El Diccionario de Sullivan

Un Puente entre la Dinámica Holomorfa y los Grupos Kleinianos

Mauricio Toledo-Acosta

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Table of Contents

Dinámica de Grupos Kleinianos

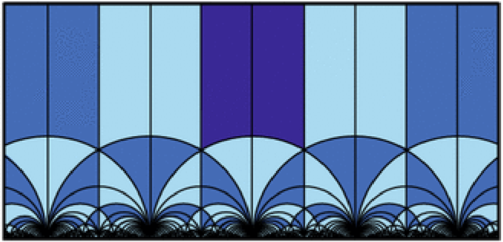
Consideremos trasnformaciones de Möbius $\gamma : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dadas por

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

y consideremos grupos formados por transformaciones de Möbius,

$$G = \langle z \mapsto z+1, z \mapsto -\frac{1}{z} \rangle$$

¿dónde se acumulan las órbitas?



Dínamica Holomorfa

Consideremos la función holomorfa $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dada por

$$f(z) = z^2 + c,$$

para algún $c \in \mathbb{C}$. Queremos estudiar la dinámica de las iteraciones

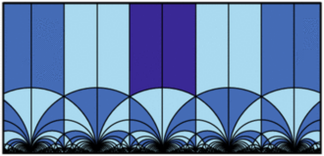
$$f^{(1)} = f,\ f^{(2)} = f \circ f,\ f^{(3)} = f \circ f \circ f,\ \ldots$$

Por ejemplo: $c = 0$, $c = -2$. Estudiemos las órbitas de 0.

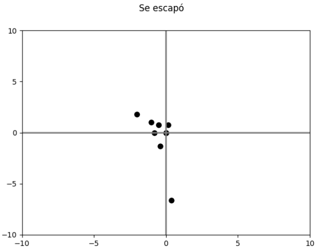
- Iteración
- Conjunto de Julia, Conjunto de Mandelbrot, Primer Mandelbrot

¿Cómo es la dinámica?

¿Qué Tienen en Común?



Dinámica de Grupos Kleinianos



Dinámica Holomorfa

El diccionario de Sullivan nos da la respuesta.

Table of Contents

Dinámica de Grupos Kleinianos

Objetivo Principal

Estudiar la acción de **grupos de transformaciones de Möbius** en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$,

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

- ¿Cómo se comportan las órbitas a largo plazo?
- ¿Cómo se relacionan los grupos Kleinianos con las superficies de Riemann y las 3-variedades hiperbólicas?

Aplicaciones

- Teoría de superficies de Riemann y geometría hiperbólica.
- Estudio de 3-variedades hiperbólicas.

Transformaciones de Möbius $\text{Möb}(\mathbb{C})$

Definición

Una **transformación de Möbius** es una función $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

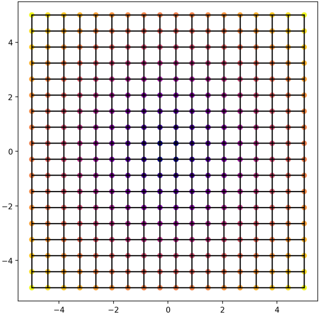
donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc = 1$.

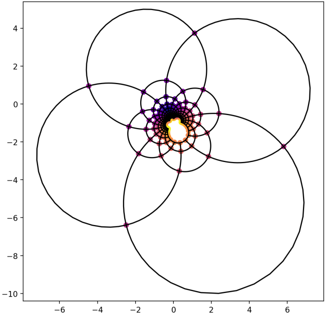
Propiedades:

- Transforman circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas.
- Preservan ángulos (son **conformes**).
- Son biholomorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$.

Ejemplo

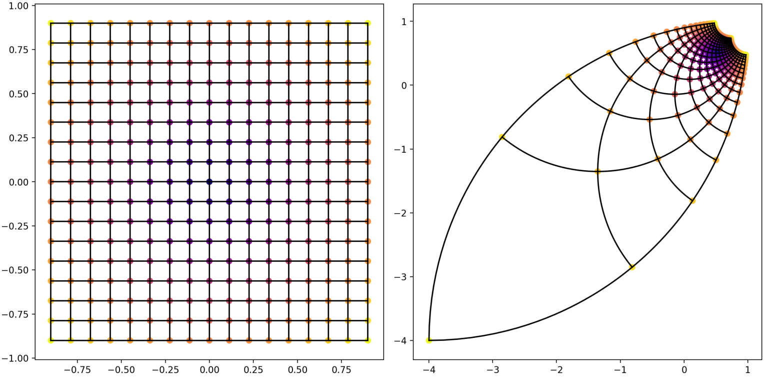
$$z \mapsto \frac{z + (-1+i)}{iz - 3i}$$





Ejemplo

$$z \mapsto \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \quad a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$



Geogebra

Clasificación de elementos de Möb($\mathbb{C}$)

Para una transformación de Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$,

$$\mathrm{tr}^2(f) = (a+d)^2.$$

está bien definida

- La traza al cuadrado es invariante bajo conjugación.
- Clasifica los elementos de Mob($\mathbb{C}$) en tres tipos.

