

Gabriel Malaquias de Oliveira

# **Comparação entre controladores do tipo PID e LQR com base em um modelo longitudinal de um dirigível não tripulado**

Belo Horizonte, MG - Brasil

7 de outubro de 2020



Gabriel Malaquias de Oliveira

**Comparação entre controladores do tipo PID e LQR com  
base em um modelo longitudinal de um dirigível não  
tripulado**

Trabalho de conclusão de curso de Engenharia  
Aeroespacial na Universidade Federal de  
Minas Gerais

Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG  
Escola de Engenharia  
Engenharia Aeroespacial

Orientador: Dr. Dimas Abreu A. Dutra

Belo Horizonte, MG - Brasil  
7 de outubro de 2020

Gabriel Malaquias de Oliveira

Comparação entre controladores do tipo PID e LQR com base em um modelo longitudinal de um dirigível não tripulado/ Gabriel Malaquias de Oliveira. – Belo Horizonte, MG - Brasil, 7 de outubro de 2020-

53 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr. Dimas Abreu A. Dutra

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Escola de Engenharia

Engenharia Aeroespacial, 7 de outubro de 2020.

1. Simulação. 2. Dirigível autônomo. 2. Aeroespacial. I. Dr. Dimas Abreu A. Dutra. II. Universidade Federal de Minas Gerais. III. Escola de Engenharia. IV. Comparação entre controladores do tipo PID e LQR com base em um modelo longitudinal de um dirigível não tripulado

# Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida e pelas bênçãos diárias.

À minha família pelo apoio incondicional e por minha formação como ser humano.

A todos os meus professores, pois cada um a seu modo, contribuíram para que eu chegasse até aqui e também ao meu orientador pela paciência e pelo imenso aprendizado teórico e prático ao longo dos últimos anos de curso.

Aos projetos voluntários que participei, especialmente ao Transformar, pela oportunidade de criar algo do zero e conhecer pessoas extremamente motivadas a usar a educação como um instrumento transformador da sociedade e também à AVANT-UFMG pela oportunidade de permitir aos alunos conhecer mais sobre a área de veículos aéreos autônomos.

À UFMG pela oportunidade de uma formação profissional sólida e de qualidade.

À FUMP pelo apoio financeiro e psicológico, sem os quais seria quase impossível prosseguir no curso.



# Resumo

O presente trabalho pretende comparar dois tipos de controladores de um modelo longitudinal de um dirigível autônomo. Um deles é o tradicional PID (Proporcional Integral Derivativo), muito utilizado em aeronaves não tripuladas, sejam de asa fixa ou rotativa, e o do tipo LQR (*Linear Quadratic Control*), que é o mais utilizado em dirigíveis não-tripulados, conforme a literatura. Foram feitos testes para duas condições de subida e três tipos de rajadas, de forma a comparar o desempenho de ambos controladores. Os resultados mostraram que os dois tipos conseguem fazer com o que o dirigível alcance uma nova condição de equilíbrio, sendo o modelo com os controladores PID mais rápido ao seguir a referência do que o modelo com o controlador LQR.

**Palavras-chave:** Engenharia aeroespacial. Simulação. Dirigível não-tripulado. PID. LQR.





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Pintura ilustrando um dos balões de ar quente desenvolvidos pelos irmãos Montgolfier (HANGAR33, 2015). . . . .	15
Figura 2 – Bartolomeu de Gusmão apresentando seu invento para a corte real portuguesa (CANALLE, 2009) . . . . .	15
Figura 3 – Santos Dumont contornando a torre Eiffel com seu dirigível número 5. . . . .	16
Figura 4 – Diagrama com as definições sobre a propulsão do dirigível . . . . .	24
Figura 5 – Comparativo entre os controladores para uma referência do tipo rampa leve . . . . .	33
Figura 6 – Comparativo entre os controladores para uma referência do tipo rampa íngreme . . . . .	34
Figura 7 – Rajada horizontal . . . . .	34
Figura 8 – Rajada vertical . . . . .	35
Figura 9 – Rajada oblíqua . . . . .	35



# Lista de abreviaturas e siglas

PID	<i>Proportional Integral Derivativo</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
CV	<i>Centro de Volume</i>
CG	<i>Centro de Gravidade</i>



# Lista de símbolos

$\alpha$	Ângulo de ataque
$\beta$	Ângulo de derrapagem
$\mu$	Ângulo da vetorização dos motores principais
$\theta$	Ângulo de arfagem
$\phi$	Ângulo de rolamento
$\psi$	Ângulo de guinada
$\lambda_{ij}$	Matriz dos cossenos diretores
$\rho$	Densidade do ar
<b>A</b>	Vetor das forças e momentos aerodinâmicos
$a_x$	Posição do CG no eixo X do corpo
$a_z$	Posição do CG no eixo Z do corpo
$d_{fx}$	Distância do motor na cauda ao eixo X do corpo
$d_{fz}$	Distância do motor na cauda ao eixo Z do corpo
$d_y$	Distância dos motores esquerdo e direito em relação ao eixo Y do corpo
$d_z$	Distância dos motores esquerdo e direito em relação ao eixo Z do corpo
<b>E</b>	Força de empuxo
<b>F<sub>d</sub></b>	Vetor das forças e momentos dinâmicos (inerciais)
<b>g</b>	Aceleração da gravidade
<b>G</b>	Vetor das forças e momentos resultantes entre o peso e o empuxo
<b>i</b>	Número imaginário
$I_{xy}$	Produto de inércia entre os eixos X e Y do corpo
$I_{yz}$	Produto de inércia entre os eixos Y e Z do corpo
$J_x$	Fator de inércia virtual no eixo X do corpo
$J_y$	Fator de inércia virtual no eixo Y do corpo

$J_z$	Fator de inércia virtual no eixo Z do corpo
$J_x z$	Fator de inércia virtual nos eixo X e Z do corpo
<b>M</b>	Matriz de massa generalizada
$m_x$	Fator de massa virtual no eixo X do corpo
$m_y$	Fator de massa virtual no eixo Y do corpo
$m_z$	Fator de massa virtual no eixo Z do corpo
<i>NED</i>	<i>North, East, Down</i>
p	Velocidade angular de rolamento
<b>P</b>	Vetor das forças e momentos propulsivos
$P_e$	Tração do motor esquerdo
$P_d$	Tração do motor direito
$P_t$	Tração do motor na cauda
q	Velocidade angular de arfagem
r	Velocidade angular de guinada
u	Velocidade linear no eixo X do corpo
v	Velocidade linear no eixo Y do corpo
V	Volume do envelope do dirigível
w	Velocidade linear no eixo Z do corpo
$\dot{x}_e$	Derivada da posição no eixo X do referencial <i>NED</i>
$\dot{y}_e$	Derivada da posição no eixo Y do referencial <i>NED</i>
$\dot{z}_e$	Derivada da posição no eixo Z do referencial <i>NED</i>

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>1.1</b>	<b>Perspectiva histórica</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Motivação e objetivos</b>	<b>16</b>
<b>1.3</b>	<b>Organização do texto</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelo de 6 graus de liberdade</b>	<b>19</b>
2.1.1	Considerações	19
2.1.2	Cinemática linear e angular	20
2.1.3	Equações de movimento	20
2.1.4	Matriz de massa generalizada	21
2.1.5	Vetor das forças e momentos aerodinâmicos	21
2.1.6	Vetor das forças e momentos dinâmicos (inerciais)	22
2.1.7	Vetor das forças e momentos resultantes entre o peso e o empuxo	23
2.1.8	Vetor das forças e momentos propulsivos	23
<b>2.2</b>	<b>Modelo longitudinal</b>	<b>24</b>
2.2.1	Considerações	24
<b>2.3</b>	<b>Controladores</b>	<b>26</b>
2.3.1	Controlador do tipo PID	26
2.3.2	Controlador do tipo LQR	27
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>29</b>
<b>3.1</b>	<b>Linearização</b>	<b>29</b>
3.1.1	Trimagem	29
3.1.2	Autovalores e modos do modelo longitudinal	29
<b>3.2</b>	<b>Sintonia dos controladores</b>	<b>30</b>
3.2.1	Controladores do tipo PID	30
3.2.2	Controlador do tipo LQR	31
<b>3.3</b>	<b>Testes</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>37</b>
<b>5.1</b>	<b>Trabalhos futuros</b>	<b>37</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>39</b>

	<b>APÊNDICE A – MODELO DO DIRIGÍVEL NÃO-TRIPULADO . .</b>	<b>41</b>
<b>A.1</b>	<b>Parâmetros gerais . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>A.2</b>	<b>Coeficientes aerodinâmicos . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>A.3</b>	<b>Fatores de massa e inércia virtuais . . . . .</b>	<b>42</b>
	<b>APÊNDICE B – CÓDIGO LONG_TRIM.M . . . . .</b>	<b>45</b>
	<b>APÊNDICE C – CÓDIGO LONG_LINEAR.M . . . . .</b>	<b>47</b>
	<b>APÊNDICE D – CÓDIGO XDOT_LONG.M . . . . .</b>	<b>49</b>
	<b>ANEXO A – CÓDIGO JAC.M . . . . .</b>	<b>53</b>



# 1 Introdução

## 1.1 Perspectiva histórica

As aeronaves podem ser divididas em duas grandes categorias: aeroestátos e aerodinos. Os primeiros a se desenvolver foram os aeroestátos, sendo que os primeiros registros conhecidos deste tipo de veículo, ainda não tripulado, datam do século 3 depois de Cristo na China. Também conhecido como lanterna Kongming, consiste em uma pequena lareira para aquecer o ar, diminuindo assim sua densidade e encapsulá-lo dentro de um envelope de seda ([CANALLE, 2009](#)).

