

考 试 试 卷 册

(2009 - 2010 学年第一学期)

考试科目 算法基础

出卷教师 顾乃杰

使用班级 PB0711

考试日期 2010.01.04

中国科学技术大学教务处

中国科学技术大学
2009--2010 学年第 1 学期考试试卷

考试科目: 算法基础

得分: _____

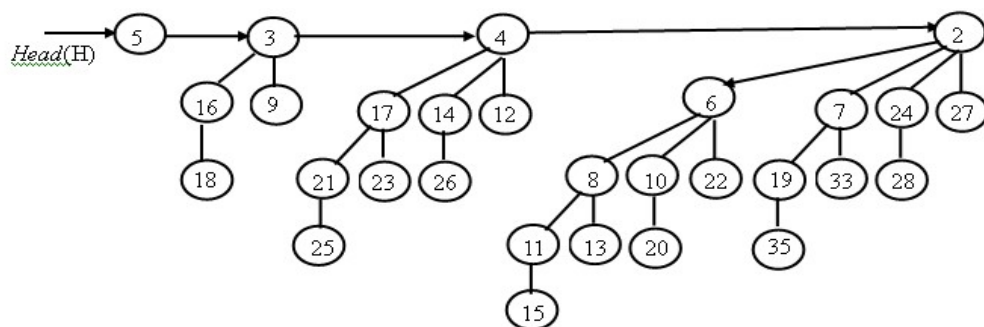
学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一、基本题: (20 分, 每小题 5 分)

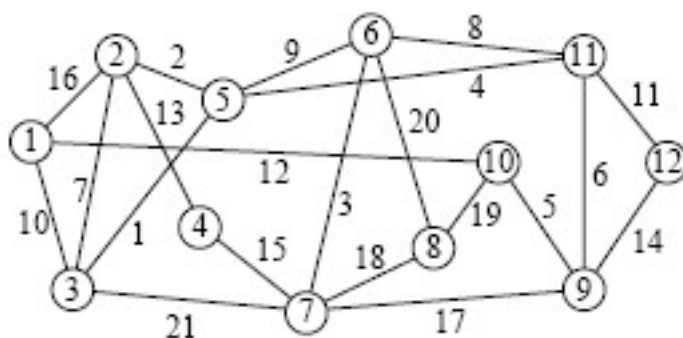
1. 已知 $f(n) = n + 2\sqrt{n}$, $g(n) = n^2$, 请证明 $f(n) = O(g(n))$;
2. 请举例说明存在函数 $f(n)$, 使得 $f(n) \neq O(n)$ 且 $f(n) \neq \Omega(n)$;
3. 求解递归方程 $T(n) = 8 \cdot T(n/2) + n$ (给出量级和推导过程)
4. 求解递归方程 $T(n) = 9 \cdot T(n/3) + n^3 \log n$ (给出量级和推导过程)

二、计算题: (40 分, 每小题 10 分)

1. 有下图所示的二项堆, 请给出在该二项堆中执行 Extract-Min 操作的过程。



2. 已知有两个序列 $X = "11201012"$, $Y = "21011021"$, 计算出 X 和 Y 的一个最长公共子序列 (给出计算过程)。
3. 已知有一段电文, 共出现了 8 种字符, 各字符出现次数分别为: A 3 次, B 5 次, C 12 次, D 15 次, E 6 次, F 2 次, G 9 次, H 4 次, 现在要求对此段电文进行 3 进制编码(采用前缀码), 如何编码才能使编码后的电文总长度最小? 请给出你的编码方案(给出编码树)。
4. 请给出下图的一棵最小生成树, 图中给出了顶点编号和边的权值:



三、阅读并分析算法：（20 分，每小题 10 分）

1. 给出下述函数的运行结果，将其表示成 n 的函数：

```

Function Pesky( $n$ )
1.   $r := 0$ ;
2.  for  $i := 1$  to  $n$  do
3.      for  $j := 1$  to  $i$  do
4.          for  $k := j$  to  $i + j$  do
5.               $r := r + 1$ 
6.  return( $r$ )
    
```