- **Elíptica**: $\mathrm{tr}^2(f) \in [0,4)$.
  Tiene dos puntos fijos y es conjugada a una rotación.
- **Parabólica**: $\mathrm{tr}^2(f) = 4$.
  Tiene un único punto fijo y es conjugada a una traslación.
- **Loxodrómica**: $\mathrm{tr}^2(f) \in \mathbb{C} \setminus [0,4]$.
  Tiene dos puntos fijos y es conjugada a una homotecia con rotación.

Grupos Kleinianos: Definición y Ejemplos

Un subgrupo $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{C})$ se dice **grupo Kleiniano** si:

- Es **discreto** en la topología usual de $\text{SL}(2,\mathbb{C})$, es decir, no tiene puntos de acumulación.
- Actúa en un subconjunto no vacío $X \subset \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de forma propia y discontinuamente.

Ejemplos

- El grupo cíclico $G = \langle z \mapsto 2z \rangle$
- El grupo finitamente generado $G = \langle z \mapsto z+1, z \mapsto z+i \rangle$.

Región de Discontinuidad

Sea G un grupo de transformaciones de Möbius que actúa en $\hat{\mathbb{C}}$.

Región de Discontinuidad $\Omega(G)$)

La **región de discontinuidad** de G es el conjunto de puntos donde la acción de G es **discontinua**:

$$\Omega(G) = \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ abierto } U \text{ de } z \text{ tal que} \\ g(U) \cap U = \emptyset \text{ para casi todo } g \in G \end{array} \right\}.$$

- En $\Omega(G)$, las transformaciones de G no acumulan puntos.
- Es un conjunto abierto donde G actúa de manera *ordenada*.

Conjunto Límite

El **conjunto límite** de un grupo Kleiniano G es el complemento de la región de discontinuidad:

$$\Lambda(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega(G).$$

- En $\Lambda(G)$, las transformaciones de G acumulan puntos.
- Es un conjunto cerrado donde la acción es *caótica*.

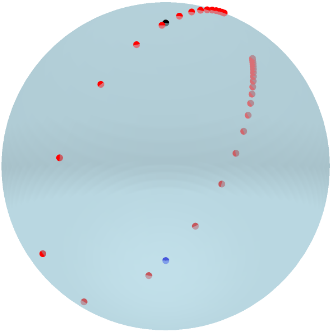
De manera equivalente, $\Lambda(G)$ es:

- La cerradura de puntos de acumulación de órbitas Gz, para cualquier $z \in \hat{\mathbb{C}}$.
- La cerradura de puntos fijos repulsores de elementos loxodrómicos de G.

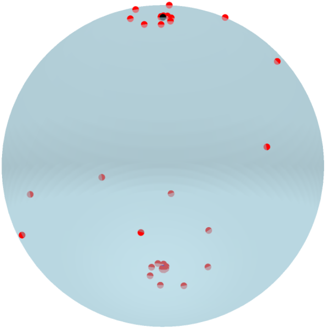
Invarianza

- $\Omega(G)$ y $\Lambda(G)$ son Γ-invariantes.
- $\Omega(G)$ es abierto y $\Lambda(G)$ es cerrado.
- $\Lambda(G)$ tiene 0,1,2 o una infinidad de puntos.
- $\Omega(G)/G$ es Hausforff.

Ejemplo: Grupos Elementales

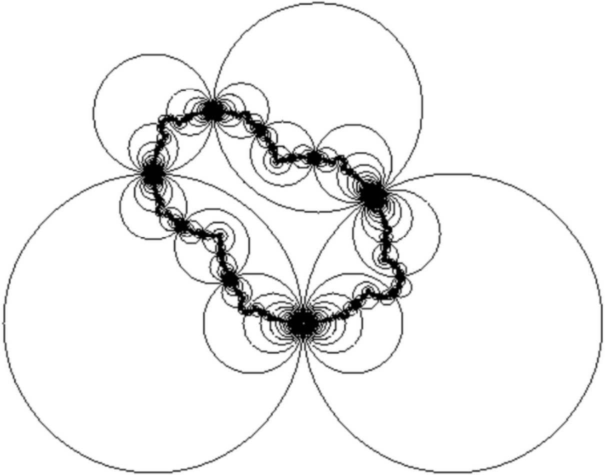


Grupo cíclico generado por un parabólico.