Outros dois fatos interessantes, mais recentes datam do século XVIII com a exposição do balão de Bartolomeu de Gusmão para a corte portuguesa em Lisboa e os balões dos irmãos Montgolfier. Estes foram os pioneiros na construção e pilotagem dos balões ([CANALLE, 2009](#)).

Figura 1 – Pintura ilustrando um dos balões de ar quente desenvolvidos pelos irmãos Montgolfier ([HANGAR33, 2015](#)).



Figura 2 – Bartolomeu de Gusmão apresentando seu invento para a corte real portuguesa ([CANALLE, 2009](#))



Após a ascensão dos balões, o foco voltou-se para a dirigibilidade dos balões. Os primeiros dirigíveis surgiram no século XIX, com destaque para a atuação do aviador Santos Dumont que iniciou sua carreira com os balões, projetou e coordenou a construção do balão mais leve da sua época e também construiu diversos dirigíveis e dois aviões (14-Bis e Deimoiselle). Um dos fatos marcantes da sua história foi a volta em torno da torre Eiffel em Paris, mostrada na foto a seguir (VINHOLES, 2015).

Figura 3 – Santos Dumont contornando a torre Eiffel com seu dirigível número 5.



A automação dos dirigíveis não-tripulados é recente e o primeiro registo na literatura científica de um voo deste tipo de veículo data do ano 2000, sendo um projeto luso-brasileiro (PAIVA et al., 2006). Este já gerou diversas publicações, tanto relacionadas a simulações quanto a alguns testes já realizados. Há a expectativa de se usar dirigíveis desenvolvidos a partir de projeto para auxiliar no monitoramento de animais na floresta amazônica (OLIVEIRA, 2018).

Outro projeto e construção de dirigível deste tipo feito no Brasil foi tema de uma tese de doutorado de um oficial do Exército Brasileiro, com o objetivo de detectar minas terrestres durante missões de paz da Organização das Nações Unidas (ONU). O trabalho mostra todo o desenvolvimento do hardware e do ambiente de simulação para verificar o funcionamento do sistema de controle e navegação (VALLE, 2014).

## 1.2 Motivação e objetivos

Os dirigíveis autônomos ainda não são largamente utilizados tal como os VANTs do tipo asa fixa e multirotores, mesmo apresentando grandes vantagens em relação a estes (ELFES et al., 2002).

O presente trabalho tem o objetivo de utilizar um controlador do tipo PID, muito utilizado para no sistema de controle de VANTs, tal como os *firmwares* da família *ArduPilot* (ARDUPILOT, 2020) e comparar os resultados com o controlador do tipo LQR, que é o mais utilizado no controle de dirigíveis (MOUTINHO, 2007).

Outros objetivos, complementares ao descrito acima, são:

- Simular o desempenho do dirígivel com a atuação de rajadas de vento, já que estas estarão sempre presentes nas operações deste veículo ([MOUTINHO, 2007](#));
- Comparar a análise dos modos dinâmicos utilizando os dados aerodinâmicos gerados pelo programa *XFLR5* com métodos paramétricos ([SANTOS, 2018](#));

## 1.3 Organização do texto

A revisão bibliográfica apresenta a modelagem desenvolvida para este trabalho, bem como a simplificação do modelo de seis graus de liberdade para o modelo longitudinal e a descrição do funcionamento dos controladores PID e LQR.

O capítulo de metodologia descreve quais e como são testes a serem feitos para a comparação dos controladores, assim como a motivação para esses.

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com os testes descritos no capítulo anterior e as discussões correlatas.

O capítulo de conclusão fornece uma discussão breve sobre o desempenho de cada controlador, da comparação entre os resultados e sugere uma lista de trabalhos futuros.



## 2 Revisão Bibliográfica

### 2.1 Modelo de 6 graus de liberdade

Para descrever completamente o movimento de uma aeronave, utilizando a consideração de que ela é um corpo rígido, são necessárias doze equações diferenciais, sendo seis delas para definir as velocidades lineares e angulares e outras seis para a posição e orientação do corpo (DURHAM, 2013). Como qualquer modelo, primeiro se estabelecem as considerações utilizadas para montá-lo e porque são plausíveis.

#### 2.1.1 Considerações

- O dirigível é considerado um corpo rígido (o envelope não se deforma durante o voo, pois o voo é de baixa altura);
- Foi desprezada a dinâmica dos atuadores e do sistema de tração e os sensores são considerados ideais;
- A Terra é considerada plana, porque as distâncias percorridas e a altura são pequenas;
- O centro de volume (CV), ponto comumente utilizado para os cálculos de forças e momentos aerodinâmicos atuantes no envelope do dirigível, coincide com o centro geométrico do envelope (ARIAS, 2014);
- Dois sistemas de coordenadas serão utilizados, ambos centrados no CV:
  - Um é o inercial, que é conhecido como "Terra" ou *NED* (*North*, *East* e *Down*)
    - \* O eixo X aponta para o Norte Geográfico (*North*);
    - \* O eixo Y aponta para o Leste (*East*);
    - \* O eixo Z aponta para o centro da Terra (*Down*);
  - Outro fixado no dirigível (também conhecido como "corpo")
    - \* O eixo X aponta para o "nariz" do dirigível;
    - \* O eixo Y aponta para a direita;
    - \* O eixo Z aponta para baixo;
- O plano XZ do referencial fixo ao dirigível é um plano de simetria. Com isso os produtos de inércia  $I_{xy}$  e  $I_{yz}$  são iguais a zero.

### 2.1.2 Cinemática linear e angular

A posição de um corpo rígido é dada pela posição de um ponto específico em seu interior. Geralmente este ponto é o centro de massa do corpo, mas no caso dos dirigíveis, o ponto escolhido é o CV. A cinemática linear é definida pela relação abaixo.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e & \dot{y}_e & \dot{z}_e \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} V_N & V_E & V_D \end{bmatrix}^T \quad (2.1)$$

Sendo,  $x_e$ ,  $y_e$  e  $z_e$  as coordenadas do CV no referencial *NED* e  $V_N$ ,  $V_E$  e  $V_D$  as velocidades do dirigível também neste mesmo referencial.

Para descrever a orientação de um corpo rígido existem várias opções de representação. Uma delas é a matriz de cossenos diretores ([GOMES, 1990](#)) e outra também muito utilizada na modelagem de veículos aeroespaciais são os ângulos de Euler, que relaciona os dois sistemas de coordenadas apresentados no início do capítulo. As equações diferenciais que descrevem a evolução no tempo destes ângulos são apresentadas a seguir, sendo  $p$ ,  $q$  e  $r$  as velocidades angulares em torno dos eixos X, Y e Z do sistema fixo ao dirigível, respectivamente.

$$\dot{\phi} = p + (q \sin(\phi) + r \cos(\phi)) \tan(\theta) \quad (2.2)$$

$$\dot{\theta} = q \cos(\phi) - r \sin(\phi) \quad (2.3)$$

$$\dot{\psi} = (q \sin(\phi) + r \cos(\phi)) / \cos(\theta) \quad (2.4)$$

A matriz dos cossenos diretores pode ser obtida multiplicando as matrizes de rotação relacionadas aos ângulos de Euler. A relação entre elas é mostrada a seguir ([DURHAM, 2013](#)).

