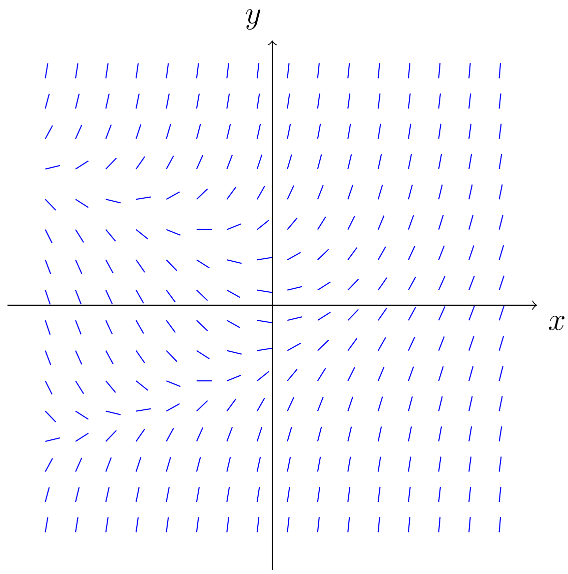
Подставим значения C в 7:

C_1**:**
$$y'=\frac{x-1}{(y-y+\sqrt{x^2+2x-2})}$$
$$y'=\frac{x-1}{(\sqrt{x^2+2x-2})}$$
$$y'-\frac{x-1}{(\sqrt{x^2+2x-2})}=0$$

C_2**:**
$$y'=\frac{x-1}{(y-y-\sqrt{x^2+2x-2})}$$
$$y'=\frac{x-1}{(-\sqrt{x^2+2x-2})}$$
$$y'-\frac{x-1}{(-\sqrt{x^2+2x-2})}=0$$

2.4 Задача №1.53(а)

Условие Построить приближенно интегральные кривые уравнения $y' = x + y^2$



Интегральные кривые $y' = x + y^2$.

3 Домашняя работа