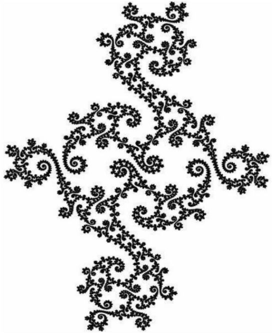


Grupo cíclico generado por un loxodrómico.

Ejemplo: Grupos Kissing Schotty



Grupo de Schottky



Ahlfors finiteness theorem (1964)

Sea Γ un grupo Kleiniano finitamente generado con región de discontinuidad Ω. Entonces:

- Ω/Γ tiene un número finito de componentes.
- Cada componente es una superficie de Riemann compacta con un número finito de puntos removidos.

Ejemplo: Superficie de Riemann de Genero 2

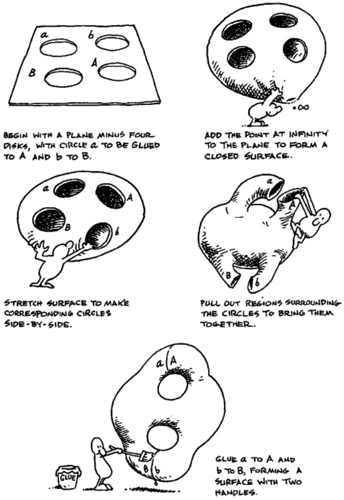


Table of Contents

Dinámica Holomorfa

Objetivo Principal

Estudiar el comportamiento de las **funciones holomorfas** bajo iteración, es decir, analizar las órbitas:

$$z,\ f(z),\ f^2(z),\ f^3(z),\ \ldots$$

donde $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ es una función holomorfa.

- ¿Cómo se comportan las órbitas a largo plazo?
- ¿Qué estructuras geométricas y dinámicas emergen bajo iteración?

Aplicaciones

- Teoría de sistemas dinámicos complejos.
- Geometría fractal y teoría del caos.

Puntos Periódicos y su Clasificación

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se llama **punto periódico** de período n si:

$$f^n(z_0) = z_0,$$

- El menor n que cumple esta condición se llama **período** de z_0.
- Si $n = 1$, z_0 es un **punto fijo**.

Dado un punto periódico z_0 de período n, el **multiplicador** λ es

$$\lambda = (f^n)'(z_0).$$

El multiplicador determina el comportamiento de f cerca de z_0.

Clasificación de Puntos Periódicos

Dependiendo del valor de λ, un punto periódico se clasifica en:

- **Atractor**: $|\lambda| < 1$.
  - Las órbitas cercanas convergen a z_0.
  - Ejemplo: $f(z) = z^2$ tiene un punto fijo atractor en $z_0 = 0$.
- **Superatractor**: $\lambda = 0$.
  - Las órbitas convergen a z_0 más rápidamente.
  - Ejemplo: $f(z) = z^2$ tiene un punto fijo superatractor en $z_0 = 0$.
- **Neutro**: $|\lambda| = 1$.
  - Las órbitas cercanas no convergen ni divergen.
  - Ejemplo: $f(z) = e^{i\theta}z$ tiene un punto fijo neutro en $z_0 = 0$.
- **Repelente**: $|\lambda| > 1$.
  - Las órbitas cercanas se alejan de z_0.
  - Ejemplo: $f(z) = z^2$ tiene un punto fijo repelente en $z_0 = 1$.

Definiciones

Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ una función holomorfa. Definimos:

- **Conjunto de Fatou** $\mathcal{F}(f)$:
  - Es el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ donde la familia de iteradas $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal.
  - Es el conjunto abierto donde el comportamiento de f es *ordenado* y *predecible*.
- **Conjunto de Julia** $\mathcal{J}(f)$:
  - Es el complemento del conjunto de Fatou:

$$J(f) = \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}(f).$$

  - Es el conjunto cerrado donde el comportamiento de f es *caótico* y *sensible a condiciones iniciales*.