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

### 2.1.3 Equações de movimento

A formulação das equações de movimento utilizadas neste trabalho é a Newtoniana assim como a utilizada em ([SANTOS, 2018](#)) que é baseada em ([GOMES, 1990](#)). A formulação Lagrangeana destas equações pode ser vista em ([ARIAS, 2014](#)). Como foi dito nas considerações iniciais, vamos considerar que o dirigível é um corpo rígido, com 6 graus de liberdade, sendo 3 deles para a translação e 3 para rotação. Conforme o proposto por

(GOMES, 1990), estas equações são agrupadas na forma matricial, tal como o apresentado a seguir.

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} & \dot{p} & \dot{q} & \dot{r} \end{bmatrix}^T = \mathbf{A} + \mathbf{G} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_d \quad (2.6)$$

Sendo  $\mathbf{M}$  a matriz de massa generalizada,  $\mathbf{A}$  o vetor das forças e momentos aerodinâmicos,  $\mathbf{F}_d$  o vetor das forças e momentos dinâmicos (inerciais),  $\mathbf{G}$  o vetor das forças e momentos resultantes entre o peso e o empuxo e  $\mathbf{P}$  o vetor das forças e momentos propulsivos.

#### 2.1.4 Matriz de massa generalizada

A modelagem de corpos rígidos necessita além de vários parâmetros os valores de massa do veículo e dos momentos e produtos de inércia. A presença desta matriz se justifica pelas características do movimento do dirigível. Como este desloca um grande volume de ar, é preciso incluir este fenômeno na modelagem (ARIAS, 2014). A matriz de massa generalizada é mostrada a seguir, com base no que é proposto por (GOMES, 1990). Sendo  $m_x$ ,  $m_y$  e  $m_z$ , os fatores de massa virtual em torno dos eixos X, Y e Z do corpo respectivamente,  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  e  $J_{xz}$  os fatores de inércia virtual,  $a_x$  a posição do CG no eixo X e  $a_z$  a posição do CG no eixo Z. Os valores destes parâmetros e como obtê-los são mostrados no Apêndice A.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 & ma_x - X_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & m_y & 0 & -ma_z - Y_{\dot{p}} & 0 & ma_x - Y_{\dot{r}} \\ 0 & 0 & m_z & 0 & -ma_x - Z_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & -ma_z - L_{\dot{v}} & 0 & J_x & 0 & -J_{xz} \\ ma_z - M_{\dot{u}} & 0 & -ma_x - M_{\dot{w}} & 0 & J_y & 0 \\ 0 & ma_x - N_{\dot{v}} & 0 & -J_{xz} & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

#### 2.1.5 Vetor das forças e momentos aerodinâmicos

As forças e momentos aerodinâmicos são modelados de duas maneiras em (SANTOS, 2018). Uma delas utilizou o procedimentos computacionais para gerar um banco de dados aerodinâmico. Outra foi baseada em um artigo (MUELLER, 2004), que utiliza um modelo baseado em parâmetros e as possíveis modificações para estudos posteriores utilizando este são mais intelegíveis. As equações deste modelo são apresentadas a seguir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_a & Y_a & Z_a & L_a & M_a & N_a \end{bmatrix}^T \quad (2.8)$$

$$X_a = \frac{1}{2} \rho V_a^2 [C_{X1} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + C_{X2} \sin(2\alpha) \sin(\frac{\alpha}{2})] \quad (2.9)$$

$$Y_a = \frac{1}{2}\rho V_a^2 [C_{Y1} \cos(\frac{\beta}{2}) \sin(2\beta) + C_{Y2} \sin(2\beta) + C_{Y3} \sin(\beta) \sin(|\beta|) + C_{Y4}(\delta_r)] \quad (2.10)$$

$$Z_a = \frac{1}{2}\rho V_a^2 [C_{Z1} \cos(\frac{\alpha}{2}) \sin(2\alpha) + C_{Z2} \sin(2\alpha) + C_{Z3} \sin(\alpha) \sin(|\alpha|) + C_{Z4}(\delta_e)] \quad (2.11)$$

$$L_a = \frac{1}{2}\rho V_a^2 [C_{L2} \sin\beta \sin|\beta| + l C l_p] \quad (2.12)$$

$$M_a = \frac{1}{2}\rho V_a^2 [C_{M1} \cos(\frac{\alpha}{2}) \sin(2\alpha) + C_{M2} \sin(2\alpha) + C_{M3} \sin(\alpha) \sin(|\alpha|) + C_{M4}(\delta_e) + l C m_q] \quad (2.13)$$

$$N_a = \frac{1}{2}\rho V_a^2 [C_{N1} \cos(\frac{\beta}{2}) \sin(2\beta) + C_{N2} \sin(2\beta) + C_{N3} \sin(\beta) \sin(|\beta|) + C_{N4}(\delta_r) + l C n_r] \quad (2.14)$$

Sendo  $\rho$ , a densidade do ar,  $l$ , o comprimento do dirigível,  $\alpha$  o ângulo de ataque,  $\beta$  o ângulo de derrapagem,  $\delta_e$  a deflexão do profundor e  $\delta_r$  a deflexão do leme. O módulo do vetor velocidade,  $V_a$  é dado pela relação,

$$V_a = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (2.15)$$

Os demais termos são os coeficientes aerodinâmicos e estão descritos no Apêndice A.

### 2.1.6 Vetor das forças e momentos dinâmicos (inerciais)

A formulação Newtoniana é feita em relação a um referencial inercial que deste trabalho é o *NED*. Entretanto, é interessante ter as informações em relação aos eixos do corpo. Devido a essa transformação surgem termos relativos somente à rotação, já que os dois referenciais tem o mesmo centro de coordenadas. Abaixo temos as equações deste vetor.

$$\mathbf{F_d} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6]^T \quad (2.16)$$

Os componentes de cada entrada do vetor são descritos abaixo.

$$f_1 = -m_z w q + m_y r v + m[a_x(q^2 + r^2) - a_z r p] \quad (2.17)$$

$$f_2 = -m_x u r + m_z p w + m[-a_x p q - a_z r p] \quad (2.18)$$

$$f_3 = -m_y v p + m_x q u + m[-a_x r p + a_z(q^2 + p^2)] \quad (2.19)$$

$$f_4 = -(J_z - J_y) r p + J_{xz} p q + m a_z (u r - p w) \quad (2.20)$$

$$f_5 = -(J_x - J_z) p r + J_{xz} p q + m a_z (u r - p w) \quad (2.21)$$

$$f_6 = -(J_y - J_x) q p - J_{xz} q r + m[-a_x(u r - p w)] \quad (2.22)$$



### 2.1.7 Vetor das forças e momentos resultantes entre o peso e o empuxo

Para contrapor a força peso ( $W$ ), o dirigível utiliza a força de empuxo, provocada pela presença de um gás menos denso que o ar dentro do envelope (SANTOS, 2018). A força de empuxo ( $E$ ) segue a relação abaixo, sendo  $\rho$  a densidade do ar,  $V$  o volume do envelope do dirigível e  $g$  a aceleração da gravidade.

$$E = \rho V g \quad (2.23)$$

Estas forças são agrupadas, pois são medidas em relação ao referencial  $NED$  e através da matriz dos cossenos diretores são transformados para o referencial fixo ao dirigível. A seguir segue o vetor com seus componentes.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \lambda_{31}(W - E) \\ \lambda_{32}(W - E) \\ \lambda_{33}(W - E) \\ -\lambda_{32}a_zW \\ (\lambda_{31}a_z - \lambda_{33}a_x)W \\ \lambda_{32}a_xW \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

### 2.1.8 Vetor das forças e momentos propulsivos

Os dirigíveis não-tripulados, em geral, utilizam dois motores com vetorização, para que seja possível realizar uma decolagem vertical. Também é incluído em alguns projetos um motor na aleta vertical inferior para movimentar o dirigível em baixas velocidades, provocando momento de guinada, já que as superfícies de controle (leme e profundor) não são efetivas em baixas velocidades (SEBBANE, 2012).

$$\mathbf{P} = [X_p \ Y_p \ Z_p \ L_p \ M_p \ N_p]^T \quad (2.25)$$

Os componentes de cada entrada do vetor são descritos abaixo.