2. 已知下述算法被调用时的初值为 $P[1..12] = \text{"AABCAAABCAAA"}$ ，数组

$\text{Next}[1..12]$ 全为 0，请给出算法运行后数组 $\text{Next}[1..12]$ 的值。

```

NewPass( $P$ )
1.   $j \leftarrow 0$ ;
2.   $m \leftarrow \text{Length}(P)$ ;
3.  For  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do
4.       $\text{Next}[i] \leftarrow j$ ;
5.      While  $j > 0$  and  $P[i] \neq P[j]$  do
6.           $j \leftarrow \text{Next}[j]$ ;
7.       $j \leftarrow j + 1$ ;
8.  Return
    
```

四、算法设计：（20 分， 每题 10 分）

1. 已知某班共有 n 个同学参加算法课程考试，课程的成绩从 0 至 100，由于学校教务部门要求任课教师根据考试成绩进行试卷分析，也就是对任意输入的整数 a 和 b （注： $0 \leq a < b \leq 100$ ）要求统计出成绩**大于等于** a 且**小于** b 的**学生数**和占总人数的**百分比**。为了便于快速完成统计工作，现要求编写算法：对学生考试成绩做预处理，预处理所需时间不超过 $O(n)$ ，使得在预处理后，能够对任意输入的

整数 a 和 b (注: $0 \leq a < b \leq 100$), 只需 $O(1)$ 的时间就能统计出成绩**大于等于** a 且**小于** b 的**学生数**和占总人数的**百分比**。

2. 已知有一个带权的无向图 G , 该图表示一个网络, 其顶点表示路由器, 边表示连接两个路由器的链路(双向), 边上的权值表示链路的带宽, 图中任意两顶点之间均有路径相通, 路径的带宽定义为路径上所有边的最小权值(最小带宽), 设 a 和 b 是图 G 上给定的两点, 请设计算法, 求出由 a 至 b 的一条最大带宽路径。

2009-2010 第一学期算法基础试题答案（参考）

一、基本题

1) a. 方法一（极限法）

证明：

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2\sqrt{n}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 0$$

所以 $f(n) = O(g(n))$

b. 方法二（定义法）

证明：

当 $n > 1$ 时，有 $0 \leq f(n) \leq c g(n)$

取 $c = 2$ 时，设 $h(n) = c g(n) - f(n) = 2n^2 - n - 2\sqrt{n}$

当 $n > 1$ 时， $h'(n) = 4n - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$

又因为 $h(2) = 8 - 2 - 2\sqrt{2} > 0$

所以当 $n > 1$ 时， $h(n) > 0$

故 $f(n) = O(g(n))$

2) 解：1) $f(n) = n^2(1 + \sin(n))$

$$2) f(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ 为奇数} \\ n^2 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$3) f(n) = n^{(1+\sin n)}$$

3) 解：主定理 case 1

$$T(n) = 8 T(n/2) + n$$

$$a = 8, b = 2, \log_b a = \log_2 8 = 3;$$

取 $\varepsilon = 2 > 0$ ，有 $f(n) = O(n^{3-\varepsilon})$;