Familia Normal de Funciones

Una colección $\mathscr{F}$ de funciones continuas se dice **familia normal** si toda sucesión de funciones en $\mathscr{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en subconjuntos compactos de X a una función continua de X en Y. Es decir, para toda sucesión de funciones en $\mathscr{F}$, existe una subsucesión $\{f_n(x)\}$ y una función continua $f : X \to Y$ tal que, $\forall K \subset X$ compacto:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} d_Y(f_n(x), f(x)) = 0,$$

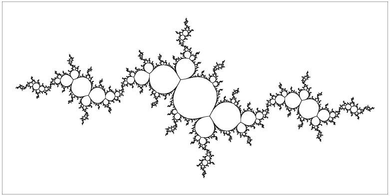
- Una familia normal es *compacta* en el sentido de que toda sucesión tiene una subsucesión convergente.
- La convergencia es uniforme en subconjuntos compactos, lo que garantiza un comportamiento *controlado* de las funciones.

Propiedades de los Conjuntos de Julia y Fatou

- $\mathcal{F}(f)$ es abierto, mientras que $\mathcal{J}(f)$ es cerrado.
- $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$, a menos que f sea lineal.
- $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$ son totalmente invariantes:

$$f^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f),\ f(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f)$$
$$f^{-1}(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f),\ f(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$$

Example of Julia Set



El conjunto de Julia $J(f)$ para

$$f(z) = z^2 + c,$$

$$c = -1.12 + 0.21\, i$$

Más ejemplos

No Wandering Domain Theorem (1985, Sullivan)

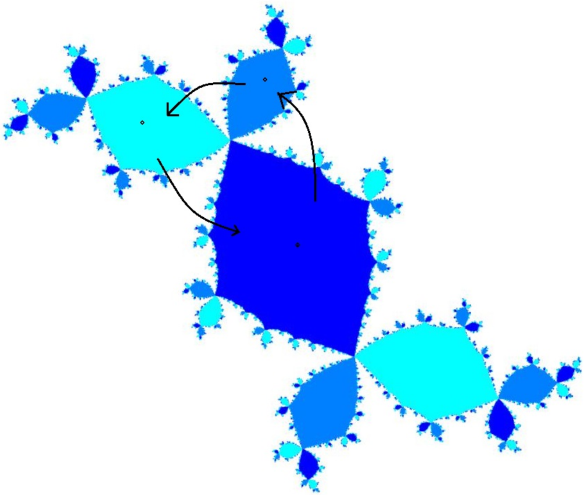
Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ una función racional de grado $d \geq 2$. Entonces, toda componente conexa U del conjunto de Fatou $\mathcal{F}(f)$ es **eventualmente periódica**, es decir, existen enteros $n > m \geq 0$ tales que:

$$f^{\circ n}(U) = f^{\circ m}(U),$$

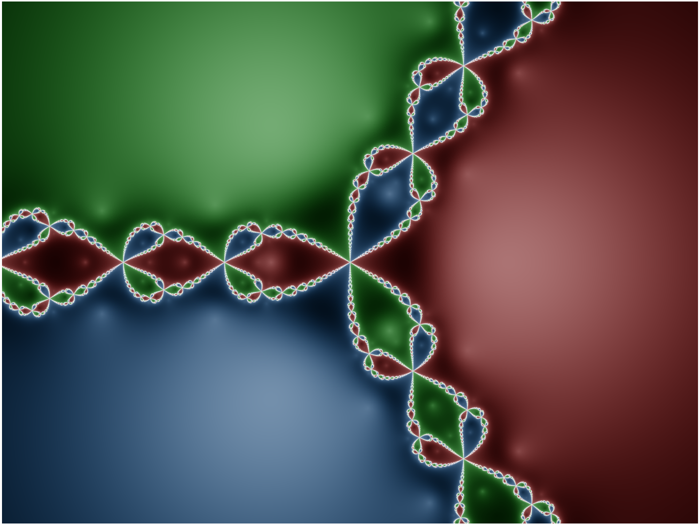
- Todas las componentes de Fatou eventualmente caen en un ciclo periódico bajo iteración.
- Si f es entera y no racional, no se cumple, por ejemplo, $f(z) = z + 2\pi \sin(z)$.

Para la función $f(z) = z^2$, $\mathcal{F}(f)$ consiste en dos componentes: el disco unitario $\mathbb{D}$ y su exterior $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, ambas componentes son invariantes bajo f.