$$X_p = (P_e + P_d) \cos(\mu) \quad (2.26)$$

$$Y_p = P_t \quad (2.27)$$

$$Z_p = -(P_e + P_d) \sin(\mu) \quad (2.28)$$

$$L_p = (P_e - P_d)d_y \sin(\mu) - P_t d_{fz} \quad (2.29)$$

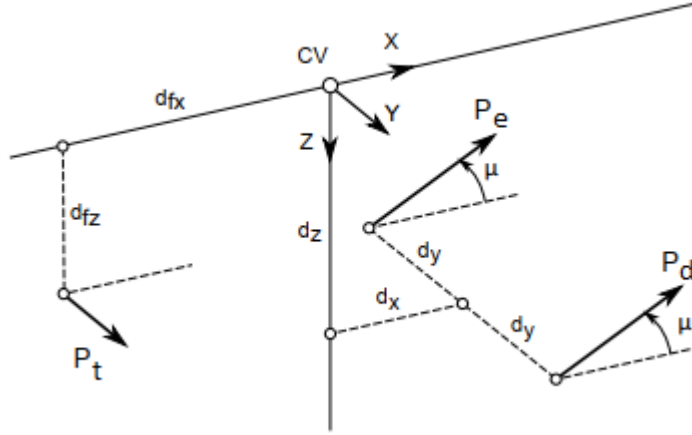
$$M_p = (P_e + P_d)[d_z \cos(\mu) + d_x \sin(\mu)] \quad (2.30)$$

$$N_p = (P_e - P_d)d_y \cos(\mu) + P_t d_{fx} \quad (2.31)$$

Sendo  $P_e$  a tração do motor esquerdo (vendo o dirigível de cima e nariz apontando para frente),  $P_d$  a tração do motor direito,  $P_t$  a tração do motor na cauda,  $d_y$  a distância

dos motores esquerdo e direito em relação ao eixo y,  $d_z$  a distância destes motores para o eixo z,  $d_{fz}$  e  $d_{fx}$  a distância do motor na cauda aos eixos z e x e  $\mu$  é o ângulo de vetorização (sentido anti-horário é o positivo). A figura 5 mostra um diagrama adaptado de (SANTOS, 2018) com as definições acima.

Figura 4 – Diagrama com as definições sobre a propulsão do dirigível



## 2.2 Modelo longitudinal

Para uma análise proposta para este trabalho, foi utilizado o modelo longitudinal, que é uma simplificação do modelo de seis graus de liberdade. A seguir são dadas as considerações para obter as equações deste modelo.

### 2.2.1 Considerações

Além das considerações utilizadas para estabelecer as equações do modelo de seis graus de liberdade, temos também:

- O movimento do dirigível é restrito ao seu plano de simetria;
- O ângulo de derrapagem ( $\beta$ ) é zero;

Com isso, seis equações do modelo de seis graus de liberdade se anulam e com as seis restantes é possível descrever totalmente o movimento do veículo, pois restam três equações para as velocidades e três para a posição e orientação.

Como o movimento é limitado ao eixo de simetria, temos que:

$$\psi = \phi = 0 \quad (2.32)$$

$$\dot{\psi} = \dot{\phi} = 0 \quad (2.33)$$

$$\dot{y}_e = V_E = v = 0 \quad (2.34)$$

$$p = r = 0 \quad (2.35)$$

A matriz de massa generalizada é reduzida, pois duas velocidades angulares e uma linear são iguais a zero. A matriz reduzida é mostrada a seguir.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & ma_z - X_{\dot{q}} \\ 0 & m_z & -ma_x - Z_{\dot{q}} \\ ma_z - M_{\dot{u}} & -ma_x - M_{\dot{w}} & J_y \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Utilizando as considerações acima, temos que as equações das forças e momentos do modelo longitudinal são, sendo T a força de tração em cada motor:

*Forças e momentos dinâmicos:*

$$f1 = -m_z w q + m a_x q^2 \quad (2.37)$$

$$f2 = 0 \quad (2.38)$$

$$f3 = m_x q u + m a_z q^2 \quad (2.39)$$

$$f4 = 0 \quad (2.40)$$

$$f5 = m(-a_x q u - a_z w q) \quad (2.41)$$

$$f6 = 0 \quad (2.42)$$

*Forças e momentos aerodinâmicos:*

$$X_a = \frac{1}{2} \rho V_a^2 [C_{X1} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + C_{X2} \sin(2\alpha) \sin(\frac{\alpha}{2})] \quad (2.43)$$

$$Y_a = 0 \quad (2.44)$$

$$Z_a = \frac{1}{2} \rho V_a^2 [C_{Z1} \cos(\frac{\alpha}{2}) \sin(2\alpha) + C_{Z2} \sin(2\alpha) + C_{Z3} \sin(\alpha) \sin(|\alpha|) + C_{Z4} \delta_e] \quad (2.45)$$

$$L_a = 0 \quad (2.46)$$

$$M_a = \frac{1}{2} \rho V_a^2 [C_{M1} \cos(\frac{\alpha}{2}) \sin(2\alpha) + C_{M2} \sin(2\alpha) + C_{M3} \sin(\alpha) \sin(|\alpha|) + C_{M4}(\delta_e) + l C m_q] \quad (2.47)$$

$$N_a = 0 \quad (2.48)$$

*Forças e momentos produzidos pela resultante entre o peso e o empuxo:*

$$G1 = -(W - B)\text{sen}(\theta) \quad (2.49)$$

$$G2 = 0 \quad (2.50)$$

$$G3 = (W - B)\cos(\theta) \quad (2.51)$$

$$G4 = 0 \quad (2.52)$$

$$G5 = (-a_z\text{sen}(\theta) - a_x\cos(\theta))W \quad (2.53)$$

$$G6 = 0 \quad (2.54)$$

*Forças e momentos propulsivos:*

$$X_p = 2T\cos(\mu) \quad (2.55)$$

$$Y_p = 0 \quad (2.56)$$

$$Z_p = -2T\text{sen}(\mu) \quad (2.57)$$

$$L_p = 0 \quad (2.58)$$

$$M_p = 2T(d_z\cos(\mu) + d_x\text{sen}(\mu)) \quad (2.59)$$

$$N_p = 0 \quad (2.60)$$

*Cinemática linear e angular:*

$$\dot{x}_e = u\cos(\theta) - w\text{sen}(\theta) \quad (2.61)$$

$$\dot{z}_e = u\text{sen}(\theta) + w\cos(\theta) \quad (2.62)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (2.63)$$

## 2.3 Controladores

### 2.3.1 Controlador do tipo PID

A sigla PID significa Proporcional Integral Derivativo. O objetivo deste tipo de controlador é manter uma determinada quantidade num valor de referência, mesmo com perturbações. São utilizadas 3 tipos de ações de controle diferentes, cada uma sendo ponderada por um valor chamado ganho (BEARD, 2012). Abaixo um exemplo de um modelo de implementação.

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.64)$$

Sendo  $u(t)$  a variável de controle,  $e(t) = y^c(t) - y(t)$  o erro entre a referência  $y^c(t)$  e o valor atual da variável de saída  $y(t)$  e as constantes  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$  são os ganhos.

### 2.3.2 Controlador do tipo LQR

A sigla *LQR* vem do idioma inglês e significa Regulador Quadrático Linear. Este tipo de controlador pertence a uma classe que se baseia na teoria do Controle Ótimo. Neste caso, o foco está em controlar o sistema de forma o funcional mostrado a seguir.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (2.65)$$

Sendo  $\mathbf{x}$  o vetor dos estados do sistema a ser controlado,  $\mathbf{u}$  o vetor de controle e  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  são matrizes de pesos, relacionada aos estados e controles, respectivamente.

Através da minimização do funcional, é possível obter um ganho ótimo  $\mathbf{K}$ , tal que  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{y}$ . No caso de um sistema com múltiplos estados e entradas, como é o caso deste trabalho, este ganho se torna uma matriz e é obtido resolvendo a equação algébrica de Ricatti (LEWIS FRANK L.; STEVENS, 2015). Neste trabalho foi utilizada a função *lqr* do *software* MATLAB<sup>®</sup> para obter a matriz de ganhos  $\mathbf{K}$  a partir das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , sendo estas obtidas da linearização do modelo em torno de um ponto de equilíbrio.



## 3 Metodologia

### 3.1 Linearização

#### 3.1.1 Trimagem

Para realizar a linearização do modelo não-linear, foi feito um código para determinar os comandos (força de tração, ângulo de vetorização e a deflexão do profundor) para uma dada condição dos estados do dirigível. O código é o `long_trim.m` e está no Apêndice B. As condições utilizadas neste trabalho para a execução deste programa são apresentadas abaixo.

- $u = 6 \cos 1^\circ = 5,999 \text{ m/s}$
- $w = 6 \sin 1^\circ = 0,105 \text{ m/s}$
- $\theta = 1^\circ = 0,0175 \text{ rad}$
- $h(-z_e) = x_e = 0$

Os valores dos comandos encontrados para os valores dos estados informados anteriormente são mostrados a seguir.