所以 $T(n) = \Theta(n^3)$

4) 解：主定理 case 3

$$T(n) = 9 T(n/3) + n^3 \log n$$

$$a = 9, b = 3, \log_b a = \log_3 9 = 2;$$

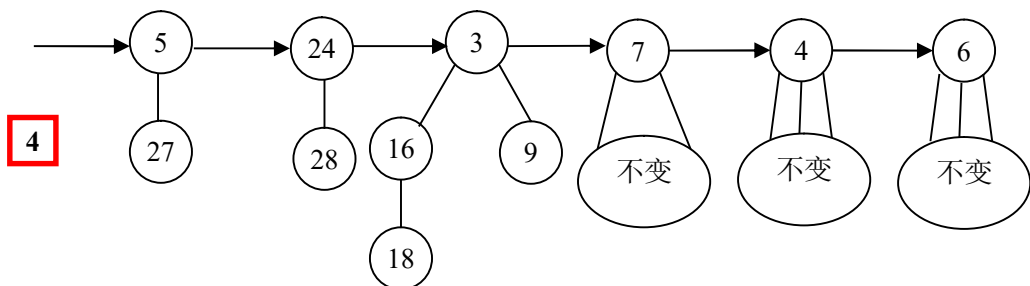
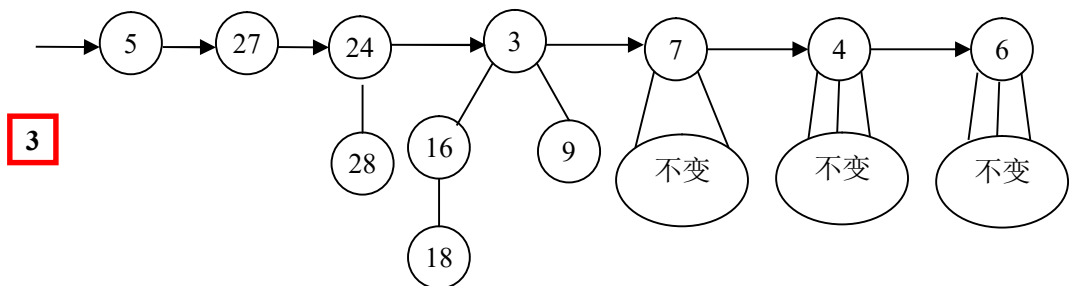
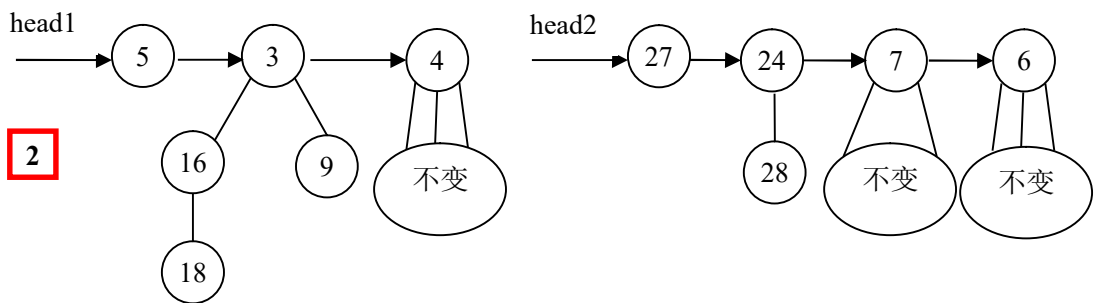
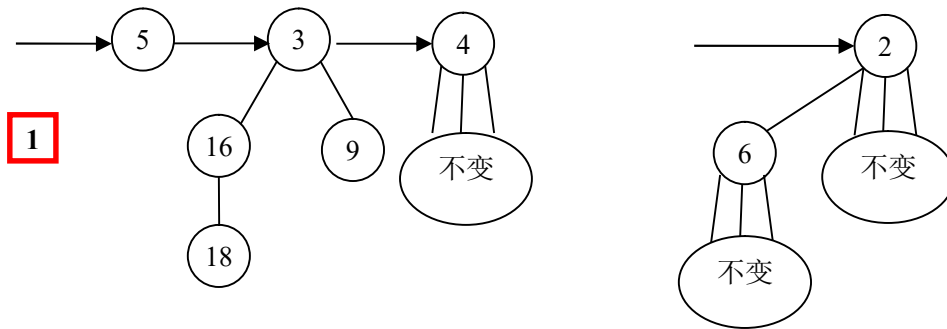
存在 $\varepsilon > 0$ ，使得 $f(n) = n^3 \log n = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) = \Omega(n^{2+\varepsilon})$;