Ejemplo: El conejo de Douady



Ejemplo: El Método de Newton para $g(z) = z^3 - 1$



Ejemplo: Dominio Errante

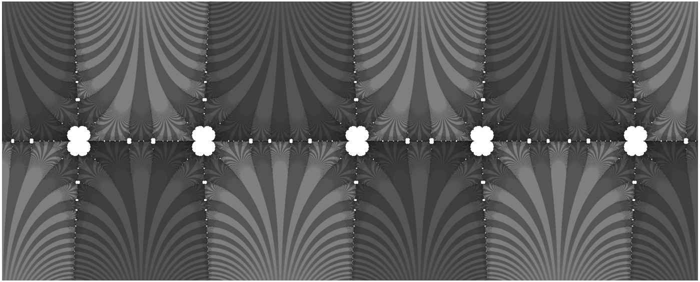


Table of Contents

Primera versión del diccionario

Annals of Mathematics, **122** (1985), 401–418

Quasiconformal homeomorphisms and dynamics
I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains

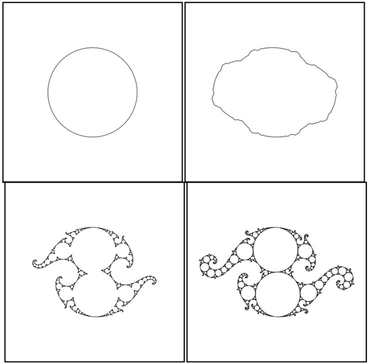
By Dennis Sullivan

Primera versión del diccionario

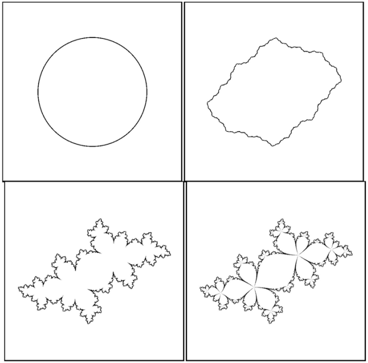
We close with a sample of the dictionary between analytic iteration and discrete subgroups of $PSL(2, \mathbf{C})$ which lies behind this series of papers.

Complex analytic iteration	*Discrete subgroups of* $PSL(2, \mathbf{C})$
entire mapping	arbitrary Kleinian group
Blaschke product	arbitrary Fuchsian group
rational mapping, R	finitely generated Kleinian group, Γ
degree of mapping, d	number of generators, n
$(2d - 2)$ analytic parameters	$(3n - 3)$ analytic parameters
$(2d - 2)$ critical points	(?) ends of hyperbolic 3 manifolds
Fatou-Julia limit set ([8], [11])	Poincaré limit set (1880)
stable regions	domain of discontinuity
periodic points of R	fixed points of elements of Γ
dense in limit set	dense in limit set
Riemann surface of R	Riemann surface of Γ
eventual periodicity theorem, $d < \infty$	Ahlfors finiteness theorem, $n < \infty$
attracting region	cocompact stabilizer of a discontinuous component
parabolic region	cofinite area stabilizer with cusp
Siegel disk	(?) limit group by qc deformation in arithmetically good "direction"
non-linearizable indifferent periodic point	(?) limit group by qc deformation in a "Liouville" direction
Hermann ring	(?) similar to Siegel disk analogy
super attracting region	?
invariant line fields on limit set (restricted examples known)	no invariant line fields on limit set ($n < \infty$) [18]

Conjunto Límite y Conjunto de Julia



Conjuntos límite



Conjuntos de Julia

Diccionario de Sullivan

Grupos Kleinianos	**Dinámica Holomorfa**
Conjunto límite (cerrado)	Conjunto de Julia (cerrado)
Región de discontinuidad (abierto)	Conjunto de Fatou (abierto)
$\Lambda(G) \cup \Omega(G) = \hat{\mathbb{C}}$	$\mathcal{J}(f) \cup \mathcal{F}(f) = \hat{\mathbb{C}}$
$\Lambda(G) \neq \emptyset$ sin interior	$\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ sin interior
$\Lambda(G)$ tiene 0, 1, 2 puntos o una infinidad	$\Omega(G)$ tiene 0, 1, 2 componentes conexas o una infinidad
Ahlfors Finiteness Theorem (1965)	**?**

Diccionario de Sullivan

Grupos Kleinianos	**Dinámica Holomorfa**
Conjunto límite (cerrado)	Conjunto de Julia (cerrado)
Región de discontinuidad (abierto)	Conjunto de Fatou (abierto)
$\Lambda(G) \cup \Omega(G) = \hat{\mathbb{C}}$	$\mathcal{J}(f) \cup \mathcal{F}(f) = \hat{\mathbb{C}}$
$\Lambda(G) \neq \emptyset$ sin interior	$\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ sin interior
$\Lambda(G)$ tiene 0, 1, 2 puntos o una infinidad	$\Omega(G)$ tiene 0, 1, 2 componentes conexas o una infinidad
Ahlfors Finiteness Theorem (1965)	No Wandering Domain Theorem (1985)