- $T = 4,4464 \text{ N}$ ;
- $\delta_e = -2,2535^\circ$
- $\mu = 1,6221^\circ$

#### 3.1.2 Autovalores e modos do modelo longitudinal

Para obter os autovalores do modelo longitudinal, foram utilizadas as condições mostradas na seção anterior e o código `jac.m`, que se encontra no Anexo A, para gerar a matriz A, mostrada a seguir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.2453 & 0.5470 & 0.2739 & 0.0371 & 0 & 0 \\ 0.0063 & -0.1298 & 0 & 3.4996 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0080 & -1.4074 & -0.7193 & -0.5989 & 0 & 0 \\ 0.9998 & 0.0175 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0175 & -0.9998 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Os autovalores não-nulos obtidos são mostrados a seguir, juntamente com a nomenclatura dada a cada um na literatura. Vale salientar que são semelhantes aos que foram encontrados neste trabalho (GOMES, 1990), tido como uma das maiores referências com relação à dinâmica de voo de dirigíveis.

- $Surge = -0,0163$
- $Pitch\ subsidence = -0,2421$
- $Pendulum = -0,3428 \pm 2,3638i$

A seguir será feita uma explicação breve sobre cada modo, sua relação com cada pólo, os estados mais influenciados e as possíveis explicações físicas para sua existência. Para informações mais detalhadas sobre este assunto (GOMES, 1990) e (GILLET, 1999) são boas referências.

O modo *surge* é relacionado à velocidade linear  $u$  e pode ser excitado com um degrau na força de tração do motor. O comportamento da velocidade é semelhante a resposta ao degrau de um sistema linear de primeira ordem.

O modo *pitch subsidence* está relacionado ao pólo real mais negativo. O estado mais influenciado por este modo é a velocidade linear  $w$ . Uma explicação interessante para ele é o arrasto e o grande volume de ar deslocado ao acelerar o dirigível ao longo do eixo  $Z$  do sistema de coordenadas fixo ao "corpo".

O único modo com pólos imaginários é o *pendulum*. Os estados mais relacionados a ele são o ângulo e a velocidade de arfagem. Uma possível explicação física para este modo é o fato de que o CG está abaixo do CV.

## 3.2 Sintonia dos controladores

Os controladores utilizados neste trabalho foram sintonizados utilizando o método de tentativa e erro, permitindo assim obter resultados mais rapidamente e a análise mais detalhada, de como cada um dos ganhos de cada controlador afeta o voo do dirigível. É importante destacar que a vetorização foi considerada constante em todos os testes, pois sua função principal é auxiliar a decolagem e pouso na vertical e a análise deste trabalho lida com o voo já em fase de cruzeiro.

### 3.2.1 Controladores do tipo PID

Em um código foram utilizados dois controladores PID, sendo um correlacionando a deflexão do profundor à altitude do dirigível e o outro a velocidade e a tração. No primeiro caso o controlador é do tipo PID e seus ganhos são os seguintes:

- $K_p = 0,1752$



- $K_i = 0,0001113$
- $K_d = 0,6897$

No segundo, o controlador é do tipo PI e seus ganhos são os seguintes:

- $K_p = 1,9943$
- $K_i = 0,82755$

### 3.2.2 Controlador do tipo LQR

Os ganhos neste tipo de controlador são organizados na forma de matrizes quadradas, que em geral são diagonais. Os elementos da diagonal da matriz  $Q$ , relacionada aos estados do sistema a ser controlado, são apresentados abaixo, juntamente com o estado relacionado:

- $Q_{11} = 1$  - Velocidade linear  $u$
- $Q_{22} = 1$  - Velocidade linear  $w$
- $Q_{33} = 10$  - Ângulo de arfagem ( $\theta$ )
- $Q_{44} = 10$  - Velocidade angular de arfagem ( $q$ )
- $Q_{55} = 1$  - Posição horizontal ( $x_e$ )
- $Q_{66} = 1000$  - Altitude ( $h$ )

Com relação à matriz  $R$ , temos apenas dois elementos, pois a vetorização é mantida constante. A seguir estão os valores dos ganhos juntamente com a variável de controle relacionada.

- $R_{11} = 0,1$  - Força de tração ( $T$ )
- $R_{22} = 10$  - Deflexão do profundor ( $\delta_e$ )

## 3.3 Testes

Serão feitos alguns testes em dois códigos desenvolvidos em MATLAB/Simulink, sendo cada um utilizando um tipo de controlador.

Em VANTs em geral os parâmetros mais utilizados para o controle são a altitude, módulo do vetor velocidade e o ângulo de guinada (BEARD, 2012). Para o presente trabalho, o estado a serem avaliados é a altitude, principalmente.

Os testes podem ser divididos em dois grupos. O primeiro são os feitos com base em uma referência para a altitude na forma de rampa, simulando o que poderia ser um voo entre *waypoints* (BEARD, 2012). Os casos analisados são apresentados a seguir, saindo da altitude zero até 10 metros.

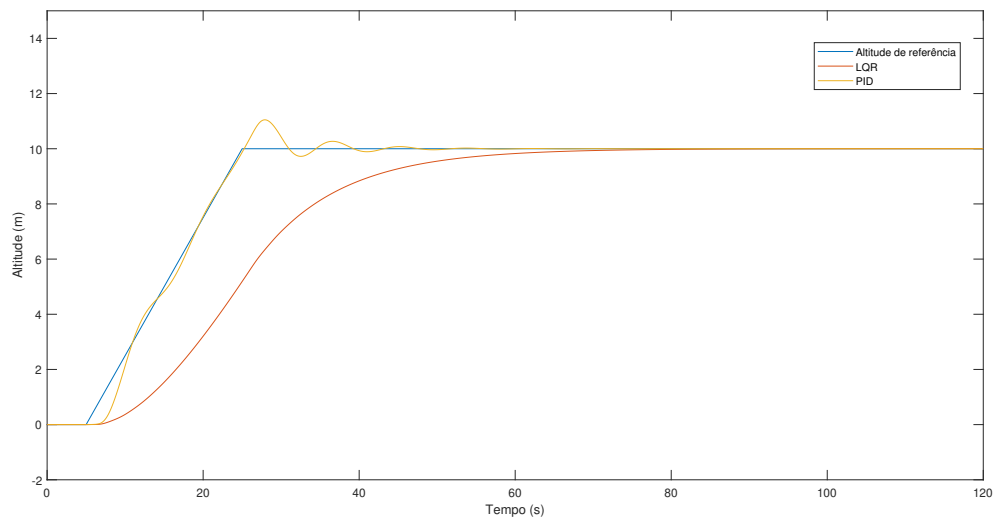
- Subida leve, com uma razão de subida de 0,5 m/s;
- Subida íngreme, com uma razão de subida de 1 m/s;

Outro grupo de testes envolveu a aplicação de rajadas de vento de 2 m/s, durante o intervalo de tempo de 5 segundos, após 5 segundos do início da simulação. Foram criadas rajadas de três tipos: na horizontal, paralelamente ao eixo X do referencial fixo ao dirigível, vertical (paralelo ao eixo Z) e de forma oblíqua, considerando que as velocidades das componentes nos eixos X e Z são iguais e o módulo é igual à 2 m/s.

## 4 Resultados e discussão

Os primeiros resultados a serem apresentados são os relacionados ao primeiro grupo citado no capítulo anterior.

Figura 5 – Comparativo entre os controladores para uma referência do tipo rampa leve



Na figura 6, vemos que o modelo com os controladores PID consegue seguir a rampa de referência, mesmo apresentando um comportamento oscilatório durante a subida e também ao se aproximar à altitude final, oscilando em torno desta até se estabilizar. Já o modelo com o controlador LQR faz com que o dirigível tenha uma curva de subida bem suave, entretanto este atingiu a nova condição de equilíbrio aproximadamente 40 segundos depois que o outro modelo alcançou pela primeira vez a altitude de referência.

Na figura 7 a subida se torna mais rápida e a rampa é mais íngreme do que na figura anterior. O comportamento de ambos os modelos é semelhante, com a observação de que o modelo com os controladores PID apresenta mais oscilações ao se aproximar da nova condição de equilíbrio especialmente no valor do sobressinal e também o início da subida percebe-se que o dirigível demora alguns segundos até se estabelecer na rampa. No caso do modelo com o controlador LQR é possível perceber que mesmo que a curva continue suave, tal como na figura 6, a subida é alguns segundos mais rápida, no entanto há uma demora significativa até alcançar a nova posição de equilíbrio.

O comportamento do dirigível em relação aos três tipos de rajadas, apresentadas na seção de testes do capítulo anterior, é mostrado nas figuras 8, 9 e 10. As curvas em cor laranja são do sistema com os controladores PID e as de cor azul são do que contém o controlador LQR.