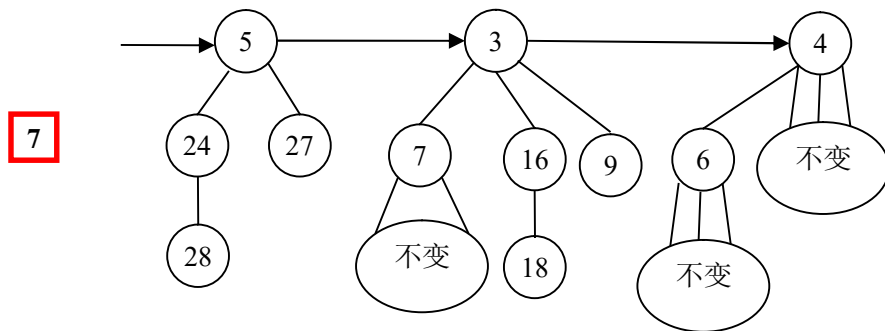
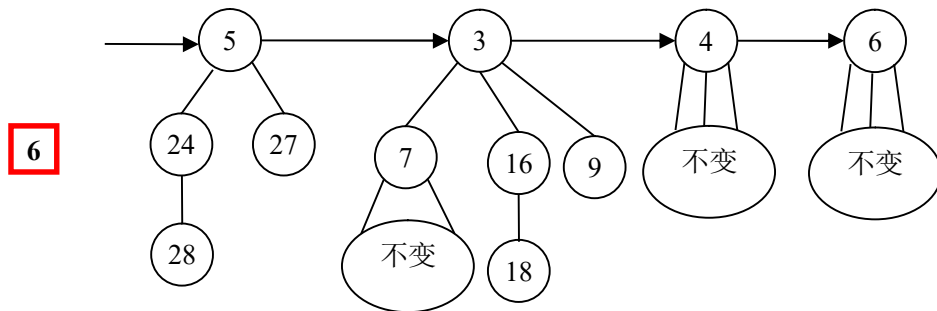
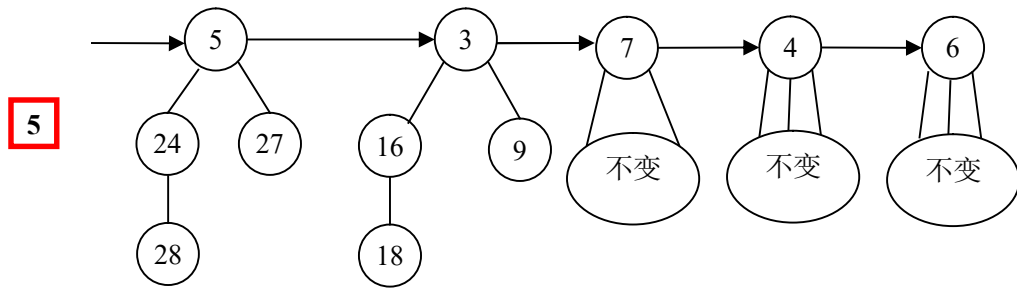
$$\text{取 } c = \frac{1}{3} < 1, \text{ 得 } af(n/b) = 9f(n/3) = \frac{n^3}{3} \log \frac{n}{3} = \frac{n^3 \log n}{3} - \frac{n^3 \log 3}{3}$$

$< \frac{1}{3} n^3 \log n = cf(n)$; 满足条件 $af(n/b) < cf(n)$ ，所以 $T(n) = \Theta(n^3 \log n)$

二、 计算题

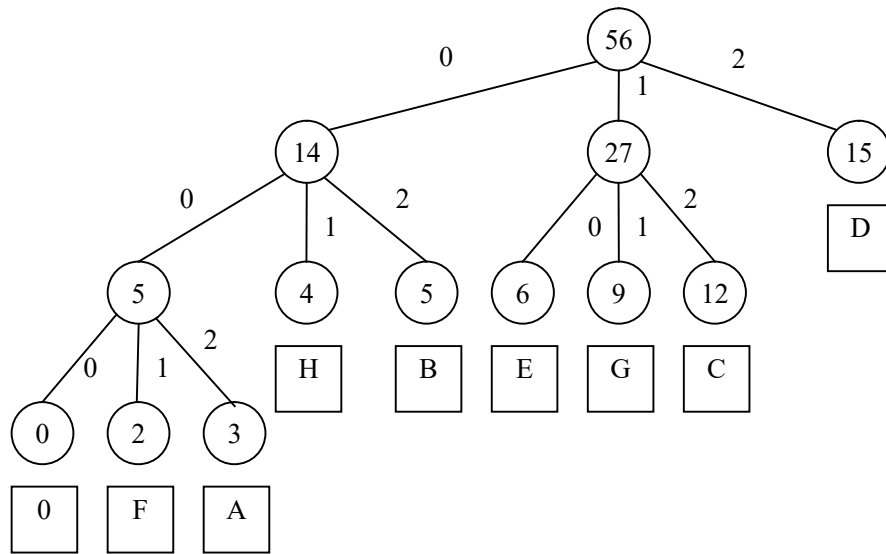
1) 过程如下:





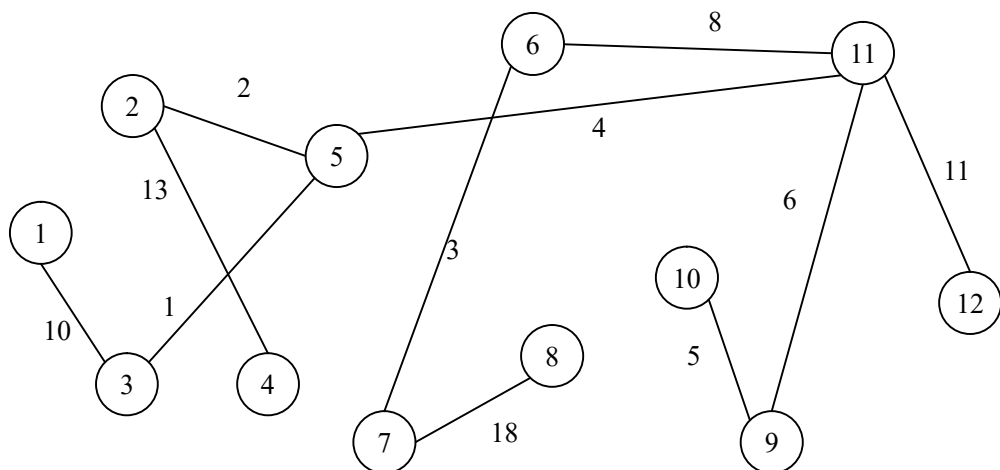
- 2) 最长公共子序列为: **20112** 或 **20101** 或 **10112**
 或 **21012** 或 **10102**
 最长公共子序列长度为 5。

- 3) 编码树如下:



A: 002 B: 02 C: 12 D: 2
E: 10 F: 001 G: 11 H: 01 最优: 102/56

4) 最小生成树:



总权值为: 81

三、 阅读并分析算法

1) 解:

$$\begin{aligned} r(n) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq i} \sum_{j \leq k \leq i+j} 1 = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq i} (i+1) = \sum_{1 \leq i \leq n} i(i+1) = \sum_{1 \leq i \leq n} i^2 + \sum_{1 \leq i \leq n} 1 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

2) 解:

| 序列 | A | A | B | C | A | A | A | B | C | A | A | A |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| j | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| next | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

四、 算法设计

1) 解:

a. 算法思想

按照题目的要求本题应该写出两个子过程，一个是 Preprocessing，一个是 Query。其中 Preprocessing 采用 Counting Sort 的思想实现，但只计数不排序，Query 实现时需要注意边界问题。

b. 伪码

Preprocessing(A, 100)

```

for i ← 0 to 100
    do C[i] ← 0
for j ← 1 to length[A]
    do C[A[j]] ← C[A[j]]+1
for i ← 1 to 100
    do C[i] ← C[i]+C[i-1]
```

Query(C,100,a,b)

```

if (b-1) < a or b < 1 or a > k then return 0
if a < 0 then a ← 0
if (b-1) > k then b ← k+1
if a ≠ 0 then return C[b-1]-C[a-1] and
    (C[b-1]-C[a-1])/ C[100]*100
else return C[b-1] and C[b-1] / C[100]*100
```

2) 解:

a. 算法思想

根据题意，修改 Dijkstra 算法。

带宽：路径上所有边的最小权值（最小带宽）。

要求：求出 a 到 b 的一条最大带宽路径。

b. 伪码

Modify-Dijkstra(G, w, a)

Initialize(G, a)

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V[G]$

while $Q \neq \emptyset$

do $u \leftarrow \text{Extract-MAX}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

for each vertex $v \in \text{Adj}[u]$

do Relax(u, v w)

Initialize(G, a)

for each vertex $v \in V[G]$

do $d[v] \leftarrow 0$

$\pi[v] \leftarrow \text{Nil}$

$d[a] \leftarrow \text{MAX}$

Relax(u, v w)

$t = \min \{d[u], w(u, v)\}$

if $d[v] < t$

then $d[v] \leftarrow t$

 //在优先队列中要加上 increasekey 操作

$\pi[v] \leftarrow u$

| | |
|---------|--|
| 文件名: | 算法基础-2009 试卷与答案 |
| 目录: | C:\Users\mbinary\Desktop\算法 |
| 模板: | C:\Users\mbinary\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.dotm |
| 标题: | 中 国 科 学 技 术 大 学 |
| 主题: | |
| 作者: | zhangm |
| 关键词: | |
| 备注: | |
| 创建日期: | 2009/12/30 10:51:00 |
| 修订号: | 27 |
| 上次保存日期: | 2018/8/1 8:16:00 |
| 上次保存者: | mbinary |
| 编辑时间总计: | 438 分钟 |
| 上次打印时间: | 2018/10/31 7:42:00 |
| 打印最终结果 | |
| 页数: | 10 |
| 字数: | 543 (约) |
| 字符数: | 3,098 (约) |