Figura 6 – Comparativo entre os controladores para uma referência do tipo rampa íngreme

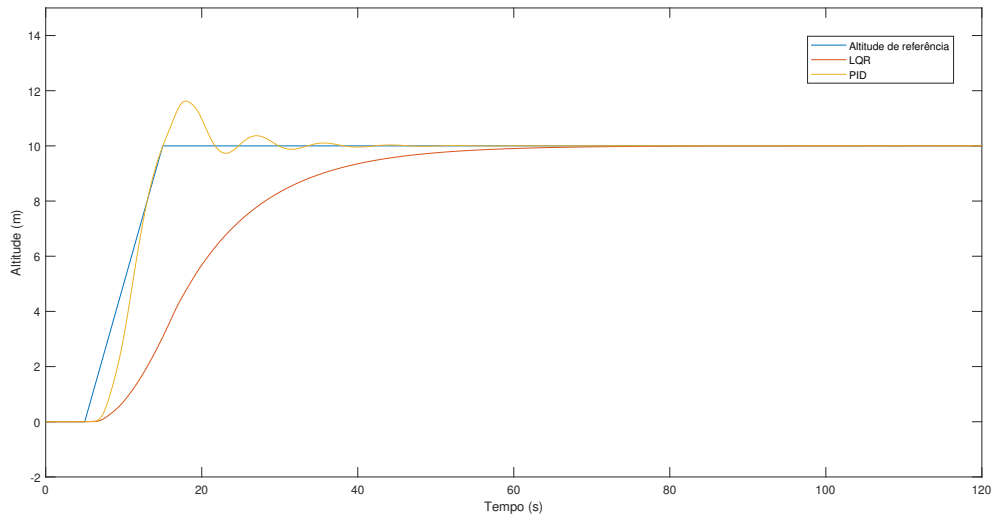
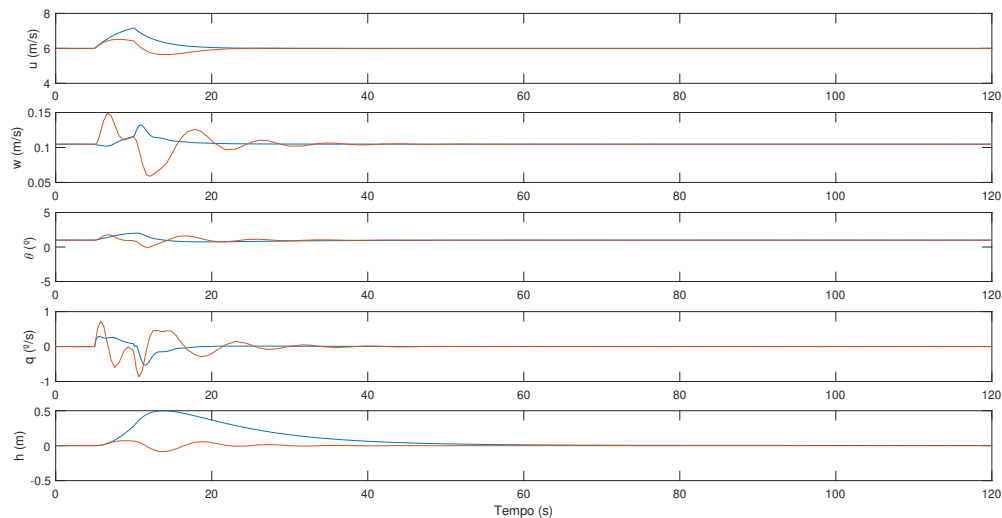
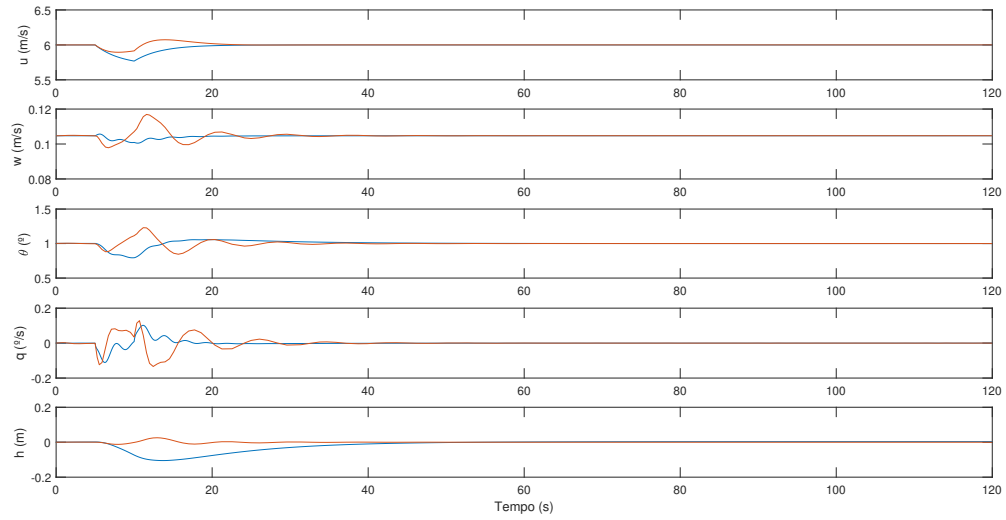


Figura 7 – Rajada horizontal



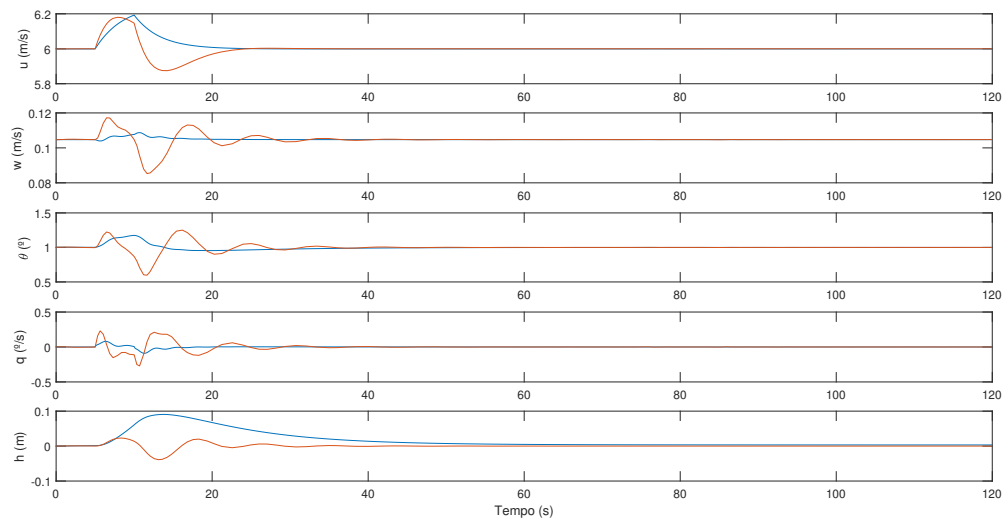
No caso da rajada horizontal é possível ver que o comportamento do modelo com os controladores PID apresenta oscilações, de forma semelhante ao que foi observado nos dois testes de subida. O modelo com o controlador LQR se mostrou sem oscilações, com curvas suaves, também de forma semelhante aos testes mostrados anteriormente. Um detalhe a ser destacado é que houve um aumento de altitude expressivo após a rajada, se estabilizando após 50 segundos aproximadamente.

Figura 8 – Rajada vertical



O comportamento dos dois modelos na simulação com a rajada vertical é semelhante ao apresentado na figura 8. A exceção está na oscilação da velocidade angular  $q$  no modelo com o controlador LQR, que pode ter ocorrido devido à característica desta rajada.

Figura 9 – Rajada oblíqua



Na figura 10 temos uma aparente combinação entre os dois casos avaliados anteriormente. É possível perceber que o modelo com os controladores PID oscila mais do que o outro modelo, que apresenta pequenas oscilações na velocidade linear  $w$  e angular  $q$ .



## 5 Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo fazer uma comparação entre dois tipos de controladores sendo aplicados a um modelo longitudinal não-linear de um dirigível não-tripulado. Também foi feita uma explicação sobre os modos de movimento deste modelo, já que estes são diferentes dos aviões não-tripulados de asa fixa (BEARD, 2012), por exemplo.

Um modelo utilizou dois controladores PID, sendo um PI que usa a deflexão do profundor para controlar a altitude do dirigível e outro PID que utiliza a tração para controlar a velocidade linear  $u$ . O desempenho deste modelo foi satisfatório, principalmente observando nos casos em que foram simuladas subidas, seguindo bem a rampa de referência. Entretanto houve oscilação depois de atingir a altitude de referência até que o dirigível atingisse uma nova condição de equilíbrio.

Outro modelo utilizou um controlador LQR, que precisou ser modificado para ser aplicado a um modelo não-linear. Assim como no modelo anterior, este conseguiu atingir uma nova condição de equilíbrio nos testes, no entanto em um intervalo de tempo maior. Também foi possível perceber que os movimentos do dirigível foram mais suaves e sem oscilações como houve no outro modelo.

Com base nos testes deste trabalho foi possível inferir que ambos controladores conseguem controlar o dirigível em condições normais como uma subida entre *waypoints* e depois de sofrer uma perturbação como uma rajada de vento durante um certo intervalo de tempo. Em geral, o modelo com os controladores PID se mostrou mais rápido para seguir a referência do que o que utilizou o controlador LQR. Isto pode ter ocorrido devido à atual configuração de ganhos. Uma pesquisa mais ampla de como cada um dos ganhos em cada tipo de controlador influencia o voo do dirigível é sugerida como um trabalho futuro.

### 5.1 Trabalhos futuros

Para trabalhos com temática semelhante a esse, são propostos alguns temas para trabalhos futuros:

- Fazer uma comparação entre sistemas de navegação;
- Fazer uma validação com base em ensaios em voo dos resultados obtidos nas simulações;
- Incluir a vetorização no sistema de controle;

- Fazer uma análise de como cada um dos ganhos dos controladores PID e LQR influenciam o voo do dirigível;



# Referências

- ARDUPILOT. [S.l.], 2020. Disponível em: <<https://ardupilot.org>>. Citado na página 16.
- ARIAS, R. R. M. *Modelagem de um dirigível robótico com propulsão elétrica de quatro motores*. Campinas: [s.n.], 2014. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 42.
- BEARD, T. W. M. R. W. *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. [S.l.]: Princeton University Press, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 26, 31 e 37.
- CANALLE, R. M. V. e J. B. G. Bartolomeu lourenço de gusmão: o primeiro cientista brasileiro. *Revista Brasileira de Física*, v. 31, Setembro 2009. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 15.
- DURHAM, W. *Aircraft Flight Dynamics and Control*. Chichester, Inglaterra: Wiley, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- ELFES, A. et al. Modelling, control and perception for an autonomous robotic airship. In: *Lecture Notes in Computer Science: Sensor Based Intelligent Robots*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 216–244. ISBN 3-540-43399-6. Citado na página 16.
- GILLET, G. A. K. e J. D. *Airship Technology*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1999. Citado na página 30.
- GOMES, S. B. V. *An Investigation of the Flight Dynamics of Airships with Application to the YEZ-2A*. Tese (Doutorado) — Cranfield Institute of technology, Cranfield, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 20, 21 e 30.
- HANGAR33. *JACQUES CHARLES E OS IRMÃOS MONTGOLFIER: OS PRECURSORES DO VOO MAIS LEVE DO QUE O AR*. 2015. Disponível em: <<http://blog.hangar33.com.br/jacques-charles-e-os-irmaos-montgolfier-os-precursores-do-voo-mais-leve-do-que-o-ar/>>. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 15.
- LEWIS FRANK L.; STEVENS, B. L. *Aircraft control and simulation : dynamics, controls design, and autonomous systems*. Terceira edição. [S.l.]: Wiley-Blackwell, 2015. Citado na página 27.
- MOUTINHO, A. *Modeling and nonlinear control for airship autonomous flight*. Tese (Doutorado) — Instituto Superior Técnico, 12 2007. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- MUELLER, J. J. Development of an aerodynamic model and control law design for a high altitude airship. *AIAA 3rd "Unmanned Unlimited" Technical Conference, Workshop and Exhibit*, v. 1, p. 1–17, Setembro 2004. Citado na página 21.
- OLIVEIRA, M. de. *Dirigível sobre a floresta*. 2018. Disponível em: <<https://revistapesquisa.fapesp.br/dirigivel-sobre-a-floresta/>>. Citado na página 16.
- PAIVA, E. C. de et al. Project aurora: Infrastructure and flight control experiments for a robotic airship. *Journal of Field Robotics*, v. 23, n. 3-4, p. 201–222, 2006. Citado na página 16.

SANTOS, J. S. *Modeling, Identification and Control of a Tethered Airship*. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 17, 20, 21, 23, 24 e 41.

SEBBANE, Y. B. *Lighter than Air Robots: Guidance and Control of Autonomous Airships*. 1. ed. [S.l.]: Springer Netherlands, 2012. (Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering 58). Citado 2 vezes nas páginas 23 e 42.

VALLE, R. C. do. *Modelagem, controle e desenvolvimento do protótipo de um dirigível com aplicação em detecção de minas terrestres*. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Rio de Janeiro, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 41.

VINHOLES, T. *Conheça as máquinas voadoras de Santos Dumont*. 2015. Disponível em: <<https://www.airway.com.br/conheca-as-maquinas-voadoras-de-santos-dumont/>>. Citado na página 16.

# APÊNDICE A – Modelo do dirigível não-tripulado

## A.1 Parâmetros gerais

O modelo utilizado neste trabalho utiliza como base os parâmetros do dirigível utilizados em (SANTOS, 2018), com exceção do momento de inércia  $I_{yy}$ , que foi retirado de (VALLE, 2014). A posição do CG e dos motores foram definidas pelo autor devido à ausência deste tipo de informação nos dois trabalhos citados anteriormente. Também foi definido pelo autor que o peso do dirigível foi considerada igual a força de empuxo.

Parâmetro	Valor	Unidade SI
Semi-eixo menor	3,13	m
Semi-eixo maior	3,37	m
Comprimento do envelope	6,5	m
Maior diâmetro do envelope	1,65	m
Massa do dirigível	11,356	Kg
Momento de inércia $I_{yy}$	50,29	kg m <sup>2</sup>
Volume do envelope	9,27	m <sup>3</sup>
Posição do CG no eixo Z	0,413	m
Posição do CG no eixo X	0	m
Posição dos motores no eixo Z	0,825	m
Posição dos motores no eixo X	0	m

## A.2 Coeficientes aerodinâmicos

Os coeficientes aerodinâmicos utilizados foram os mesmos obtidos em (SANTOS, 2018), os quais são descritos na tabela a seguir.

Coeficiente aerodinâmico	Valor
$C_{X1}$	-0.4054
$C_{X2}$	1.0624
$C_{Z1}$	1.0624
$C_{Z2}$	-1.3380
$C_{Z3}$	-5.5606
$C_{Z4}$	-0.2896
$C_{M1}$	-4.6638
$C_{M2}$	-7.1851
$C_{M3}$	-21.4411
$C_{M4}$	-1.5549
$Cm_q$	-0.259

### A.3 Fatores de massa e inércia virtuais

Devido ao grande volume de ar deslocado no movimento do dirigível, bem como a massa quando comparada a do veículo. Por isso, nos casos em que há aceleração é preciso incluir os fatores de massa e inércia virtuais no modelo do dirigível ([ARIAS, 2014](#)).

Para calcular os fatores de massa e inercial virtual são utilizadas algumas relações, que são mostradas a seguir, baseadas nos parâmetros geométricos do dirigível, sendo  $a_1$  e  $a_2$ , as medidas dos eixos maior e menor do envelope do dirigível.

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (\text{A.1})$$

$$e = \sqrt{1 - (b/a)^2} \quad (\text{A.2})$$

$$a_0 = \frac{2(1 - e^2)}{e^3} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1 + e}{1 - e} - e \right) \quad (\text{A.3})$$

$$b_0 = \frac{1}{e^2} - \left( \frac{1 - e^2}{2e^3} \ln \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right) \right) \quad (\text{A.4})$$

Posteriormente são calculados os valores conhecidos como "fatores de Lamb" ([SEBBANE, 2012](#)).

$$k_1 = \frac{a_0}{2 - a_0} \quad (\text{A.5})$$

$$k_2 = \frac{b_0}{2 - b_0} \quad (\text{A.6})$$

$$k_3 = \frac{e^4(b_0 - a_0)}{(2 - e^2)(2e^2 - (2 - e^2)(b_0 - a_0))} \quad (\text{A.7})$$

Outro parâmetro importante a ser calculado é a massa de ar que é deslocada devido ao volume do envelope, que denominamos  $m_{ar}$ . Ela pode ser calculada a partir da relação mostrada a seguir, sendo  $\rho$  a densidade do ar e  $V$  o volume do envelope.

$$m_{ar} = \rho V \quad (\text{A.8})$$

O momento de inércia da massa de ar em torno do eixo Y ( $Iy_{ar}$ ) do corpo deslocada também é calculado e a relação para obtê-lo é apresentada a seguir, sendo  $L$  o comprimento do dirigível e  $D$  o maior diâmetro do envelope.

$$Iy_{ar} = m_{ar}(L^2 + D^2)/20 \quad (\text{A.9})$$

Após os cálculos acima é possível obter os fatores de massa ( $m_x$  e  $m_z$ ) e de inércia ( $J_y$ ) virtuais, que são calculados a partir das relações a seguir, sendo  $m$  a massa do dirigível.

$$m_x = m + k_1 m_{ar} \quad (\text{A.10})$$

$$m_z = m + k_2 m_{ar} \quad (\text{A.11})$$

$$J_y = I_y + k_3 Iy_{ar} \quad (\text{A.12})$$

$$(\text{A.13})$$



## APÊNDICE B – Código long\_trim.m

```

clear all
%% Programa de trimagem do modelo longitudinal
global xtrim utrim

dec0 = zeros(3, 1);
dectrim = fsolve(@trim_fun, dec0);
xtrim = dec2x(dectrim);
utrim = dec2u(dectrim);

function x = dec2x(dec)
alpha = pi/180; % VARIÁVEL DE DECISÃO
gamma = 0; % VARIÁVEL DE DECISÃO (VALOR PADRÃO: ZERO!)
theta = alpha + gamma;
VT = 6; % VARIÁVEL DE DECISÃO
U = VT*cos(alpha);
W = VT*sin(alpha);
q = 0;
xe = 0; % Não importa
h = 0; % Não importa

x = [U; W; theta; q; xe; h];
end

function u = dec2u(dec)
T = dec(1);
mi = dec(2);
de = dec(3);

u = [T; mi; de];
end

function err = xdot2err(xdot)
err = xdot([1,2,4]);
end

```

```
function err = trim_fun(dec)
x = dec2x(dec);
u = dec2u(dec);
xdot = xdot_long(x, u);
err = xdot2err(xdot);
end
```



## APÊNDICE C – Código long\_linear.m

```

clear all; close all
%% Linearização do modelo longitudinal
% Executar o código long_trim.m antes deste código
r2d = 180/pi;
global utrim xtrim
% Condições iniciais dos estados
xref = xtrim;
% Condições iniciais das entradas
uref = utrim;

% Função utilizada para a linearização em torno do ponto de equilíbrio
fx = @(x) xdot_long(x,uref);
fu = @(u) xdot_long(xref,u);

% Matrizes jacobianas
A = jac(fx,xref);
B = jac(fu,uref);

% Matriz reduzida p/ o controlador LQR, excluindo a vetorização
B_lqr = [B(:,1), B(:,3)];

% Calculo da matriz de ganhos do controlador do tipo LQR
Q = eye(6); % Matriz de pesos dos estados
Q(6,6) = 1000;
Q(3,3) = 10;
Q(4,4) = 10;
R = eye(2); % Matriz de pesos dos controles
R(1,1) = 0.01;
R(2,2) = 10;
[K_lqr] = lqr(A,B_lqr,Q,R)

```



## APÊNDICE D – Código xdot\_long.m

```

function xd = xdot_long(x, u)
%% Modelo longitudinal do dirigível

%% Estados
U = x(1); % Velocidade linear no eixo x
W = x(2); % Velocidade linear no eixo y
theta = x(3); % Ângulo de arfagem
q = x(4); % Velocidade angular de arfagem
xe = x(5);
h = x(6);

%% Entradas
T = u(1); % Força de tração de cada motor (Newtons)
mi = u(2); % Ângulo da vetorização (graus)
de = u(3); % Deflexão do profundor (graus)

d2r = pi/180; % Conversão de graus para radianos
mi_r = mi*d2r;
de_r = de*d2r;

%% Parâmetros gerais
g = 9.81; % Aceleração da gravidade
rho = 1.225; % Densidade do ar

%% Parâmetros do dirigível
a1 = 3.13; %Semi-eixo menor
a2 = 3.37; %Semi-eixo maior
L = a1 + a2; %Comprimento do envelope
D = 1.65; %Maior diâmetro do envelope
Iy = 50.29; %Momento de inércia em torno do eixo Y
b = D/2; % Variável auxiliar
Vol = (2/3)*pi*(a1+a2)*(b^2); %Volume do envelope
m = rho*Vol; %Massa do dirigível
az = D/4; %Posição do CG no eixo Z
dz = D/2; %Posição dos motores no eixo Z

```

```

%% Matriz de massa
% Variáveis auxiliares
a = (a1 + a2)/2;
e = sqrt(1 - (b/a)^2);
a0 = 2*((1-e^2)/e^3)*(.5*log((1+e)/(1-e))-e);
b0 = 1/e^2 - (((1-e^2)/(2*e^3))*log((1+e)/(1-e)));

% Fatores de massa e inércia virtual
k1 = a0/(2-a0);
k2 = b0/(2-b0);
k3 = ((e^4)*(b0-a0))/((2-e^2)*(2*e^2-(2-e^2)*(b0-a0)));

Vol = (2/3)*pi*(a1+a2)*(b^2); %Volume do envelope
m_ar = rho*Vol; % Massa de ar equivalente ao volume do envelope
Iy_ar = m_ar*(L^2 + D^2)/20; % Momento de inércia da massa de ar entorno do eixo Y

X_udot = -k1*m_ar;  mx = m - X_udot;
Z_wdot = -k2*m_ar;  mz = m - Z_wdot;
M_qdot = -k3*Iy_ar; Jy = Iy - M_qdot;

M = [mx 0 m*az; 0 mz 0; m*az 0 Jy]; %Matriz de massa

%% Forças e momento dinâmicos
f1 = -mz*W*q;
f2 = mx*q*U + m*az*q^2;
f3 = -az*W*q;
Fd = [f1; f2; f3];

%% Forças e momento aerodinâmicos
VT = sqrt(U^2 + W^2); %Velocidade total
alpha = atan(W/U); %Ângulo de ataque

%Coeficientes aerodinâmicos
CX1 = -0.4054;
CX2 = 1.0624;

CZ1 = 1.0624;
CZ2 = -1.3380;

```

---

```
CZ3 = -5.5606;
CZ4 = -0.2896;
```

```
CM1 = -4.6638;
CM2 = -7.1851;
CM3 = -21.4411;
CM4 = -1.5549;
Cmq = -0.259;
```

```
Xa = .5*rho*VT^2*(CX1*cos(alpha)^2 + CX2*sin(2*alpha)*sin(alpha/2));
Za = .5*rho*VT^2*(CZ1*(cos(alpha/2))*sin(2*alpha) + CZ2*sin(2*alpha) + CZ3*sin(alpha/2));
Ma = .5*rho*VT^2*(CM1*(cos(alpha/2))*sin(2*alpha) + CM2*sin(2*alpha) + CM3*sin(alpha/2));
A = [Xa; Za; Ma];
```

```
%% Vetor de peso e empuxo
```

```
Wgt = m*g; %Peso do dirigível
B = rho*Vol*g; %Empuxo do dirigível
```

```
G1 = -(Wgt-B)*sin(theta);
G2 = (Wgt-B)*cos(theta);
G3 = -az*Wgt*sin(theta);
G = [G1; G2; G3];
```

```
%% Forças e momento propulsivos
```

```
Xp = 2*T*cos(mi_r);
Zp = -2*T*sin(mi_r);
Mp = 2*T*dz*cos(mi_r);
P = [Xp; Zp; Mp];
```

```
%% Equações de trajetória
```

```
gamma = theta - alpha;
xe_dot = VT*cos(gamma);
hdot = VT*sin(gamma);
```

```
thetadot = q; % Derivada do ângulo de arfagem
```

```
uwqdot = M\ (A + G + P + Fd);
udot = uwqdot(1);
wdot = uwqdot(2);
```

```
qdot = uwqdot(3);  
  
xd = [udot; wdot; thetadot; qdot; xe_dot; hdot];  
end
```

## ANEXO A – Código jac.m

```
function J = jac(h, zref)
% Calcula matriz jacobiana por diferencias finitas

delta = 1e-7;
href = h(zref);

nh = length(href);
nz = length(zref);

J = zeros(nh, nz);
for j = 1:nz
    z_pert = zref;
    z_pert(j) = zref(j) + delta;

    h_pert = h(z_pert);
    J(:, j) = (h_pert - href) / delta;
end
```